



«НЕЛИНЕЙНЫЙ МИНИМУМ» В ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Ю.В. Седова

Представлено введение в теорию дискретных отображений, доступное учащимся старших классов и студентам младших курсов. Продемонстрирована взаимосвязь и «взаимопомощь» дискретного и непрерывного описания динамических систем. Приведенные физические примеры облегчают восприятие материала. Решение представленных компьютерных задач даст возможность сформировать достаточно емкий «пакет» программ, который может быть использован в исследовательской работе.

Если в физике и химии где-то и существует простота, то заведомо не в микроскопических моделях. Она, скорее, кроется в идеализированных макроскопических представлениях, например, о простых движениях типа гармонического осциллятора.

И. Пригожин

В те времена легко было совершать фундаментальные открытия. И все их и делали потихоньку.

В.И. Арнольд

Введение

Приобщиться к современной физике очень непросто. Обычно это возможно на старших курсах вуза, когда освоено определенный объем знаний и навыков. Однако в конце XX века появилась новая наука – нелинейная динамика, идеи которой можно изложить и на доступном школьнику уровне. Более того, широкое внедрение компьютеров и их постоянное совершенствование позволяют школьникам, ну если не получать новые результаты, то, по крайней мере, чувствовать себя причастными к современным исследованиям.

Нелинейная динамика описывает эволюцию во времени нелинейных (динамических) систем. Поэтому на первый взгляд кажется, что в основе нелинейной динамики и учения о динамическом хаосе должна лежать глубокая теория дифференциальных уравнений. Это действительно так. Однако существуют другие математические объекты – разностные уравнения или отображения, демонстрирующие многие феномены нелинейной динамики. Отображения гораздо проще для исследования и компьютерного моделирования, так как на их изучение тратится радикально

меньше компьютерного времени. Отображения лишь недавно стали входить в «инструментарий» исследователей, и поэтому они не представлены в школьном курсе физики. Как мы убедимся, на самом деле отображения очень естественно могут появляться при решении даже простых физических задач.

Предлагаемый ниже материал представляет собой своего рода «программу с комментариями», основанную на опыте проведения кружка по нелинейной динамике в Лицее прикладных наук Саратова и индивидуальных занятий со школьниками, интересующимися компьютерным моделированием. Этот материал может служить также определенным дополнением к курсу «Колебания, волны, синергетика» ЛПН. С другой стороны, он дает минимум знаний и навыков (и компьютерных программ, что очень важно), необходимых для начала исследовательской работы в области теории дискретных отображений. Конечно, в рамках журнальной статьи невозможно дать все необходимые методические пояснения. Поэтому мы представляем здесь лишь «канву» изложения. Освоение каждого пункта программы предполагает и решение достаточного количества задач, прежде всего в виде самостоятельного компьютерного моделирования. Опять-таки из-за ограниченного объема мы приводим только некоторые задачи в конце статьи, а также формулируем и часть основного материала в виде задач. Отметим, наконец, что данная программа рассчитана примерно на два года систематических занятий и что непрерывность образования весьма удобна тем, что последние, самые сложные разделы могут быть закончены уже в вузе. Рекомендуемая литература представлена в ссылках [1-9].

1. Разностные уравнения или отображения на примере школьной задачи

Практически в любом сборнике олимпиадных задач по физике можно найти задачу о бесконечной цепочке резисторов. Она формулируется так: чему равно сопротивление цепочки резисторов, которая состоит из одинаковых звеньев (рис. 1).

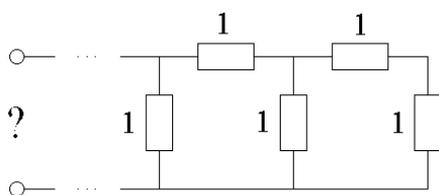


Рис. 1. Бесконечная цепочка сопротивлений

Итак, обратимся к нашей схеме, отсчитаем конечное число звеньев n и $n + 1$ от правого конца цепочки (рис. 2, а).

Сопротивления всех резисторов одинаковы; полагаем их равными единице. Из рисунка хорошо видно, что схема эквивалентна показанной на рис. 2, б. Если x_n – сопротивление цепочки из n звеньев, легко получаем

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_n + 2}.$$

Это и есть простейший пример отображения.

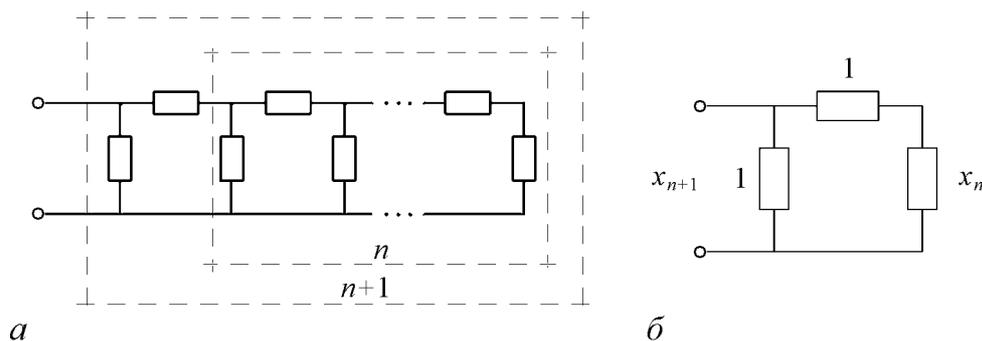


Рис. 2. Иллюстрация построения дискретного отображения

В общем виде одномерное отображение задается соотношением

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Это отображение называется одномерным, поскольку в него входит одна переменная – x . Дискретное отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ является, по-видимому, простейшим примером *динамической системы*. Смысл этого термина раскрывается просто: отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ по заданному начальному значению x_1 позволяет определить все последующие значения переменной – x_2, x_3 и т.д. Действительно, $x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2)$...

Свойства отображений удобно иллюстрировать на *итерационной диаграмме*. Для ее построения надо, прежде всего, на плоскости (x_n, x_{n+1}) изобразить график функции $f(x)$ и биссектрису (рис. 3).

Задавшись теперь начальным значением x_1 , можно по графику найти $x_2 = f(x_1)$. Затем это значение переносится на биссектрису и процедура повторяется. Возникает своеобразная лесенка, иллюстрирующая ход итераций. Как видно из графика, наше отображение имеет предельное значение или, как говорят, *неподвижную точку*, то есть такую точку, в которой $x_0 = f(x_0)$.

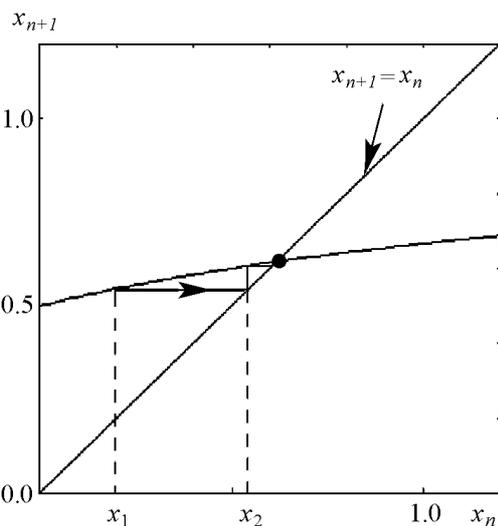


Рис. 3. Итерационная диаграмма для цепочки сопротивлений

Нетрудно получить, что $x_0^2 + x_0 - 1 = 0$. Отсюда следует ответ к задаче об определении сопротивления бесконечной цепочки:

$$x_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618034.$$

Исследуем теперь поведение системы в случае, когда значения переменной близки к предельному значению x_0 . Положим поэтому $x_{n+1} = x_0 + \tilde{x}_{n+1}$ и $x_n = x_0 + \tilde{x}_n$, где знаком «тильда» обозначены малые добавки к x_0 . Тогда из $x_{n+1} = f(x_n)$ имеем

$$x_0 + \tilde{x}_{n+1} = f(x_0 + \tilde{x}_n) \approx f(x_0) + f'(x_0) \tilde{x}_n \Rightarrow$$

$$\tilde{x}_{n+1} = f'(x_0) \tilde{x}_n.$$

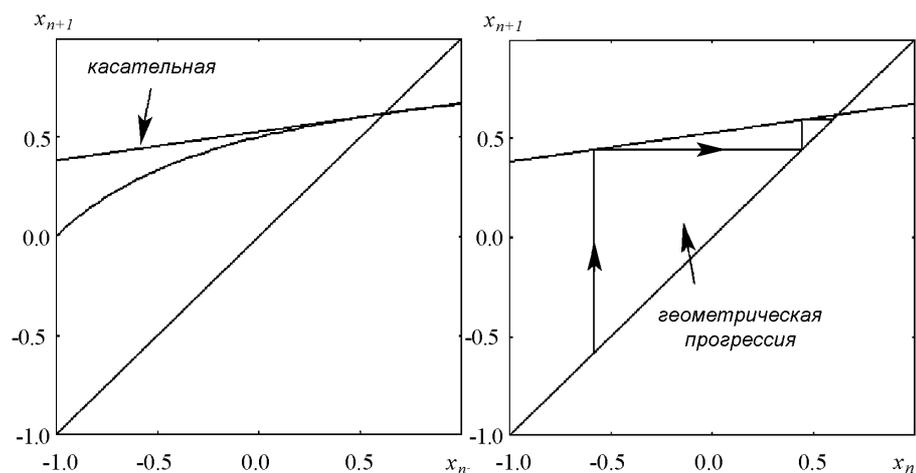


Рис. 4. Вид итерационной диаграммы вблизи неподвижной точки

Таким образом, если имеется некоторая маленькая добавка к значению x_0 , то после первой итерации она умножается на постоянное число $f'(x_0)$, после второй – на $[f'(x_0)]^2$, после третьей – на $[f'(x_0)]^3$ и т.д. Это означает, что переменная x приближается к неподвижной точке по закону геометрической прогрессии с показателем $[f'(x_0)]$. Отметим, что наше рассмотрение на итерационной диаграмме соответствует тому, что мы аппроксимируем $f(x)$ касательной в окрестности x_0 . Соответствующая итерационная диаграмма и дает геометрическую прогрессию (рис. 4).

Теперь по свойству геометрической прогрессии автоматически получаем, что, если $|f'(x_0)| < 1$ – итерации сходятся, а если $|f'(x_0)| > 1$ – расходятся.

Это, как говорят, позволяет судить об *устойчивости* неподвижной точки. В первом случае неподвижную точку называют устойчивой, а во втором – неустойчивой. Заметим, что в силу большой важности величины $f'(x_0)$ она носит специальное название – мультипликатор, и обозначается обычно $\mu = f'(x_0)$.

Вернемся от отображения общего вида к нашему случаю

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2+x}, \quad f'(x_0) = \frac{1}{(2+x_0)^2} = \frac{4}{(\sqrt{5}+3)^2} \approx 0.145900.$$

Итак, как мы видим, $\mu = 0.145900$. Это означает, что итерации сходятся, причем, поскольку $f'(x_0)$ мало, сходятся очень быстро. В этом убеждаемся, итерируя соотношение $x_{n+1} = (x_n + 1)/(x_n + 2)$.

Результат представлен в таблице.

Мы убеждаемся, что увеличение числа звеньев действительно приводит в неподвижную точку. Из таблицы видно, что, оказывается, цепочку всего из трех звеньев можно считать бесконечной с высокой точностью, то есть для цепочки из трех звеньев отклонение от значения сопротивления в неподвижной точке составляет примерно 1%, а из пяти звеньев – уже всего 0.02%! Устойчивость неподвижной точки этого отображения снимает и еще один физический вопрос, о том, не «испортят» ли возможные дефекты в цепочке результат нашего решения. Любопытно, что рассмотренная задача оказалась связанной с числами Фибоначчи и «золотым средним» (см. вторую колонку таблицы).

Таблица

Число звеньев в цепочке, n	x_n	Отклонение от предельного значения, %
1	$x_1 = 1$	
2	$x_2 = 2/3 \approx 0.666667$	7.86
3	$x_3 = 5/8 \approx 0.625000$	1.12
4	$x_4 = 13/21 \approx 0.619048$	0.16
5	$x_5 = 34/55 \approx 0.618182$	0.02
...
∞	$x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618034$	0

2. Логистическое отображение и бифуркационные деревья

Оказывается, отображения могут демонстрировать и более сложное поведение, чем в задаче о бесконечной цепочке сопротивлений. Рассмотрим функцию $f(x)$, имеющую квадратичный экстремум. Простейшей функцией с квадратичным экстремумом является парабола, а соответствующее отображение называют *логистическим*

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

На рис. 5 приведена итерационная диаграмма этого отображения.

Хорошо видно, что отображение может иметь уже две неподвижные точки. Одна из них имеет координату $x_0 = 0$. Исследуем устойчивость этой точки, для чего вычислим соответствующую производную (мультипликатор):

$$\mu = f'(x) = (r - 2rx)|_{x_0=0} = r.$$

При $r > 1$ эта точка неустойчива. Изобразим динамику в этом случае на итерационной диаграмме (см. рис. 5). Можно заметить, что итерации вблизи начала координат идут по закону геометрической прогрессии. Этот факт послужил основой для серьезного изучения логистического отображения в популяционной биологии. Действительно, известно, что при достаточном количестве пищи (параметр r) популяция (например, рыба в пруду) размножается по закону геометрической прогрессии. Для простоты будем считать, что x_n дает количество рыбы в пруду в n -й год. Таким образом, начальное

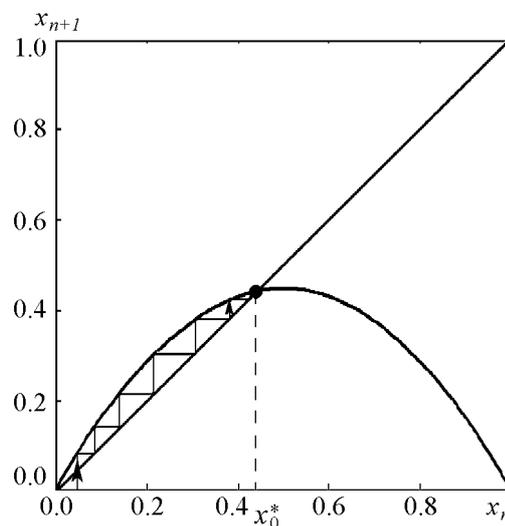


Рис. 5. Итерационная диаграмма логистического отображения

значение x_1 – это число рыб, выпущенных в пруд в первый год, x_2 – количество рыбы на следующий год и т.д. Спрашивается, что будет с этой рыбой по истечении достаточно большого времени? Сначала количество рыбы будет нарастать по геометрической прогрессии. Ясно, однако, что, если рыбы слишком много, то популяция перестает расти. Поэтому график $f(x)$ и имеет падающий участок.

Интуиция говорит о том, что количество рыбы в пруду сначала нарастает, а затем стабилизируется. (Математики сказали бы, что последовательность x_n имеет предел.) Наш график как будто подтверждает в этом интуитивное предположение (см. рис. 5). Как можно видеть, есть еще одна неподвижная точка x_0^* , к которой сходятся итерации,

$$x_0 = rx_0(1 - x_0), \quad x_0^* = 1 - \frac{1}{r}.$$

Это и будет установившееся количество рыбы в водоеме. Однако устойчива ли эта неподвижная точка? Найдем ее мультипликатор

$$\mu = f'(x_0^*) = r - 2rx_0^* = r - 2r\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 2 - r.$$

Если r немного больше 1, то да, точка устойчива, но при $r > 3$ получаем, что мультипликатор $\mu = |f'(x_0^*)| > 1$, а значит, «стабильное» состояние популяции оказывается неустойчивым. Какой же режим рождается при $r = 3$? Используя итерационную диаграмму, можно предположить, что это будет ситуация типа показанной на рис. 6.

Говорят, что в этом случае отображение имеет 2-цикл. Из условия $\begin{cases} f(x_2) = x_1 \\ f(x_1) = x_2 \end{cases}$ можно получить явное выражение для его элементов

$$\begin{cases} x_1 = rx_2(1 - x_2), \\ x_2 = rx_1(1 - x_1). \end{cases}$$

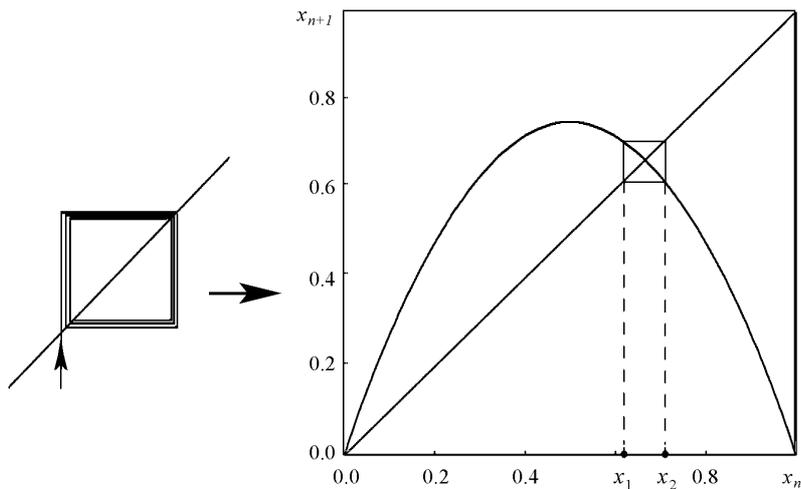


Рис. 6. Возникновение 2-цикла на итерационной диаграмме

Сложим друг с другом оба уравнения, а затем вычтем из первого уравнения второе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = (x_1 - x_2)[r(x_1 + x_2) - r], \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)\left(\frac{r-1}{r}\right), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1+r}{r}, \\ x_1x_2 = \frac{1+r}{r^2}. \end{cases}$$

Используя теорему Виета, можем записать уравнение для поиска элементов 2-цикла

$$x^2 - \frac{1+r}{r}x + \frac{1+r}{r^2} = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем

$$x_{1,2} = \frac{1+r \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}.$$

Из этой формулы видно, что 2-цикл рождается при $r = 3$, а при $r < 3$ его существование невозможно. Итак, если пищи слишком мало, то первые поколения нарастают очень быстро по численности, а затем стационарная численность рыбы не устанавливается, а начинает меняться периодически от года к году: x_1, x_2, x_1, x_2 и т.д. Это очень важный результат с точки зрения динамики популяции.

Ну, а если еще больше увеличить r ? Аналитически можно показать, что существует значение параметра, при котором станет неустойчивым и 2-цикл. Действительно, для элемента 2-цикла можно написать соотношение

$$x_1 = f(x_2) = f(f(x_1)).$$

Таким образом, элемент 2-цикла есть неподвижная точка двукратно проитерированного отображения. Это позволяет легко определить устойчивость цикла, поскольку тогда можно применить полученный ранее способ анализа устойчивости неподвижной точки. При этом только надо использовать правило дифференцирования сложной функции. Итак,

$$\mu = [f(f(x_1))] = f'(f(x_1))f'(x_1) = f'(x_2)f'(x_1).$$

В нашем случае $f'(x) = r - 2rx$, следовательно

$$\begin{aligned} \mu &= r^2(1 - 2x_1)(1 - 2x_2) = r^2[1 - 2(x_1 + x_2) + 4x_1x_2] = \\ &= r^2\left[1 - 2\frac{1+r}{r} + 4\frac{1+r}{r^2}\right] = -r^2 + 2r + 4. \end{aligned}$$

Таким образом, при $r = 1 + \sqrt{6} = 3.449$ мультипликатор обращается в минус единицу, и 2-цикл становится неустойчивым. При этом точка x_1 «удвоится» – расщепится на две. То же самое произойдет с точкой x_2 . Значит, у нового движения будет четыре элемента, то есть реализуется 4-цикл.

Что будет, если еще больше увеличить параметр, можно установить при помощи компьютерного моделирования. Для этого нужно написать программу построения итерационных диаграмм. На рис. 7 показаны некоторые типы итерационных

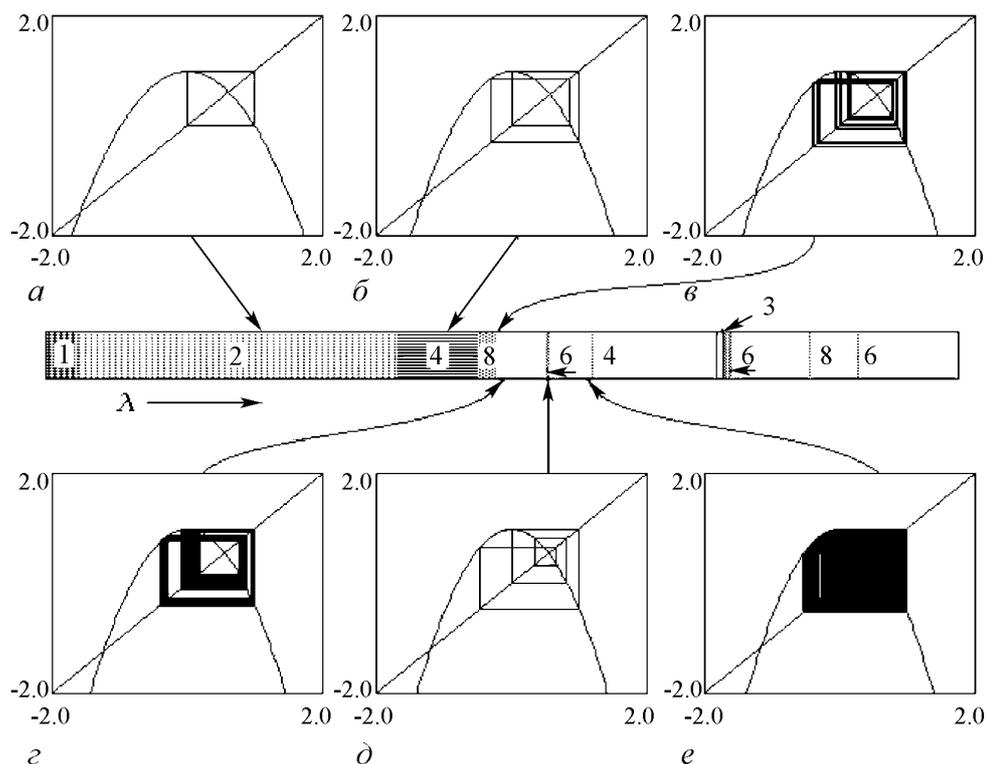


Рис. 7. Некоторые представители «семейства» режимов логистического отображения

диаграмм, которые возможны для отображения, заданной квадратичной параболой. Мы здесь использовали другое представление параболического отображения, $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$, которое более удобно в ряде отношений.

Мы видим, что 4-цикл превращается в циклы периода 8, 16 и т.д.; затем, при превышении некоторого *критического* значения параметра $\lambda_C = 1.401152\dots$ возможен сложный, неповторяющийся процесс. Эти режимы называют динамическим хаосом. Что это означает на языке динамики популяции? Пусть мы запустили рыбу в пруд и подкармливаем ее, чтобы иметь большой улов. Если пищи немного, то численность популяции станет стабильной. Если количество пищи увеличить, то возможны колебания численности рыбы год от года – в одном году рыбы много, а на будущий год – мало. Если же количество пищи перейдет через некоторое пороговое значение, то численность рыбы начнет хаотически, непредсказуемо меняться год от года! Весьма неожиданный и нетривиальный результат. Ясно, что сама возможность такого поведения в предельно простых и *предсказуемых* системах является важным открытием.

Вернемся к нашим диаграммам. Можно видеть, что с ростом параметра возникает не только хаос, но и сложные циклы периодов 3, 6 и т.д., чередующиеся с областями непериодического поведения. Среди них есть и 4-циклы и 8-циклы и т.д., но с существенно иным видом итерационной диаграммы, чем в основной области удвоений периода. Мы рекомендуем составить «коллекцию» основных циклов такого типа (задача 2). Итак, эксперименты с «подкармливанием рыбы» могут привести к необычайно разнообразным режимам.

Еще одна эффектная иллюстрация сложного поведения квадратичного отображения - *бифуркационное дерево* (или, как иногда говорят, «дерево Фейгенбаума» – по имени ученого, установившего многие существенные законы динамики отображений). Бифуркационное дерево дает зависимость установившихся значений переменной x от параметра λ . Наше аналитическое рассмотрение позволяет нарисовать начальный участок дерева (рис. 8).

Это устойчивая неподвижная точка и рождающийся 2-цикл. В случае 2-цикла переменная последовательно посещает две ветви дерева. Такую ситуацию расщепления дерева называют *бифуркацией удвоения периода*. Полное дерево (для всех значений параметра) можно построить с помощью компьютера. Для этого надо задать некоторое начальное значение переменной и параметра. Затем выполнить несколько сот итераций отображения, чтобы исключить переходные процессы и реализовать установившийся режим, и вывести некоторое количество точек на экран дисплея. Затем процедуру повторить для слегка измененного значения параметра. (Рекомендуем в качестве нового начального значения переменной использовать полученное на предыдущем шаге процедуры.) И далее все повторить для всего диапазона управляющего параметра. В результате получится картинка, показанная на рис. 9.

На бифуркационном дереве хорошо видны моменты удвоений периода, когда дерево расщепляется на две ветви, область хаотического режима и различные «окна» периодических режимов в хаосе.

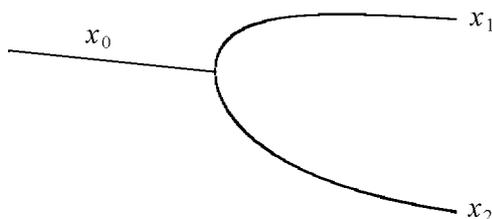


Рис. 8. «Расщепление» ветви дерева – удвоение периода

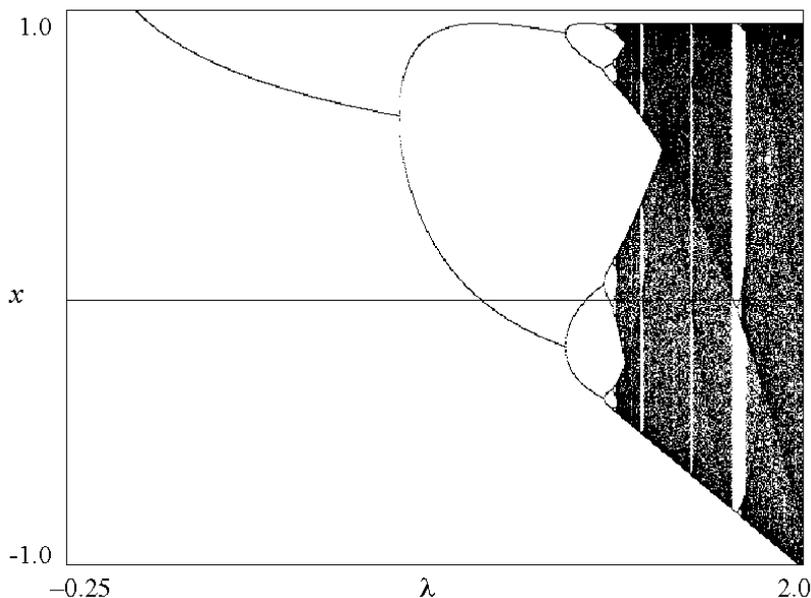


Рис. 9. Бифуркационное дерево логистического отображения

3. Законы Фейгенбаума

Одно из удивительных открытий американского физика М. Фейгенбаума состоит в том, что аналогичное поведение демонстрирует не только приведенное выше, но и другие отображения, моделирующие математические, физические, химические и даже социальные системы. Фейгенбаум сумел обосновать этот факт теоретически. Еще более удивительно, что и системы в виде дифференциальных уравнений тоже демонстрируют такое поведение – переход к хаосу через удвоения периода. При этом законы такого перехода, открытые Фейгенбаумом, универсальны – то есть одинаковы для всех систем. Так, было установлено, что значения параметра λ_k , при которых происходят удвоения, удовлетворяют соотношению

$$\lambda_k \approx \lambda_C - \text{const} \cdot \delta_F^k,$$

где $\delta_F = 4.669201609102990672\dots$ – универсальная константа. (Равенство выполняется тем лучше, чем ближе мы подходим к критической точке рождения хаоса.) Можно сказать, что возникновение хаоса в результате каскада удвоений периода – это одна из фундаментальных закономерностей природы.

Одним из отражений закономерностей Фейгенбаума является тот факт, что бифуркационное дерево в окрестности точки перехода к хаосу обладает *самоподобной* структурой, которая воспроизводится во все более мелких масштабах (свойство *скейлинга*). Для иллюстрации этого на рис. 10 показана окрестность критической точки $\lambda_C = 1.401152\dots$ во все большем масштабе – каждый выделенный прямоугольник дан в увеличенном виде. При этом масштаб по горизонтальной оси пересчитывается в $\delta = 4.6692\dots$ раз относительно критической точки $\lambda = \lambda_C$, а по вертикальной оси x – в $\alpha = -2.5029\dots$ раз (вторая универсальная константа Фейгенбаума) относительно точки $x = 0$. (Знак минус означает изменение ориентации – картинка переворачивается «вверх ногами».)

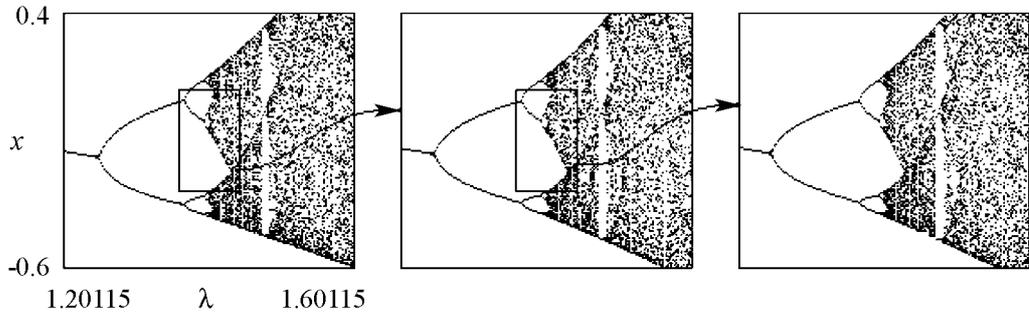


Рис. 10. Самоподобие или «скейлинг» на бифуркационном дереве

4. Шум и бифуркационное дерево

В реальных системах всегда присутствуют случайные флуктуации или шум. Анализ колебательных систем с шумом – очень непростая задача, которая представляет собой существенную часть отдельной науки – статистической радиофизики. Действительно, если система описывается дифференциальным уравнением, не

вполне очевидно, как учесть при ее описании естественные шумы. А вот для дискретных отображений эта задача радикально проще. Действительно, в рамках биологической интерпретации представим себе, что количество пищи не одинаково год от года, а случайно меняется вблизи некоторого постоянного значения. Тогда мы приходим к отображению вида

$$x_{n+1} = 1 - \lambda_n^2 + \varepsilon \xi_n,$$

где ε – амплитуда шума, ξ_n – случайная последовательность. Дискретная случайная величина ξ_n может генерироваться любым компьютером. Используя соответствующий генератор случайных чисел, можно построить бифуркационное дерево в системе с шумом (рис. 11). Можно видеть, что шум «размывает» ветви дерева. Показанный в увеличенном виде фрагмент дерева в этом случае демонстрирует, что влияние шума тем сильнее, чем больше периоды рассматриваемых циклов. Таким образом, сколь малым ни был бы шум, он обязательно разрушит картину удвоений периода вблизи критической точки. Это означает, что в реальных системах всегда наблюдается конечное число удвоений периода (их число зависит от вида системы и характера шума).

Таким образом, дискретные отображения – удобные модели, иллюстрирующие влияние шума на динамические системы. Любопытно, что в компьютере в качестве генератора случайных чисел также используются дискретные отображения!

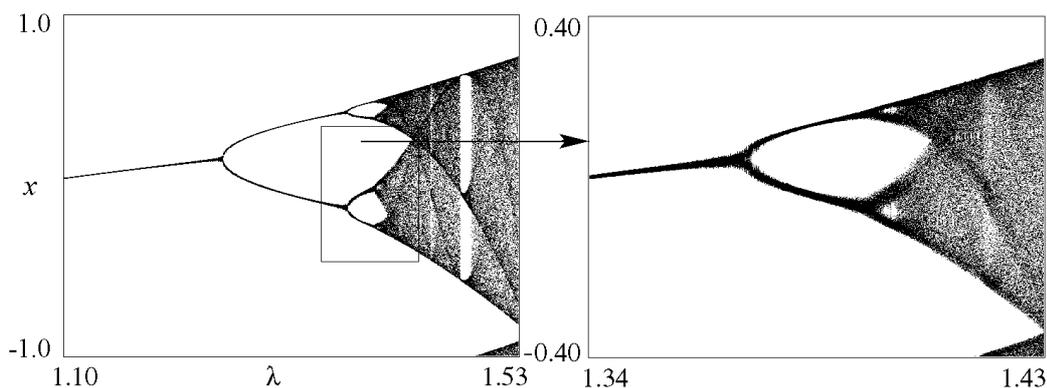


Рис. 11. Воздействие шума на бифуркационное дерево

5. Прыгающий шарик

Рассмотренные нами примеры были одномерными отображениями, поскольку характеризовались единственной переменной x . Теперь мы рассмотрим пример системы, характеризующейся уже двумя измерениями.

Пусть шарик падает на стол с высоты h . Высота подскока шарика после удара о стол дается соотношением

$$h_{n+1} = (1 - \varepsilon)^2 h_n,$$

где ε – доля теряемой при ударе скорости. Это убывающая прогрессия, так как $(1 - \varepsilon) < 1$. А нельзя ли превратить эту систему в систему со сложной динамикой?

Для этого надо как-то поддержать колебания шарика. Простейшее решение состоит в том, чтобы заставить поверхность вибрировать, например, по гармоническому закону (рис. 12).

Тогда «стол» может двигаться навстречу шарика, сообщать энергию и поддерживать колебания. Для такой системы довольно просто построить дискретное отображение. Прежде всего договоримся о выборе дискретных переменных. В отличие от логистического отображения их будет две: скорость шарика перед n -м ударом v_n и момент удара t_n .

Сделаем одно очень существенное предположение – будем пренебрегать смещением стола в момент удара. (Это можно сделать, если скорость шарика достаточно велика по сравнению со скоростью плиты.) Тогда движение шарика на плоскости (t, y) выглядит так, как показано на рис. 13.

Итак, скорость шарика перед ударом v_n . Пусть скорость стола зависит от времени по закону

$$v(t) = V_0 \sin \omega t.$$

Перед ударом шарика скорость $v = V_0 \sin \omega t_n$. Перейдем в систему отсчета, связанную со столом. В этой системе отсчета скорость сближения

$$v_n + V_0 \sin \omega t_n.$$

При ударе по условию теряется доля скорости ε . Тогда в этой системе отсчета скорость шара после удара

$$(1 - \varepsilon)(v_n + V_0 \sin \omega t_n).$$

Вернемся в исходную систему отсчета, для чего добавим к найденному значению скорости скорость стола. Тогда шарик отлетает от плиты со скоростью

$$(1 - \varepsilon)(v_n + V_0 \sin \omega t_n) + V_0 \sin \omega t_n.$$

Ясно, что, подпрыгнув с этой скоростью в отсутствие сопротивления воздуха, он с той же скоростью упадет на стол. Но это уже будет скорость перед $(n + 1)$ -м ударом. Таким образом,

$$v_{n+1} = (1 - \varepsilon)v_n + V_0(2 - \varepsilon) \sin \omega t_n.$$

Время свободного полета шарика $\tau = 2v_{n+1}/g$. Тогда, очевидно,

$$t_{n+1} = t_n + \frac{2v_{n+1}}{g}.$$

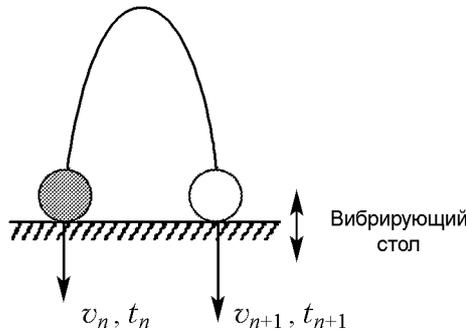


Рис. 12. Модель «прыгающего шарика»

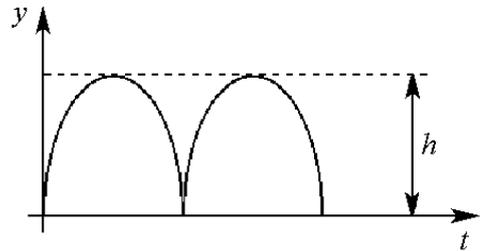


Рис. 13. Пространственно-временная диаграмма движения шарика, отвечающая неподвижной точке отображения

Мы получили искомое двумерное отображение. Его можно несколько упростить, приведя к безразмерному виду. Для этого положим $\varphi_n = \omega t_n$. Тогда

$$v_{n+1} = (1 - \varepsilon) v_n + V_0 (2 - \varepsilon) \sin \varphi_n,$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{2\omega}{g} v_{n+1}.$$

Полагая $V = \frac{2\omega}{g} v$, получим

$$V_{n+1} = (1 - \varepsilon) V_n + k \sin \varphi_n \quad (\varphi_n, \text{ mod } 2\pi),$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + V_{n+1}.$$

Здесь $k = \frac{2(2 - \varepsilon) V_0 \omega}{g}$.

Итак, в безразмерном виде наше отображение характеризуется двумя параметрами: ε – параметр диссипации и k – безразмерная амплитуда колебаний стола.

В наше соотношение мы добавили символы $(\varphi_n, \text{ mod } 2\pi)$. Это означает, что мы берем не само значение фазы φ_n , а добавку к $2\pi n$, где n – целое. Такое дополнение естественно, так как синус – 2π -периодическая функция, а φ_n будет меняться в ограниченном интервале от 0 до 2π .

Убедимся в правильности нашего предположения о том, что вибрации стола поддержат колебания шарика. Найдем неподвижную точку отображения

$$V = (1 - \varepsilon) V + k \sin \varphi,$$

$$\varphi = \varphi + V - 2\pi n.$$

Отсюда

$$V = 2\pi n,$$

$$\frac{2\pi n \varepsilon}{k} = \sin \varphi.$$

Это уравнение имеет два решения

$$\varphi = \pm \arcsin \frac{2\pi n \varepsilon}{k}$$

при условии $2\pi n \varepsilon < k$. Можно показать, что одна из этих точек устойчива, а другая – нет. (Вообще, устойчивые и неустойчивые точки рождаются парами.) Таким образом, если безразмерная амплитуда $k > 2\pi \varepsilon$, то в системе возможна неподвижная точка, которой отвечают подскоки на одинаковую высоту (см. рис. 13). Мы можем легко найти высоты подскоков в этой точке

$$h = \frac{mv_{n+1}^2}{2} = \frac{mg^2}{8\omega^2} V^2 = \frac{mg^2 \pi^2}{2\omega^2}.$$

Будем теперь увеличивать амплитуду колебаний стола k . Обратимся к компьютерному моделированию. На рис. 14 показано бифуркационное дерево, дающее зависимость установившейся скорости V от амплитуды k при фиксированном значении $\varepsilon = 0.9$.

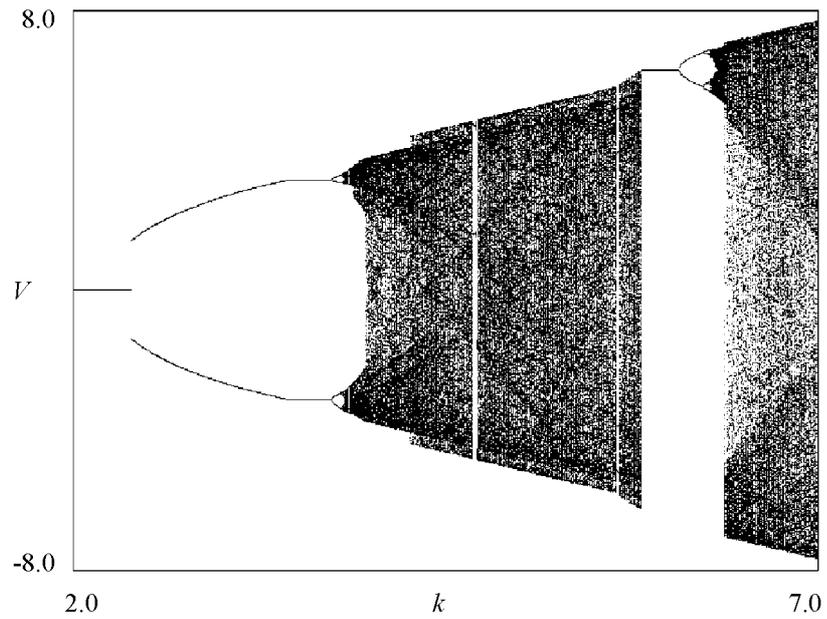


Рис. 14. Бифуркационное дерево отображения «прыгающего шарика»

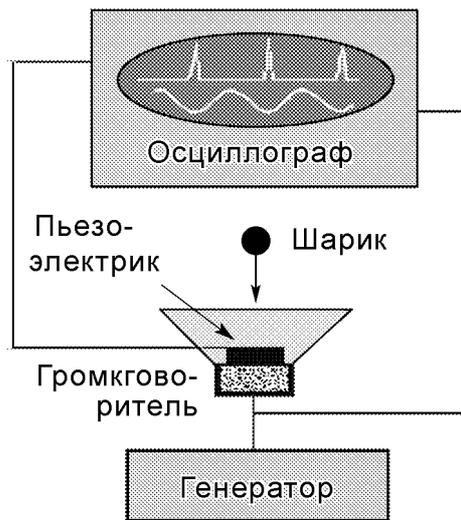


Рис. 15. Эксперимент с прыгающим шариком

Можно видеть, что в системе имеют место бифуркации удвоения периода.

Нам остается добавить, что наша практически школьная задача на самом деле является одной из серьезных моделей нелинейной динамики. Ее ввел российский физик Г.М. Заславский как некоторую модель астрофизики ускорения космических частиц гравитационными полями звезд. Однако она получила популярность, скорее, именно как модель шарика, прыгающего на столе. Ее реализовали и экспериментально, для чего в качестве вибрирующего стола использовали диффузор громкоговорителя (рис. 15). В эксперименте наблюдались и удвоения периода и хаотические колебания.

6. Отображение Эно

Простейшим одномерным отображением со сложной динамикой является логистическое отображение

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad \text{или} \quad x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2,$$

которое описывает, например, динамику популяции.

В предыдущем разделе на примере задачи о прыгающем шарике мы познакомились с двумерными отображениями. Нельзя ли построить двумерное обобщение логистического отображения? Оказывается, можно. При введении одномерного отображения мы предполагали, что численность популяции в $(n + 1)$ -й год зависит лишь от численности в n -й год. Предположим теперь, что память «глубже» – численность в $(n + 1)$ -й год зависит и от численности в $(n - 1)$ -м году. Эта зависимость должна быть слабой. Поэтому полагаем ее линейной. Тогда

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) - bx_{n-1},$$

где b – некоторый новый коэффициент.

Введем теперь обозначение $y_{n+1} = x_n$. Тогда

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) - by_n,$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

Это и есть искомое двумерное отображение. Если использовать другое представление для квадратичной функции, то это отображение можно записать в виде

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - by_n,$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

Такое отображение впервые предложил французский астрофизик Мишель Эно (М. Hénon), и оно носит его имя. (Эно не использовал биологическую интерпретацию, а исходил из другой мотивации – искал простейшие двумерные квадратичные отображения со сложной динамикой.)

Отображение Эно допускает аналитический поиск неподвижной точки и 2-цикла и исследование их устойчивости (см. задачу 6). На рис. 16 показано бифуркационное дерево отображения Эно при $b = 0.3$. Можно видеть, что оно демонстрирует не только рождение устойчивого 2-цикла из неподвижной точки, но и весь

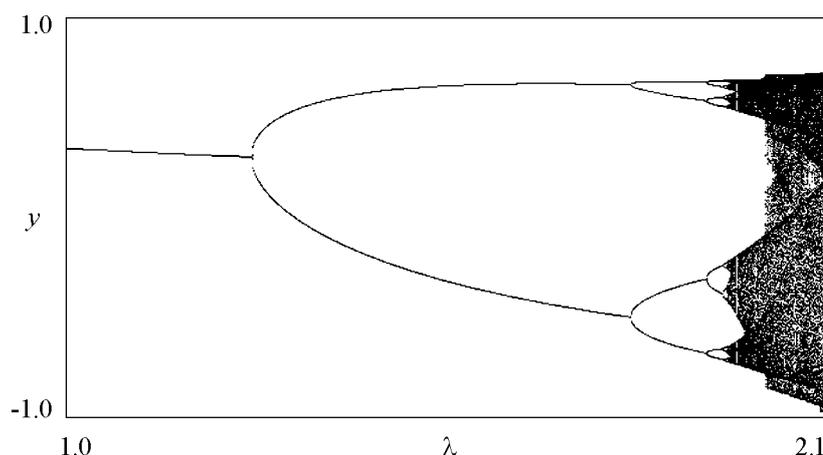


Рис. 16. Бифуркационное дерево отображения Эно

каскад бифуркаций удвоения периода, хаос и окна периодичности в хаосе. Новым является то, что дерево иногда скачком «разбухает». Такое явление в нелинейной динамике называют *кризисом*.

Отметим, что динамика отображения Эно на самом деле столь многообразна, что ему можно посвятить целую монографию. Более того, многие современные исследователи по-прежнему используют отображения Эно в своих работах.

7. Фазовое пространство и аттракторы

Как проследить за эволюцией динамической системы при заданных начальных условиях? Для этого нужно «увидеть», что происходит с определяющими динамическую систему переменными x, y, \dots по мере эволюции во времени. Введем некоторое пространство, по осям координат которого отложим эти переменные. Его принято называть *фазовым пространством*. Фраза «задано начальное состояние динамической системы» теперь означает, что задана точка в фазовом пространстве. «Включим» время. Если система определена дискретным отображением, например, отображением Эно или прыгающего шарика, то изображающая точка при каждой итерации будет совершать «прыжки» в фазовом пространстве.

Динамическая система полностью задает закон эволюции во времени, однако, чтобы получить полную информацию о характере такой эволюции, надо провести исследование для различных начальных условий. Современные компьютеры делают эту задачу не умозрительной, а вполне реальной и позволяют получать наглядные геометрические образы такого процесса.

Итак, рассмотрим множество начальных состояний системы. В фазовом пространстве в этом случае будем иметь уже не одну изображающую точку, а целое «облако». При «включении» времени они все начнут совершать «прыжки». При компьютерном моделировании разумно создать мгновенные «снимки» облака через определенные промежутки времени (число итераций). Тогда можно следить за эволюцией облака на экране дисплея.

Перейдем к компьютерному моделированию. В качестве исследуемой системы выберем отображение Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - by_n, \\y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}$$

Здесь λ и b – параметры. На рис. 17 показаны мгновенные «снимки» облака изображающих точек на фазовой плоскости для отображения Эно, сделанные через одну итерацию.

Заметим, что при работе за компьютером весьма удобно и увлекательно наблюдать эволюцию облака изображающих точек в режиме «компьютерной мультипликации».

Наиболее существенный результат компьютерного моделирования (см. рис. 17) состоит в том, что облако изображающих точек «конденсируется» на некоторые предельные объекты. Их называют аттракторами (от английского to attract – притягивать). Динамические системы, которые обладают аттракторами, называют *диссипативными*.

Процесс «конденсации» изображающих точек на аттрактор занимает некоторое время. Как видно из рис. 17, в результате изображающие точки притягиваются

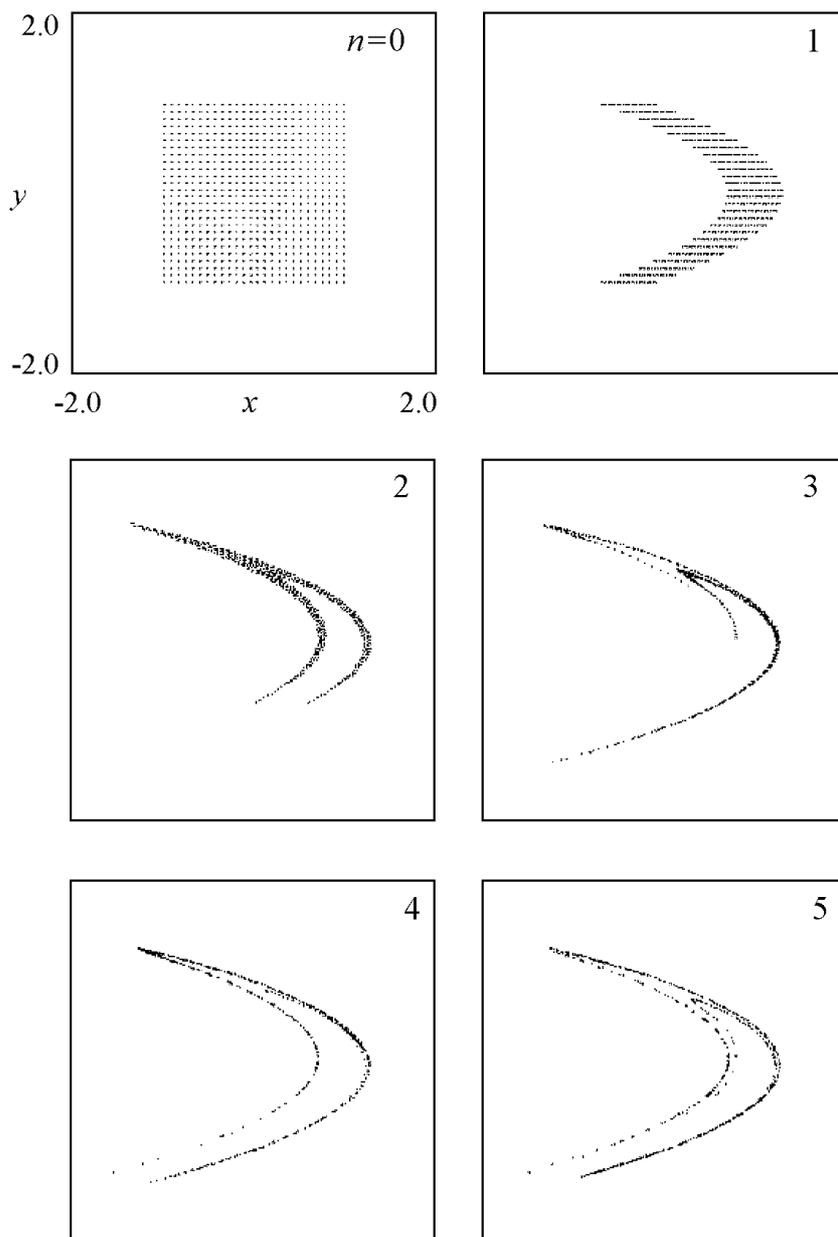


Рис. 17. Конденсация облака изображающих точек в фазовом пространстве на аттрактор для отображения Эно

к некоторой сложной слоистой структуре. Если просмотреть с помощью компьютера как «микроскопа» отдельные фрагменты такого аттрактора, то обнаруживается, что он весь состоит из отдельных «нитей» и областей пустого пространства, причем каждая нить, в свою очередь, имеет аналогичную тонкую структуру. Как говорят, аттрактор в этом случае обладает *фрактальными свойствами*. Подобные аттракторы были обнаружены в семидесятые годы нашего века и получили название *странных*. А колебательные режимы, которым не отвечает определенный период, названы *динамическим хаосом*.

Итак, если исследуемая система диссипативна, то можно изучать лишь ее аттракторы. Это упрощает компьютерное моделирование – не надо следить за всеми изображающими точками. Достаточно выбрать одну из них, выполнить определенное (не очень маленькое) число итераций, чтобы эта точка «вышла» на аттрактор, а затем вывести ее движение на экран компьютера. Тогда мы и получим портрет аттрактора.

8. Карты динамических режимов

Иллюстрации в виде бифуркационных деревьев демонстрируют возможность нетривиальной эволюции аттракторов и, соответственно, колебательных режимов динамических систем при вариации одного параметра. Еще более удивительное разнообразие режимов можно наблюдать, если система характеризуется двумя параметрами. На первый взгляд кажется, что исследование такой системы требует кропотливой работы, и это действительно так. Однако сейчас в нелинейной динамике стал популярным весьма простой, наглядный и информативный прием, который позволяет быстро получать существенную информацию о системе. Продемонстрируем его на примере *кубического* отображения

$$x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3.$$

Компьютерная «технология» двухпараметрического исследования состоит в следующем. Выбираются какие-либо значения параметров a и b . Затем выполняется несколько сотен итераций отображения для того, чтобы система вышла на аттрактор, а затем – еще несколько сотен итераций уже непосредственно на аттракторе. По мере итераций на аттракторе производится сравнение начального значения со всеми последующими. Если они совпадают с высокой (наперед заданной) точностью, то число итераций принимается за период движения. На плоскости параметров (на экране дисплея) точка отмечается некоторым цветом, причем цветовая палитра выбирается заранее, так что движениям с определенными периодами отвечают определенные цвета. После этого процедура повторяется при слегка измененных значениях параметров, так что в конечном итоге выполняется полное «сканирование» плоскости параметров. В результате плоскость оказывается окрашенной в разные цвета в соответствии с периодом движения на аттракторе. Области хаоса (непериодические режимы) также обозначаются специальным образом. По аналогии с географией такую «раскрашенную» плоскость называют *картой динамических режимов*. На рис. 18 показана карта динамических режимов кубического отображения.

Как видим, столь простая модель демонстрирует очень большое разнообразие режимов и бифуркаций. В нижней части рисунка видна граница между областями устойчивости неподвижной точки и цикла периода 2, представляющая собой линию бифуркации удвоения периода. Линий рождения 4-цикла в результате аналогичной бифуркации уже две, причем область устойчивости 2-цикла имеет характерный вид с уходящими «вверх» пересекающимися «отростками». Таким образом, область устойчивости 2-цикла ограничена этими линиями удвоений, а также двумя линиями *складок* (термин теории катастроф), образующими нижнюю границу «отростков». Отметим, что линии складок продолжаютсся внутрь области устойчивости 2-цикла и сходятся в точке, которую в теории катастроф называют точкой

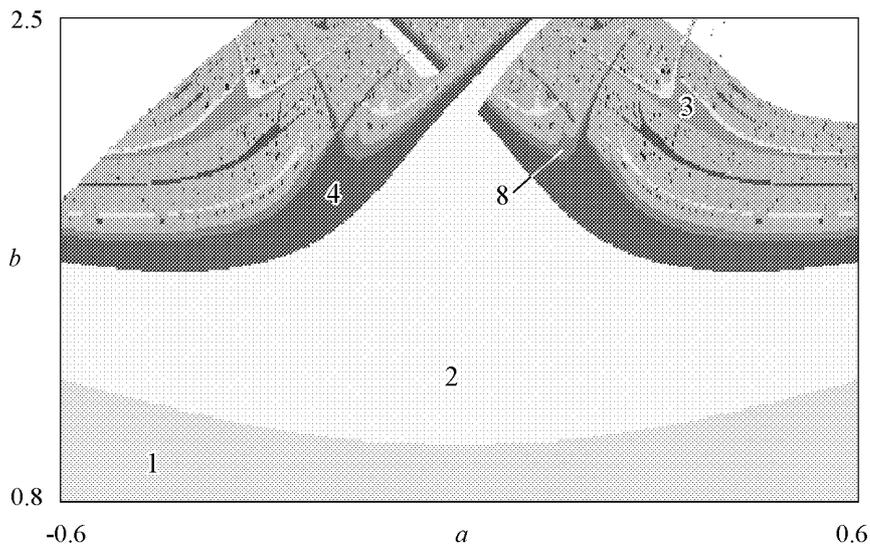


Рис. 18. Карта динамических режимов кубического отображения

сборки ($a = 0, b = 2$), которая, однако, на рисунке не видна. Описанная совокупность бифуркационных линий схематически показана также на рис. 19; область существования устойчивого цикла определенного периода заштрихована. Она демонстрирует весьма типичную структуру на картах, названную французским специалистом в области нелинейной динамики К. Мира *crossroad area* (перекресток). На карте можно видеть две аналогичные конфигурации на базе 8-циклов. Самые широкие окна устойчивости реализуются на основе 3-циклов, внутри них можно идентифицировать конфигурации *crossroad area*, отвечающие областям устойчивости 6-циклов и т.д.

Правда, карты динамических режимов обладают одним недостатком. Если провести сканирование карты различными способами (например, снизу вверх или слева направо), то отдельные фрагменты карт получаются отличающимися. Это связано со свойством *мультистабильности* динамических систем. Оно состоит в том, что при заданных значениях параметров могут сосуществовать одновременно несколько (иногда мало, иногда много) аттракторов. Соответственно, в зависимости

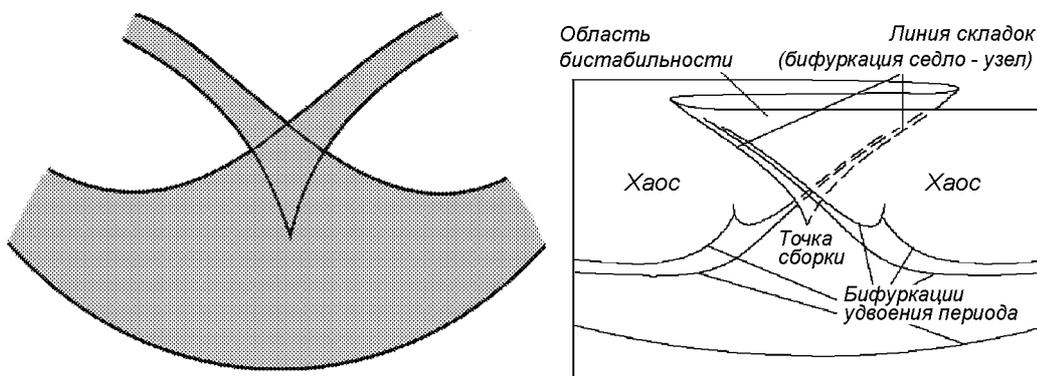


Рис. 19. Элементарные «кирпичики» плоскости параметров

от начальных условий траектория может выйти на тот или иной аттрактор. Поэтому, построив карту, полезно попробовать сделать то же самое, но при других начальных условиях. Полезным также является прием, когда, сделав маленький шаг по параметру, в качестве начальной в фазовом пространстве берут точку аттрактора, получившегося на предыдущем шаге. Иногда об этом способе говорят, что карту строят с *наследованием начальных условий*.

В современной нелинейной динамике достаточно много существенных для теории (иногда говорят – *эталонных*) динамических систем. Среди них и уже знакомое отображение Эно. Набор карт для них образует своеобразный атлас; с некоторыми «страничками» этого атласа можно познакомиться на сайте <http://www.sgtnd.narod.ru/science/atlas/rus/index.htm>.

Итак, большинство нелинейных систем характеризуется сложной топографией карт динамических режимов. Степень сложности полученных изображений такова, что их можно назвать «фрактальными пейзажами». Как правило, карты содержат детали, неоднократно повторяющиеся во все меньших и меньших масштабах. Можно установить определенные законы самоподобия или, как говорят, *скейлинга*. Но это уже отдельная тема.

Интересно, что карты режимов можно строить не только для отображений, но и для дифференциальных систем, если использовать *метод сечений Пуанкаре*. Мы обсудим, как это сделать, но сначала скажем несколько слов о некоторых свойствах дифференциальных уравнений в контексте теории динамических систем.

9. Отображения помогают решать дифференциальные уравнения

Дифференциальная двумерная динамическая система общего вида задается уравнениями

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y).$$

Смысл этих соотношений понятен – скорости изменения физических величин определяются функциями от их значений. Здесь представлен случай двумерной системы, а вообще говоря, число уравнений определяет размерность системы. Замечательно, что отображения помогают решать численно дифференциальные уравнения. Действительно, представим искомые функции времени $x(t)$ и $y(t)$ их значениями на дискретном множестве точек $t_n = nh$, как говорят, в узлах сетки с шагом h по времени:

$$x_n = x(nh), \quad y_n = y(nh).$$

Величина шага должна быть достаточно малой, от нее будет зависеть точность решения. В силу малости h можно положить

$$\dot{x}_n \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{h}, \quad \dot{y}_n \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}.$$

Тогда нетрудно выразить в явном виде x_{n+1} и y_{n+1} через x_n и y_n :

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = y_n + hg(x_n, y_n).$$

Таким образом, мы пришли к некоторому дискретному отображению. Итерируя его, мы будем получать аппроксимацию динамики дифференциальной системы. (Это, разумеется, простейший вариант численного метода – метод Эйлера).

Здесь следует сделать еще одно замечание. Обычно в нелинейной динамике рассматривают различные колебательные (или автоколебательные) системы, в форме различных осцилляторов. Например, нелинейный осциллятор Дуффинга

$$\ddot{x} + d\dot{x} + x + \beta x^3 = 0,$$

или система Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Они приводятся к «стандартной» форме, если наряду с координатой x ввести вторую переменную – скорость v :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -dy - x - x^3.\end{aligned}$$

Такая форма записи удобна для численного решения по описанной выше схеме и позволяет естественным образом перейти к фазовому пространству для дифференциальных систем.

10. Фазовое пространство дифференциальных систем

Обратимся теперь к фазовому пространству. В силу малости шага h на фазовой плоскости (x, v) изображающая точка будет совершать очень маленькие «прыжки», прорисовывая, тем самым, некоторую кривую, как говорят, *фазовую траекторию*. Снова зададим множество начальных состояний в виде облака точек в фазовом пространстве. При «включении» времени они все двинутся по своим траекториям. При компьютерном моделировании разумно создать мгновенные «снимки» облака через определенные промежутки времени (число итераций). Тогда можно следить за эволюцией облака на экране дисплея. Итог такого моделирования для осциллятора Дуффинга дает простой результат – все изображающие точки притянутся в начало координат, что отвечает затуханию колебаний осциллятора. В системе Ван дер Поля результат может быть иным (задача 10). Все точки конденсируются на аттрактор в виде замкнутой кривой (такие аттракторы называют *предельными циклами*), что отвечает некоторому установившемуся колебательному процессу. Примеры предельных циклов, однако, мы дадим ниже, после того, как обсудим возможную связь дифференциальных систем и отображений.

11. Сечение Пуанкаре

Французский математик Анри Пуанкаре предложил метод, который устанавливает связь между дифференциальными системами и отображениями. Обратимся к некоторой трехмерной дифференциальной системе. Выберем в фазовом пространстве некоторую поверхность S (например, плоскость $z = 0$). После этого будем следить не за всей фазовой траекторией дифференциальной системы, а лишь за точками ее пересечения с этой поверхностью (рис. 20, а). Таким образом, мы приходим к дискретному отображению, исследовать которые уже умеем.

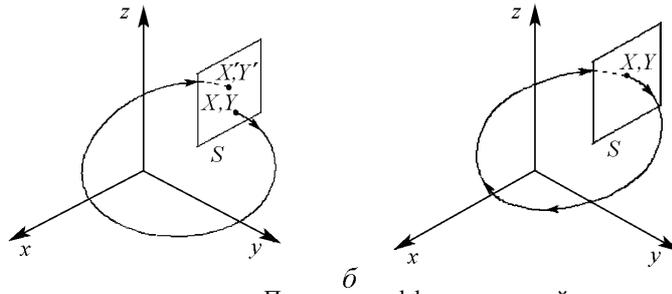


Рис. 20. Фазовая траектория и сечение Пуанкаре дифференциальной системы (а); предельный цикл и неподвижная точка в сечении Пуанкаре (б)

Приведенное простое рассуждение уже оказывается содержательным и позволяет нам указать на возможные типы аттракторов дифференциальных систем. Действительно, мы знаем, что отображения могут демонстрировать неподвижные точки. Это значит, что фазовая траектория, описав дугу, возвращается обратно и вновь «протыкает» сечение в той же точке (рис. 20, б). Таким образом, фазовая траектория может представлять собой замкнутую кривую. Такие фазовые траектории и являются *предельными циклами*. Далее, в сечении Пуанкаре возможно превращение неподвижной точки в 2-цикл. Это означает, что исходный предельный цикл должен усложнить свою форму и превратиться в некоторую двухоборотную кривую. Наконец, в случае хаотического аттрактора, фазовая траектория должна будет «бродить» в некоторой ограниченной области фазового пространства, пересекая секущую поверхность и образуя в этом сечении хаотическое множество.

Эти соображения следует проверить с помощью компьютерного моделирования. Выберем трехмерную дифференциальную систему, допускающую реальное воплощение в радиоэлектронике – так называемую систему Чуа. Это простое электронное устройство, содержащее линейные элементы: один резистор, одну индуктивность и две емкости, а также нелинейный элемент с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой. Система Чуа хорошо изучена, для нее имеется как строгое математическое доказательство существования хаоса, так и многочисленные экспериментальные и компьютерные результаты. Посвященная этой системе монография носит эффектное название «Chua’s circuit: a paradigm for chaos» – «Система Чуа: парадигма хаоса». Не будем, однако, обсуждать детали устройства схемы – для нас важно, что она описывается системой трех дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \alpha(y - h(x)), \quad \dot{y} = x - y + z, \quad \dot{z} = -\beta y.$$

Здесь α и β – параметры (иногда удобно использовать другую пару параметров $\alpha' = \alpha - 0.68\beta$, β), а $h(x)$ – кусочно-линейная функция

$$h(x) = \begin{cases} (2x + 3)/7, & x \leq -1, \\ -x/7, & -1 < x < 1, \\ (2x - 3)/7, & x \geq 1. \end{cases}$$

Таким образом, задача формализована для компьютерного моделирования. Зафиксируем сначала значения параметров α и β и получим портрет аттрактора в трехмерном фазовом пространстве. На рис. 21, а представлен пример такого аттрактора. На этом же рисунке показано сечение фазового пространства плоскостью, которое и можно интерпретировать как сечение Пуанкаре для нашей задачи.

Итак, в анализируемой системе аттрактор в виде предельного цикла действительно возможен и имеет с этим сечением общую точку. С ростом параметра β происходит следующее: при некотором бифуркационном значении β предельный цикл

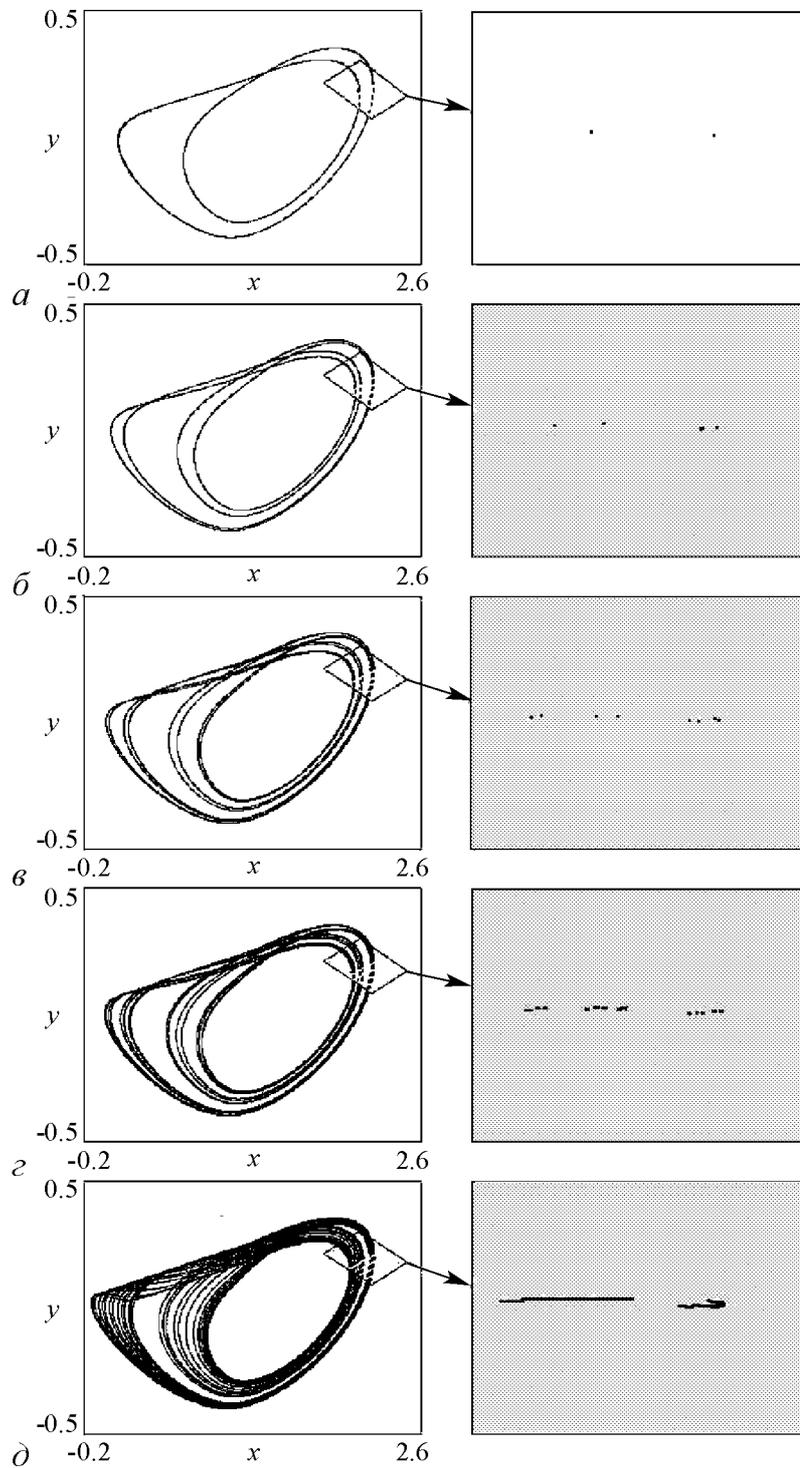


Рис. 21. Удвоения предельных циклов и хаотический аттрактор для схемы Чуа и соответствующие сечения Пуанкаре. Значения параметров: $\alpha' = 0.622$; $\beta = 3.53$ (a), 3.8 (\bar{b}), 3.99 (\bar{b}), 4.038894 (\bar{b}), 4.4 (\bar{b})

расщепляется и превращается в «двухоборотный» жгут. Это оказывается возможным именно благодаря наличию третьего измерения. В проекции на плоскость рис. 21, а предельный цикл имеет самопересечения, но в трехмерном пространстве их на самом деле нет. Нетрудно понять, что такому предельному циклу отвечает удвоенный период колебаний. Как видно из правого верхнего рисунка, в сечении Пуанкаре удвоение периода отвечает появлению 2-цикла.

При дальнейшем росте параметра β предельный цикл претерпевает последовательные усложнения – происходит *каскад бифуркаций удвоения периода*. Отображение Пуанкаре демонстрирует теперь 4-циклы, 8-циклы и т. д. При еще большем увеличении параметра β возникает хаос. Хаотический аттрактор в трехмерном фазовом пространстве выглядит как клубок спутанных ниток (рис. 21, д).

Итак, отображения помогают изучать и понимать динамику дифференциальных систем.

12. Карты динамических режимов дифференциальных систем

Комбинируя программы для расчета сечения Пуанкаре и построения карт динамических режимов, можно без особых проблем построить карты дифференциальных систем. Замечательно, что они оказываются очень похожими на карты отображений и содержат элементы, совершенно аналогичные показанным на рис. 18 и 19. Для примера на рис. 22 представлена карта динамических режимов схемы Чуа.

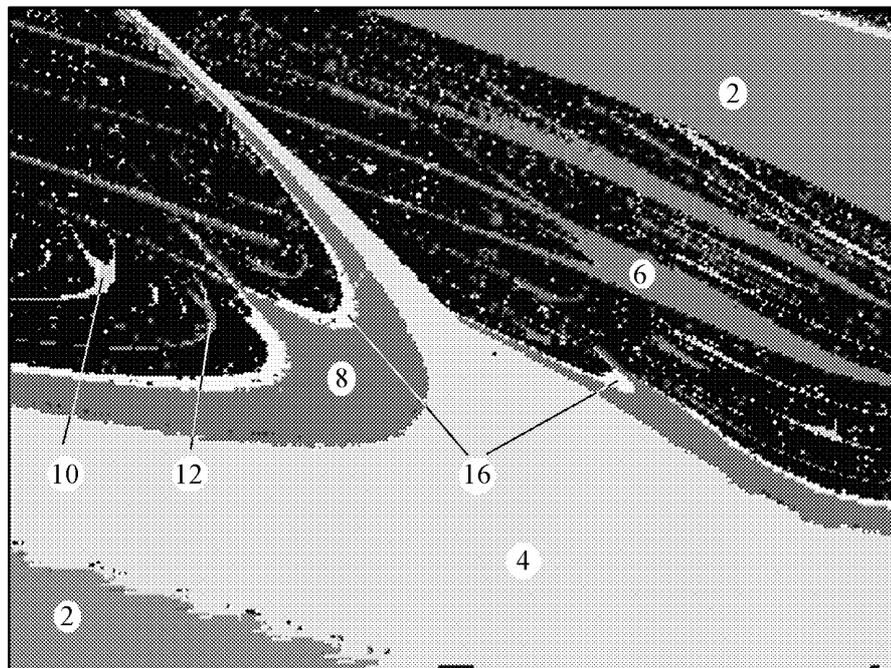


Рис. 22. Карта динамических режимов схемы Чуа

13. Сечение Пуанкаре неавтономных систем

Важный класс динамических систем образуют колебательные системы, возбуждаемые внешним сигналом, или, как говорят, *неавтономные системы*. Простейшими примерами могут служить система Ван дер Поля под действием гармонического сигнала

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = b \sin \omega t,$$

и нелинейный осциллятор Дуффинга

$$\ddot{x} + d\dot{x} + x + \beta x^3 = b \sin \omega t.$$

Эти примеры в автономном случае относятся к двумерным системам, динамика которых разворачивается на фазовой плоскости. В случае учета внешнего воздействия можно, однако, переписать уравнение возбуждаемого осциллятора Дуффинга в следующем виде

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -dy - x - \beta x^3 + b \sin z,$$

$$\dot{z} = \omega.$$

Таким образом, эта система формально приводится к виду, характерному для трехмерных динамических систем – при этом третьей переменной служит время. (Очевидно, то же самое справедливо для осциллятора Ван дер Поля, да и для любой двумерной неавтономной системы.)

Траектория в расширенном трехмерном фазовом пространстве, в котором время выступает в качестве одной из фазовых координат, представляет собой бесконечную спираль (рис. 23). На рисунке для осциллятора Дуффинга показаны также *сечения Пуанкаре*, которые в этом случае представляют собой параллельные плоскости, отстоящие друг от друга на период внешнего воздействия T , и нанесены точки пересечения фазовой траектории с этими плоскостями. Показана также траектория на фазовой плоскости (x, \dot{x}) , которая в рамках такой интерпретации является проекцией трехмерного фазового портрета на текущую плоскость. В представленном случае имеем отклик точно на частоте внешнего воздействия, так что все точки пересечения траектории с плоскостями при проецировании совпали.

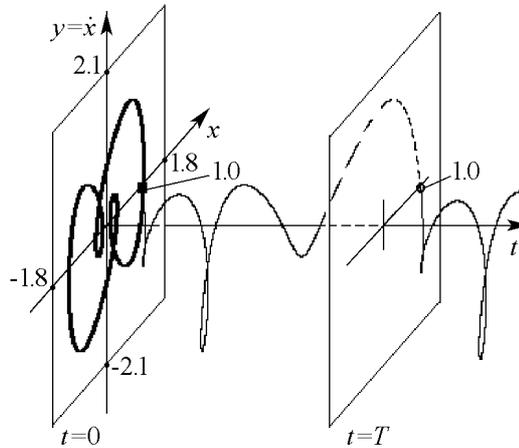


Рис. 23. Фазовая траектория неавтономного осциллятора Дуффинга в «расширенном» фазовом пространстве. Значения параметров $b = 2.5$, $\omega = 0.61$, $d = 0.2$, $\beta = 1$

На рис. 24 показаны проекции аттракторов на фазовую плоскость x, \dot{x} и точки сечения Пуанкаре для осциллятора Дуффинга (а) и осциллятора Ван дер Поля (б).

Чтобы сделать аналогию с традиционными трехмерными динамическими системами более наглядной, можно, используя периодичность внешнего воздействия,

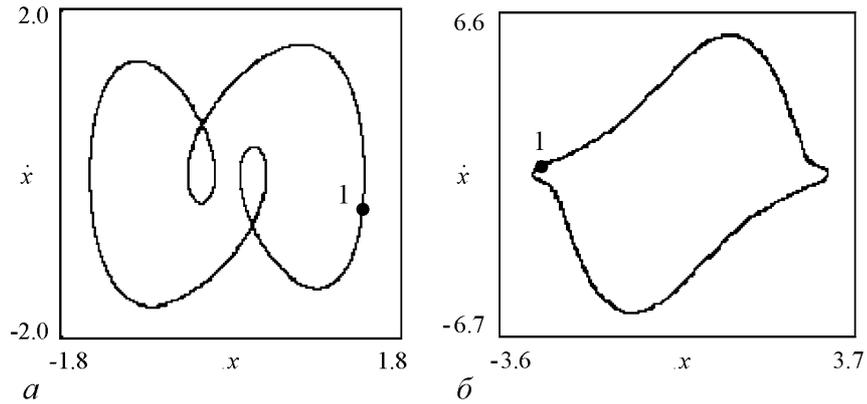


Рис. 24. Фазовые портреты на плоскости (x, \dot{x}) и точки сечений Пуанкаре неавтономных a – осциллятора Дуффинга ($b = 2.5, \omega = 0.61, d = 0.2, \beta = 1$); b – осциллятора Ван дер Поля ($b = 7.5, \omega = 0.5, \lambda = 0.5$)

от расширенного фазового пространства перейти к «замкнутому» фазовому пространству, как бы «склеивая» два сечения Пуанкаре (рис. 25). В результате такой процедуры вид аттрактора полностью соответствует традиционному для автономных систем третьего порядка. Хорошо видно на правом рисунке, что аттрактор имеет «классический» вид, который обычно приобретают предельные циклы после двух бифуркаций удвоения периода. (Рис. 25 относится к неавтономному *брюсселятору*.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2y - (1 + B)x + A + b \sin \omega t, \\ \dot{y} &= -x^2y + Bx. \end{aligned}$$

Значения параметров $b = 0.05, \omega = 0.72, A = 0.4, B = 1.2$.)

В «новом» фазовом пространстве периодическому режиму будет соответствовать замкнутая траектория (см. рис. 25 и 26, a). Оказывается, что в таких системах возможны новые типы аттракторов, которые представляют собой торы в фазовом пространстве. В этом случае фазовая траектория движется по поверхности тора, всюду плотно покрывая его, но нигде не замыкаясь. Это образы *квазипериодических колебаний*. Им отвечает колебательный процесс с двумя несоизмеримыми частотами – одна из них отвечает движению вдоль меридиана тора, а другая – вдоль его оси.

Нам осталось представить карты динамических режимов неавтономных систем. На рис. 27 такая карта показана для системы Ван дер Поля – Дуффинга

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \beta x^3 = b \sin \omega t,$$

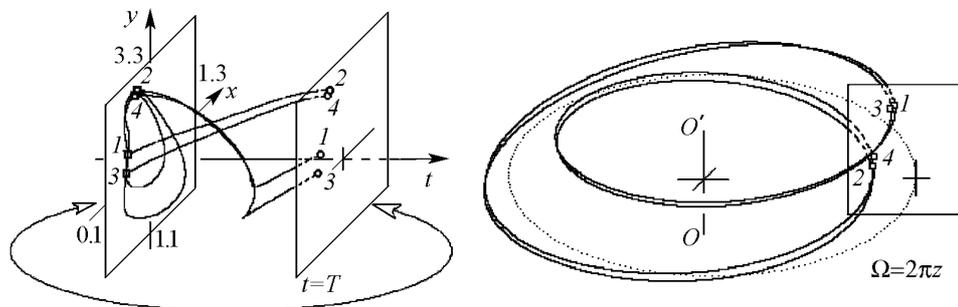


Рис. 25. «Склеивание» сечений Пуанкаре и «четырёхоборотный» предельный цикл неавтономного *брюсселятора*

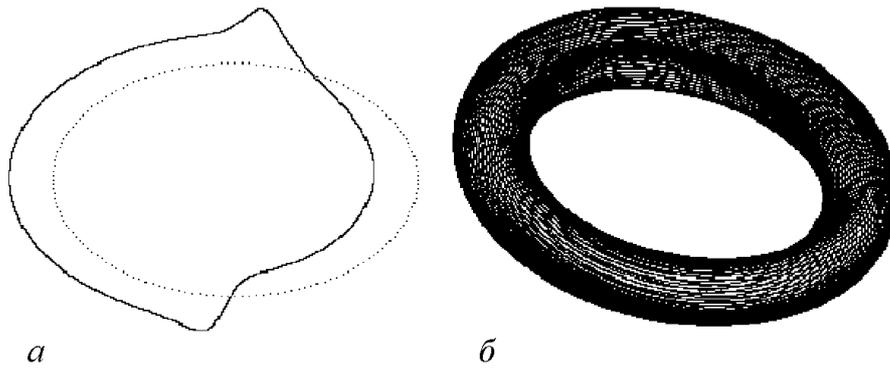


Рис. 26. Аттракторы осциллятора Ван дер Поля для $\lambda = 0.5$, $b = 7.5$. a – периодический режим, $\omega = 0.5$; b – квазипериодический режим, $\omega = 5.25$

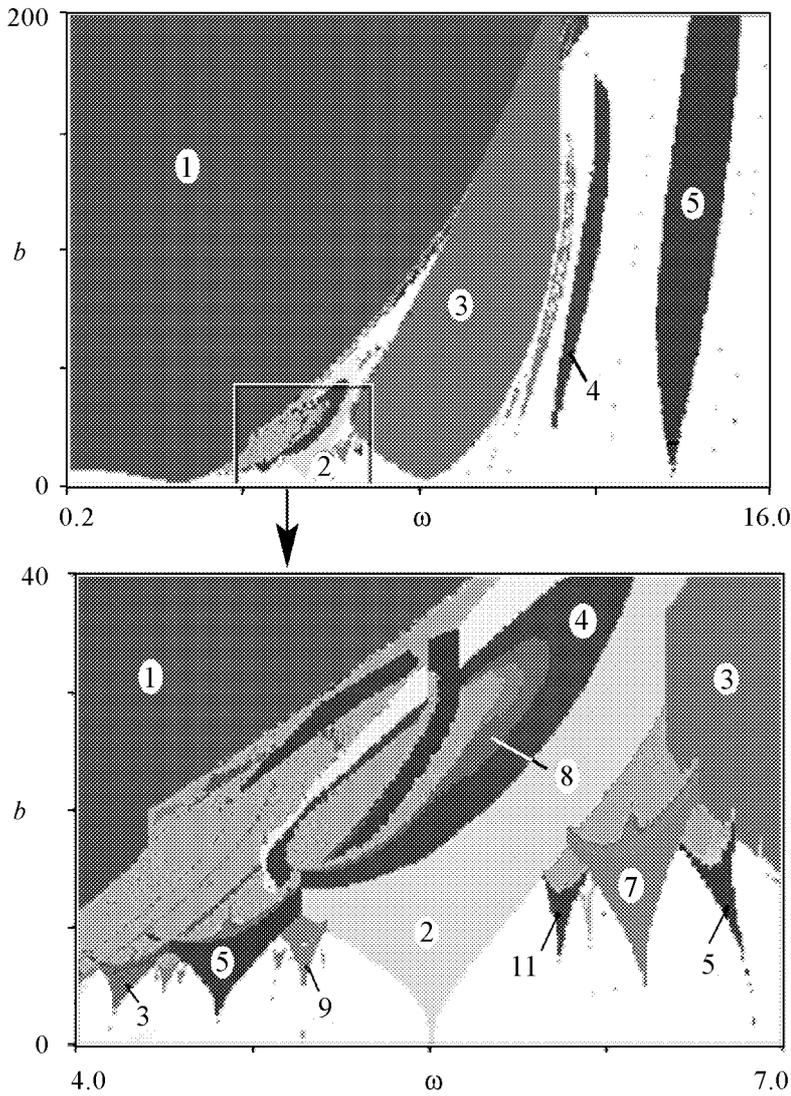


Рис. 27. Система языков Арнольда на карте режимов неавтономного осциллятора Ван дер Поля – Дуффинга

на плоскости частота ω – амплитуда воздействия b для $\lambda = 1$ и $\beta = 2.5$. Можно видеть, что она имеет некоторые существенные особенности – наличие множества областей периодических режимов, упирающихся своими остриями в ось частот. Они хорошо видны на выделенном фрагменте карты. Эти области носят специальное название *языки Арнольда* (по имени выдающегося российского математика В.И. Арнольда). Цифры на рисунке отвечают периодам циклов. Квазипериодические режимы реализуются в промежутке между языками (белый цвет на карте). В определенной мере режимы, отвечающие языкам Арнольда, связаны с квазипериодическими. Действительно, им отвечают замкнутые предельные циклы, лежащие на поверхности тора. Такому циклу соответствует некоторое число оборотов m для движения по меридиану тора и n оборотов вокруг оси. Период цикла при этом составляет mn . Ясно, что такие долгопериодические циклы «похожи» на тор. Описанный круг явлений связан с понятием *синхронизации*, которое отвечает явлениям в автоколебательной системе под внешним воздействием. Соответствующие вопросы, однако, требуют более глубокого и всестороннего обсуждения, и здесь мы лишь «обозначаем» эту проблематику.

Заключение

Авторы надеются, что представленный материал в определенной мере отразил «тонкую игру дискретного и непрерывного», по выражению В.И. Арнольда, и будет полезен для развития образования в области нелинейной динамики и привлечения к науке молодежи. Авторы хотели бы выразить глубокую благодарность члену-корреспонденту РАН, профессору Д.И. Трубецкову, «инициировавшему» нашу педагогическую деятельность в области нелинейной динамики. При изложении материала мы опирались также на лекции, читавшиеся А.П. Кузнецовым и С.П. Кузнецовым в течение ряда лет на Всероссийской школе «Нелинейные дни в Саратове для молодых». Поэтому мы благодарны всему коллективу организаторов этих школ во главе с Д.И. Трубецковым.

Работа поддержана фондом содействия отечественной науке, Американским фондом гражданских исследований и развития и Минобрнауки РФ (BRHE REC-006 Y3-P-06-07), а также программой «Гранты Президента РФ для молодых российских ученых – кандидатов наук и их научных руководителей» (МК-4162.2006.2).

Задачи

1. Реализуйте программу, которая строит бифуркационное дерево для логистического отображения. Установите значения параметров, когда реализуются устойчивые неподвижная точка, 2-цикл, 4-цикл, 8-цикл.
2. Напишите программу, которая строит итерационные диаграммы одномерных отображений. С ее помощью наблюдайте каскад удвоений периода в логистическом отображении. Подберите «коллекцию» циклов в критической области, найдите все 3-циклы, 4-циклы, 5-циклы.
3. Комбинируя две предыдущие программы, создайте такую, которая при щелчке мышью на бифуркационном дереве в отдельном окне строит итерационную диаграмму.
4. Продемонстрируйте свойство скейлинга на бифуркационном дереве.

5. Постройте бифуркационное дерево в системе с шумом. Просмотрите его увеличенные фрагменты.

6. Для отображения Эно найдите аналитически неподвижную точку, элементы 2-цикла. Укажите значения параметров, при которых наблюдается первое удвоение периода.

7. Напишите программу, которая для отображения прыгающего шарика строит график $y(t)$. Рассмотрите случаи 2-цикла, 4-цикла, хаоса и другие возможные варианты.

8. Напишите программу, которая реализует конденсацию изображающих точек на аттрактор Эно.

9. Создайте программу, которая строит карты динамических режимов двумерных отображений. С ее помощью постройте карты отображения Эно и отображения прыгающего шарика. Дополните ее программой, которая при щелчке мыши на карте строит портрет аттрактора в соответствующей точке. С ее помощью пронаблюдайте эволюцию аттракторов при путешествии по карте отображения Эно. То же самое для отображения прыгающего шарика.

10. Напишите программу, решающую численно уравнение Ван дер Поля. Пронаблюдайте конденсацию облака изображающих точек на предельный цикл для системы Ван дер Поля при значении параметра $\lambda = 1$. За эволюцией облака следите в режиме компьютерной мультипликации.

11. Напишите программу, которая строит трехмерные фазовые портреты системы Ресслера.

12. Напишите программу, которая строит сечение Пуанкаре для системы Ресслера

$$\dot{x} = -(y + z), \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b + z(x - c).$$

С ее помощью постройте карту динамических режимов системы Ресслера на плоскости параметров (c, a) для $b = 0.2$. Укажите на ней ситуации «crossroad area».

13. Постройте карту динамических режимов для системы Ван дер Поля – Дуффинга. Пронаблюдайте ее эволюцию при изменении параметра нелинейности β . Дополните ее программой, которая при щелчке мыши на карте строит сечение Пуанкаре. С ее помощью пронаблюдайте замкнутые кривые, отвечающие сечениям тора, и резонансные циклы на торе.

Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
2. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
3. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
4. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 312 с.
5. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
6. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
7. Кузнецов А.П. Наглядные образы хаоса // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т. 6, № 11. С. 104.

8. *Ряшко Л.Б.* Модели динамики популяции: от порядка к хаосу // Соросовский образовательный журнал. 2001. № 10. С. 122.
9. *Кузнецов С.П.* Хаос: Сценарий Фейгенбаума и его обобщения // Империя Математики. 2000. Т. 1, № 1. С. 16.
10. *Кузнецов А.П.* Через экран компьютера – в мир нелинейной динамики // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 5. С. 89.

*Саратовский филиал Института
радиотехники и электроники РАН
Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 20.05.2006

«NONLINEAR MINIMUM» IN THE THEORY OF DISCRETE MAPS

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, J.V. Sedova

The introduction in the theory of discrete maps available for understanding to senior classes pupils and students of younger years is presented. It demonstrates correlation of discrete and continuous descriptions of dynamical systems. The physical examples facilitate a perception of a material. The computer tasks are presented, which decision gives a chance to generate enough capacious collection of programs, that can be used in research work.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лица прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики». E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.tserv.ru



Седова Юлия Викторовна – родилась в 1979 году. Окончила Саратовский государственный университет (2001). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2004), научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Научные интересы – влияние шума на динамические системы, дискретные отображения, связанные системы, динамический хаос. Автор 9 статей в отечественной и зарубежной печати.