



О СВОЙСТВАХ СКЕЙЛИНГА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ШУМА В ОТОБРАЖЕНИИ ОКРУЖНОСТИ С ЧИСЛОМ ВРАЩЕНИЯ, ЗАДАНЫМ ЗОЛОТЫМ СРЕДНИМ

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Ю.В. Седова

В работе исследованы особенности скейлинга, связанные с влиянием аддитивного шума на критическое отображение окружности с числом вращения, равным золотому среднему. На основании ренормгруппового подхода Хэма и Грэхэма [1] получена улучшенная числовая оценка для константы скейлинга, ответственной за влияние шума $\gamma = 2.3061852653$. Уменьшение амплитуды шума на эту константу обеспечивает возможность наблюдения каждого следующего уровня фрактальной структуры, что отвечает увеличению характерного масштаба времени на фактор $(\sqrt{5} + 1)/2$. Представлены численные результаты, демонстрирующие наличие ожидаемого скейлинга на фазовых портретах аттрактора с шумом, графиках «чертовой лестницы» и ляпуновских картах.

Введение

Отображение окружности

$$x_{n+1} = x_n + r - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x_n \pmod{1} \quad (1)$$

– одна из фундаментальных моделей, применяемая для описания многих систем в современной нелинейной динамике [2–5]. В частности, это отображение описывает автогенератор, находящийся под периодическим воздействием [6, 7], контакт Джозефсона в поле микроволнового излучения [8, 9], волны пространственного заряда в твердом теле [9], маятник с затуханием под внешним воздействием [10]. В теоретических исследованиях, касающихся биологических и медицинских проблем, отображение окружности появляется как модель для описания динамики сердца в присутствии конкуренции двух пейсмекеров, управляющих ритмом [11, 12].

Отображение окружности должно рассматриваться не только как модель определенного качественного типа поведения. Как представитель класса универсальности, ассоциирующегося с переходом к хаосу через квазипериодическое движение,

оно адекватно передает количественные закономерности данного перехода. Это заключение вытекает из ренормгруппового подхода (РГ) [13, 14], который представляет собой эффективный и мощный теоретический инструмент для анализа глубоких и фундаментальных особенностей динамики между порядком и хаосом. В частности, РГ-анализ раскрывает такое характерное свойство динамики, как масштабная инвариантность (скейлинг) для тонких фрактальных структур в фазовом пространстве и пространстве параметров, которые связаны с переходами к хаосу. В нелинейной динамике метод РГ был впервые введен Фейгенбаумом [15–17] в применении к удвоениям периода и позднее последовательно развит для анализа различных типов переходов к хаосу, включая другие классы универсальности с удвоениями периода [18–21], перемежаемость [22, 23], квазипериодичность [24, 25], явления сложной аналитической динамики [26–28], связанные системы [12, 29, 30].

Применительно к переходу к хаосу через разрушение квазипериодического движения, наиболее подробные теоретические и экспериментальные исследования относятся к случаю, когда отношение основных частот задано иррациональным числом $w = (\sqrt{5} - 1)/2$, известным как золотое среднее. В отображении окружности это отвечает квазипериодическому режиму с числом вращения

$$\rho(r, K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}, \quad (2)$$

заданным указанной константой w . (При вычислении величины ρ операция взятия модуля в уравнении (1) игнорируется.)

Выбор именно этого иррационального числа оправдан, во-первых, простотой и прозрачностью соответствующего теоретического анализа и, во-вторых, тем фактом, что в данном случае тонкие структуры пространства параметров, изучение которых составляет предмет рассмотрения в теоретических исследованиях или в экспериментах, являются различимыми лучше, чем при других отношениях частот.

Известен ряд экспериментальных исследований, в которых многие особенности критической динамики вблизи точки перехода к хаосу через квазипериодический режим с числом вращения золотое среднее, предсказанные на основе РГ-анализа, были зарегистрированы, например, в конвекции жидкости и в динамике электронных осцилляторов под внешним воздействием [32–34]. Это касается таких аспектов, как детали структуры пространства параметров (языки Арнольда), скейлинг, мультифрактальные свойства критического квазипериодического движения, спектр Фурье и т.д.

Надо заметить, однако, что все реальные экспериментальные системы всегда функционируют в присутствии воздействующего на них шума. Учет шума является вопросом принципиального значения при тщательном анализе явлений на пороге хаоса, потому что шум «замывает» самые тонкие детали наблюдаемых фрактальных структур. В частности, это обстоятельство было специально отмечено в литературе в отношении контактов Джозефсона [35].

Теоретический подход для описания влияния шума в рамках РГ-анализа был предложен Кратчфилдом с соавторами и Шрайманом с соавторами [36, 37] применительно к переходу к хаосу через удвоения периода в диссипативных системах. Эти авторы ввели в рассмотрение универсальный фактор $\gamma_F = 6.61903\dots$, ответственный за скейлинговые свойства динамики относительно влияния шума. Смысл его состоит в том, что уменьшение амплитуды шума на этот фактор обеспечивает возможность наблюдения еще одного уровня каскада удвоения периода. Позднее аналогичный

подход был предложен для нескольких других типов критического поведения на пороге хаоса [1, 38–41].

В частности, в работе [1] Хэмм и Грэхэм развили РГ-анализ для перехода к хаосу в диссипативных системах через разрушение квазипериодических движений с отношением частот, заданным золотым средним, и оценили соответствующий фактор скейлинга для шума $\gamma_{GM} = 2.30619$. Уменьшение интенсивности шума на эту константу дает возможность различить еще один уровень фрактальной структуры, связанной с увеличением характерного масштаба времени на фактор $W = w^{-1} = (\sqrt{5} + 1)/2$. Помимо упомянутой статьи, нам известны только две работы, специально посвященные влиянию шума на отображение окружности [35, 42]. Будучи опубликованы раньше работы Хэмма и Грэхэма, они содержат только эмпирические результаты численного моделирования, без обоснования на базе РГ-анализа.

Цель настоящей статьи состоит в подробном рассмотрении скейлинговых свойств, вытекающих из РГ-анализа и характерных для отображения окружности под влиянием шума вблизи квазипериодической орбиты с числом вращения «золотое среднее». Раздел 1 посвящен качественному обсуждению результатов численного моделирования стохастической версии отображения окружности с аддитивным шумом. В разделе 2 представлен РГ-анализ отображения окружности вблизи критической точки, отвечающей золотому среднему, при наличии шума, который основан на одном из подходов, предложенных Хэмом и Грэхэмом. В частности, мы приводим существенно улучшенное числовое значение основной универсальной константы, ответственной за свойства скейлинга по отношению к шуму. В разделе 3 рассмотрены выводы, которые можно сделать на основе РГ-анализа в применении к отображению окружности с шумом. Обсуждаются компьютерные иллюстрации, включая портреты аттрактора с шумом, диаграммы типа «чертовой лестницы», карты ляпуновского показателя на плоскости параметров вблизи критической точки «золотое среднее» на различных масштабах и при разных уровнях шума.

1. Влияние шума на отображение окружности: качественные результаты

Как известно, в отображении окружности (1) критическое квазипериодическое движение на пороге хаоса с числом вращения $w = (\sqrt{5} - 1)/2$ имеет место при следующих значениях параметров [13, 14, 43, 44]:

$$(r, K)_c = (0.60666106347011201228\dots, 1). \quad (3)$$

Будем называть эту точку критической точкой типа GM (Golden Mean – «золотое среднее»).

На рис. 1, *a* приведена карта динамических режимов отображения окружности (1) на плоскости параметров (r, K) . Хорошо видны области периодичности в виде характерных языков (языки Арнольда). Для основных языков синхронизации на карте указаны числа вращения, которые находятся по формуле (2). Также на карте режимов отмечена критическая линия $K = 1$ и указано расположение критической точки GM.

Рис. 1, *б* представляет собой ляпуновскую карту отображения окружности на плоскости параметров (r, K) . Ляпуновский показатель, отвечающий каждому эле-

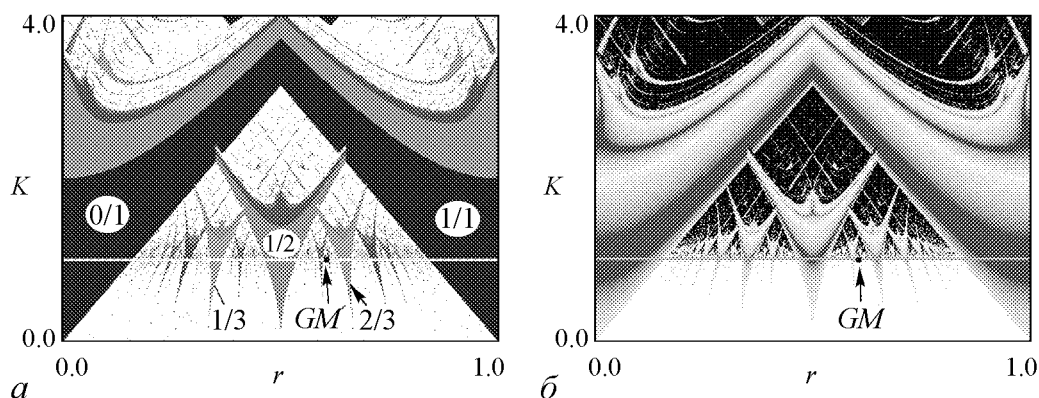


Рис. 1. Карта динамических режимов (а) и карта ляпуновского показателя (б) отображения окружности (1) на плоскости параметров (r, K) . Цифрами на диаграмме (а) указаны числа вращения в основных языках синхронизации. В каждой точке диаграммы (б) ляпуновский показатель, вычисленный по соотношению (4), закодирован в серой гамме. Серые тона определяют отрицательные значения ляпуновского показателя (чем темнее цвет, тем больше абсолютная величина отрицательного показателя). Нулевые значения Λ (квазипериодическая динамика) обозначены белым, а положительные значения (хаос) – черным

менту изображения (пикселю), вычисляется по формуле

$$\Lambda \cong \frac{1}{N} \sum \log |1 - K \cos(2\pi x_n)|. \quad (4)$$

Отрицательные значения Λ закодированы тонами серого цвета: чем темнее цвет, тем больше по модулю значение ляпуновского показателя. Нулевые значения Λ , соответствующие квазипериодической динамике, обозначены белым цветом, а положительные, связанные с хаотической динамикой, – черным. (См. работы [45–48], где описана основная идея ляпуновских карт и приведены другие примеры их использования.)

Введем последовательность ξ_n , которая представляет собой дискретный во времени белый шум. Это означает, что члены последовательности на различных шагах времени предполагаются статистически независимыми. Максимальная величина ξ_n предполагается ограниченной. Среднее для ξ_n равно нулю $\langle \xi_n \rangle = 0$, дисперсия есть некоторая постоянная $\sigma = \sqrt{\langle \xi_n^2 \rangle}$. Рассмотрим следующее стохастическое отображение – отображение окружности в присутствии шума

$$x_{n+1} = x_n + r - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x_n + \varepsilon \xi_n \pmod{1}, \quad (5)$$

где ε характеризует интенсивность добавленного шумового источника.

Если амплитуда шума мала, и исследуется поведение на больших масштабах времени, то конкретная форма распределения вероятности для ξ_n будет несущественна, и поведение системы с шумом будет иметь универсальный характер (этот факт подтвержден и для других критических ситуаций, допускающих анализ в терминах метода РГ, см. [49, 50]). При проведении вычислений будем определять ξ_n как случайную переменную, равномерно распределенную в интервале $[-0.5, 0.5]$; следовательно $\sigma = 1/\sqrt{12}$. При проведении РГ-анализа в следующем разделе будем полагать шум гауссовым.

На рис. 2 представлены ляпуновские карты на плоскости параметров (r, K) при различных значениях интенсивности шума ε . Области периодического поведения, известные в случае отсутствия шума как языки Арнольда, ясно различимы на фрагментах $a, б$ – это окрашенные в серый цвет образования. Между ними, в субкритической области $K < 1$, имеет место квазипериодическая динамика. В присутствии шума периодическая или квазипериодическая динамика в точном смысле не реализуется, но на ляпуновских картах картина характерных областей по-прежнему хорошо различима, по крайней мере, при малых или умеренных шумах, хотя тонкие детали исчезают из-за наличия шума. Введем такую терминологию: будем говорить о шумовом периодическом режиме, когда ляпуновский показатель Λ отрицателен; о шумовом квазипериодическом, если Λ близко к нулю; и о шумовом хаотическом режиме, когда значение Λ положительно. Ляпуновские карты позволяют легко распознавать эти режимы визуально. С этой точки зрения, влияние шума выглядит довольно очевидным: шум стирает тонкие детали картины динамических режимов.

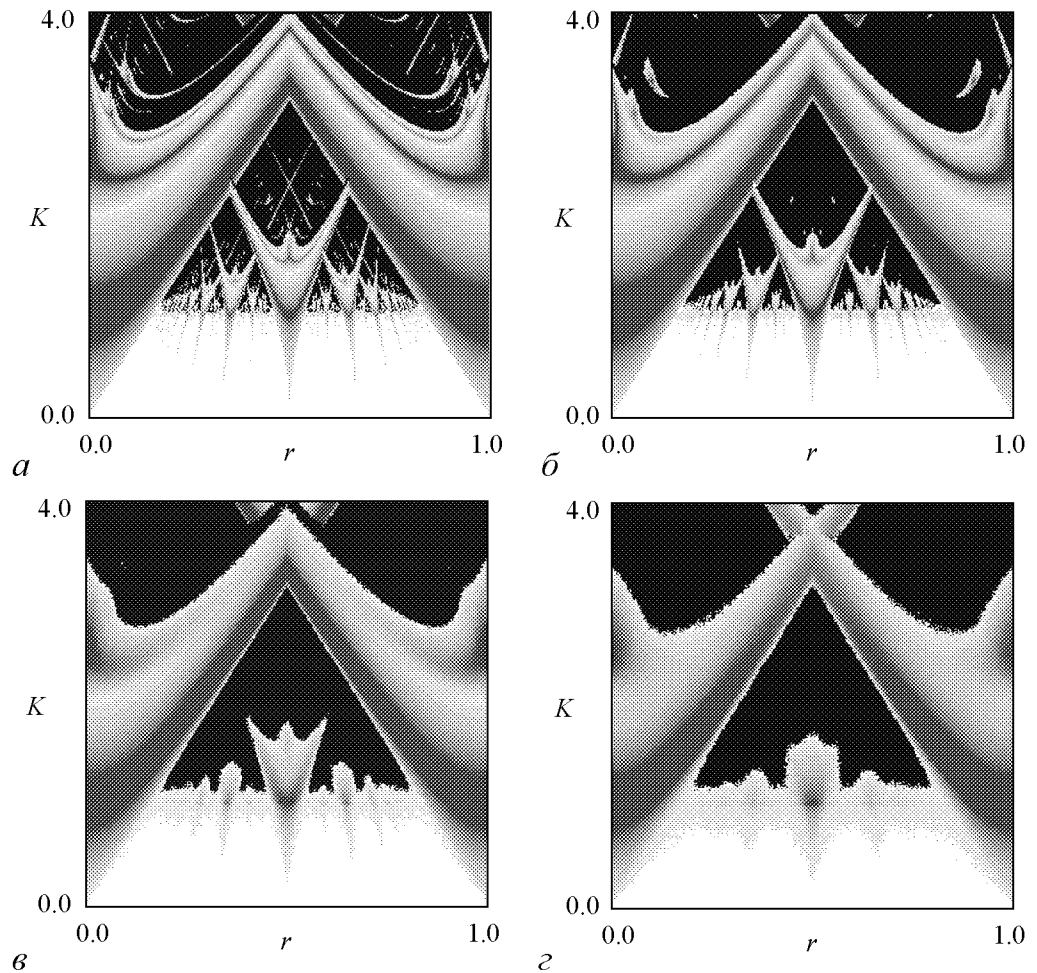


Рис. 2. Ляпуновские карты для отображения (5) на плоскости управляющих параметров r и K . Диаграммы соответствуют последовательному увеличению интенсивности шума ε : 0.001 (a), 0.01 ($б$), 0.05 ($в$) и 0.1 ($г$)

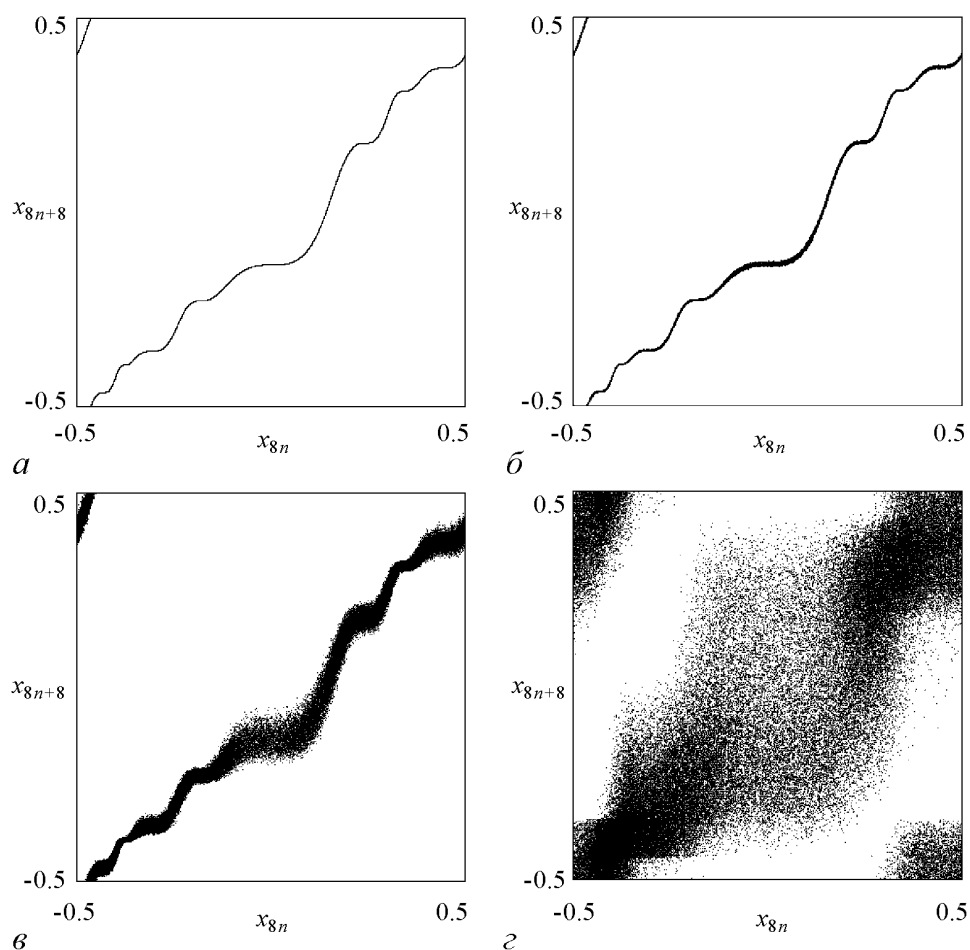


Рис. 3. Портреты аттракторов в критической точке GM отображения (5) на итерационных диаграммах в координатах (x_n, x_{n+F_k}) с $F_k = F_6 = 8$. Фрагмент *a* соответствует динамическому случаю (шум отсутствует), а последующие диаграммы – присутствию шума с последовательно увеличивающейся амплитудой ε : 0.001 (*b*), 0.01 (*c*) и 0.1 (*d*)

На рис. 3 представлены фазовые портреты аттракторов в критической точке типа GM в координатах, которые будут удобны при дальнейшем обсуждении, а именно, x_{n+F_k} в зависимости от x_n , где F_k – одно из чисел Фибоначчи. (Диаграммы на рис. 3 построены для $F_6 = 8$.) Фрагмент *a* соответствует чистому динамическому случаю (шума нет), а фрагменты *b–d* – присутствию шума с нарастающей амплитудой от картинки к картинке. И снова можно видеть, как структура аттрактора становится все более и более размытой с увеличением шума, шаг за шагом тонкие детали на фоне шума исчезают.

2. Ренормгрупповой анализ

В применении к квазипериодическому движению с числом вращения золотое среднее главная идея РГ-анализа состоит в исследовании операторов эволюции, определенных для интервалов времени, заданных последовательными числами Фибоначчи F_k : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$.

Предположим, что в присутствии шума эволюция динамической переменной x в критической точке GM для числа шагов F_k и F_{k+1} дается уравнениями

$$x_{i+F_k} = \phi_k(x_i) + \varepsilon \xi_i \psi_k(x_i) \quad (6)$$

$$x_{i+F_{k+1}} = \phi_{k+1}(x_i) + \varepsilon \xi_i \psi_{k+1}(x_i), \quad (7)$$

где ξ_i является гауссовой последовательностью независимых случайных величин с нулевым средним, $\phi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ – некоторые вспомогательные функции. Параметр амплитуды шума ε предполагается малым. Очевидно, модель (5) есть частная версия уравнений (6) и (7): при $F_1 = F_2 = 1$ следует положить

$$\phi_1(x) = \phi_2(x) = x + r_c - (1/2\pi) \sin 2\pi x, \quad \psi_1(x) = \psi_2(x) \equiv 1. \quad (8)$$

В соответствии с уравнениями (6) и (7), сохраняя члены первого порядка по ε , получаем уравнение эволюции за F_{k+2} шагов дискретного времени:

$$x_{i+F_{k+2}} = \phi_k(\phi_{k+1}(x_i)) + \varepsilon [\xi_i \phi'_k(\phi_{k+1}(x_i)) \psi_{k+1}(x_i) + \xi_{i+F_{k+1}} \psi_k(\phi_{k+1}(x_i))]. \quad (9)$$

Что касается стохастического члена, то необходимо сделать следующее замечание. Предположим, что в некоторый момент орбита стартует из точки x_i . Рассмотрим ансамбль гауссовых случайных чисел $\{\xi_i, \xi_{i+F_{k+1}}\}$ со средним, равным нулю, и дисперсией, равной σ^2 , и составим из них сумму с коэффициентами, заданными функциями x_i . Поскольку пары $\{\xi_i, \xi_{i+F_{k+1}}\}$ статистически независимы, сумма может быть представлена опять же как гауссово случайное число со средним, равным нулю, и дисперсией, равной σ^2 , умноженное на функцию x_i , а именно

$$\xi_i \phi'_k(\phi_{k+1}(x_i)) \psi_{k+1}(x_i) + \xi_{i+F_{k+1}} \psi_k(\phi_{k+1}(x_i)) = \tilde{\xi}_i \psi_{k+2}(x_i). \quad (10)$$

Введем функцию

$$\phi_{k+2}(x) = \phi_k(\phi_{k+1}(x)) \quad (11)$$

и перепишем уравнение (9) в форме, аналогичной (6) и (7), с переопределенной случайной переменной и функциями ϕ и ψ :

$$x_{i+F_{k+2}} = \phi_{k+2}(x_i) + \varepsilon \tilde{\xi}_i \psi_{k+2}(x_i). \quad (12)$$

Чтобы получить замкнутое функциональное уравнение, возведем в квадрат обе части уравнения (10) и выполним усреднение по ансамблю реализаций с шумом. Так как $\langle \tilde{\xi}_i^2 \rangle = \langle \xi_i^2 \rangle = \sigma^2$ и $\langle \xi_i \xi_{i+F_{k+1}} \rangle = 0$, то приходим к соотношению

$$[\psi_{k+2}(x)]^2 = [\phi'_k(\phi_{k+1}(x))]^2 [\psi_{k+1}(x)]^2 + [\psi_k(\phi_{k+1}(x))]^2, \quad (13)$$

где штрих означает производную функции по первому аргументу.

В соответствии с основным содержанием ренормгруппового подхода, осуществим пересчет масштаба $x \mapsto x/\alpha^k$, где $\alpha = -1.288574553954368\dots$ – константа скейлинга для критической динамики с золотым средним [13, 14, 43, 44]. Тогда в терминах перенормированных функций имеем

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \alpha^k \phi_k(\alpha^{-k}x), & f_k(x) &= \alpha^k \phi_{k+1}(\alpha^{-k}x), \\ \Phi_k(x) &= [\psi_k(\alpha^{-k}x)]^2, & \Psi_k(x) &= \alpha^k [\psi_{k+1}(\alpha^{-k}x)]^2, \end{aligned} \quad (14)$$

и полученные выше уравнения означают, что

$$\begin{aligned}
g_{k+1}(x) &= \alpha f_k(x/\alpha), \\
f_{k+1}(x) &= \alpha g_k(f_k(x/\alpha)), \\
\Phi_{k+1}(x) &= \alpha^2 \Psi_k(x/\alpha), \\
\Psi_{k+1}(x) &= \alpha^2 \{[g'_k(f_k(x/\alpha))]^2 \Psi_k(x/\alpha) + \Phi_k(f_k(x/\alpha))\}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Эти соотношения определяют РГ-преобразование для набора функций $\{g_k, f_k, \Phi_k, \Psi_k\}$. Процедура может быть повторена снова и снова, чтобы получить функции для всё больших значений k , то есть определить перенормированные операторы эволюции для больших чисел Фибоначчи на шагах дискретного времени F_k .

Как следует из РГ-анализа [13, 14], в критической точке GM последовательность функций $g_k(x), f_k(x)$ сходится асимптотически к решению в виде неподвижной точки РГ-уравнения $\{g, f\}$, которое удовлетворяет соотношениям

$$g(x) = \alpha f(x/\alpha), \quad f(x) = \alpha g(f(x/\alpha)), \tag{16}$$

или

$$g(x) = \alpha^2 g(\alpha^{-1} g(x/\alpha)). \tag{17}$$

Численные данные для полиномиального разложения универсальной функции $g(x)$ по степеням x^3 могут быть найдены, например, в работе [51].

Сходимость функций $g_k(x), f_k(x)$ к решению в виде неподвижной точки РГ-преобразования подразумевает, что решение рекуррентных линейных функциональных уравнений для функциональных пар $\{\Phi_k(x), \Psi_k(x)\}$ асимптотически определяется собственным вектором, связанным с самым большим собственным числом Ω для следующей задачи на собственные значения [1]:

$$\Omega \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \Psi(x/\alpha) \\ \alpha^2 \{[g'(f(x/\alpha))]^2 \Psi(x/\alpha) + \Phi(f(x/\alpha))\} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Как упоминалось выше, универсальная функция $g(x)$ была получена численно в виде конечного разложения по степеням аргумента [13, 14, 51]. С использованием этих данных функциональное преобразование правой части уравнения (18) было реализовано как компьютерная программа. Неизвестные функции $\{\Phi(x), \Psi(x)\}$ представлялись набором их значений в узлах сетки на интервале $-1.2 < x < 1.2$ и интерполяционной схемой между ними. При заданных произвольно начальных условиях $\Phi(x) \equiv 1, \Psi(x) \equiv 1$ программа выполняла функциональное преобразование многократно и нормировала результирующие функции на каждом шаге как $\Phi^0(x) = \Phi(x)/\Phi(0), \Psi^0(x) = \Psi(x)/\Phi(0)$, до тех пор пока форма функций не стабилизировалась. Значение $\Phi(0)$ (перед нормализацией) сходится к собственному значению

$$\Omega = 5.31849047771... \tag{19}$$

Теперь в линейном приближении относительно амплитуды шума, стохастическое отображение для F_k и F_{k+1} шагов эволюции при больших k в критической точке GM может быть записано в перенормированных переменных

$$\begin{aligned}
x_{i+F_k} &= g(x_i) + \varepsilon \gamma^k \xi_i \Phi(x_i), \\
x_{i+F_{k+1}} &= f(x_i) + \varepsilon \gamma^k \xi_i \Psi(x_i),
\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\varphi(x) = \sqrt{\Phi^0(x)}, \quad v(x) = \sqrt{\Psi^0(x)}, \quad \gamma = \sqrt{\Omega} = 2.30618526526... \quad (21)$$

Если рассмотреть малый сдвиг параметров r и K от критической точки GM, в уравнениях появятся дополнительные члены, которые соответствуют двум существенным собственным модам линеаризованного РГ-уравнения вблизи решения, отвечающего неподвижной точке (см. [13, 14, 51]). Учитывая эти дополнительные члены, можно записать

$$x_{i+F_k} = g(x_i) + C_1 \delta_1^k h^{(1)}(x_i) + C_2 \delta_2^k h^{(2)}(x_i) + \varepsilon \gamma^k \xi_i \varphi(x_i), \quad (22)$$

где $h^{(1)}(x)$ и $h^{(2)}(x)$ – соответствующие собственные векторы. Собственные значения δ_1 и δ_2 , как известно, есть

$$\delta_1 = -2.833610655891... \quad \delta_2 = \alpha^2 = 1.660424381098... \quad (23)$$

Коэффициенты C_1 и C_2 в уравнении (22) зависят от параметров исходного отображения и равны нулю в критической точке GM. В близкой окрестности критической точки достаточно учитывать первые члены разложения коэффициентов по отклонению параметров от критической точки. Возмущение, связанное с модой C_1 , соответствует сдвигу в пространстве параметров вдоль критической линии $K = 1$; оно сохраняет кубическую точку перегиба. Вторая мода, связанная с коэффициентом C_2 , появляется из-за сдвига от критической линии вдоль кривой постоянного числа вращения. В соответствии с [51], выражения для коэффициентов через параметры исходного отображения окружности есть

$$r - r_c = C_1 - 0.01749C_2 - 0.00148C_2^2, \quad K - K_c = C_2. \quad (24)$$

Коэффициенты C_1 и C_2 можно трактовать как специальные локальные координаты («скейлинговые координаты») в окрестности критической точки GM на плоскости параметров.

Теперь можно сформулировать основное свойство скейлинга, которое следует из (22), для динамики вблизи критической точки GM в присутствии шума.

Если уменьшить сдвиг по параметру от точки GM так, чтобы коэффициенты C_1 и C_2 уменьшились на факторы δ_1 и δ_2 , соответственно, и уменьшить амплитуду шума ε на фактор γ , то форма стохастического отображения (22) остается неизменной. Таким образом, при новых значениях параметров система с шумом будет демонстрировать статистически подобное поведение, как и со старыми параметрами, но с характерным масштабом времени, увеличенным на фактор $F_{k+1}/F_k \cong w^{-1} = (\sqrt{5} + 1)/2$.

3. Свойства скейлинга и их иллюстрации в численных экспериментах

Обсудим некоторые проявления влияния шума на отображение окружности в критической точке GM и ее окрестности в численных экспериментах с точки зрения закономерностей, обнаруженных в предыдущем разделе.

3.1. Критический аттрактор в присутствии шума. Чтобы исследовать свойства скейлинга критической орбиты в точке GM, удобно использовать итерационную диаграмму в координатах (x_n, x_{n+F_k}) при последовательных числах Фибоначчи F_k , как сделано в разделе 1.

Рис. 4 демонстрирует свойство скейлинга критической орбиты в отсутствие шума. Вставка на каждой картинке показывает фрагмент общей структуры с увеличением на фактор $\alpha = -1.2885\dots$ Можно видеть хорошее подобие увеличенных участков (хотя, формально говоря, свойство скейлинга становится точным только в асимптотике малых масштабов и больших k). На центральной диаграмме вставка изображена перевернутой из-за того, что фактор α отрицателен.

В присутствии шума тонкая структура критической квазипериодической орбиты размывается уровень за уровнем по мере роста интенсивности шума. В соответствии с заключениями предыдущего раздела, каждый новый уровень структуры размывается, когда мы увеличиваем амплитуду источника шума на фактор $\gamma = 2.30618\dots$ Диаграммы на рис. 5 представляют собой фазовые портреты аттракторов с шумом для модельной системы (5) в критической точке GM с различными значениями параметра интенсивности шума ε . Рисунки справа представляют собой увеличенные фрагменты предыдущих диаграмм, с увеличением для рисунков *a*, *б*, *в* на факторы C , αC и $\alpha^2 C$, соответственно, где C – некоторая постоянная. Наблюдается подобие картинок для аттракторов с шумом.

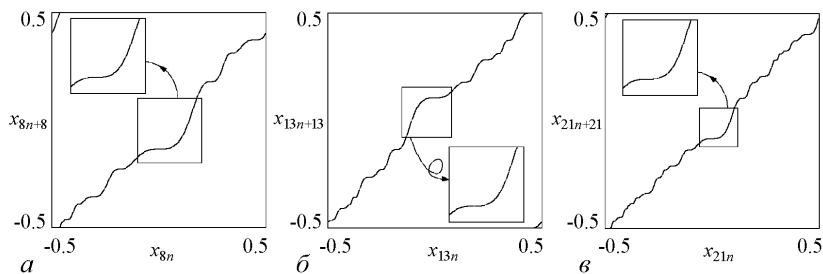


Рис. 4. Иллюстрация скейлинга в отсутствие шума для критической орбиты с числом вращения, равным «золотому среднему» в координатах (x_n, x_{n+F_k}) , $F_k = 8, 13, 21$. На каждой картинке вставленный прямоугольник – это фрагмент с увеличением на фактор $\alpha = -1.2885\dots$ по сравнению с предыдущим случаем. На диаграмме *б* вставленный прямоугольник изображен перевернутым из-за того, что фактор α отрицателен

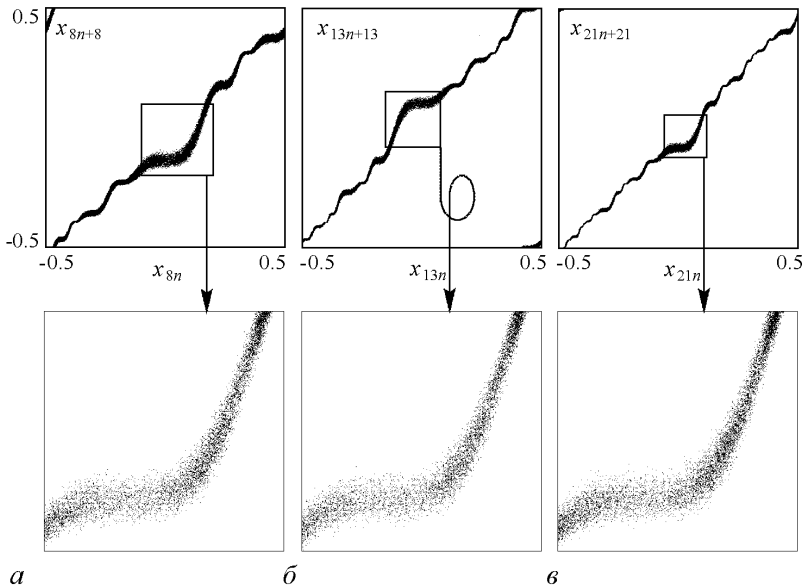


Рис. 5. Фазовые портреты аттрактора для отображения окружности с шумом (5) в критической точке GM: $r = r_c = 0.606661\dots$, $K = 1$ при значениях амплитуды шума ε : 0.005 (*a*), $0.005/\gamma$ (*б*) и $0.005/\gamma^2$ (*в*)

3.2. Показатель Ляпунова в присутствии шума. В соответствии с результатами раздела 2, в критической точке GM для параметров интенсивности шума ε и ε/γ система демонстрирует подобное поведение, причем во втором случае характерный масштаб времени больше на фактор $W = 1.6180\dots$ Следовательно, величина ляпуновского показателя при величине шума ε/γ должна быть меньше, чем при ε , на указанный фактор. Рис. 6 демонстрирует графики ляпуновского показателя в зависимости от интенсивности шума ε . Выделенный прямоугольник нарисован с увеличением на фактор W по вертикальной оси и на фактор γ по горизонтальной оси. При этом изменении масштаба наблюдается подобие картинок. Очевидно, что на меньших масштабах степень совпадения станет еще лучше.

Оценим критический индекс для показателя Ляпунова по отношению к интенсивности шума. Принимая во внимание, что изменение ε на фактор γ сопровождается изменением показателя Ляпунова на фактор W , можно заключить, что ляпуновский показатель должен вести себя как

$$\Lambda \propto \varepsilon^\eta, \quad (25)$$

где $\eta = \log_\gamma W = 0.575891387\dots$ Рис. 7 иллюстрирует зависимость Λ от ε в двойном логарифмическом масштабе. Точки, полученные в результате численных расчетов, расположены вдоль прямой линии с наклоном η . Зависимость имеет колебания с периодом $\log \gamma$ по оси ε в соответствии с законом скейлинга, следующим из РГ-анализа.

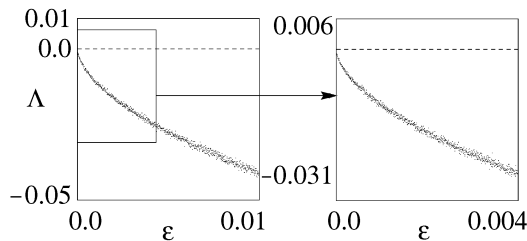


Рис. 6. Показатель Ляпунова Λ в зависимости от интенсивности шума ε . Выделенный участок показан с увеличением на фактор $W = 1.618\dots$ по вертикальной оси и на фактор $\gamma = 2.30618\dots$ по горизонтальной оси

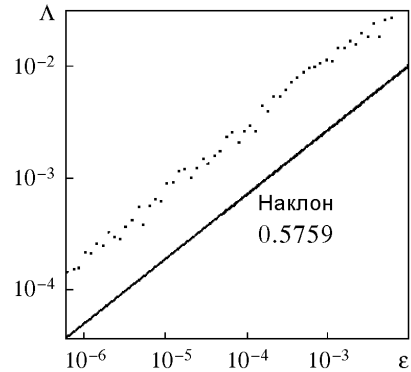


Рис. 7. Показатель Ляпунова в зависимости от интенсивности шума в критической точке GM в двойном логарифмическом масштабе. Прямая линия отвечает соотношению (25)

Стоит отметить своего рода шумовую стабилизацию динамики в точке GM. Действительно, шум содействует уменьшению ляпуновского показателя, то есть уменьшению чувствительности по отношению к начальным условиям, и задерживает появление хаоса. Об этом явлении было упомянуто также в работах [35, 42]. Эффект оказывается противоположным наблюдаемому в ситуации перехода к хаосу через удвоения периода [52].

3.3. Особенности скейлинга в присутствии шума в окрестности критической точки. Обратимся теперь к исследованию особенностей скейлинга при отстройке управляющих параметров отображения от критической точки.

В качестве первого шага рассмотрим изменение одного параметра r при постоянном $K = 1$, тем самым подразумевая, что отображение сохраняет кубическую точку перегиба. В возмущенном универсальном операторе эволюции (22) сдвиг параметра r приводит к моде с собственным значением $\delta_1 = -2.83361\dots$, которое будет присутствовать в скейлинговых отношениях.

Рис. 8 иллюстрирует соответствующее свойство скейлинга динамики без шума. Изображенный объект известен как «чертова лестница» [53, 54]. Ступеньки расположены при каждом рациональном значении числа вращения и соответствуют пересечению языков Арнольда, связанных с периодической динамикой. Рост функции $\rho(r, K)$ имеет место на фрактальном множестве, соответствующем иррациональным числам вращения, то есть квазипериодическим движениям. При $K = 1$ это множество имеет нулевую меру на оси r («полная чертова лестница» [53, 54]). Число вращения, равное золотому среднему, имеет место только при значении параметра r_c , связанным с исследуемой критической точкой. Фрагменты по обе стороны от главной диаграммы показывают детали структуры лестницы около точки GM. Свойство самоподобия состоит в том, что структура воспроизводит себя в малых масштабах при увеличении на фактор δ_1 по горизонтальной оси и на фактор $(-W^2)$ по вертикальной оси.

В присутствии шума число вращения может быть определено через формулу (2) так же, как и в отсутствие шума. В системе под действием шума, однако, мы не можем говорить о периодичности или квазипериодичности в обычном смысле. Тем не менее, некоторая грубая классификация все же возможна.

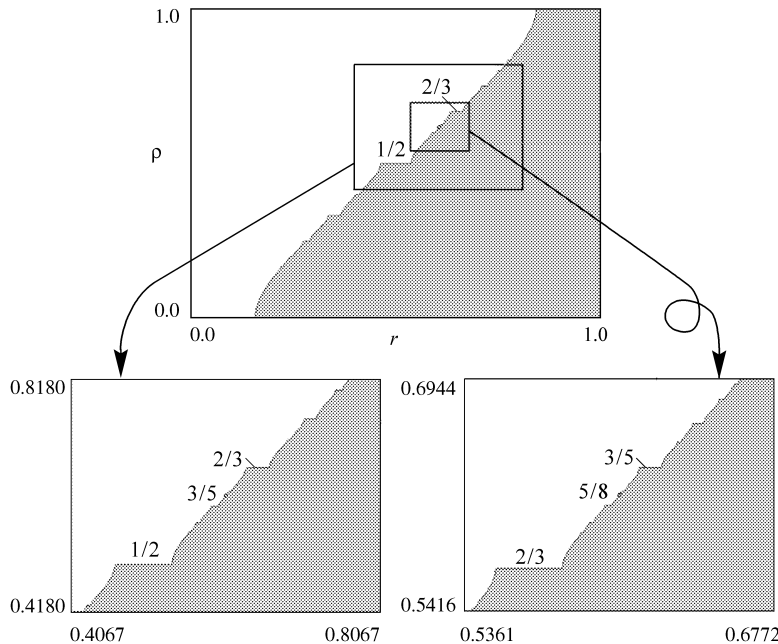


Рис. 8. Иллюстрация локального свойства скейлинга вблизи критической точки золотое среднее в отсутствие шума: график зависимости числа вращения ρ от параметра r («чертова лестница»). Свойство самоподобия состоит в повторяемости структуры на малых масштабах при увеличении на фактор $\delta_1 = -2.8336$ по горизонтальной оси и на фактор $(-W^2) = -2.6180\dots$ по вертикальной оси

При некоторых значениях параметра r можно наблюдать относительно большие временные интервалы, динамика на которых близка к периодической, причем они чередуются с вызванными шумом участками «проскальзывания фазы», на которых переменная x претерпевает относительно быстрый сдвиг ± 1 . Можно сказать, что эти режимы представляют модифицированную присутствием шума версию периодичности. При других значениях параметра переменная x эволюционирует без каких-либо заметных плато во временной зависимости, со статистически хорошо определенным трендом. Это соответствует шумовой версии квазипериодичности.

График зависимости числа вращения от параметра r демонстрирует последовательное сглаживание сначала тонких, а затем крупномасштабных деталей фрактальной структуры чертовой лестницы. Это явление удовлетворяет свойству скейлинга, вытекающему из РГ-анализа влияния шума, и проиллюстрировано на рис. 9. Главная диаграмма и первый увеличенный фрагмент отвечают параметру шума $\varepsilon = 0.1$. Вторая и третья картинки приводятся, соответственно, для интенсивностей шума $\varepsilon = 0.1/\gamma$ и $0.1/\gamma^2$. Хорошо видно подобие структур во всех трех увеличенных фрагментах.

Рис. 10 показывает набор ляпуновских карт на плоскости параметров (r, ε) при фиксированном $K = 1$. Темные серые области соответствуют большим отрицательным значениям ляпуновского показателя. Эти области «шумовой периодичности» – языки Арнольда, которые постепенно стираются с увеличением шума. Светло-серые

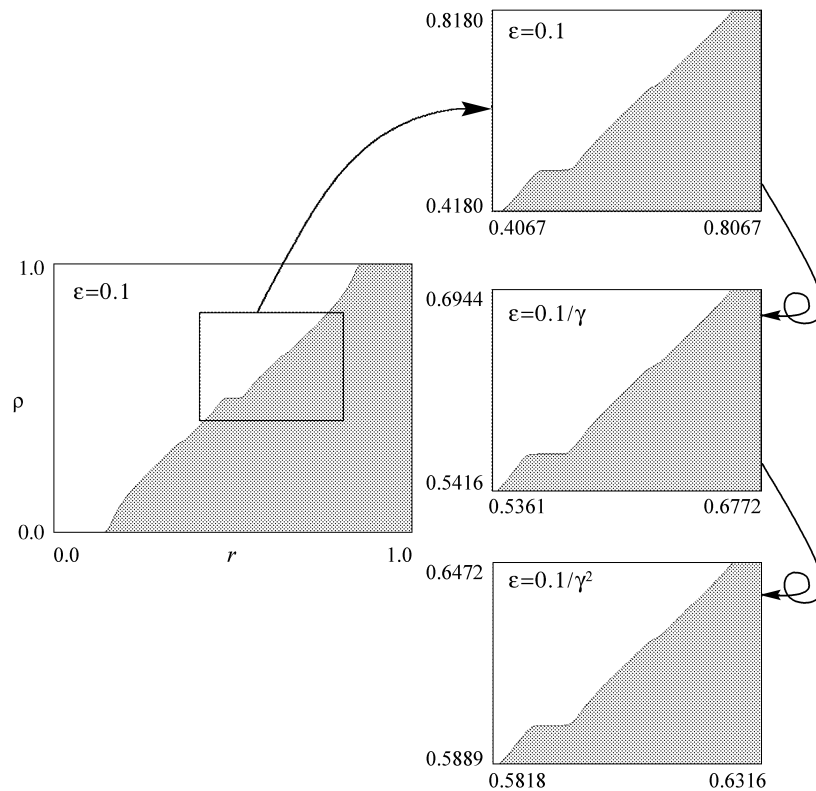


Рис. 9. Иллюстрация скейлинга в присутствии шума на примере структуры «чертовой лестницы» около критической точки золотое среднее. Главная диаграмма и первый увеличенный фрагмент соответствуют уровню шума $\varepsilon = 0.1$. Последующие фрагменты в порядке, обозначенным стрелками, построены для интенсивностей шума $\varepsilon = 0.1/\gamma$ и $\varepsilon = 0.1/\gamma^2$, соответственно

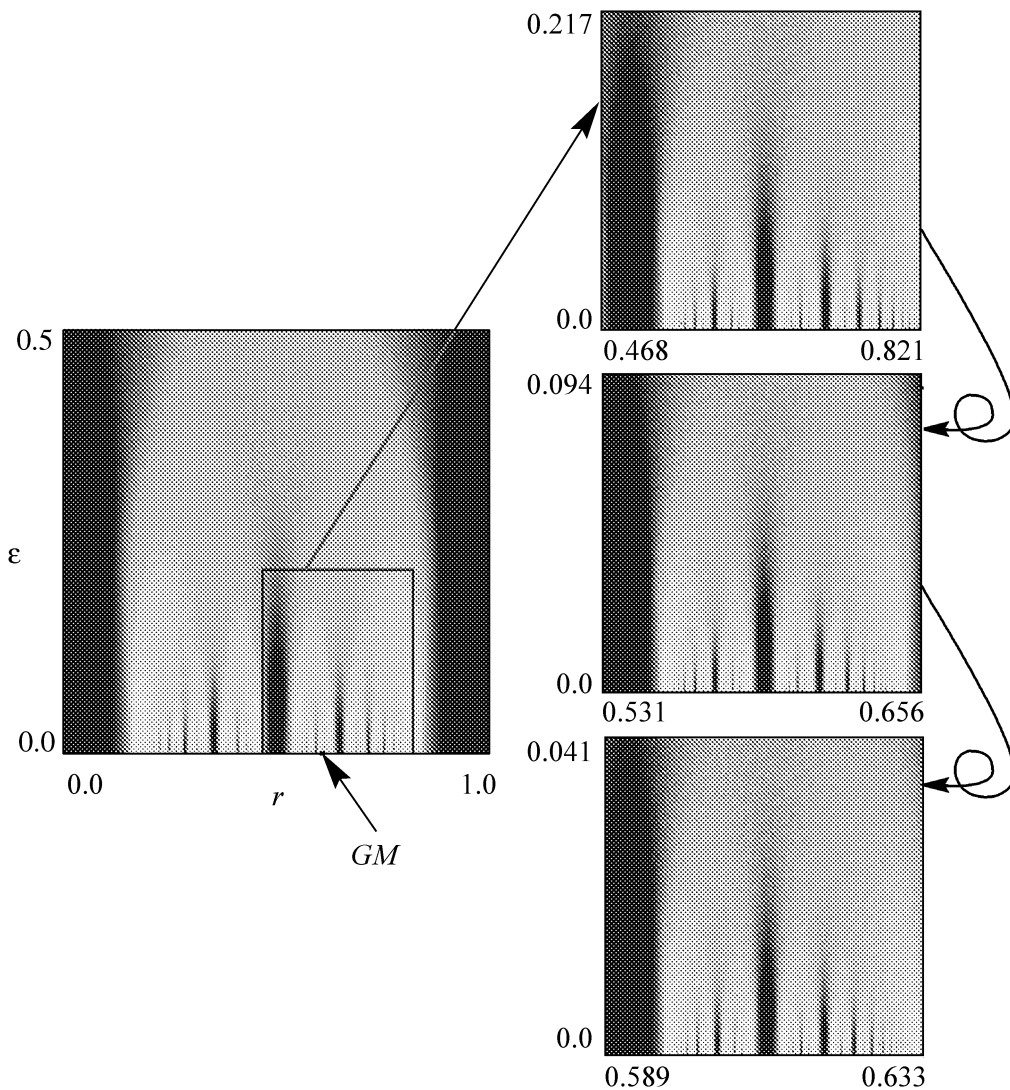


Рис. 10. Ляпуновские карты на плоскости параметра r и амплитуды шума ε , демонстрирующие скейлинг в окрестности критической точки GM при фиксированном критическом значении параметра $K = 1$. Горизонтальные и вертикальные масштабы в последовательности диаграмм, порядок которых обозначен стрелками, меняются соответственно на факторы $\delta_1 = -2.8336$ и $\gamma = 2.30618$. Одновременно на каждом новом уровне увеличения переопределяется кодирование серой гаммы цветов, чтобы делать подобие ясно видимым

области соответствуют маленьким отрицательным значениям показателя Ляпунова. Это области «шумовой квазипериодичности».

В заключение рассмотрим случай, когда варьируются два управляющих параметра r и K . Исследуем скейлинговые свойства структуры языков Арнольда в случае отсутствия и наличия шума. На рис. 11 большая диаграмма и первый увеличенный фрагмент карты Ляпунова для части плоскости параметров представлены для амплитуды шума $\varepsilon = 0$. Параллелограмм на главной диаграмме образован координатными линиями скейлинговых координат (24); критическая точка GM расположена точно

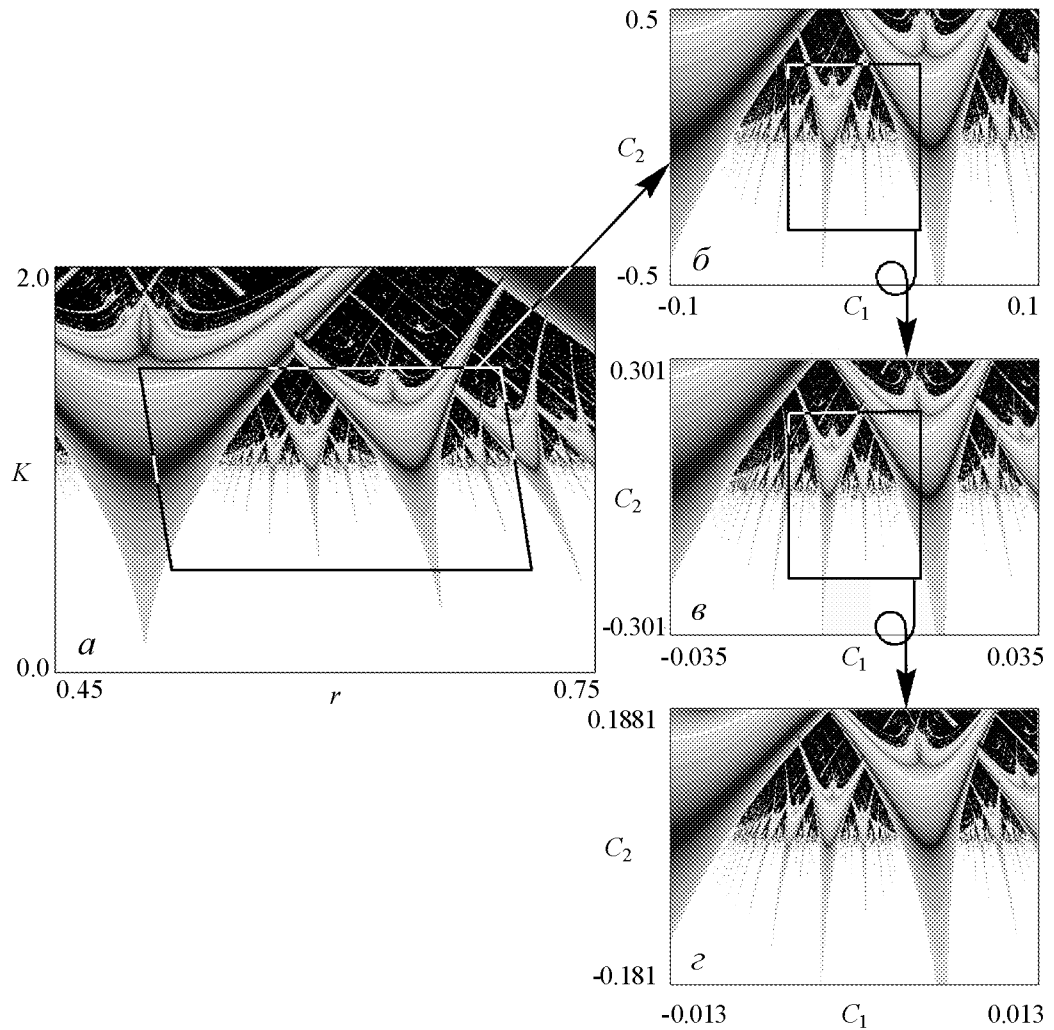


Рис. 11. Иллюстрация свойства скейлинга на ляпуновских картах в окрестности критической точки золотое среднее GM в отсутствие шума. Правило кодирования цветов то же, что и на рис. 1. Главная диаграмма a нарисована в координатах (r, K) . Внутренняя часть выделенного параллелограмма показана отдельно b в скейлинговых координатах (C_1, C_2) . На фрагментах b и c горизонтальный и вертикальный масштабы последовательно изменены на факторы $\delta_1 = -2.8336\dots$ и $\delta_2 = 1.66042\dots$, соответственно. Кодирование цветов переопределено на каждом новом уровне увеличения

в середине параллелограмма. Его внутренняя часть показана в первом увеличенном фрагменте в скейлинговых координатах. Следующие фрагменты представляют собой все меньшие и меньшие окрестности критической точки при последующем пересчете масштаба. Аналогичная процедура проделана в присутствии шума, начальная интенсивность которого задана параметром $\varepsilon = 0.03$ (рис.12). В этом случае для наблюдения самоподобия необходимо не только пересчитывать масштабы по осям r и K , но и уменьшать интенсивность шума на фактор γ . Легко видеть замечательное сходство картинок, полученных на нескольких шагах пересчета масштабов.

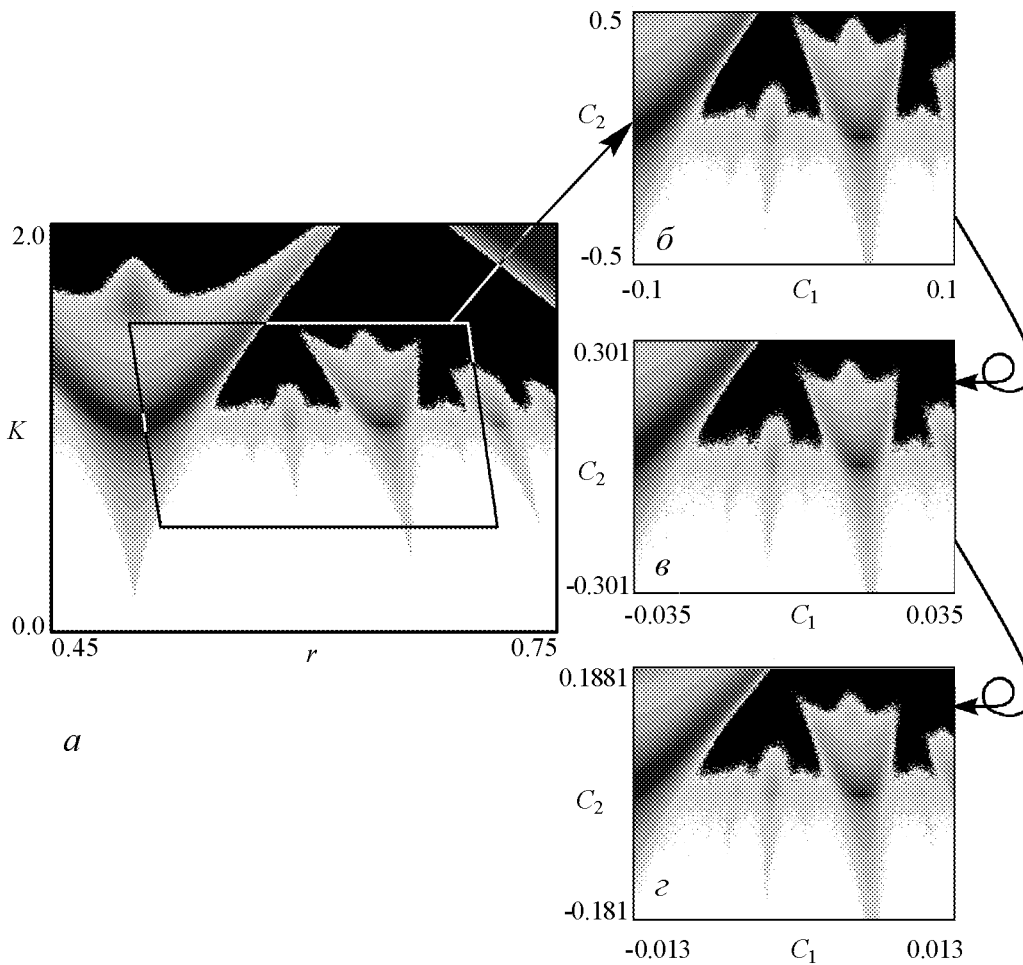


Рис. 12. Ляпуновские карты с шумом, демонстрирующие скейлинг в окрестности критической точки типа GM. Главная диаграмма a , нарисованная в координатах (r, K) , соответствует уровню шума $\varepsilon = 0.03$. Внутренняя часть выделенного параллелограмма показана отдельно b в скейлинговых координатах (C_1, C_2) . На фрагментах b и z , помимо изменения горизонтального и вертикального масштаба, уменьшен уровень шума на фактор $\gamma = 2.30618$ и $\gamma^2 = 5.31849$, соответственно

Заключение

В работе рассмотрены закономерности скейлинга, связанные с влиянием аддитивного шума на динамику модельной системы, описываемой отображением окружности в окрестности критической точки перехода к хаосу через квазипериодическое движение с числом вращения, равным золотому среднему. На основании ренормгруппового подхода сформулирован ряд скейлинговых соотношений, выполнение которых продемонстрировано в численных экспериментах. В частности, мы обращаем внимание на размывание тонкой структуры критической орбиты из-за присутствия шума, самоподобной структуры «чертовой лестницы», расположение «шумовых языков Арнольда» – областей динамики, близкой к периодической, на ляпуновских картах на плоскости параметров около критической точки GM.

Ожидается, что обнаруженные закономерности останутся в силе не только для отображения окружности, но и для всего класса универсальности, который это отображение представляет. Основанием для этого утверждения служат результаты нормгруппового анализа. В частности, указанные особенности будут свойственны автогенераторам и ротаторам под внешним периодическим воздействием, переходам Джозефсона в микроволновой области, конвекции жидкости под внешним воздействием и т.д. Как ожидается, полученные результаты будут полезны для экспериментальных исследований, имеющих своей целью наблюдение и исследование сложного поведения на пороге хаоса в классе систем различной физической природы, демонстрирующих переход к хаосу через квазипериодические движения.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант №03-02-16074), совместного российско-германского гранта РФФИ - ННАО (№04-02-04011), Научно-образовательного центра нелинейной динамики и биофизики при Саратовском государственном университете (грант REC-006) и ФЦНТП (шифр работы № 2005-РИ-19.0/002/304).

Библиографический список

1. *Hamm A., Graham R.* Scaling for small random perturbations of golden critical circle maps // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 46, № 10. P. 6323–6333.
2. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
3. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Курс лекций. М.: Физматлит, 2001.
4. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
5. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.Л.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.
6. *Glass L., Sun J.* Periodic forcing of a limit cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 50. P. 5077–5084.
7. *Anishchenko V.S.* Dynamical Chaos – Models and Experiments. Appearance, Routes and Structure of Chaos in Simple Dynamical Systems // World Scientific, Singapore, 1995.
8. *Bak P., Bohr T., Jensen M.H., Christiansen P.V.* Josephson junctions and circle maps // *Solid State Communications.* 1984. Vol. 51, № 4. P. 231–234.
9. *Bohr T., Bak P., Jensen M.H.* Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. II. Josephson junctions, charge-density waves, and standard maps // *Phys. Rev. A.* 1984. Vol. 30, № 4. P. 1970–1981.
10. *Alstrøm P., Christiansen B., Hyldgaard P., Levinsen M.T., Rasmussen R.* Scaling relations at the critical line and the period-doubling route for the sine map and the driven damped pendulum // *Phys. Rev. A.* 1986. Vol. 34, № 3. P. 2220–2233.
11. *Arnold V.I.* Cardiac arrhythmias and circle mappings // *Chaos.* 1991. Vol. 1, № 1. P. 20–24.
12. *Glass L., Guevara M.R., Shrier A., Perez R.* Bifurcation and chaos in a periodically stimulated cardiac oscillator // *Physica D.* 1983. Vol. 7. P. 89–101.

13. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: A renormalization group analysis // *Physica D*. 1982. Vol. 5. P. 370–386.
14. *Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E.D.* Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems // *Physica D*. 1983. Vol. 8. P. 303–342.
15. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1978. Vol. 19, № 1. P. 25–52.
16. *Feigenbaum M.J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1979. Vol. 21, № 6. P. 669–706.
17. *Feigenbaum M.J.* Universal behavior in nonlinear systems // *Physica D*. 1983. Vol. 7, № 1-3. P. 16–39.
18. *Greene J.M., MacKay R.S., Vivaldi F., Feigenbaum M.J.* Universal behaviour in families of area-preserving maps // *Physica D*. 1981. Vol. 3, № 3. P. 468–486.
19. *Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // *УМН*. 1984. Т. 39, № 3. С. 3–37.
20. *Mao J.-M., Greene J.M.* Renormalization of period-doubling in symmetric four-dimensional volume-preserving maps//*Phys. Rev. A*. 1987. Vol. 35, № 9. P. 3911–3917.
21. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // *Physica D*. 1997. Vol. 109. P. 91–112.
22. *Hu B., Rudnik J.* Exact solution of the Feigenbaum renormalization group equations for intermittency // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 48, № 24. P. 1645–1648.
23. *Hirsch J.E., Nauenberg M., Scalapino D.J.* Intermittency in the presence of noise: A renormalization group formulation // *Phys. Lett. A*. 1982. Vol. 87. P. 391.
24. *MacKay R.S.* A renormalization approach to invariant circles in area-preserving maps // *Physica D*. 1983. Vol. 7, № 1–3. P. 283–300.
25. *Wilbrink J.* New fixed point of the renormalisation operator associated with the recurrence of invariant circles in generic Hamiltonian maps // *Nonlinearity*. 1990. Vol. 3. P. 567–584.
26. *Гольберг А.И., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальные свойства для последовательностей бифуркаций утроения периода // *УМН*. 1983. Т. 38, № 1. С. 159–160.
27. *Cvitanovic P., Myrheim J.* Universality for period n-tuplings in complex mappings // *Phys. Lett. A*. 1983. Vol. 94. P. 329.
28. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P.* On scaling properties of two-dimensional maps near the accumulation point of the period-tripling cascade // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2000. Vol. 5, № 4. P. 459–476.
29. *Кузнецов С.П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // *Известия вузов. Радиофизика*. 1985. Т. 28, № 8. С. 991–1007.
30. *Kook H., Ling F.H., Schmidt G.* Universal behavior of coupled nonlinear systems // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 43, № 6. P. 2700–2708.
31. *Kim S.-Y.* Universality of period doubling in coupled maps // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 49. P. 1745–1748.
32. *Stavans J., Heslot F., Libchaber A.* Fixed winding number and the quasiperiodic route to chaos in a convective fluid//*Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55, № 6. P. 596–599.

33. *Jensen M. H., Kadanoff L. P., Libchaber A., Procaccia I., Stavans J.* Global universality at the onset of chaos: Results of a forced Rayleigh – Benard experiment // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55, № 25. P. 2798–2801.
34. *Su Z., Rollins R.W., Hunt E.R.* Measurements of $f(\alpha)$ spectra of attractors at transitions to chaos in driven diode resonator systems // *Phys. Rev. A.* 1987. Vol. 36, № 7. P. 3515–3517.
35. *Kajanto M.J., Salomaa M.M.* Effects of external noise on the circle map and the transition to chaos in Josephson junctions // *Solid State Communications.* 1985. Vol. 53, № 1. P. 99–106.
36. *Crutchfield J.P., Nauenberg M., Rudnik J.* Scaling for external noise at the onset of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 46, № 14. P. 933–935.
37. *Shraiman B., Wayne C.E., Martin P.C.* Scaling theory for noisy period-doubling transitions to chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 46, № 14. P. 935–939.
38. *Györgyi G., Tishby N.* Scaling in stochastic Hamiltonian systems: A renormalization approach // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 58, № 6. P. 527–530.
39. *Kapustina J.V., Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E.* Scaling properties of bicritical dynamics in unidirectionally coupled period-doubling systems in presence of noise // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. 066207 (12 pages).
40. *Györgyi G., Tishby N.* Path integrals in Hamiltonian systems: breakup of the last Kolmogorov-Arnold-Moser torus due to random forces // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62. № 4. P. 353–356.
41. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Osbaldestin A.H.* Effect of noise on the dynamics of a complex map at the period-tripling accumulation point // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 69, 036216 (6 pages).
42. *Markosova M., Markos P.* Numerical studies of the noisy sine circle map // *Phys. Lett. A.* 1989. Vol. 136, № 7, 8. P. 369–373.
43. *Dixon T.W., Gherghetta T., Kenny B.G.* Universality in the quasiperiodic route to chaos // *Chaos.* 1996. Vol. 6, № 1. P. 32–42.
44. *De la Llave R., Petrov N.P.* Regularity of conjugacies between critical circle maps: An experimental study // *Experimental Mathematics.* 2002. Vol. 11. P. 219–242.
45. *Rössler J., Kiwi M., Hess B., Marcus M.* Modulated nonlinear processes and a novel mechanism to induce chaos // *Phys. Rev. A.* 1989. Vol. 39, № 11. P. 5954–5960.
46. *Marcus M., Hess B.* Lyapunov exponents of the logistic map with periodic forcing // *Computers and Graphics.* 1989. Vol. 13, № 4. P. 553–558.
47. *Bastos de Figueireido J.C., Malta C.P.* Lyapunov graph for two-parameter map: Application to the circle map // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1998. Vol. 8, № 2. P. 281–293.
48. *Kuznetsov A.P., Savin A.V.* About the typical structures and chaos border in the parameter plane of non-autonomous discrete maps with period-doubling // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* 2002. Vol. 5, № 3. P. 296–301.
49. *Fiel D.* Scaling for period-doubling sequences with correlated noise // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1987. Vol. 20. P. 3209–3217.
50. *Choi S.-Y., Lee E.K.* Scaling behavior at the onset of chaos in the logistic map driven by colored noise // *Phys. Lett. A.* 1995. Vol. 205. P. 173–178.

51. *Ivankov N.Yu., Kuznetsov S.P.* Complex periodic orbits, renormalization, and scaling for quasiperiodic golden-mean transition to chaos // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. 046210 (10 pages).
52. *Crutchfield J.P., Farmer J.D., Huberman B.A.* Fluctuations and simple chaotic dynamics // *Phys. Rep.* 1982. Vol. 92, № 2. P. 45–82.
53. *Jensen M.H., Bak P., Bohr T.* Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. I. Circle maps // *Phys. Rev. A.* 1984. Vol. 30, № 4. P. 1960–1969.
54. *Alstrøm P., Levinsen M.T., Rasmussen D.R.* Scaling exponents, relations, and order dependence for circle maps // *Physica D.* 1987. Vol. 26. P. 336–346.

*Саратовский филиал Института
радиотехники и электроники РАН
Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 18.04.2005
После доработки 15.06.2005*

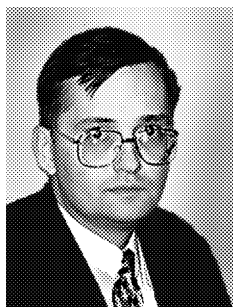
ABOUT SCALING PROPERTIES IN THE NOISY CIRCLE MAP AT THE GOLDEN-MEAN WINDING NUMBER

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, J.V. Sedova

Scaling regularities are examined associated with effect of additive noise upon a critical circle map at the golden-mean winding number. On a basis of the RG approach of Hamm and Graham [1] we present an improved numerical estimate for the scaling constant responsible for the effect of noise, $\gamma = 2.3061852653\dots$. Decrease of the noise amplitude by this number ensures possibility of observation for one more level of fractal-like structure associated with increase of characteristic time scale by factor $(\sqrt{5} + 1)/2$. Numeric results demonstrating evidence of the expected scaling are presented, e.g. portraits of the noisy attractors, devil's staircase plots, and Lyapunov charts.



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 150 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П.Кузнецова защищены шесть кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994-1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член-корреспондент РАЕН. Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».



Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лица прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики». E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.tserv.ru



Седова Юлия Викторовна – родилась в 1979 году. Окончила Саратовский государственный университет (2001). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2004), старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Научные интересы – влияние шума на динамические системы, дискретные отображения, связанные системы, динамический хаос. Автор 7 статей в отечественной и зарубежной печати.