



## ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ РЕЖИМОВ ПОЛНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОСА В АНСАМБЛЕ ИЗ ТРЕХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

*А.В. Шабунин, С.М. Николаев, В.В. Астахов*

Исследуются механизмы появления и исчезновения режимов полной синхронизации хаоса в кольце из трех логистических отображений с симметричной диссипативной связью. Проводится двухпараметрический бифуркационный анализ, рассматриваются типичные колебательные режимы и переходы между ними.

### Введение

Синхронизация – универсальное явление в природе и технике, понимание закономерностей которого важно как при изучении фундаментальных законов естествознания, так и для использования в многочисленных приложениях. Если механизмы и проявления синхронизации регулярных колебаний в целом хорошо изучены, то синхронизация хаотических колебаний остается в центре внимания исследователей, специализирующихся в различных отраслях физики, химии, биологии и математики. Отсутствует даже единый подход к самому термину «хаотическая синхронизация». Под этим термином разные исследователи понимают разные явления, говоря о полной [1–4], кластерной [5], обобщенной [6, 8], частотной [8, 9] или фазовой [10] синхронизации. В настоящей работе мы будем рассматривать полную синхронизацию хаоса в кольце из трех логистических отображений с симметричной диффузионной связью. Полной синхронизацией хаоса называют случай, когда все взаимодействующие подсистемы  $\{x_i\}$  осциллируют одинаково:  $x_i(t) = x_j(t)$ , то есть их состояния совпадают в любой момент времени. Это явление интенсивно исследуется, начиная с 1983 года [1]. Обобщением понятия полной синхронизации является обобщенная синхронизация хаоса (generalized synchronization) [8], когда между состояниями осцилляторов наблюдается некоторая детерминированная функциональная взаимосвязь:  $x_i(t) = F_{ij}(x_j(t))$ .

К настоящему времени известно множество систем различной природы, в которых реализуется режим полной синхронизации хаоса, проанализированы условия его существования [1, 11–13], достаточно хорошо известны механизмы формирования и разрушения полной синхронизации в двух взаимодействующих осцилляторах [14–18]. В частности, для двух осцилляторов, в которых переход к хаосу происходит через каскад субгармонических бифуркаций, было показано, что, как формирование, так и разрушение режима полной синхронизации связано с бифуркациями основного семейства периодических орбит. При этом разрушение режима синхронизации происходит сначала через этап локальной изрешеченности хаотического аттрактора [19, 20], которая делает режим синхронизации негрубым, то есть очень чувствительным к постоянно действующим возмущениям, а затем через этап изрешеченности бассейна притяжения синхронного хаотического аттрактора [21], когда в малую окрестность аттрактора вклиниваются области из бассейна притяжения другого (несинхронного) аттрактора. В ансамблях из большего числа элементов, наряду с полной синхронизацией может наблюдаться кластерная синхронизация, при которой существуют наборы осцилляторов (кластеры), каждый из которых работает в режиме полной синхронизации, а между ними синхронизация отсутствует.

Явления частичной и полной синхронизации в системе, состоящей из трех связанных логистических отображений с несимметричной связью, исследовались в работе [6], в которой был проведен детальный бифуркационный анализ механизмов разрушения полной и формирования частичной хаотической синхронизации. В рассмотренном случае механизмы разрушения режима полной синхронизации хаоса оказались сходными с соответствующими механизмами в двух диффузионно связанных осцилляторах [14]. При этом, как и в случае двух осцилляторов, разрушение синхронизации сопровождалось явлениями локального изрешечивания и изрешечивания бассейна притяжения синхронного хаотического аттрактора. Может сложиться впечатление, что подобная ситуация является типичной, в том смысле, что механизмы разрушения полной синхронизации хаоса в двух осцилляторах с диффузионной связью воспроизводятся и в ансамблях из большего числа элементов. Как влияет вид связи на механизм разрушения синхронизации хаоса? Приведет ли изменение бифуркационного механизма к новым явлениям и колебательным режимам, наблюдаемым в системе с другим типом связи? Ответам на эти вопросы посвящено настоящее исследование.

### 1. Исследуемая система, свойства симметрии, классификация симметричных решений

Рассмотрим ансамбль из отображений, задаваемый системой уравнений

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \frac{\gamma}{2}(f(y_n) + f(z_n) - 2f(x_n)), \\y_{n+1} &= f(y_n) + \frac{\gamma}{2}(f(x_n) + f(z_n) - 2f(y_n)), \\z_{n+1} &= f(z_n) + \frac{\gamma}{2}(f(x_n) + f(y_n) - 2f(z_n)),\end{aligned}\tag{1}$$

где функция  $f(x) = \lambda - x^2$  определяет вид одиночного осциллятора (логистическое

отображение);  $\lambda$  – управляющий параметр, определяющий его динамику;  $\gamma$  – параметр связи. Логистическое отображение представляет собой одну из базовых моделей нелинейной динамики, в которой при изменении параметра  $\lambda$  наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, в результате чего система совершает переход к хаотическим колебаниям. В закритической области при увеличении  $\lambda$  происходят бифуркации слияния лент многоленточных хаотических аттракторов, завершающиеся формированием развитого хаоса. Ансамбль связанных отображений (1) представляет собой одномерную цепочку с симметричной связью и периодическими граничными условиями. Ее уравнения обладают развитой симметрией, они инвариантны относительно следующих преобразований координат в фазовом пространстве:

- отражения в одной из трех плоскостей симметрии, то есть взаимные замены двух фазовых переменных

$$T_x : x \leftrightarrow x, \quad y \leftrightarrow z, \quad (2)$$

$$T_y : y \leftrightarrow y, \quad x \leftrightarrow z, \quad (3)$$

$$T_z : z \leftrightarrow z, \quad x \leftrightarrow y; \quad (4)$$

- повороты системы координат в положительном или отрицательном направлении, то есть циклическая замена фазовых переменных друг на друга:

$$R_+ : x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x, \quad (5)$$

$$R_- : x \leftarrow y \leftarrow z \leftarrow x. \quad (6)$$

Преобразования симметрии (2)–(6) не являются независимыми друг от друга. Базовыми (то есть независимыми) видами симметрии будут любые два вида отражения из (2)–(4), так как преобразования поворота (5), (6) и отражение относительно третьей плоскости могут быть выражены как их комбинация. Например, выбирая в качестве базиса  $T_x$  и  $T_y$ , можно записать:

$$R_+ = T_x \circ T_y,$$

$$R_- = T_y \circ T_x,$$

$$T_z = R \circ T_x.$$

Если траектория системы в каждый момент времени симметрична относительно какого-либо из преобразований симметрии  $S \in \{T_{x,z,z}, R_{+,-}\}$ :

$$x(n) = S(x(n)),$$

то такую траекторию будем называть симметричным решением системы (1). Все симметричные решения уравнений (1) можно разделить на два класса: решения, симметричные относительно одного из преобразований (2)–(4), и решения, симметричные относительно сразу пары этих преобразований. Последние являются симметричными относительно любого из преобразований симметрии для системы (1). В соответствии с установившейся терминологией, решения первого класса принято называть частично синхронными колебаниями, решения второго класса – полностью синхронными колебаниями. Если выбрать начальные условия, соответствующие какому-либо из видов симметрии (2)–(6), то траектория, стартующая из них,

будет также соответствовать этому виду. Таким образом, каждое из преобразований индуцирует в фазовом пространстве соответствующее инвариантное подпространство. Так, например, каждое из преобразований отражения индуцирует инвариантную двумерную плоскость

$$I_x : y = z, \quad (7)$$

$$I_y : x = z, \quad (8)$$

$$I_z : x = y. \quad (9)$$

Эти плоскости в дальнейшем будем называть «подпространствами частичной симметрии». Аттракторы, соответствующие частично синхронным колебаниям, располагаются в одном из подпространств частичной симметрии. Пересечение любых двух из этих подпространств

$$I_c = I_i \cap I_j : x = y = z, \quad (10)$$

также являющееся инвариантным подпространством для системы (1), будем называть подпространством полной симметрии. Аттракторы, соответствующие полностью синхронным колебаниям, располагаются в подпространстве полной симметрии.

Как известно, для системы с симметрией все предельные множества  $\omega_i$  либо являются самосимметричными относительно определенного вида симметрии  $S$

$$\omega_i = S(\omega_i),$$

либо имеют симметричного «двойника»

$$\omega_i = S(\omega_j).$$

Аттрактор, соответствующий симметричному решению, очевидно, является самосимметричным. Однако обратное не верно: самосимметричный аттрактор может соответствовать несимметричному решению. Типичный пример такого аттрактора – орбита периода два, точки которой переходят друг в друга при преобразовании симметрии, хотя сама орбита не принадлежит ни одному из симметричных подпространств (2)–(10).

Введем следующую классификацию и обозначения предельных множеств в фазовом пространстве системы (1): каждое предельное множество будем обозначать  $NM_i^j$ , где буквенный индекс  $M$  – тип предельного множества:  $C$  (*Cycle*) – периодическая орбита,  $A$  (*chaotic Attractor*) – хаотический аттрактор,  $T$  (*Torus*) – квазипериодические колебания; числовой индекс  $N = 1, 2, 3, \dots$  – период орбиты или число лент аттрактора; верхний буквенный индекс  $j \in \{x, y, z, c\}$  используется для симметричных аттракторов и обозначает соответствующее из подпространств симметрии  $I_x - I_c$ ; нижний числовой индекс  $i$  идентифицирует предельное множество, если таких несколько. В дальнейшем мы будем интересоваться, в основном, симметричными предельными множествами, соответствующими синхронным колебаниям, а также несимметричными предельными множествами, чьи бифуркации участвуют в образовании или разрушении режимов синхронизации.

## 2. Трансверсальная устойчивость режимов полной синхронизации

Для того чтобы в системе мог наблюдаться режим полной синхронизации, соответствующее ему предельное множество, располагающееся в подпространстве полной симметрии  $I_c$ , должно быть орбитально устойчиво. При анализе устойчивости симметричного предельного множества любые возмущения в фазовом пространстве удобно представлять как сумму возмущения в тангенциальном к подпространству симметрии направлении и трансверсальном ему. Так как симметричное подпространство является инвариантным по отношению к оператору эволюции системы, то направление действия возмущений по отношению к подпространству (тангенциальные или трансверсальные) сохраняется. Соответственно, можно по отдельности характеризовать устойчивость предельного множества в тангенциальном и трансверсальном направлениях. Нарушение тангенциальной устойчивости ведет к смене одного синхронного режима другим синхронным режимом, нарушение трансверсальной устойчивости – к смене синхронного режима несинхронным, то есть к разрушению синхронизации.

Рассмотрим трансверсальную устойчивость режимов полной синхронизации. Для этого удобно перейти к новым переменным

$$\begin{aligned} u &= \frac{x + y + z}{3}, \\ v &= \frac{2x - y - z}{3}, \\ w &= \frac{2y - x - z}{3}. \end{aligned} \quad (11)$$

Векторы нового базиса  $e_2$  и  $e_3$  располагаются перпендикулярно симметричному подпространству, а вектор  $e_1$  – по касательной к нему. Подставляя уравнения (11) в систему (1) и линеаризуя систему в окрестности симметричного подпространства, получим

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad (12)$$

$$v_{n+1} = \left(1 - \frac{3\gamma}{2}\right) f'(u_n) v_n, \quad (13)$$

$$w_{n+1} = \left(1 - \frac{3\gamma}{2}\right) f'(u_n) w_n. \quad (14)$$

Уравнение (12) описывает динамику системы внутри симметричного подпространства. Оно одномерно и совпадает с уравнением для одиночного отображения. Устойчивость по отношению к тангенциальным возмущениям для исходной системы описывается показателем Ляпунова для уравнения (12), который будем называть тангенциальным показателем Ляпунова

$$\Lambda_{\tau}^c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |f'(u_n)|. \quad (15)$$

Выражения (13), (14) описывают динамику системы в трансверсальном направлении в окрестности подпространства  $I_c$ . Синхронным колебаниям соответствует нулевое

решение системы (13), (14), а трансверсальная устойчивость синхронных колебаний определяется устойчивостью этого решения. Поскольку уравнения (13) и (14) идентичны, то синхронные колебания характеризуются двумя одинаковыми трансверсальными показателями Ляпунова

$$\Lambda_{\perp 1,2}^c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| 1 - \frac{3\gamma}{2} f'(u_n) \right|. \quad (16)$$

Выражение (16) можно преобразовать следующим образом:

$$\Lambda_{\perp 1,2}^c = \Lambda_{\tau} + \ln \left| 1 - \frac{3\gamma}{2} \right|. \quad (17)$$

Если параметр связи положителен и его значение находится в интервале  $0 < \gamma < 2/3$ , то трансверсальные показатели Ляпунова меньше тангенциального. Поэтому любые синфазные периодические решения для системы (1) трансверсально устойчивы, а синфазные хаотические решения устойчивы только для достаточно больших значений параметра связи  $\gamma$ . Причем все бифуркации, сопровождающие потерю устойчивости в трансверсальном к симметричному подпространству направлении, являются вырожденными: бифуркационное условие выполняется одновременно для двух характеристических показателей.

### 3. Бифуркации режимов полной синхронизации

Рассмотрим, как в системе (1) формируются режимы синхронного хаоса. Будем использовать только положительные значения параметров  $\lambda$  и  $\gamma < 2/3$ . В одностороннем отображении имеются две неподвижные точки:  $C_1 = \sqrt{\lambda + 0.25} - 0.5$  и  $C_2 = -\sqrt{\lambda + 0.25} - 0.5$ . При значении параметра  $0 < \lambda < 0.75$  точка  $C_1$  является устойчивой. В дальнейшем, при увеличении  $\lambda$  на базе точки  $C_1$  наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаотическим колебаниям. Точка  $C_2$  остается неустойчивой при любых положительных значениях параметра  $\lambda$ . В кольце из трех отображений при нулевой связи существует 8 неподвижных точек:  $1C_1^c = (C_1; C_1; C_1)$ ,  $1C_2^c = (C_2; C_2; C_2)$ ,  $1C_1^x = (C_1; C_2; C_2)$ ,  $1C_2^x = (C_2; C_1; C_1)$ ,  $1C_1^y = (C_2; C_1; C_2)$ ,  $1C_2^y = (C_1; C_2; C_1)$ ,  $1C_1^z = (C_2; C_2; C_1)$ ,  $1C_2^z = (C_1; C_1; C_2)$ . Из них только точка  $1C_1^c$  при  $\lambda < 0.75$  является устойчивой, остальные точки остаются неустойчивыми при любых значениях параметров  $\lambda$  и  $\gamma$ . На базе этой неподвижной точки формируются хаотические аттракторы, соответствующие режиму полной хаотической синхронизации.

Рассмотрим бифуркации режимов, возникших на базе неподвижной точки  $1C_1^c$  (в дальнейшем нижний индекс для данной орбиты будем опускать), при фиксированном положительном значении параметра связи и возрастании  $\lambda$ . Как следует из формул (16), (17), любые бифуркации, сопровождающиеся сменой знака показателя Ляпунова, происходят дважды. Вначале в тангенциальном к подпространству симметрии направлении, когда один синхронный режим сменяется другим синхронным режимом, затем в трансверсальном направлении, когда в результате бифуркации в окрестности симметричного подпространства возникает предельное множество, соответствующее несинхронным колебаниям. Бифуркации внутри симметричного под-

пространства полностью повторяют соответствующие бифуркации одиночного отображения. Таким образом, для синхронных колебаний, как и для одиночного отображения, наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся переходом к хаосу, и бифуркации слияния лент хаотических аттракторов в закритической области. Бифуркационные условия тангенциальных бифуркаций зависят только от параметра  $\lambda$ , следовательно, на плоскости параметров  $(\gamma, \lambda)$  все бифуркационные линии располагаются горизонтально.

Бифуркационные линии для синхронных регулярных и хаотических режимов изображены на рис.1. Сплошные горизонтальные линии соответствуют бифуркациям удвоения периода для периодических орбит основного семейства внутри симметричного подпространства:  $L_{1-2}^1$  ( $1C^c \rightarrow 2C^c$ ),  $L_{2-4}^1$  ( $2C^c \rightarrow 4C^c$ ),  $L_{4-8}^c$  ( $4C^c \rightarrow 8C^c$ ),  $L_{8-16}^c$  ( $8C^c \rightarrow 16C^c$ ). Линии бифуркаций удвоения периода накапливаются к прямой  $L_{chaos}^1$ , разделяющей области регулярного и хаотического поведения. В закритической области можно наблюдать бифуркации слияния лент хаотических аттракторов. На рис. 1 обозначены две из них (пунктирные линии):  $L_{4-2}$  – бифуркация слияния лент синхронного четырехленточного аттрактора, после которой появляется синхронный двухленточный аттрактор, и  $L_{2-1}$  – бифуркация слияния лент синхронного двухленточного аттрактора, после которой появляется синхронный одноленточный аттрактор. Кроме того, в закритической области наблюдаются несколько окон периодичности, в которых существуют периодические орбиты и возникшие на их основе хаотические аттракторы.

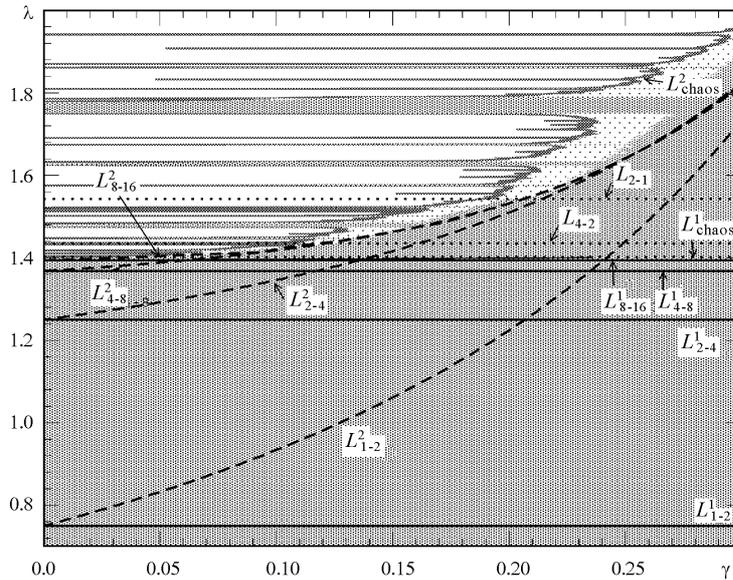


Рис. 1. Бифуркационные линии на плоскости управляющих параметров для режимов полной синхронизации. Сплошные горизонтальные линии  $L_{N-2N}^1$  соответствуют тангенциальным бифуркациям удвоения периода ( $N$  – период бифурцирующей орбиты), штриховые линии  $L_{N-2N}^2$  соответствуют трансверсальным бифуркациям периода. Пунктирные горизонтальные линии обозначают тангенциальные бифуркации в закритической области, в том числе линию перехода к хаосу  $L_{chaos}^1$ . Линия  $L_{chaos}^2$  – линия бифуркации прорыва, правее которой наблюдается область негрубой (обозначена светло-серым цветом) и грубой (обозначена серым цветом) синхронизации

Таким образом, в результате каскада тангенциальных бифуркаций удвоения периода в симметричном подпространстве формируется хаотический аттрактор, соответствующий режиму синхронного хаоса. Однако, как уже было замечено выше, каждая из периодических орбит претерпевает бифуркацию дважды. Вторая бифуркация удвоения происходит в трансверсальном направлении, когда меняет знак трансверсальный показатель Ляпунова. Так, на линии  $L_{1-2}^2$  (трансверсальные бифуркации показаны на рис.1 штриховыми линиями) сразу два мультипликатора седловой орбиты  $1C^c$  становятся равными  $(-1)$ , соответствующие собственные векторы направлены перпендикулярно симметричному подпространству, они образуют базис двумерного отталкивающего инвариантного многообразия для орбиты  $1C^c(x + y + z = 0)$ . В результате исходная орбита превращается в репеллер, а в его окрестности возникают три седловые орбиты периода два:  $2C_1$ ,  $2C_2$  и  $2C_3$ . При значении параметров  $\lambda = 0.962$ ,  $\gamma = 0.05$  точки орбит имеют следующие значения:  $2C_1 = \{(0.6; 0.904; 0.177)(0.6; 0.177; 0.904)\}$ ,  $2C_2 = \{(0.904; 0.6; 0.177)(0.177; 0.6; 0.904)\}$ ,  $2C_3 = \{(0.904; 0.177; 0.6)(0.177; 0.904; 0.6)\}$ . Видно, что каждая из этих орбит является самосимметричной относительно одного из преобразований симметрии  $T_x : 2C_1 \rightarrow 2C_1$ ,  $T_y : 2C_2 \rightarrow 2C_2$ ,  $T_z : 2C_3 \rightarrow 2C_3$ , при этом орбиты являются симметричными друг другу относительно преобразования вращения  $R_+ : 2C_1 \rightarrow 2C_2 \rightarrow 2C_3 \rightarrow 2C_1$ . Структура фазового пространства после указанной бифуркации показана на рис.2.

Неустойчивые многообразия вновь появившихся орбит  $2C_i$  подходят к подпространствам частичной симметрии, идут вдоль них и опираются на точки орбиты удвоенного периода  $2C^c$  (см. рис.2). При дальнейшем изменении параметров точки орбит  $2C_i$  отходят от подпространства полной симметрии.

Аналогичные бифуркации происходят и со всеми другими орбитами из симметричного подпространства. Так, на линии  $L_{2-4}^2$  (см. рис. 1) синхронная седловая орбита периода два претерпевает трансверсальную бифуркацию удвоения периода

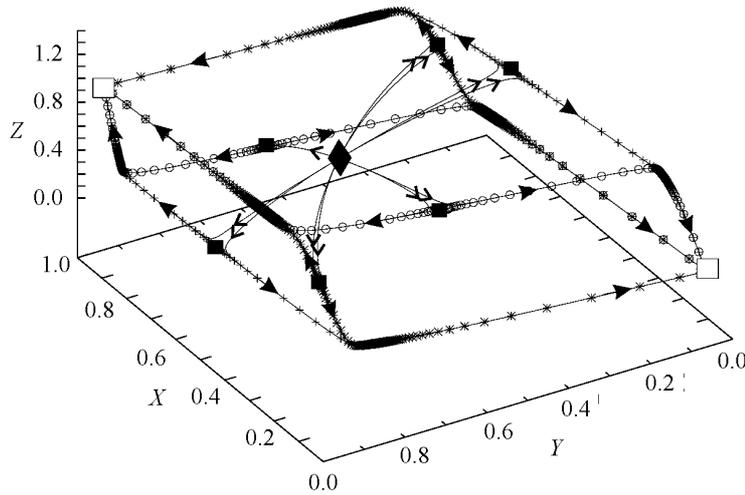


Рис. 2. Фазовый портрет в окрестности  $1C^c$  после первой из трансверсальных бифуркаций удвоения периода  $1C^c \rightarrow 2C_i$ . Изображены: репеллер  $1C^c$  (◆), три седловые орбиты  $2C_i$  (■) и устойчивая орбита  $2C^c$  (□)

( $2C^c \rightarrow 4C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), в результате которой данная орбита становится репеллером, а в ее окрестности появляются три самосимметричные седловые орбиты периода четыре. На линиях  $L_{4-8}^2$  и  $L_{8-16}^2$  подобные бифуркации претерпевают орбиты  $4C^c$  и  $8C^c$ . Линии, соответствующие трансверсальным бифуркациям орбит большего периода, на рисунке не приведены, однако они располагаются в непосредственной близости от линии  $L_{8-16}^2$ . Эта линия с достаточно высокой точностью может служить границей области параметров, за которой все синхронные периодические орбиты основного семейства претерпели трансверсальную бифуркацию удвоения периода и стали репеллерами. Вновь возникшие несинхронные орбиты в дальнейшем не претерпевают других бифуркаций и остаются седловыми при всех рассматриваемых значениях параметров. Наконец, на линии  $L_{chaos}^2$ , которая имеет весьма сложную изрезанную форму благодаря наличию окон периодичности, трансверсальную бифуркацию претерпевает хаотический аттрактор, располагающийся в симметричном подпространстве. Два его трансверсальных показателя Ляпунова становятся положительными. При этом синхронный хаотический аттрактор перестает быть притягивающим и трансформируется в хаотическое седло [19, 20], которое становится частью пузырящегося хаотического аттрактора, соответствующего режиму несинхронного хаоса. Левее линии  $L_{chaos}^2$  режим полной синхронизации хаоса не наблюдается.

Описанные выше бифуркации предельных множеств из подпространства полной симметрии схожи с бифуркациями синхронных режимов в системе из двух отображений [14, 17], однако имеют свои особенности. В обоих случаях периодические орбиты претерпевают два каскада бифуркаций удвоения периода: первый – в тангенциальном направлении, в результате которого в симметричном подпространстве формируется синхронный хаотический аттрактор, второй – в трансверсальном направлении, в результате которого орбиты, входящие в замыкание аттрактора, становятся репеллерами. Различия в бифуркационных механизмах заключаются в следующем.

- В системе из трех отображений трансверсальные бифуркации удвоения периода являются вырожденными и приводят к появлению не одной (как для двух отображений), а сразу трех седловых орбит удвоенного периода.
- Вновь возникшие несинхронные орбиты остаются седловыми при всех значениях параметров, тогда как в системе из двух отображений данные орбиты становились устойчивыми через бифуркацию вил, что приводило к развитию мультистабильности в системе.

Каскад трансверсальных бифуркаций удвоения периода ведет к локальной изрешеченности синхронного хаотического аттрактора, поскольку входящие в его замыкание периодические орбиты основного семейства становятся репеллерами. При этом происходит постепенное разрушение режима полной синхронизации хаоса.

#### **4. Явления, сопровождающие разрушение полной синхронизации хаоса**

Рассмотрим, как описанный выше бифуркационный сценарий влияет на наблюдаемые в системе (1) явления, сопровождающие потерю полной синхронизации хаоса. Как следует из формулы (16), при достаточно сильной связи любые предельные множества, располагающиеся на прямой  $I_c$  будут трансверсально устойчивыми. Выберем значение параметра  $\lambda = 1.67$ , соответствующее режиму одноленточного

хаотического аттрактора в одиночном отображении. В этом случае аттрактор включает в себя все синхронные седловые орбиты  $2^N C^c$  ( $N = 0, 1, 2, \dots$ ), на базе которых данный аттрактор был сформирован. При  $\gamma > 0.29$  синхронный хаотический аттрактор, а также входящие в его замыкание седловые периодические орбиты основного семейства (см. рис. 1), характеризуются отрицательными трансверсальными показателями Ляпунова. В этом случае в ансамбле осцилляторов наблюдается режим полной синхронизации хаоса, когда колебания во всех трех отображениях идентичны, причем данный режим является грубым в том смысле, что он сохраняется при добавлении в правые части уравнений малого шума. Будем теперь постепенно уменьшать значение параметра связи, следя за происходящими бифуркациями и теми изменениями в поведении системы, которые за ними следуют. Уменьшение связи ведет к тому, что седловые орбиты, на базе которых аттрактор был сформирован, начинают терять трансверсальную устойчивость, когда показатель Ляпунова  $\Lambda_{\perp}^c$ , подсчитанный в точках седловой периодической орбиты из указанного семейства, становится положительным. Так, значение  $\gamma = 0.29$  соответствует вырожденной бифуркации удвоения периода для синхронной седловой орбиты периода один  $1C^c$  (линия  $L_{1-2}^2$  на рис. 1), после чего орбита  $1C^c$  становится репеллером. В окрестности репеллера  $1C^c$  формируется область локальной трансверсальной неустойчивости: при попадании в его непосредственную окрестность траектория вдоль неустойчивых многообразий орбиты будет уходить от симметричного подпространства, возвращаясь впоследствии в его окрестность за счет глобальной трансверсальной устойчивости (показатель Ляпунова  $\Lambda_{\perp}^c$  для хаотического аттрактора остается отрицательным). Считается, что бифуркации, подобные бифуркации орбиты  $1C^c$  индуцируют в системе локальную изрешеченность хаотического аттрактора, влекущую негрубость режима синхронизации [14, 16]. Теоретически это верно, поскольку при попадании в малую окрестность репеллера  $1C^c$  траектория под действием сколь угодно малого шума выбрасывается вдоль неустойчивого трансверсального многообразия точки  $1C^c$  в сторону от подпространства полной симметрии. Тем не менее, как показывают численные исследования, данная бифуркация не вызывает немедленного экспериментально наблюдаемого изменения в поведении системы. Колебания в системе остаются синхронными и после бифуркации, добавление шума не влияет существенно на динамику ансамбля, а малые трансверсальные возмущения быстро затухают. Данная ситуация показана на рис. 3, а. На нем представлена зависимость разностей динамических переменных  $x - y$  и  $x - z$  от времени при  $\gamma = 0.27$ . В систему вносился аддитивный шум интенсивностью  $10^{-6}$  и равномерным распределением, а также в начальный момент вводилось отклонение от синхронной траектории интенсивностью  $10^{-3}$ . Из рисунка видно, что первоначальные возмущения затухают в течение приблизительно 30 итераций и в системе устанавливаются синхронные колебания. Причины отсутствия наблюдаемого нарушения синхронизации заключаются, во-первых, в малой вероятности попадания траектории в непосредственную окрестность репеллера и, во-вторых, в значительной тангенциальной неустойчивости репеллера, в результате которой фазовая точка быстро «сносится» с его неустойчивого трансверсального многообразия и попадает в область трансверсального притяжения.

Перечисленные выше особенности иллюстрирует рис. 4. На рис. 4, а приведена плотность распределения на хаотическом аттракторе, отображающая, насколько

ко часто траектория посещает те или иные точки аттрактора. Точки периодических орбит основного семейства  $1C^c$ ,  $2C^c$  и  $4C^c$  обозначены вертикальными линиями. График плотности распределения носит сильно изрезанный характер, причем точки максимумов не совпадают с точками периодических орбит. На рис. 4, б показана эволюция разности двух переменных  $x$  и  $y$  от времени. В качестве начальных условий выбирались значения  $x = y = z = 1C^c$  (серая линия) и  $x = y = z = P$ , где  $P = 0.81$  – одна из произвольных точек аттрактора, не соответствующая какой-либо периодической орбите (черная линия). В обоих случаях в начальный момент времени вводилось трансверсальное возмущение интенсивностью порядка  $10^{-5}$ . Поведение системы по отношению к первоначальному возмущению качественно различается на малых временах (примерно 20–30 итераций) и одинаково на больших интервалах времени. В первом случае для начальных условий, выбранных в окрестности репеллера, наблюдается почти экспоненциальный рост начального возмущения в течение примерно 20 итераций, который затем сменяется их затуханием до нуля. При выборе других начальных условий нарастания возмущений не наблюдается.

При уменьшении связи аналогичные бифуркации происходят с синхронными орбитами больших периодов:  $4C^c \rightarrow 8C_i$  (линия  $L_{4-8}^2$ :  $\gamma = 0.26$ ),  $2C^c \rightarrow 4C_i$  (линия  $L_{2-4}^2$ :  $\gamma = 0.259$ ) и  $8C^c \rightarrow 16C_i$  (линия  $L_{8-16}^2$ :  $\gamma = 0.26$ ). При уменьшении связи  $\gamma \lesssim 0.259$  в репеллеры превращаются и остальные седловые орбиты основного семейства:  $2^N C^c \rightarrow 4^N C_i$  ( $N = 4, 5, \dots$ ). Это приводит к локальной изрешеченности синхронного хаотического аттрактора, в результате чего, начиная со значений  $\gamma \simeq 0.255$ , режим грубой синхронизации хаоса сменяется режимом негрубой синхронизации. Синхронизация продолжает существовать, но только при полном отсутствии постоянно действующих возмущений в системе. Добавление сколь угодно малого шума (в наших экспериментах интенсивность шума выбиралась примерно равной  $10^{-6}$ ) приводит к тому, что фазовая траектория время от времени сильно отклоняется от симметричного подпространства. При этом происходит нерегулярное чередование во времени длительных интервалов синхронного поведения с короткими всплесками несинхронных колебаний. Так как трансверсальный показатель Ляпунова  $\Lambda_{\perp}^c$  остается отрицательным, то в системе без шума после переходного процесса устанавливается режим синхронных колебаний. На рис. 3, б изображена динамика системы при  $\gamma = 0.24$  с малым шумом, действующим в интервале времени ( $0 < n < 15000$ ), затем в момент времени  $n = 15000$  шум выключается (момент выключения шума отмечен на рисунке вертикальной пунктирной линией). Режим негрубой синхронизации сохраняется до значений связи  $\gamma \simeq 0.217$ , при этом с уменьшением связи индуцированное шумом пузыряющееся поведение становится более развитым: интервалы синхронизации становятся короче, выбросы происходят чаще и фазовая точка выбрасывается все дальше от симметричного подпространства, то есть аттрактор «утолщается». При  $\gamma = 0.217$  (линия  $L_{\text{chaos}}^2$ ) два трансверсальных показателя Ляпунова хаотического аттрактора  $\Lambda_{\perp}^c$  становятся положительными, что соответствует вырожденной бифуркации прорыва (blowout bifurcation). В результате синхронный хаотический аттрактор сменяется так называемым хаотическим седлом [21]. После бифуркации прорыва наблюдается режим перемежающейся синхронизации (on-off intermittency) без какого-либо шумового воздействия. С этого момента существенная разница в поведении системы без шума и с малым шумом исчезает. Временные реализации для разностей динамических переменных в системе с шу-

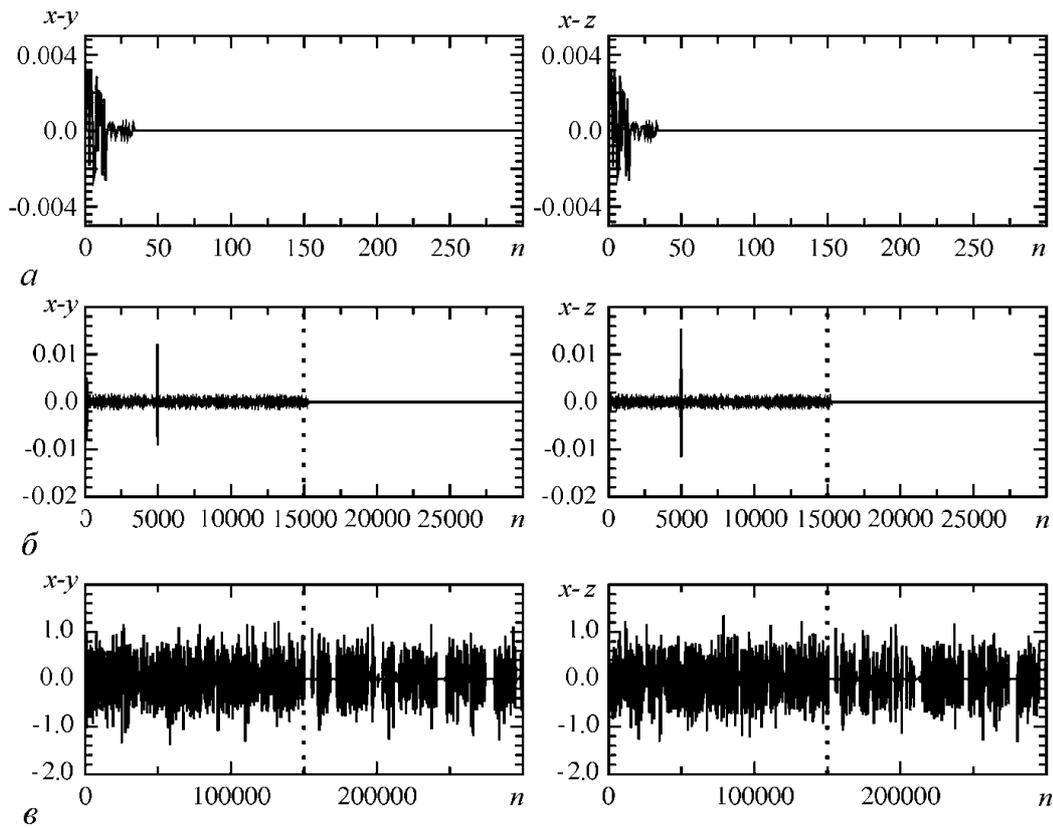


Рис. 3. Временные реализации для разностей динамических переменных, построенные для следующих значений параметра связи  $\gamma$ : 0.27 (а); 0.24 (б); 0.215 (в). На рис. б и в вертикальная пунктирная линия отделяет интервалы времени работы системы с шумом (слева от линии) и без шума (справа)

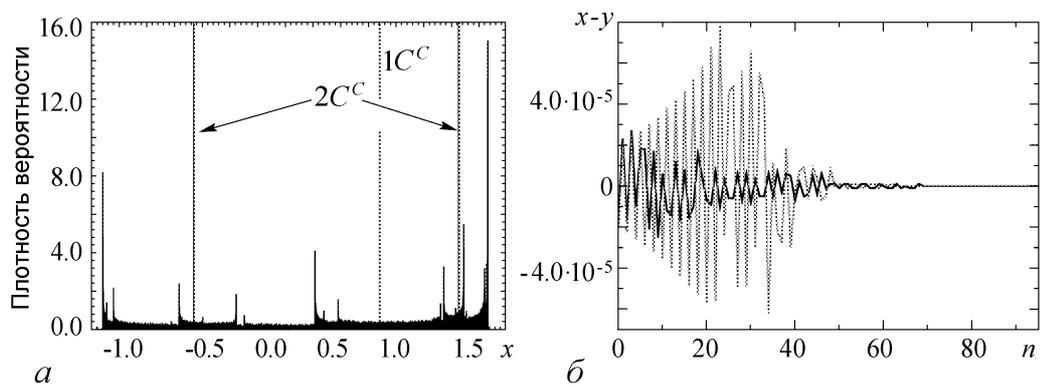


Рис. 4. а – Плотность распределения фазовых точек на синхронном аттракторе. Вертикальные линии отмечают расположение периодических орбит небольших периодов. б – Эволюция малого трансверсального возмущения при выборе начальных условий в окрестности орбиты  $1C^c$  (серый цвет) и в произвольной точке аттрактора (черный цвет)

мом (до пунктирной линии) и без шума (после пунктирной линии) изображены на рис. 3, в. Как видно из рисунка, малый шум больше не влияет кардинальным образом на динамику системы. И при наличии шума и при его отсутствии хаотические колебания более не являются синхронными. Таким образом, бифуркация прорыва приводит к разрушению режимов хаотической синхронизации.

Аналогичный сценарий разрушения режима синхронизации хаоса наблюдается и при других значениях параметра  $\lambda$ . Его существенные черты заключаются в следующем.

- Разрушение синхронизации хаоса происходит в два этапа. На первом этапе, в результате трансверсальных бифуркаций удвоения периодических орбит, хаотический аттрактор изрешечивается. При этом синхронизация продолжает существовать, но становится чувствительной к действию малого шума (негрубая синхронизация). Область грубой синхронизации хаотических и регулярных колебаний отмечена на рис. 1 серым цветом. Левее этой области располагается зона негрубой синхронизации хаоса, которая отмечена на том же рисунке светло-серым цветом. На втором этапе трансверсальный показатель Ляпунова для хаотического аттрактора становится положительным. Синхронный хаотический аттрактор трансформируется в хаотическое седло.

- Правая граница зоны негрубой синхронизации хаоса, как это следует из численного эксперимента, значительно смещена относительно линии первой из трансверсальных бифуркаций ( $L_{1-2}^2$ ) и располагается достаточно близко к линии накопления трансверсальных бифуркаций (она расположена вблизи линии  $L_{8-16}^2$ ). В режиме развитого хаоса ( $\lambda > 1.7$ ) граница области негрубой синхронизации смещается относительно линии накопления бифуркаций в сторону меньшей связи. Это явление может быть связано с тем, что в области развитого хаоса седловые орбиты основного семейства перестают играть принципиальную роль в поведении системы.

- В отличие от сценария разрушения синхронизации хаоса в системе из двух отображений [14], а также трех отображений с несимметричной связью [6], в рассматриваемом случае отсутствует этап изрешечивания бассейна притяжения хаотического аттрактора. Отсутствие данного этапа обусловлено отмеченными выше особенностями бифуркаций седловых орбит по сравнению с соответствующими бифуркациями для системы из двух отображений.

### Заключение

В результате двухпараметрического бифуркационного анализа, а также численного исследования наблюдаемых колебательных режимов выявлены сходство и различия в механизмах формирования и разрушения режимов полной синхронизации в системе из трех отображений с симметричной диффузионной связью по сравнению с другими рассмотренными в литературе аналогичными системами [6, 14]. Во всех рассмотренных случаях формирование режимов полной синхронизации хаоса происходит через каскад тангенциальных бифуркаций удвоения периода основного семейства синхронных периодических орбит, а разрушение этих режимов – через каскад трансверсальных бифуркаций тех же орбит. Исследование бифуркационного механизма разрушения режима полной синхронизации хаоса показало, что потеря

трансверсальной устойчивости синхронным хаотическим аттрактором происходит в результате вырожденной бифуркации прорыва, при которой сразу два трансверсальных показателя Ляпунова становятся положительными. Эта бифуркация предваряется серией вырожденных бифуркаций удвоения периода седловых периодических орбит основного семейства, результатом которых является формирование в аттракторе областей локальной трансверсальной неустойчивости, что, в свою очередь, приводит к негрубости режима хаотической синхронизации. В отличие от системы с другим типом связи [6] при разрушении полной синхронизации хаоса отсутствует стадия изрешечивания бассейна притяжения синхронного хаотического аттрактора.

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ и Американского фонда гражданских исследований (CRDF, грант REC-006).*

### Библиографический список

1. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator system // *Progress of Theoretical Physics*. 1983. Vol. 69. P. 32.
2. *Пиковский А.С.* О взаимодействии странных аттракторов. Препринт ИПФ АН СССР. Горький, 1983.
3. *Кузнецов С.П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1985. Т. 28. С. 991.
4. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1986. Т. 29. С. 1050.
5. *Hasler M., Maistrenko Y., Popovich O.* Simple example of partial synchronization of chaotic systems // *Phys. Rev E*. 1998. Vol. 58. P. 6843.
6. *Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L.S., Abrabanel H. D. I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51. P. 980.
7. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 53. P. 4528.
8. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А.* Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // *Радиотехника и электроника*. 1991. Т. 36. С. 338.
9. *Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Postnov D. E., Safonova M. A.* Synchronization of chaos // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1992. Vol. 2. P. 633.
10. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett*. 1996. Vol. 76. P. 1804.
11. *Belykh V. N., Mosekilde E.* One-dimensional map lattices: synchronization, bifurcations, and chaotic structures // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 54. P. 3196.
12. *Brown R., Rulkov N. F.* Synchronization of chaotic systems: transverse stability of trajectories in invariant manifolds // *Chaos*. 1997. Vol. 3. P. 395.
13. *Andreyev Y. V., Dimitriev A. S.* Conditions for global synchronization in lattices of chaotic elements with local connections // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 1999. Vol. 9. P. 2165.

14. *Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V.* Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. P. 1014.
15. *Astakhov V., Hasler M., Kapitaniak T., Shabunin A., Anishchenko V.* Effect of parameter mismatch on the mechanism of chaos synchronization loss in coupled systems // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. P. 5620.
16. *Maistrenko Y., Maistrenko V., Popovich O., Mosekilde E.* Desynchronization of chaos in coupled logistic maps // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60. P. 2817.
17. *Astakhov V., Shabunin A., Klimshin A., Anishchenko V.* In-phase and antiphase complete chaotic synchronization in symmetrically coupled discrete maps // *Discrete Dynamics in Nature and Society.* 2000. Vol. 7. P. 215.
18. *Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S.* Multistability formation and synchronization loss in coupled Henon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. P. 056212.
19. *Ashwin P., Buescu J., Stewart I.* Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol. 193. P. 126.
20. *Ashwin P., Buescu J., Stewart I.* From attractors to chaotic saddle: a tale of transverse instability // *Nonlinearity.* 1996. Vol. 9. P. 703.
21. *Venkataramani S.C., Hunt B.R., Ott E.* Bubbling transition // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54. P. 1346.
22. *Taborov A.V., Maistrenko Y.L., Mosekilde E.* Partial synchronization in a system of coupled logistic maps // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2000. Vol. 10. P. 1051.

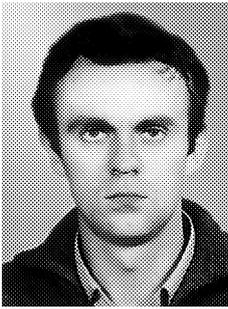
*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 15.07.2005  
После доработки 17.10.2005*

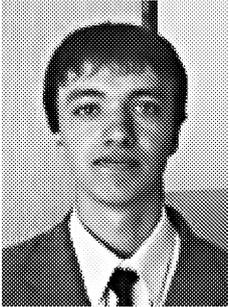
## **TWO-PARAMETRIC BIFURCATIONAL ANALYSIS OF REGIMES OF COMPLETE SYNCHRONIZATION IN ENSEMBLE OF THREE DISCRETE-TIME OSCILLATORS**

*A. Shabunin, S. Nikolaev, V. Astakhov*

We investigate mechanisms of appearance and disappearance of regimes of complete synchronization of chaos in a ring of three logistic maps with symmetric diffusive coupling. Two-parametric bifurcational analysis is carried out and typical oscillating regimes and transitions between them are considered.



*Шабунин Алексей Владимирович* – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, кандидат физико-математических наук (1998). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций. E-mail: alexey@chaos.ssu.runnet.ru



*Николаев Сергей Михайлович* – является аспирантом кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: хаотические и квазипериодические колебания, синхронизация колебаний, бифуркационный анализ, мультистабильность.



*Астахов Владимир Владимирович* – окончил Саратовский государственный университет (1980). Доктор физико-математических наук (1999), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях. E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru