



ОБРАТНЫЕ БИФУРКАЦИИ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ РЕССЛЕРА

Л.Б. Ряшко, П.В. Стихин

На примере нелинейной модели Ресслера рассматривается эффект воздействия случайных возмущений на предельные циклы динамической системы. После того как интенсивность шума становится достаточно большой, наблюдается размытие детерминированного цикла. В данной работе исследуются обратные бифуркации уменьшения кратности стохастических циклов при росте уровня случайных возмущений. Представлен анализ эмпирических плотностей распределения точек пересечения пучка случайных траекторий с секущими плоскостями детерминированной орбиты. Теоретический подход к анализу обратных бифуркаций использует аппарат функций чувствительности. Строится достаточно простая аппроксимация эмпирической плотности распределения. Находятся бифуркационные значения для параметра интенсивности случайных возмущений.

Введение

Присутствие случайных возмущений в динамических системах и связанные с этим многочисленные эффекты рассматривались в большом количестве работ [1-4]. Обзор некоторых последних результатов можно найти в [5, 6].

Среди эффектов воздействия шума на поведение динамических систем можно выделить две группы. К первой группе относятся явления сдвига бифуркационных линий в пространстве параметров за счет шума [7-9]. Другая группа явлений связана с понятием индуцированных шумом переходов (noise-induced transitions) [10, 11]. Как описывается в [11], внешние шумы, несмотря на свое, казалось бы, дезорганизующее действие, способны индуцировать гораздо более богатое разнообразие режимов в сравнении с детерминированными системами. Впервые явление индуцированного шумом перехода при рассмотрении флуктуаций в автогенераторе описано в работе Р.Л. Стратоновича и П.С. Ланды [12]. Из последующих работ, посвященных данной тематике, можно отметить [11, 13-16].

Для динамических систем, имеющих устойчивые предельные циклы, воздействие случайных возмущений приводит к тому, что траектории, стартующие из точек орбиты цикла, начинают отклоняться от детерминированной орбиты, формируя вокруг нее некоторый пучок.

Размытие каскада бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу под воздействием шума рассматривалось для одномерных отображений в [8, 9, 17, 18]. Обзор можно найти в [3]. Размытие предельных циклов под воздействием случайных возмущений и установление хаотического режима колебаний для осцилляторов Чуа, Лоренца и Ресслера изучалось в [19, 20].

В данной работе рассматривается система Ресслера [21] в диапазоне каскада бифуркаций удвоения периода. Изучается поведение пучков случайных траекторий данной системы при увеличении интенсивности случайных возмущений. При помощи прямого численного моделирования показано, что с увеличением уровня шума части пучка случайных траекторий на соседних участках орбиты сначала начинают пересекаться, а затем, при некоторой так называемой критической интенсивности случайных возмущений, полностью сливаются. При соответствующих критических значениях интенсивности возмущений стохастический 2-цикл превращается в 1-цикл, стохастический 4-цикл – в 2-цикл и т.д. Такое превращение стохастического 2^k -цикла в 2^{k-1} -цикл, связанное с увеличением интенсивности шума, в данной работе будем называть обратной стохастической бифуркацией.

Феноменологический и динамический подходы к формализации интуитивного понятия стохастических бифуркаций обсуждались в [5] и [22]. Стохастические бифуркации, возникающие при определенных уровнях внешних возмущений, подробно рассмотрены для одномерного случая в [11, 23-25] и для динамических систем на плоскости в [22, 25-27]. В работах [22, 26] обсуждается влияние шума на бифуркацию Хопфа. В [22] изучается изменение поведения стационарной плотности распределения под воздействием случайных возмущений.

В данной статье механизм обратных бифуркаций для стохастических (3-мерных) аттракторов Ресслера изучается при помощи функций плотности распределения точек пересечения пучка с опорными плоскостями. Излагаются эмпирический и теоретический подходы. В теоретическом подходе используется аппарат функций чувствительности [28-30].

В пунктах 1.1 и 1.2 представлены циклы детерминированной и стохастической систем Ресслера в зоне удвоения периода. Подробный анализ можно найти в [31].

В пункте 1.3 статьи дается краткое описание функций стохастической чувствительности для общей нелинейной динамической системы со случайными возмущениями, в основе которого лежит метод квазипотенциала. Функция, называемая квазипотенциалом, появилась в связи с решением задачи Колмогорова о выходе случайной траектории из окрестности устойчивой точки покоя [32-34]. Функция чувствительности, задавая аппроксимацию квазипотенциала [35] в случае малых шумов и малых отклонений от невозмущенной орбиты, позволяет описать разброс случайных траекторий в пучке [30-31].

В пункте 2.1 обратные стохастические бифуркации системы Ресслера исследуются при помощи прямого численного моделирования. Рассматриваются эмпирические плотности распределения случайных траекторий вокруг детерминированного цикла для разных значений параметра и разных участков орбиты. Наблюдается сли-

яние всплесков плотностей распределения в один при росте интенсивности возмущений. Обсуждается задача отыскания критических значений интенсивности шума, отвечающих обратным бифуркациям.

В пункте 2.2 излагается теоретический подход к анализу стохастических обратных бифуркаций. Стохастические функции чувствительности позволяют достаточно просто аппроксимировать плотности распределения пучка в сечениях аттрактора модели Ресслера, исследовать обратные стохастические бифуркации, находить соответствующие бифуркационные значения для параметра интенсивности возмущений.

1. Система Ресслера и аппарат функций чувствительности

1.1. Детерминированная система Ресслера. Рассмотрим детерминированную систему Ресслера [21]

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + \alpha y, \\ \dot{z} = \alpha + z(x - \mu), \end{cases} \quad \alpha = 0.2. \quad (1)$$

Для этой системы по параметру μ можно выделить зоны структурной устойчивости с постоянной кратностью циклов – интервалы I_0, I_1, \dots . На интервале I_k наблюдается 2^k -цикл. Для (1) имеем $I_0 = (0.400; 2.830)$, $I_1 = (2.830; 3.836)$, $I_2 = (3.836; 4.123)$, $I_3 = (4.123; 4.186)$ и т.д. На интервале $I_0 \cup I_1 \cup \dots$ система (1) демонстрирует каскад бифуркаций удвоения периода при переходе к хаосу.

В данной работе рассматриваются предельные циклы системы Ресслера на интервале удвоения периода $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$.

1.2. Стохастическая система Ресслера. Наличие аддитивных случайных возмущений в детерминированной системе (1) приводит к рассмотрению стохастической системы Ресслера

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) + \varepsilon \dot{w}_1, \\ \dot{y} = x + \alpha y + \varepsilon \dot{w}_2, \\ \dot{z} = \alpha + z(x - \mu) + \varepsilon \dot{w}_3, \end{cases} \quad \alpha = 0.2, \quad (2)$$

где $w_i(t)$ – независимые стандартные винеровские процессы ($i = 1, 2, 3$), а ε – малый параметр (интенсивность случайных возмущений).

Траектории, стартующие из точек замкнутой детерминированной орбиты (цикла Γ), отклоняясь под воздействием случайных помех, формируют вокруг Γ пучок случайных траекторий. По ширине пучка можно судить как о степени устойчивости отдельных участков орбиты, так и о чувствительности всего цикла Γ в целом к случайным возмущениям. На рис. 1 для $\mu = 3$ изображен аттрактор (2-цикл) при нулевом шуме, а также при «слабом» и «сильном» шумах. Соответствующий аттрактор для $\mu = 4$ при нескольких значениях уровня помех представлен на рис. 2.

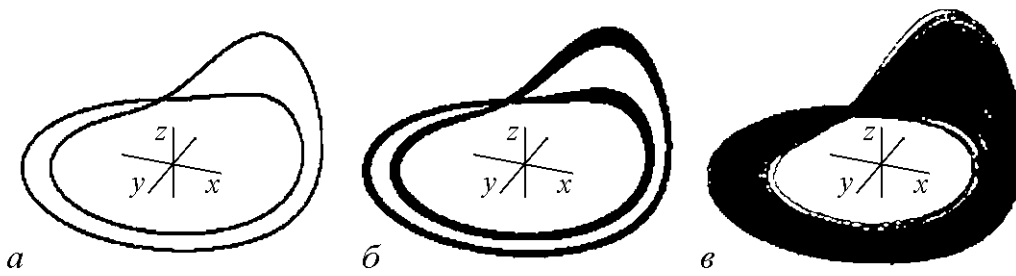


Рис. 1. Стохастические бифуркации 2-цикла ($\mu = 3$) системы Ресслера при различных значениях ε : $a - 0.0$, детерминированный цикл; $б - 0.005$; $в - 0.05$

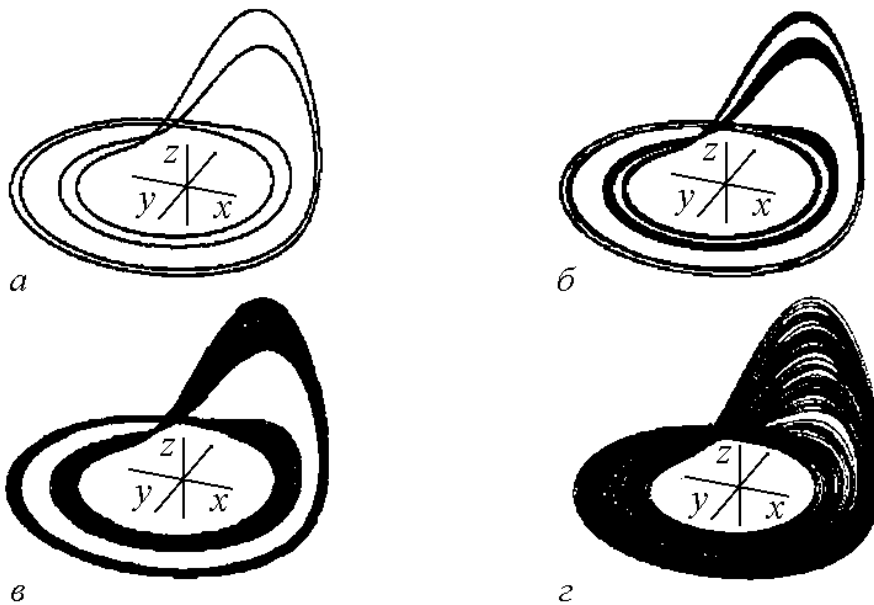


Рис. 2. Стохастические бифуркации 4-цикла ($\mu = 4$) системы Ресслера при различных значениях ε : $a - 0.0$, детерминированный цикл; $б - 0.005$; $в - 0.015$; $г - 0.05$

Для детального анализа стохастической чувствительности предельных циклов может быть использован подход, в основе которого лежат метод квазипотенциала и стохастические функции чувствительности [28-30].

1.3. Метод квазипотенциала и функции чувствительности. Рассмотрим общую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad (3)$$

где x – n -мерный вектор, $f(x)$ – вектор-функция. Предполагается, что система (3) имеет T -периодическое решение $x = \xi(t)$ (цикл Γ). С системой (3) связана система стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon\sigma(x)\dot{w}, \quad (4)$$

где $w(t)$ – n -мерный стандартный винеровский процесс; $\sigma(x)$ – достаточно гладкая $n \times n$ – функция, характеризующая распределение случайных возмущений по координатам; ε – интенсивность случайных возмущений.

В анализе стохастической чувствительности предельных циклов системы (4) используется метод квазипотенциала. В случае малых шумов асимптотика стационарной плотности распределения $p(x, \varepsilon)$ случайных траекторий стохастической системы (4) вокруг цикла Γ выражается в виде

$$p(x, \varepsilon) \approx K \cdot e^{-\frac{q(x)}{\varepsilon^2}},$$

где функция $q(x)$ называется квазипотенциалом

$$q(x) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln p(x, \varepsilon).$$

Квазипотенциал связан с некоторой вариационной задачей минимизации функционала действия и удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби [32], точное решение которого является весьма сложной задачей даже при $n = 2$.

При условии, что шумы и отклонения траекторий от цикла Γ малы, асимптотика стационарной плотности распределения может быть записана [28] в форме нормального распределения

$$p(x, \varepsilon) \approx K \cdot e^{-\frac{(\Delta(x), \Phi^+(\gamma(x)) \Delta(x))}{2\varepsilon^2}}, \quad (5)$$

где $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ – отклонение точки x от цикла Γ , $\gamma(x)$ – ближайшая к x точка цикла Γ , а символ $^+$ означает псевдообращение.

Здесь ковариационная матрица $\varepsilon^2 \Phi(\gamma)$ характеризует разброс точек пересечения пучка случайных траекторий системы (4) с гиперплоскостью, ортогональной Γ и проходящей через точку $\gamma \in \Gamma$. В силу вырожденности матрицы $\Phi(\gamma)$ одно из ее собственных чисел равно нулю, $\lambda_1(\gamma) \equiv 0$. Остальные собственные числа $\lambda_j(\gamma)$, $j = 2, \dots, n$, характеризуют реакцию системы (4) вблизи цикла на случайные воздействия и позволяют описать неравномерность ширины пучка случайных траекторий по направлениям соответствующих собственных векторов [30]. Будем называть функции $\lambda_j(\gamma)$, $j = 2, \dots, n$, стохастическими функциями чувствительности [28-30].

Собственные числа и соответствующие им собственные векторы матрицы Φ позволяют построить в каждой точке цикла доверительную область – эллипс рассеивания. Эллипсы рассеивания наглядно иллюстрируют особенности стохастической чувствительности этих циклов не только по величине, но и по направлению, и дают отчетливое представление об изменении формы и пространственной ориентации пучка случайных траекторий вдоль орбиты цикла [31].

2. Обратные стохастические бифуркации

Присутствие случайных возмущений в динамической системе приводит к тому, что фазовые траектории покидают детерминированную орбиту предельного цикла Γ , формируя вокруг него некоторый пучок. С увеличением интенсивности случайных возмущений происходит рост ширины пучка – траектории начинают сильнее

отклоняться от Γ . При дальнейшем увеличении интенсивности возмущений наблюдаются переходы траектории между соседними участками орбиты (отклонения траектории становятся сравнимы с расстоянием между соседними петлями цикла Γ). Части пучка случайных траекторий, соответствующие соседним участкам детерминированной орбиты, начинают пересекаться. При дальнейшем росте интенсивности возмущений, начиная с некоторого значения, происходит полное слияние частей пучка соседних участков. Поэтому кратность стохастического аттрактора при данном уровне помех становится в 2 раза меньше. Происходит качественное изменение фазового портрета системы.

Проиллюстрируем описанный сценарий поведения пучка случайных траекторий для системы Ресслера (2). При $\mu = 3$ (см. рис. 1) невозмущенная система Ресслера (1) имеет детерминированный устойчивый 2-цикл (a). При добавлении малого шума ($\varepsilon = 0.005$) вокруг орбиты этого детерминированного 2-цикла формируется пучок случайных траекторий – стохастический 2-цикл (b). Воздействие сильных шумов ($\varepsilon = 0.05$) приводит к тому, что возмущенный 2-цикл выглядит как стохастический 1-цикл (c).

Для $\mu = 4$ (см. рис. 2) исходным является уже детерминированный 4-цикл (a). Воздействие шума приводит к появлению пучка случайных траекторий вокруг детерминированной орбиты (b). Увеличение интенсивности шума приводит к превращению стохастического 4-цикла (при $\varepsilon = 0.015$) в стохастический 2-цикл (c) и далее (при $\varepsilon = 0.05$) – в стохастический 1-цикл (d).

Такое уменьшение кратности стохастического цикла при увеличении интенсивности шума в данной работе будем называть обратной стохастической бифуркацией.

Значения интенсивности помех, при которых для 2^k -цикла ($k \geq 1$) системы Ресслера при значении параметра $\mu \in I_k$ происходят обратные бифуркации, будем называть критическими значениями интенсивности шума и обозначать следующим образом: $\varepsilon_{k-1}^*(\mu)$ – уровень шума при первой обратной бифуркации перехода 2^k -цикла в 2^{k-1} -цикл, $\varepsilon_{k-2}^*(\mu)$ – уровень шума при второй обратной бифуркации перехода 2^{k-1} -цикла в 2^{k-2} -цикл, \dots , $\varepsilon_0^*(\mu)$ – уровень шума при k -й обратной бифуркации образования 1-цикла из 2-цикла.

В рамках данной работы для 2^k -циклов системы Ресслера на интервале $I_1 \cup I_2 \cup I_3$ изучаются переходы 2-цикла в 1-цикл, 4-цикла в 2-цикл и 8-цикла в 4-цикл. Рассматриваемые переходы соответствуют только первой обратной бифуркации уменьшения кратности цикла в 2 раза. Определяются критические значения интенсивности $\varepsilon_{k-1}^*(\mu)$. Анализ последовательности критических значений $\varepsilon_{k-1}^*(\mu)$, $\varepsilon_{k-2}^*(\mu)$, \dots , $\varepsilon_0^*(\mu)$ в цепочке последовательных обратных бифуркаций при фиксированном параметре μ для многооборотных стохастических циклов системы Ресслера является отдельной интересной темой для исследования и не рассматривается в данной статье.

В анализе обратных бифуркаций и определения критических значений интенсивности рассмотрим два подхода – эмпирический и теоретический.

2.1. Эмпирический анализ. Эмпирический анализ опирается на численное построение пучка случайных траекторий B системы (2). На детерминированной орбите цикла Γ выбираются опорные точки γ_i , $i = 1 \dots m$, для каждой из которых определяется точка $\hat{\gamma}_i$, являющаяся ближайшей к γ_i на соседнем участке орбиты. Прямая l_i проходит через точки γ_i и $\hat{\gamma}_i$ и лежит в секущей плоскости Π_i . В данном пункте рассматриваются плотности распределения проекций на l_i точек пересечения пучка B с плоскостями Π_i .

Эмпирический анализ проиллюстрируем для двух аттракторов системы Ресслера: 2-цикла ($\mu = 3$) и 4-цикла ($\mu = 4$).

Для параметра $\mu = 3$ рассмотрим на 2-цикле две опорные точки: $\gamma_1(-2.13; -4.60; 0.03)$ и $\gamma_2(3.07; 2.61; 2.11)$.

Для точки γ_1 ближайшей на соседнем участке орбиты является точка $\hat{\gamma}_1(-1.86; -3.59; 0.03)$. Прямая l_1 проходит через γ_1 , $\hat{\gamma}_1$. Построим секущую плоскость Π_1 : $9.67x - 2.53y + 8.96z = 0$, содержащую прямую l_1 (рис. 3, а). В плоскости Π_1 введем систему координат (рис. 4, а) с началом в точке γ_1 и осями с координатами u и v , задаваемыми единичными векторами $(0.25; 0.96; 0) \parallel l_1$, и $(0; 0; 1) \perp l_1$, соответственно.

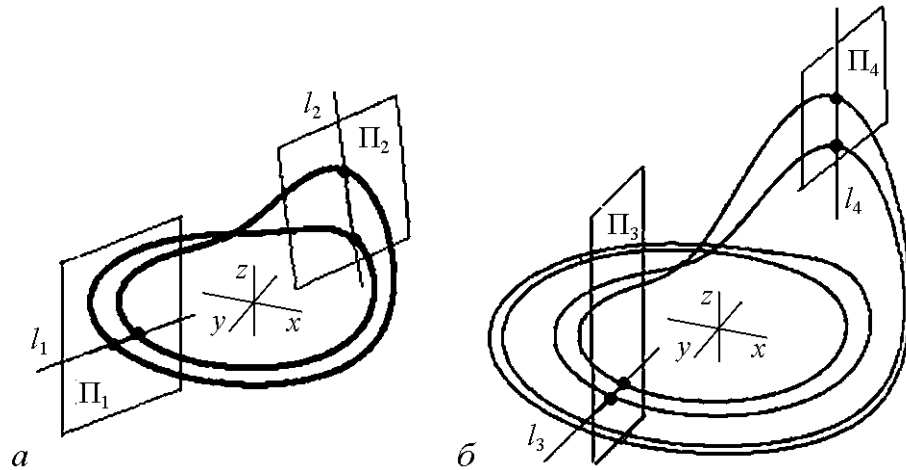


Рис. 3. Секущие плоскости для 2-цикла при $\mu = 3$ (а) и 4-цикла при $\mu = 4$ (б) модели Ресслера

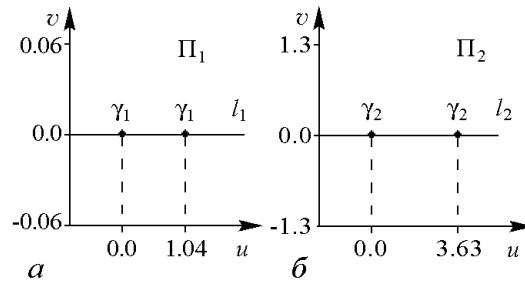


Рис. 4. Сечения Π_1 (а) и Π_2 (б) для 2-цикла при $\mu = 3$

Для точки $\gamma_2(3.08; 2.61; 2.11)$ ближайшей на соседнем участке орбиты является точка $\hat{\gamma}_2(3.00; 2.28; 5.73)$. Прямая l_2 проходит через $\gamma_2, \hat{\gamma}_2$. Секущая плоскость $\Pi_2: 9.75x - 2.21yz - 24.25 = 0$ содержит прямую l_2 (см. рис. 3, *а*). В плоскости Π_2 введем систему координат (рис. 4, *б*) с началом в точке γ_2 и осями с координатами u и v , задаваемыми единичными векторами $(-0.02; -0.09; 0.99) \parallel l_2$, и $(0.22; 0.97; 0.09) \perp l_2$, соответственно.

Рассмотрим пересечения пучка B с плоскостями Π_1 и Π_2 .

На рис. 5 для $\mu = 3$ приведен вид сечения пучка B плоскостью Π_1 при разных значениях интенсивности случайных возмущений. На рис. 6 для точек пересечения пучка B с Π_1 представлены эмпирические плотности $p(u)$ распределения (на прямой l_1). Как видим, для малых шумов (*а*) в точках γ_1 и $\hat{\gamma}_1$ наблюдаются два четко выраженных отдельных всплеска. С увеличением интенсивности помех ε наблюдается их «наложение» друг на друга (*б*). При дальнейшем увеличении уровня помех и достижении интенсивностью шума некоторого критического значения наблюдается один четко выраженный «всплеск» (*в*).

Именно единственность данного «всплеска» (унимодальность) плотности распределения при данном значении шума позволяет считать стохастический аттрактор (возмущенный детерминированный 2-цикл при $\mu = 3$) стохастическим 1-циклом. С точки зрения плотности распределения в рассматриваемом сечении стохастический 2-цикл при данном значении уровня помехи неотличим от некоторого стохастического 1-цикла.

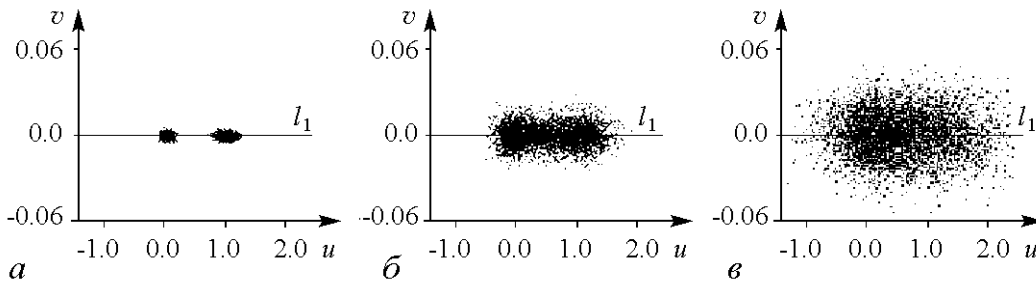


Рис. 5. Точки пучка случайных траекторий в сечении Π_1 . Для рис 5-6: $\mu = 3, \varepsilon = 0.005$ (*а*), 0.02 (*б*), 0.05 (*в*)

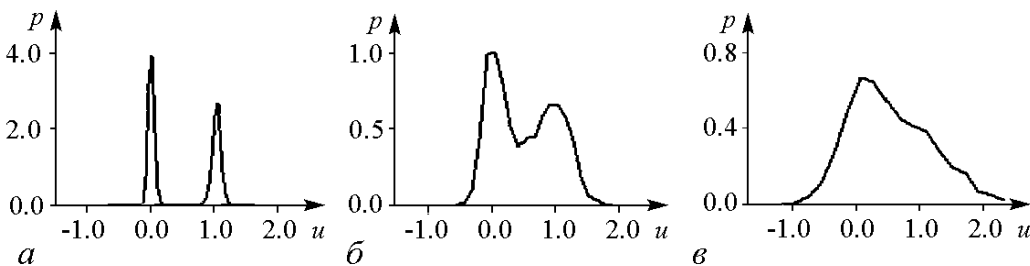


Рис. 6. Эмпирические плотности распределения в сечении Π_1

На рис. 7 и 8 для возмущенного 2-цикла при том же значении $\mu = 3$ представлены точки пересечения и плотности распределения (на прямой l_2) в плоскости Π_2 . Рассмотренные плотности распределения для плоскостей Π_1 и Π_2 стохастического аттрактора при увеличении шума демонстрируют схожее качественное поведение. Та же картина для плотностей распределения при $\mu = 3$ наблюдается для любого сечения Пуанкаре Π_i ($i = 1, \dots, m$).

Значение интенсивности шума, при котором график плотности распределения $p(u)$ демонстрирует переход от бимодальной к унимодальной форме, будем называть критическим значением шума для рассматриваемого участка цикла Γ .

Для точек $\gamma_3(-0.35; -5.01; 0.03)$ и $\gamma_4(4.20; 2.50; 8.33)$ орбиты 4-цикла ($\mu = 4$) рассмотрим две секущие плоскости $\Pi_3: 9.99x + 0.31y + 5.08 = 0$ и $\Pi_4: 9.88x + 1.50y - 45.29 = 0$, содержащие прямые l_3 и l_4 , соответственно (рис. 3, б). Здесь прямые l_3 и l_4 построены по аналогии с прямыми l_1 и l_2 для 2-цикла ($\mu = 3$).

На рис. 9 и 10 для $\mu = 4$ представлены эмпирические плотности распределения на прямых l_3 и l_4 для двух значений интенсивности случайных возмущений. Как видим, при $\varepsilon = 0.015$ плотность распределения в сечении стохастического 4-цикла имеет унимодальный вид. Это свидетельствует о произошедшей обратной бифуркации превращения стохастического 4-цикла в стохастический 2-цикл.

Для $\mu = 3$ критическое значение шума лежит в интервале $(0.02; 0.05)$. Для $\mu = 4$ критическое значение шума заключено в интервале $(0.005; 0.015)$. Точное определение точек обратной бифуркации в рамках эмпирического подхода являет-

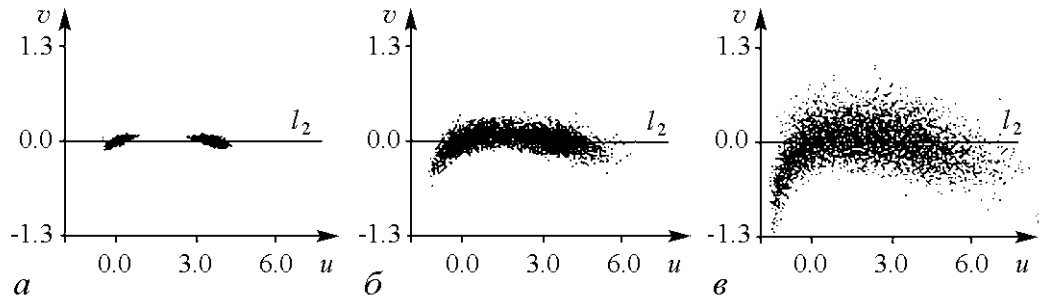


Рис. 7. Точки пучка случайных траекторий в сечении Π_2 . Для рис 7-8: $\mu = 3$, $\varepsilon = 0.005$ (а), 0.02 (б), 0.05 (в)

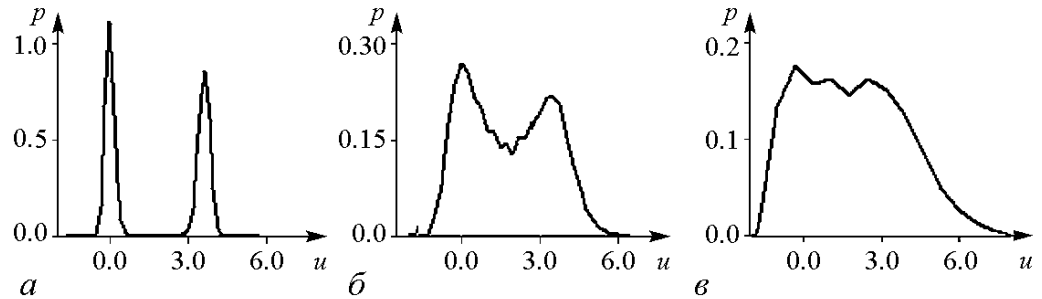


Рис. 8. Эмпирические плотности распределения в сечении Π_2

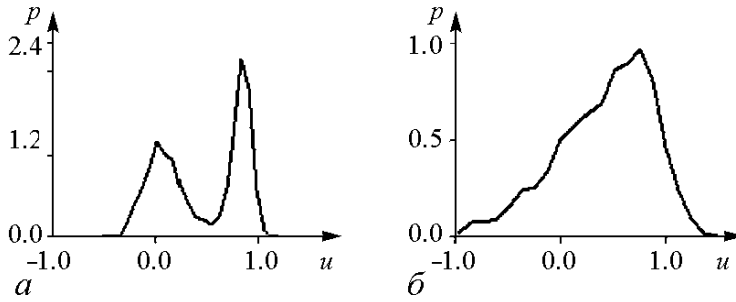


Рис. 9. Эмпирические плотности распределения в сечении Π_3 . Для рис. 9-10 $\mu = 4$, $\varepsilon = 0.005$ (а), 0.015 (б)

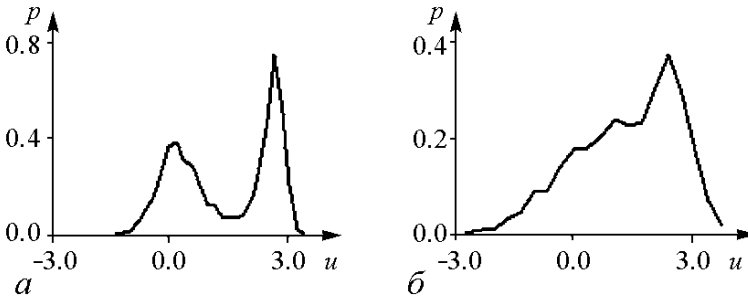


Рис. 10. Эмпирические плотности распределения в сечении Π_4

ся сложной задачей, связанной, в первую очередь, с численным построением пучка случайных траекторий. Эмпирический анализ является весьма затратной по вычислительной сложности процедурой. В следующем пункте рассматривается построение теоретических оценок плотностей распределения и определение критических значений шума с использованием аппарата функций чувствительности.

2.2. Аппроксимация плотности распределения. Рассмотрим детерминированный 2^k -цикл Γ ($k \geq 1$) системы Ресслера (1). На орбите Γ выберем опорную точку γ . Для γ можно указать ближайшую точку $\hat{\gamma}$ на соседнем участке (петле) орбиты. Обозначим через l прямую, проходящую через γ и $\hat{\gamma}$.

При асимптотически малых шумах точки пересечения пучка B с ортогональной плоскостью в малой окрестности точки γ имеют нормальное распределение (5). Рассмотрим точки пересечения пучка с секущей плоскостью Π , содержащей прямую l . Используя (5), найдем параметры распределения проекций этих точек на прямую l .

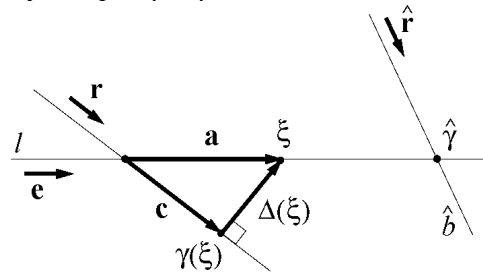


Рис. 11. Соседние участки орбиты цикла Γ

Прямая l задается функцией $\xi(u) = \gamma + ue$, где u - скалярная координата, а e - единичный направляющий вектор прямой l (рис. 11). В малой окрестности точки γ орбиту цикла Γ можно считать прямой b (с направляющим единичным вектором r). Пусть вектор $a = ue$.

Для вектора \mathbf{c} – проекции \mathbf{a} на прямую b – справедливо:

$$\mathbf{c} = (u\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{r} = u(\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{r} \quad (6)$$

Для отклонения $\Delta(\xi) = \xi - \gamma(\xi)$ точки $\xi = \xi(u)$ от $\gamma(\xi)$ – ближайшей к ξ точки цикла Γ – выполняется:

$$\Delta(\xi) = \mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

С учетом (6) вектор $\Delta(\xi)$ записывается в виде

$$\Delta(\xi) = u[\mathbf{e} - (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{r}] = u\mathbf{h}, \quad (7)$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{e} - (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{r}$.

В силу линеаризации орбиты Γ в рассматриваемой малой окрестности вектор \mathbf{h} не зависит от выбора точки ξ (то есть от выбора u), а определяется только расположением прямых l и b .

Для квадратичной формы в (5) с учетом (7) справедливо соотношение

$$(\Delta(\xi), \Phi^+(\gamma(\xi))\Delta(\xi)) = u^2(\mathbf{h}, \Phi^+(\gamma(\xi))\mathbf{h}), \quad (8)$$

где $\Phi(\gamma)$ – матрица, характеризующая разброс точек пересечения пучка B плоскостью, ортогональной Γ и проходящей через $\gamma \in \Gamma$.

В малой окрестности точки γ можно считать, что $\Phi^+(\gamma(\xi)) \approx \Phi^+(\gamma)$.

Тогда степень экспоненты в (5) с учетом (8) записывается в виде

$$-\frac{u^2(\mathbf{h}, \Phi^+(\gamma(\xi))\mathbf{h})}{2\varepsilon^2} \approx -\frac{u^2}{2\varepsilon^2\sigma^2}, \quad (9)$$

где σ не зависит от u и ε , а определяется только выбором точки γ и прямой l

$$\sigma^2 = \frac{1}{(\mathbf{h}, \Phi^+(\gamma)\mathbf{h})}. \quad (10)$$

Рассмотрим спектральное разложение $\Phi(\gamma) = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T$, где $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ – собственные значения матрицы $\Phi(\gamma)$, соответствующие (нормированным) собственным векторам \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 . Тогда

$$\Phi^+(\gamma) = \lambda_1^{-1} \cdot \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \lambda_2^{-1} \cdot \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T. \quad (11)$$

С учетом (11) формулу (10) можно преобразовать:

$$\sigma^2 = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 \cdot (\mathbf{h}, \mathbf{v}_1)^2 + \lambda_1 \cdot (\mathbf{h}, \mathbf{v}_2)^2}. \quad (12)$$

Полученное в (9) выражение для степени экспоненты у стационарной плотности распределения показывает, что точки пересечения пучка B с секущей плоскостью в проекции на прямую l имеют нормальное распределение с параметрами $(0; \varepsilon\sigma)$. Параметр σ определяется (12). Плотность распределения записывается в виде

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon\sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2\varepsilon^2\sigma^2}\right). \quad (13)$$

В малой окрестности точки $\hat{\gamma}$ орбиту цикла Γ можно считать прямой \hat{b} с направляющим единичным вектором \hat{r} (см. рис. 11). По аналогии можно показать, что в окрестности точки $\hat{\gamma}$ плотность распределения проекций (на прямую l) точек пересечения пучка B с ортогональной плоскостью выражается в виде

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\hat{\sigma}}} \exp\left(-\frac{(u-d)^2}{2\varepsilon^2\hat{\sigma}^2}\right), \quad (14)$$

где $d = \|\hat{\gamma} - \gamma\|$ – расстояние между точками γ и $\hat{\gamma}$, а величина $\hat{\sigma}$ определяется выражением

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\lambda}_1 \cdot \hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_2 \cdot (\hat{h}, \hat{v}_1)^2 + \hat{\lambda}_1 \cdot (\hat{h}, \hat{v}_2)^2}. \quad (15)$$

Здесь $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ – собственные значения матрицы $\Phi(\hat{\gamma})$, соответствующие (нормированным) собственным векторам \hat{v}_1 и \hat{v}_2 . Вектор \hat{h} определяется таким образом:

$$\hat{h} = \mathbf{e} - (\mathbf{e}, \hat{r})\hat{r}, \quad (16)$$

где \hat{r} – направляющий вектор прямой \hat{b} .

Результирующую плотность распределения на прямой l будем полагать равной

$$p(u) = (f(u) + \hat{f}(u))/2. \quad (17)$$

На рис. 12 представлены графики функции $p(u)$, полученные с использованием (17) на прямой l_1 для $\mu = 3$ при нескольких значениях интенсивности случайных возмущений. Эмпирические плотности распределения для значений $\varepsilon = 0.005$, 0.02 и 0.05 приведены на рис. 6. Графики функций $p(u)$ (см. рис.12), полученные из (17) с помощью функций чувствительности $\lambda_1(\gamma)$ и $\lambda_2(\gamma)$, достаточно хорошо аппроксимируют соответствующие эмпирические кривые на рис. 6. Данный факт наблюдается и для других секущих плоскостей 2-цикла при $\mu = 3$.

Численные эксперименты демонстрируют соответствие между эмпирической плотностью и ее теоретическим аналогом в сечениях для 2^k -циклов системы Ресслера в широком диапазоне интенсивности шума ε .

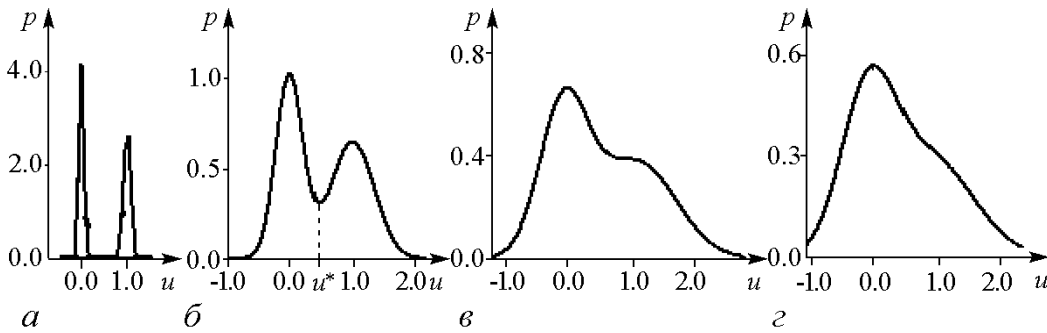


Рис. 12. Теоретическая плотность распределения (в плоскости Π_1) для $\mu = 3$, $\varepsilon = 0.005$ (а), 0.02 (б), 0.036 (в), 0.05 (г)

Проиллюстрируем соответствие графиков для случая больших шумов на примере значений $\mu = 3$ и $\mu = 4$. На рис. 13 для $\mu = 3$ при значении шума $\varepsilon = 0.05$ представлены эмпирические и теоретические плотности распределения в секущих плоскостях Π_1 и Π_2 . На рис. 14 для $\mu = 4$ при значении шума $\varepsilon = 0.015$ представлены эмпирические и теоретические плотности распределения в секущих плоскостях Π_3 и Π_4 .

Хорошая аппроксимация эмпирической плотности распределения в сечениях стохастических циклов системы Ресслера при помощи функций чувствительности позволяет использовать данный аппарат в анализе рассматриваемых стохастических обратных бифуркаций.

На рис. 12 приведены графики функции $p(u)$ для $\mu = 3$ в сечении Π_1 при различных уровнях шума ε . При увеличении ε ширина всплесков функции растет, происходит наложение всплесков друг на друга (рис. 12, б). Значение $p(u^*)$ (u^* – точка локального минимума функции $p(u)$ на $(0; d)$) возрастает и приближается к одному из локальных максимумов функции $p(u)$. Здесь $d = 1.04$ (см. рис. 4, а). При некотором значении $\varepsilon = \varepsilon^*$ на графике $p(u)$ происходит совпадение локального максимума с локальным минимумом (рис. 12, в). Такое качественное изменение поведения графика плотности соответствует началу слияния соседних частей пучка.

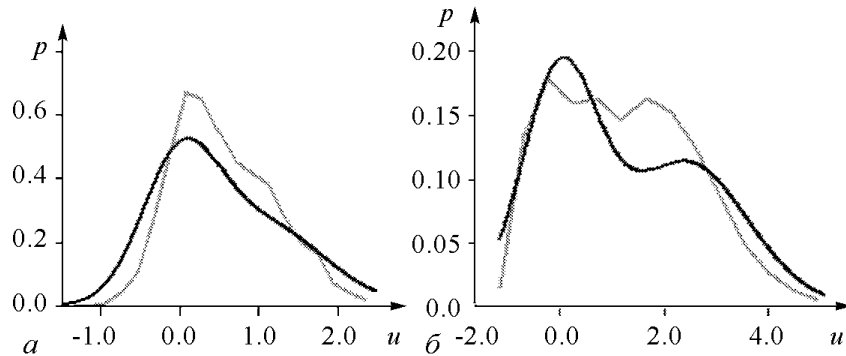


Рис. 13. Графики теоретической (черный цвет) и эмпирической (серый цвет) плотности распределения для $\mu = 3$ при $\varepsilon = 0.05$ в сечениях: а – плоскость Π_1 ; б – плоскость Π_2

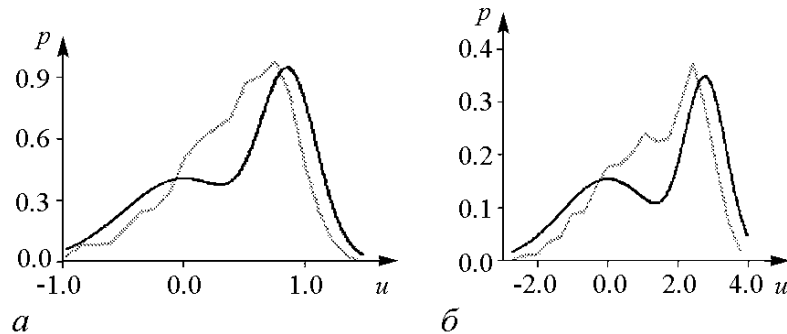


Рис. 14. Графики теоретической (черный цвет) и эмпирической (серый цвет) плотности распределения для $\mu = 4$ при $\varepsilon = 0.015$ в сечениях: а – плоскость Π_3 ; б – плоскость Π_4

Интенсивность случайных возмущений, соответствующую этому состоянию, будем называть критической интенсивностью. При дальнейшем росте ε (рис. 12, *з*) у функции $p(u)$ на интервале $(0; d)$ будет всего один экстремум.

Уравнение $p'(u) = 0$ приводится к виду

$$\exp\left(-\frac{u^2}{2\varepsilon^2\sigma^2}\right) \cdot \frac{u}{\sigma^3} + \exp\left(-\frac{(u-d)^2}{2\varepsilon^2\sigma^2}\right) \cdot \frac{u-d}{\sigma^3} = 0. \quad (18)$$

Из описанного поведения графика функции $p(u)$ следует, что $\exists \varepsilon^* > 0$, таких что $\forall \varepsilon < \varepsilon^*$, уравнение (18) имеет три различных вещественных корня, являющихся точками локальных экстремумов $p(u)$ (см. рис. 12, *а, б*). При $\varepsilon = \varepsilon^*$ уравнение (18) имеет два корня. Один корень является точкой локального максимума $p(u)$ на $(0; d)$. Второй корень имеет кратность 2, что соответствует совпадению точки второго локального максимума с точкой локального минимума (см. рис. 12, *в*). Значение интенсивности шума ε^* будем считать критическим значением перехода 2^k -цикла в 2^{k-1} -цикл (в окрестности точки γ) и обозначать ε_{k-1}^* . Величина ε_{k-1}^* является тем единственным значением параметра ε , при котором уравнение (18) имеет кратный корень. Это условие и служит аналитическим правилом отыскания бифуркационного значения ε_{k-1}^* в исследуемой первой обратной бифуркации.

Рассматриваемая при фиксированном μ функция $p(u)$ зависит еще и от точки γ . Соответствующее бифуркационное значение шума ε_{k-1}^* также зависит от γ . Будем обозначать его $\varepsilon_{k-1}^*(\gamma)$. При уровне шума $\varepsilon_{k-1}^* = \max_{\gamma \in \Gamma} \varepsilon_{k-1}^*(\gamma)$ обратная бифуркация превращения стохастического 2^k -цикла в 2^{k-1} -цикл имеет место уже во всех точках орбиты.

Рассмотрим зависимость бифуркационных значений интенсивности шума от параметра μ . Введем величины $m_k = \max_{\mu \in I_k} \varepsilon_{k-1}^*(\mu)$, $\mu_k^* = \arg \max_{\mu \in I_k} \varepsilon_{k-1}^*(\mu)$. На интервале I_k при $\mu = \mu_k^*$ обратная бифуркация превращения стохастического 2^k -цикла в 2^{k-1} -цикл происходит при наибольшем значении шума $\varepsilon = m_k$.

Графики бифуркационных значений $\varepsilon_0^*(\mu)$, $\varepsilon_1^*(\mu)$, $\varepsilon_2^*(\mu)$ для системы Ресслера на начальных интервалах структурной устойчивости $I_1 = (2.830; 3.836)$, $I_2 = (3.836; 4.123)$, $I_3 = (4.123; 4.186)$ демонстрируют самоподобие (рис. 15).

Найденные величины $m_1 = 0.096$, $m_2 = 0.017$, $m_3 = 0.0028$ свидетельствуют о быстром убывании бифуркационных значений шума при увеличении μ .

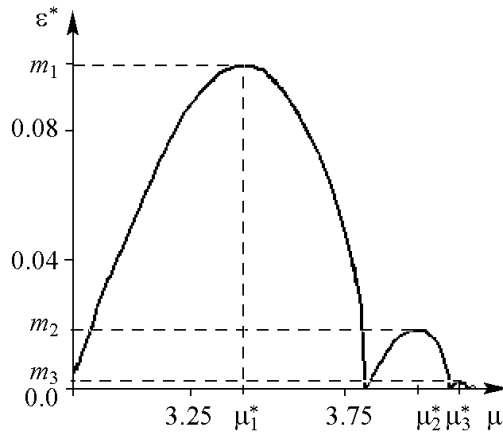


Рис. 15. Диаграмма обратных стохастических бифуркаций системы Ресслера

Заклучение

В данной статье были рассмотрены вызванные шумом стохастические обратные бифуркации уменьшения кратности предельных циклов системы Ресслера.

Были изложены эмпирический и теоретический подходы. В эмпирическом подходе рассматриваются плотности распределения пучка случайных траекторий в секущих плоскостях. В рамках теоретического подхода с помощью аппарата функций чувствительности строится аппроксимация плотности распределения. Показано, что функции чувствительности, изначально введенные для бесконечно малых шумов в асимптотически малой окрестности орбиты предельных циклов, могут быть успешно использованы для моделирования плотностей распределения в сечениях аттрактора Ресслера и изучения механизма обратных бифуркаций.

Для системы Ресслера найдены бифуркационные значения интенсивности шума и исследована их зависимость от параметра системы.

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 04-01-96098 Урал.

Библиографический список

1. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. Радио, 1961.
2. *Диментберг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980.
3. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
4. *Soong T.T., Grigoriu M.* Random vibration of mechanical and structural systems. RTR Prentice-Hall. Englewood Cliffs. New Jersey. 1993.
5. *Arnold L.* Random dynamical systems. Springer-Verlag. Berlin, 1998.
6. *Landa P.S., McClintock P.V.E.* Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise // Physics Reports. 2000. Vol.323. P.1.
7. *Anishchenko V.S., Neiman A.B.* Structure and properties of chaos in presence of noise // Nonlinear Dynamics of structures / Ed. R.Z. Sagdeev et al. Singapore: World Scientific, 1991. P.21.
8. *Crutchfield J., Nauenberg M., Rudnick J.* Scaling for external noise at the onset of chaos // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46. P. 933.
9. *Crutchfield J., Farmer J., Huberman B.* Fluctuations and simple chaotic dynamics // Phys. Rep. 1982. Vol. 92. P. 45.
10. *Arnold L., Horsthemke W., Lefever R.* White and coloured external noise and transition phenomena in nonlinear systems // Zs. Phys. 1978. B29. P.867.
11. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
12. *Стратонович Р.Л., Ланда П.С.* Воздействие шумов на генератор с жестким возбуждением // Известия вузов. Радиофизика. 1959. Т. 2 №1. С. 37.
13. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to external multiplicative noise // In Fluctuations and sensitivity in nonequilibrium systems / Eds W.Horsthemke, D.K.Kondepudi, Springer-Verlag. Berlin. 1984.
14. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 1631.
15. *Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F.* Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 36. P.834.

16. *Altare V., Nicolis G.* Stochastically forced Hopf bifurcation: approximate Fokker Planck equation in the limit of short correlation times // *Phys. Rev. A.* 1988. Vol. 37. P. 3630.
17. *Neiman A., Anishchenko V., Kurths J.* Period-doubling bifurcations in the presence of colored noise // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 3801.
18. *Gao J. B., Hwang S. K., Liu J. M.* When can noise induce chaos? // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 82, № 6. P. 1132.
19. *Ying-Cheng L., Zonghua L., Billings L., Schwartz I.* Noise-induced unstable dimension variability and transition to chaos in random dynamical systems // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P.026210.
20. *Xu B., Lai Y.-C., Zhu L., Do Y.* Experimental characterization of transition to chaos in the presence of noise // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90. P. 164101.
21. *Roessler O.E., Wegman K.* Chaos in Zhabotinski reaction // *Nature.* 1978. Vol. 271. P. 89.
22. *Arnold L., Bleckert G., Schenk-Hoppe K.* (1999). The stochastic Brusselator: parametric noise destroys Hopf bifurcation // in: *Stochastic Dynamics* / Eds H. Crauel, M. Gundlach. Springer. 1999. P.71.
23. *Arnold L. and Boxler P.* Stochastic bifurcation: Instructive examples in dimension one // in *Diffusion processes and related problems in analysis* / Eds Mark Pinsky and Volker Wihstutz, Vol. II: *Stochastic flows.* Progress in Probability. Boston Basel Stuttgart. Birkhaeuser. 1992. Vol. 27. P. 241.
24. *Crauel H., Imkeller P., Steinkamp M.* Bifurcations of one-dimensional stochastic differential equations // in *Stochastic dynamics* / Eds H. Crauel and M. Gundlach. Springer-Verlag. New York. 1999. P. 27.
25. *Leng G., Namachchivaya N., Talwar S.* Robustness of nonlinear systems perturbed by external random excitation // *ASME Journal of Applied Mechanics.* 1992. Vol. 59. P. 1.
26. *Malick K., Marcq P.* Stability analysis of noise-induced Hopf bifurcation // *Eur. Phys. J.* 2003. Vol. 36. P. 119.
27. *Baras F.* Stochastic analysis of limit cycle behavior // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. P. 1398.
28. *Баширцева И.А., Ряшко Л.Б.* Метод квазипотенциала в исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным воздействиям // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2001. Т.9, № 6. С.104.
29. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity analysis of stochastically forced Lorenz model cycles under period-doubling bifurcations // *Dynamic systems and applications.* 2002. Vol. 11. P. 293.
30. *Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles // *Mathematics and Computers in Simulation.* 2004. Vol. 66. Issue 1 (June 2004). P. 55.
31. *Баширцева И.А., Ряшко Л.Б., Стихин П.В.* Стохастическая чувствительность циклов системы Ресслера при переходе к хаосу // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2003. Т. 11, № 6. С. 32.
32. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука. 1979.

33. Day M.V. Regularity of boundary quasi-potentials for planar systems// Applied Mathematics and Optimization. 1994. Vol. 30. P. 79.
34. Naeh T., Klosek M.M., Matkowsky B.J., Schuss Z. A direct approach to the exit problem// SIAM Journal Appl.Math. 1990. Vol. 50. № 2. P. 595.
35. Мильштейн Г.Н., Ряшко Л.Б. Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями // Прикл. математика и механика 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 51.

Уральский государственный
университет

Поступила в редакцию 31.01.2005
После доработки 3.05.2005

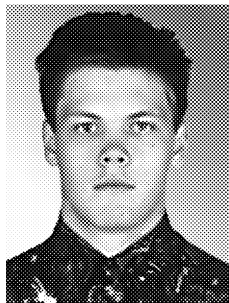
NOISE-INDUCED BACKWARD BIFURCATIONS IN STOCHASTIC ROESSLER SYSTEM

L.B. Ryashko, P.V. Stihin

Noise essentially influences the behavior of deterministic cycles of dynamical systems. Backward bifurcations of stochastic cycles for nonlinear Roessler model are investigated. Two approaches are demonstrated. In empirical approach the distribution densities of intersection points in intersecting planes are used. Theoretical analysis is based on stochastic sensitivity functions. This approach allows to achieve rather simple approximation of distribution densities in planes. Bifurcational values for noise intensities are found.



Ряшко Лев Борисович – родился в 1953 году, окончил Уральский госуниверситет (1975), кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой вычислительной математики Уральского госуниверситета, Соросовский доцент (1996,1998). Область научных интересов - устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике. E-mail: Lev.Ryashko@usu.ru



Стихин Павел Викторович – родился в 1979 году, окончил Уральский госуниверситет (2002), аспирант кафедры математической физики. Область научных интересов - анализ чувствительности к возмущениям и моделирование стохастических нелинейных систем. E-mail: paul-st@mail.ru