

## БИФУРКАЦИОННЫЕ МЕХАНИЗМЫ РАЗРУШЕНИЯ ПРОТИВОФАЗНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОСА В СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

*В.В. Астахов, А.В. Шабунин, П.А. Стальмахов*

В работе рассматриваются бифуркационные механизмы, ответственные за выход из режима противофазной синхронизации хаоса. Рассматривается два кубических отображения с симметричной диффузионной связью и дополнительным управляющим слагаемым обратной связи для обеспечения устойчивой противофазной синхронизации. Исследуются бифуркации седловых периодических орбит, встроенных в хаотический аттрактор.

### Введение

Синхронизация хаоса – весьма емкое понятие, вобравшее в себя целый круг разнообразных явлений, таких как подавление хаотической динамики при периодическом воздействии на систему [3], захват базовой частоты спектра [2] и мгновенной фазы хаотических колебаний [3] (частотно-фазовая синхронизация), установление некоторой функциональной зависимости между колебаниями подсистем [4] (обобщенная синхронизация), которая может в частности выражаться в их полном совпадении в каждый момент времени [1, 2, 4, 7] (полная синхронизация) или в совпадении с обратным знаком [7, 8] (полная противофазная синхронизация). Из всего спектра определений синхронизации хаоса самым востребованным является, пожалуй, полная синхронизация, не только в силу того, что ее строгое определение ( $x_1(t) = x_2(t)$ ) дает возможность применения теоретических методов, включая математический аппарат теории симметрии и теории устойчивости, но и в силу того, что это явление чрезвычайно распространено и может быть легко обнаружено даже в случае развитого хаоса. В настоящий момент известно огромное число работ, рассматривающих различные аспекты полной синхронизации хаоса, включая бифуркационные механизмы ее формирования и разрушения [11]. Полная противофазная синхронизация хаоса – более редкое явление и, соответственно, оно гораздо менее изучено. В работе [8] рассматривалась собственная и управляемая противофазная синхронизация в системе двух отображений с переходом к хаосу через каскад субгармонических бифуркаций. Было обнаружено, что выход из режима противофазной синхронизации хаоса при уменьшении параметра управления сопровождается эффектом «пузырения хаотического аттрактора» [12] точно так же, как это имеет место для полной

синфазной синхронизации. Однако бифуркационные механизмы этого явления не были изучены. Определению бифуркационных механизмов, ответственных за разрушение режима управляемой противофазной синхронизации хаоса, и посвящена данная работа.

### 1. Противофазная синхронизация в системе диффузионно связанных кубических отображений

Рассмотрим систему двух идентичных кубических отображений с симметричной диффузионной связью

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma(f(y_n) - f(x_n)), \\y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma(f(x_n) - f(y_n)),\end{aligned}\quad (1)$$

где  $x_n, y_n$  – динамические переменные первой и второй подсистемы;  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  – дискретное время;  $\gamma$  – коэффициент связи; функция  $f(x_n) = (a - 1)x_n - ax_n^3$  задает одиночное кубическое отображение;  $a$  – его управляющий параметр.

Кубическое отображение является антисимметричным, то есть инвариантным относительно преобразования  $x \leftrightarrow -x$ . Следствием этого, а также симметрии связи, является возможность в системе (1) появления режимов противофазной синхронизации, удовлетворяющих условию  $x = -y$ . Траектории противофазных режимов располагаются в одномерном инвариантном подпространстве  $I_a : x = -y$  полного фазового пространства системы (1).

В работе [8] подробно исследовался вопрос об устойчивости противофазных колебаний для отображений с диффузионной связью и были получены аналитические выражения для тангенциального ( $\Lambda_{\parallel}$ ) и трансверсального ( $\Lambda_{\perp}$ ) показателей Ляпунова, ответственных за устойчивость противофазных колебаний к тангенциальным и трансверсальным возмущениям, соответственно. Эти выражения имеют вид

$$\Lambda_{\parallel} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| (1 - 2\gamma) f' \left( \frac{x_n + y_n}{2} \right) \right|, \quad (2)$$

$$\Lambda_{\perp} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| f' \left( \frac{x_n + y_n}{2} \right) \right|. \quad (3)$$

Из сопоставления (2) и (3) видно, что оба показателя связаны соотношением

$$\Lambda_{\perp} = \Lambda_{\parallel} - \ln |1 - 2\gamma|, \quad (4)$$

а значит, для небольших положительных значений  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq 0.5$ ) будет выполняться неравенство

$$\Lambda_{\perp} \geq \Lambda_{\parallel}. \quad (5)$$

Тангенциальный показатель Ляпунова определяет динамику системы внутри симметричного подпространства  $I_a$ . Он является отрицательным для периодических колебаний и положительным – для хаотических. Трансверсальный показатель Ляпунова определяет так называемую трансверсальную устойчивость колебаний: он отрицателен для трансверсально устойчивых противофазных колебаний и положителен

для трансверсально неустойчивых. Чтобы противофазные колебания могли наблюдаться в эксперименте, соответствующее им предельное множество должно быть аттрактором в полном фазовом пространстве системы, что предполагает их трансверсальную устойчивость. Таким образом, противофазные хаотические колебания будут наблюдаться только в том случае, если тангенциальный показатель Ляпунова будет положителен, а трансверсальный – отрицателен. Из выражения (6) видно, что при положительной диффузионной связи это невозможно, а значит, режимы противофазной хаотической синхронизации в системе (1) не реализуются: противофазные хаотические колебания всегда трансверсально неустойчивы. Для того чтобы их стабилизировать, можно использовать методы управления хаосом.

## 2. Управляемая противофазная синхронизация хаоса

Существует достаточно много способов управления, основная цель которых – сделать определенные хаотические подмножества, соответствующие синхронным движениям, устойчивыми по одним собственным направлениям при сохранении неустойчивости по другим собственным направлениям. Стабилизацию неустойчивых движений в симметричном подпространстве полного фазового пространства взаимодействующих бистабильных осцилляторов, соответствующих противофазной синхронизации хаоса, можно обеспечить путем введения в систему дополнительной петли обратной связи. Причем такую обратную связь можно реализовать либо для каждой подсистемы, обеспечивая взаимное воздействие между ними, либо для одной из подсистем, обеспечивая однонаправленное управляющее воздействие (так называемая «master – slave» система). В данном случае будет рассмотрено взаимное симметричное управляющее воздействие между подсистемами. Применительно к рассматриваемой математической модели это будет соответствовать добавлению к правым частям первого и второго уравнения системы (1) слагаемых обратной связи, которые мы предлагаем выбрать в виде  $r(f(x_n) + f(y_n))$ :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma(f(y_n) - f(x_n)) + r(f(x_n) + f(y_n)), \\y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma(f(x_n) - f(y_n)) + r(f(x_n) + f(y_n)).\end{aligned}\quad (6)$$

Данное воздействие выбрано таким образом, чтобы при достижении цели управления, то есть режима противофазной синхронизации, дополнительное слагаемое связи обращалось в ноль. С другой стороны, оно, как показано ниже, меняет значение трансверсального показателя Ляпунова. Вследствие этого управляющее воздействие не оказывает влияние на форму противофазных колебаний, а только на их устойчивость по отношению к трансверсальным возмущениям.

Для исследования устойчивости данной системы перейдем к новым переменным  $u$  и  $v$ , записав линеаризованные в окрестности  $I_a$  уравнения

$$u_{n+1} = (1 + 2r)f'(v_n)u_n, \quad (7)$$

$$v_{n+1} = (1 - 2\gamma)f'(v_n). \quad (8)$$

Из уравнения (7) определяется трансверсальный показатель Ляпунова синхронных

движений в системе с управлением

$$\Lambda_{\perp c} = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{n=1}^N \ln|(1 + 2r)f'(v_n)| \quad (9)$$

или

$$\Lambda_{\perp c} = \Lambda_{\perp} + \ln|1 + 2r|. \quad (10)$$

Выбирая  $r$  достаточно близким к значению  $-0.5$ , можно сделать трансверсальный показатель Ляпунова сколь угодно малым и, следовательно, сделать противофазный режим устойчивым при любых значения параметров  $a$  и  $\gamma$ .

Выберем значения  $a = 3.8$  и  $\gamma = 0.04$ , которые соответствуют режиму объединенного несинхронного хаотического аттрактора (рис. 1, *a*). Тангенциальный и трансверсальный показатели Ляпунова, подсчитанные для синхронного хаотического множества, соответствующего этим параметрам, имеют значения:  $\Lambda_{\parallel} = 0.61$ ,  $\Lambda_{\perp} = 0.69$ , что свидетельствует как о хаотическом характере синхронных колебаний, так и об их трансверсальной неустойчивости.

На рис. 2 построена зависимость трансверсального показателя Ляпунова от управляющего параметра  $r$ . Как видно из рис. 2, существует интервал значений по параметру  $r$ , внутри которого трансверсальный показатель Ляпунова отрицателен. Если выбрать значение  $r$  из указанного диапазона, то в системе будут наблюдаться противофазные хаотические колебания, устойчивые по отношению к постоянно действующим малым возмущениям. Например, при  $r = -0.3$  значение трансверсального показателя Ляпунова становится равным  $-0.306$ , что приводит к стабилизации синхронных колебаний. На рис. 1, *б* показан фазовый портрет, соответствующий данному параметру управления. При уменьшении (или увеличении) параметра управления  $r$  синхронизация нарушается. Как известно, разрушение режима полной синхронизации хаоса может сопровождаться явлениями пузырения хаотического аттрактора и изрешечивания его бассейна притяжения. В частности, указанные переходы наблюдались при разрушении режима синфазной синхронизации хаоса [8, 11].

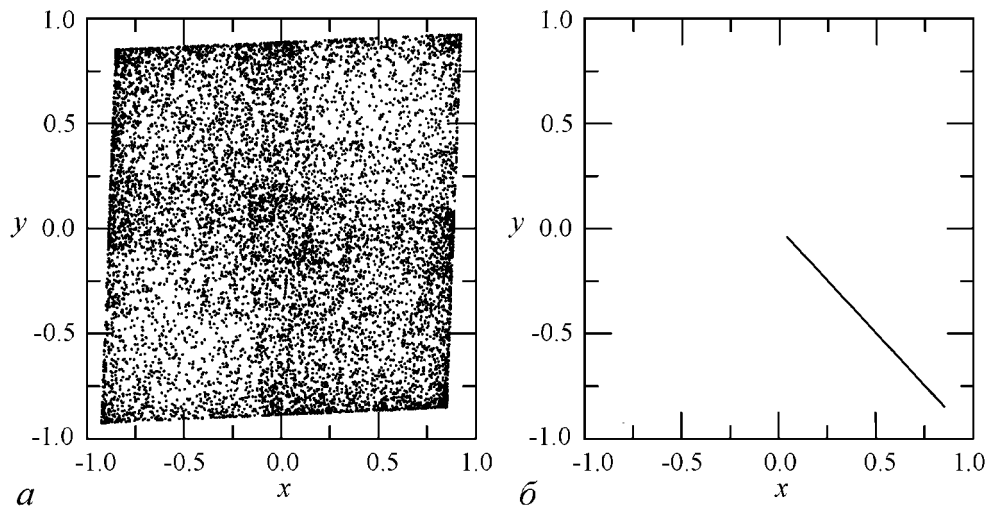


Рис. 1. Фазовые портреты при значении параметров  $a = 3.8$ ,  $\gamma = 0.04$ ;  $r = 0$  (*a*);  $r = -0.3$  (*b*)

Представляется интересным провести исследование процесса потери управляемой полной противофазной синхронизации хаоса, следя за изменениями хаотического

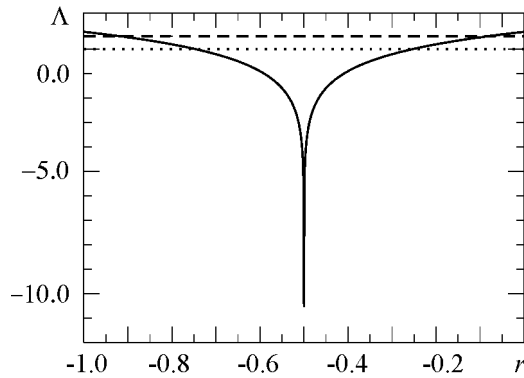


Рис. 2. Зависимость трансверсального показателя Ляпунова от параметра управления при  $a = 3.8$ ,  $\gamma = 0.04$ . Пунктирной линией отмечен уровень нулевого значения

аттрактора в зависимости от значений коэффициента  $r$ . Для проведения этого исследования начальные условия выбирались вблизи антисимметричного подпространства  $I_a$ , а параметр управления  $r$  первоначально задавался внутри интервала значений  $-0.5 < r < -0.286$ , где трансверсальный показатель Ляпунова отрицателен, а хаотический аттрактор, располагающийся в антисимметричном подпространстве, является устойчивым к трансверсальным возмущениям. Проведенные численные эксперименты подтверждают, что в указанном интервале значений управляющего параметра режимы противофазной синхронизации хаоса являются устойчивыми и грубыми. Малые отклонения от синхронного аттрактора в начальных условиях быстро затухают во времени и изображающая точка втягивается в антисимметричное подпространство. Добавление в систему малого шума (интенсивностью порядка 0.0001) не приводит к заметным изменениям в ее поведении. Так, на рис. 3, *a* показана временная реализация суммы динамических переменных  $x + y$  при добавлении шума в систему (до вертикальной пунктирной линии) и без шума (после нее). Видно, что и в том и в другом случае колебания остаются почти синхронными, что можно также увидеть по фазовому портрету в правой части рисунка. При увеличении управляющего параметра ( $r > -0.265$ ) режим противофазной синхронизации хаоса становится негрубым. Добавление в систему малого шума приводит к существенной перестройке фазового портрета аттрактора. Если в самом начале области пузырения аттрактора это различие еще не очень заметно, то при дальнейшем изменении  $r$  оно становится значительным. На рис. 3, *b* построены временные реализации и фазовые портреты при  $r = -0.26$ . Зависимость  $x + y$  от времени в системе с шумом теперь значительно отличается от таковой при его отсутствии. Из анализа временных зависимостей можно увидеть, что при наличии малого шума изображающая точка в течение долгого времени движется в окрестности подпространства  $I_a$ , затем следует короткий «выброс» в сторону от него, после чего траектория возвращается снова в окрестность симметричного подпространства. Такое поведение получило название «режим перемежающейся синхронизации» («on-off intermittency» в англоязычной литературе). Средняя частота выбросов увеличивается при приближении параметра  $r$  к границе области синхронизации. Наконец, при  $r = -0.25$  происходит «бифуркация прорыва», когда трансверсальный показатель Ляпунова становится положительным, а значит, хаотический аттрактор внутри антисимметричного подпространства перестает быть притягивающим в трансверсальном направлении и трансформируется в хаотическое седло. Синхронные колебания перестают наблюдаться в системе как при наличии шума, так и при его отсутствии (рис. 3, *c*). Хаотический аттрактор имеет фазовый портрет сходный с портретом пузырящегося аттрактора. При дальнейшем увеличении параметра  $r$  (при  $r = -0.233$ ) в системе наблюдается жесткий

переход на орбиту периода четыре,  $4C^2$ , расположенную вне антисимметричного подпространства (рис. 4). При приближении  $r$  к нулю в фазовом пространстве системы рождаются устойчивые орбиты различных периодов. Эволюция этих режимов заканчивается формированием несинхронного объединенного хаотического аттрактора (рис. 4, в).

Выход из режима синхронизации при уменьшении  $r$  происходит по тому же сценарию, что и при его увеличении. При изменении управляющего параметра в

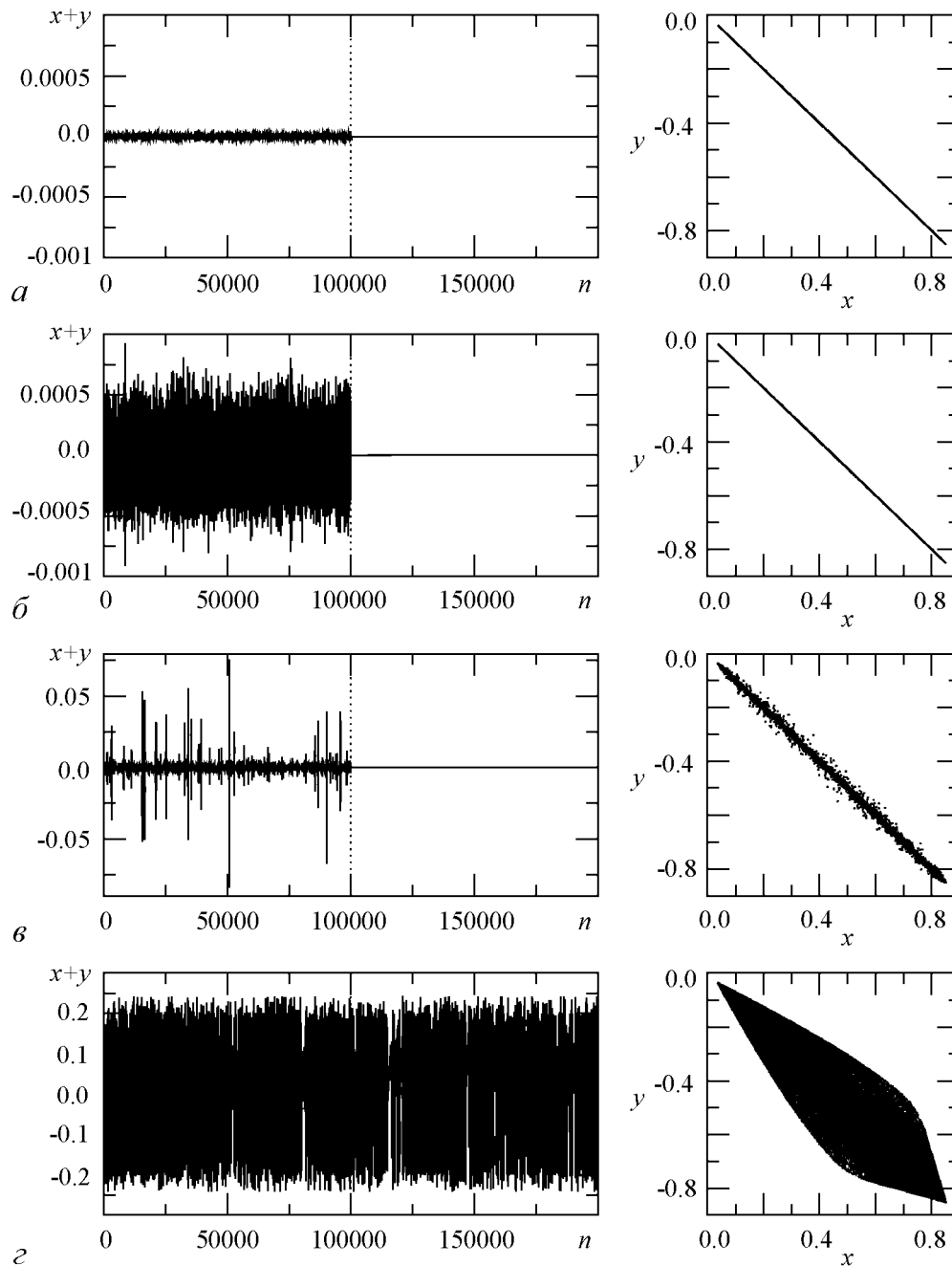


Рис. 3. Временные реализации и фазовые портреты управляемой противофазной синхронизации

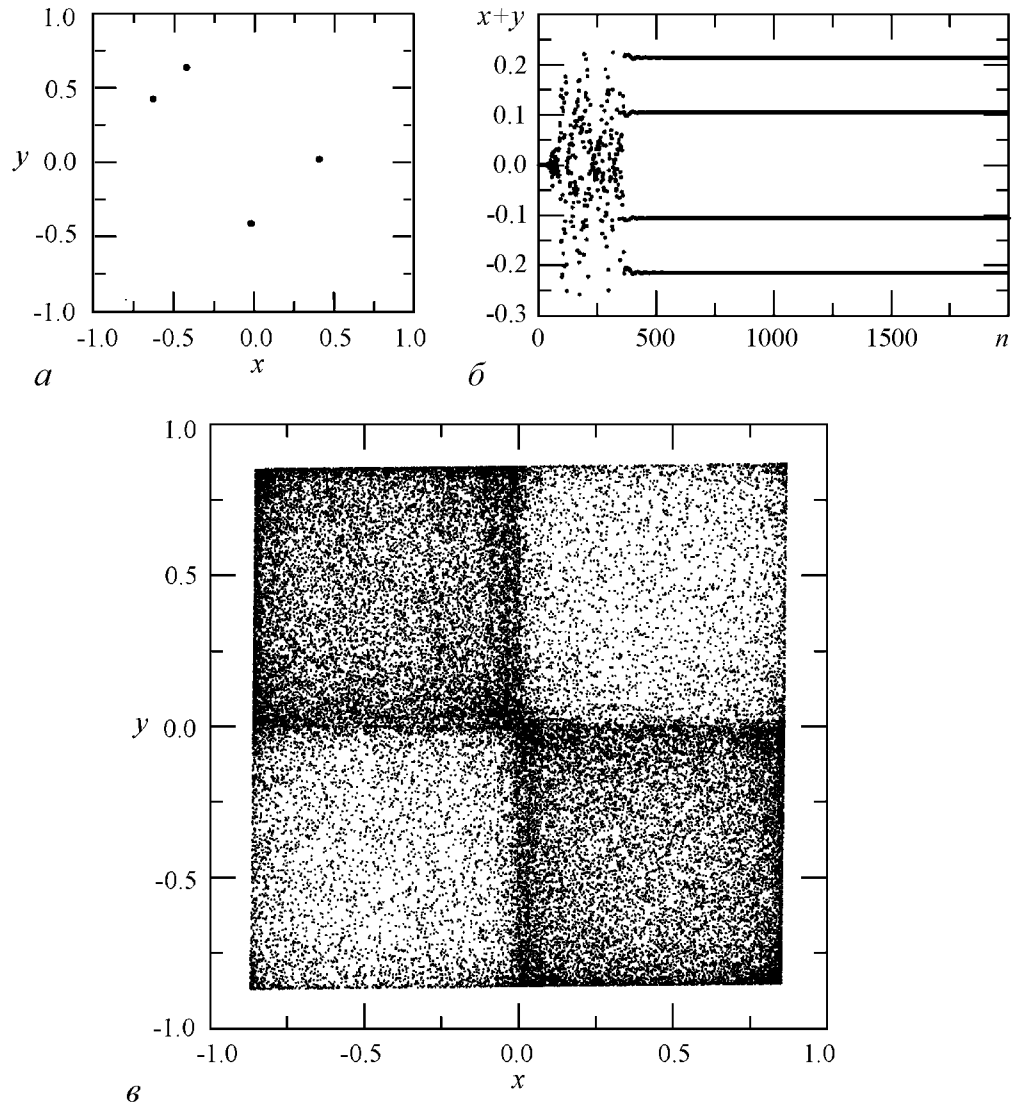


Рис. 4. *a* – фазовый портрет орбиты  $4C^2$ , *б* – переход с режима пузырения на режим периодических колебаний, соответствующий орбите  $4C^2$ , *в* – обобщенный хаотический аттрактор

сторону уменьшения, при  $r < -0.745$  также наблюдается переход от грубого устойчивого режима противофазной синхронизации к пузырящемуся аттрактору. Затем, при  $r = -0.7475$  происходит «бифуркация прорыва». При дальнейшем изменении параметра  $r$  происходит жесткий переход на орбиту периода четыре ( $r = -0.767$ ). Далее на базе этих орбит формируется хаотическое множество. Заканчивается этот процесс формированием несинхронного хаотического аттрактора.

### 3. Бифуркационный механизм потери управляемой противофазной синхронизации

Результаты предыдущего раздела показывают, что при выходе из области управляемой противофазной синхронизации хаос прослеживаются определенные закономерности. При изменении коэффициента дополнительной обратной связи режим противофазной синхронизации сменяется сначала регулярными движениями, не ле-

жащими в антисимметричном подпространстве, а затем происходит переход к несинхронному хаотическому режиму. Однако остается открытым вопрос о бифуркационных механизмах, приводящих к потере управляемой противофазной синхронизации хаоса. Проведем исследование бифуркаций, происходящих на базе седловых периодических орбит, встроенных в синхронный хаотический аттрактор, которые определяют потерю синхронизации хаоса.

В области противофазной синхронизации хаоса, например, при значениях параметров  $a = 3.8$ ,  $\gamma = 0.04$  и  $-0.7137 < r < -0.2862$  в противофазном симметричном подпространстве  $x_n = -y_n$  системы (6) существует два симметричных друг другу синхронных одноленточных хаотических аттрактора  $A_{10}$  и  $A_{20}$ . Они были сформированы в результате каскада бифуркаций удвоения периода антисимметричных периодических орбит: аттрактор  $A_{10}$  – на базе семейства  $2^N C_{10}$ ,  $A_{20}$  – на базе семейства  $2^N C_{20}$ . Поскольку данные семейства режимов полностью симметричны, то достаточно провести бифуркационный анализ только для одного из них, например,  $A_{10}$ . В указанной области значений параметров периодические орбиты  $2^N C_{10}$  являются седловыми. Они встроены в хаотический аттрактор  $A_{10}$  и определяют его «скелет». При выходе из области синхронизации седловые орбиты семейства  $2^N C_{10}$  теряют устойчивость в нормальном к антисимметричному подпространству направлении. При увеличении параметра  $r$  орбиты  $1C_{10}$ ,  $2C_{10}$ ,  $4C_{10}$ ,  $8C_{10}$ , не меняя своих координат, претерпевают бифуркации при значениях  $r = -0.2862454$ ,  $-0.2774312$ ,  $-0.2798463$ ,  $-0.2787813$ , соответственно. Рассмотрим эти бифуркации более подробно.

Потеря устойчивости режима хаотической управляемой синхронизации начинается с бифуркации неподвижной точки  $1C_{10}$ . При  $r = -0.2862454$  ее второе собственное значение становится равным  $-1$ , что соответствует бифуркации удвоения периода. В результате  $1C_{10}$  превращается в репеллер и в его окрестности вне симметричного подпространства мягко рождается седловая орбита удвоенного периода  $2C_{10}^1$ . С увеличением  $r$  точки этой орбиты плавно расходятся от антисимметричного подпространства. На рис. 5 показана диаграмма бифуркационных переходов на базе этой седловой точки. Точки седловых орбит (трансверсально устойчивых) показаны сплошными линиями, точки репеллерных орбит – штриховыми линиями, а устойчивых – штрихпунктирными линиями. Теперь в малой окрестности репеллера  $C_{10}$  имеются начальные условия, стартуя с которых, фазовые траектории уходят

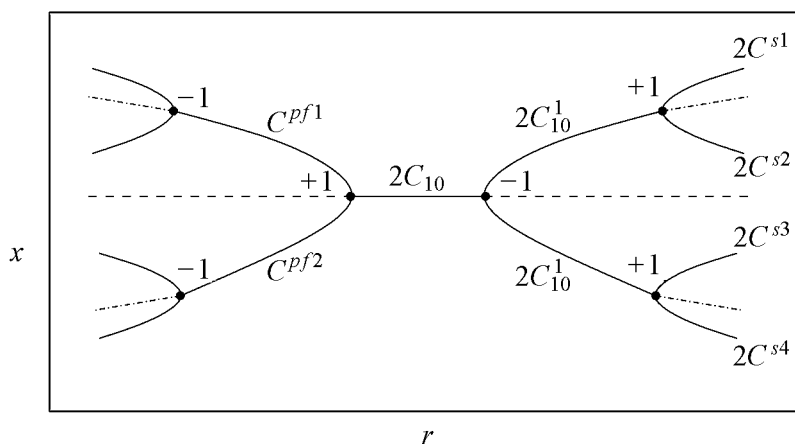


Рис. 5. Диаграмма бифуркаций, происходящих на базе орбиты  $1C^0$



из окрестности симметричного подпространства в сторону седловой орбиты  $2C_{10}^1$ . Седловая орбита  $2C_{10}^1$  и ее неустойчивые многообразия ограничивают область вблизи симметричного подпространства, которую траектории не могут покинуть. После этой бифуркации в рассматриваемой системе может наблюдаться пузырящееся поведение, индуцированное шумом малой интенсивности.

При дальнейшем увеличении параметра  $r$  происходят бифуркации удвоения седловых циклов с более высокими периодами  $2C_{10}$ ,  $4C_{10}$  и  $8C_{10}$ , встроенных в хаотический аттрактор. Их вторые собственные значения выходят за единичную окружность через  $-1$ . В результате они становятся репеллерами и в их окрестностях вне антисимметричного подпространства мягко рождаются седловые циклы удвоенных периодов. С увеличением  $r$  точки седловых циклов плавно расходятся от антисимметричного подпространства. Пузырящееся поведение становится более развитым. Однако без внешнего шума после переходных процессов в системе наблюдаются синхронные противофазные хаотические колебания. На рис. 6 показана бифуркационная диаграмма на базе орбиты  $2C_{10}$ . Из рисунка видно, что структура бифуркаций на базе этой орбиты повторяет соответствующую структуру на базе орбиты  $1C_{10}$ . Дальнейшее изменение коэффициента  $r$  приводит к бифуркациям удвоения орбит более высокого периода, и при  $r = -0.2525$  количество орбит, потерявших трансверсальную устойчивость, таково, что трансверсальный показатель Ляпунова хаотического аттрактора  $A_{10}$  становится положительным, хаотический аттрактор трансформируется в хаотическое седло и теряет бассейн притяжения. Седло-

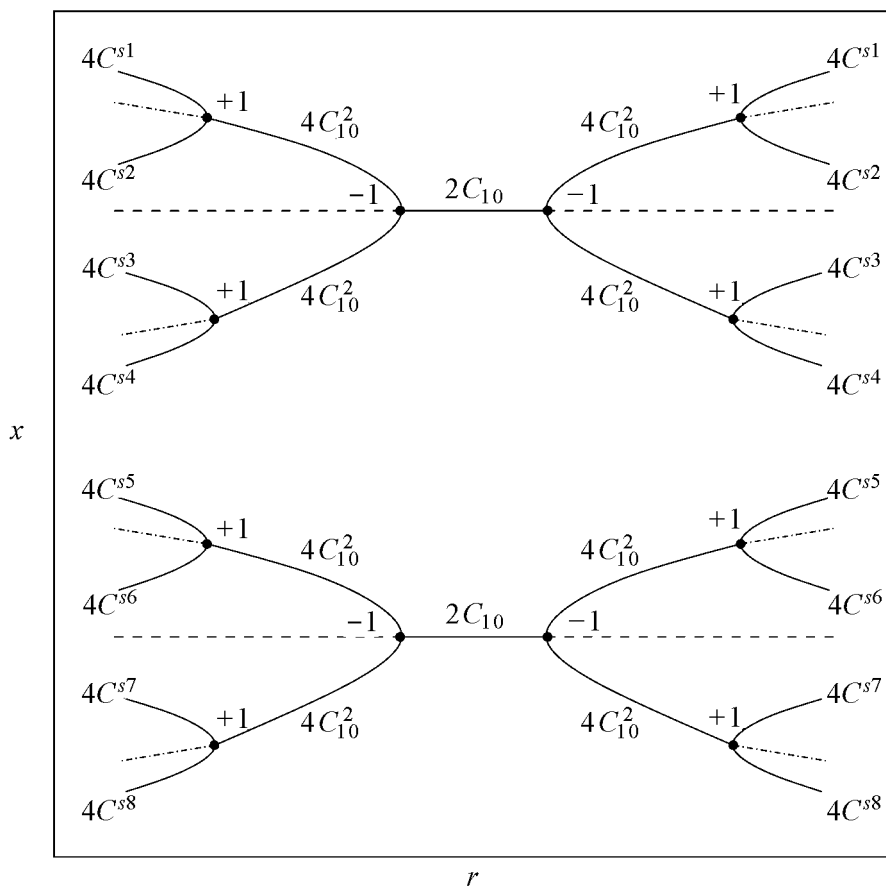


Рис. 6. Диаграмма бифуркаций, происходящих на базе орбиты  $2C^0$

вые циклы, расположенные вне симметричного подпространства, но возникшие в результате бифуркаций периодических орбит, встроенных в антисимметричное хаотическое множество  $A_{10}$ , еще не стали устойчивыми. В фазовом пространстве системы формируется притягивающее множество, включающее в себя несинхронные орбиты, появившиеся в результате трансверсальных бифуркаций удвоения периода синхронных орбит.

Однако перестройка фазового пространства на этом не заканчивается. При  $r = -0.2330$  собственное значение седлового цикла  $4C_{10}^2$  (см. рис. 6) входит в единичную окружность через  $+1$ . Цикл  $4C_{10}^2$  становится устойчивым, а в его окрестности мягко рождается пара седловых циклов того же периода (на рис.6 элементы соответствующих орбит отмечены как  $4C^{si}$ , где  $i = 1...8$ ). При обратном движении по параметру данная бифуркация соответствует субкритической бифуркации вил. После бифуркации вил цикл  $4C_{10}^2$  является единственным устойчивым циклом в исследуемой области фазового пространства системы. Бассейн притяжения цикла  $4C_{10}^2$  занимает практически всю эту область фазового пространства. Здесь любая фазовая траектория притягивается к устойчивому циклу  $4C_{10}^2$ .

При  $r = -0.2294$  цикл  $2C_{10}^1$  претерпевает ту же бифуркацию вил. Он становится устойчивым, а в его окрестности мягко рождаются седловые циклы того же периода  $2C^{si}$ , где  $i = 1..4$  (см. рис. 5). При обратном движении по параметру данная бифуркация соответствует субкритической бифуркации вил. Таким образом, в фазовом пространстве системы формируется мультистабильность.

При движении по управляющему параметру в другом направлении, в области, где  $r < -0.5$ , наблюдается подобный сценарий потери трансверсальной устойчивости хаотического аттрактора  $A_{10}$ . Однако имеются отличия в бифуркациях некоторых седловых циклов, но они также приводят к пузырящемуся переходу. При  $r = -0.7137$  седловая точка  $C_{10}$  вместо бифуркации удвоения периода, как это наблюдалось в области  $r > -0.5$ , претерпевает суперкритическую бифуркацию вил. Ее второе собственное значение становится равным  $+1$  (см. рис. 5). Седловая точка превращается в репеллер. В ее окрестности вне симметричного подпространства рождается пара седловых неподвижных точек  $C^{pf1}$  и  $C^{pf2}$ . Эта бифуркация индуцирует в системе пузырящийся переход. После точки бифуркации прорыва в фазовом пространстве системы происходит стабилизация седловых циклов, лежащих вне антисимметричного подпространства. Так при  $r = -0.7705$  старшие собственные значения седловых точек  $C^{pf1}$  и  $C^{pf2}$  входят в единичную окружность через  $-1$ . Они становятся устойчивыми и в их окрестностях рождаются седловые циклы удвоенного периода (см. рис. 5). Механизм стабилизации седловых орбит  $2C_{10}$ ,  $4C_{10}$  и  $8C_{10}$  полностью совпадает с бифуркационным механизмом при  $r > -0.5$ , и происходит это при значениях параметра  $r = -0.7225, -0.7201, -0.7212$ , соответственно.

### Заключение

Таким образом, для связанных идентичных кубических отображений 1 исследован механизм потери полной противофазной управляемой синхронизации хаоса. Показано, что при выходе из области синхронизации происходит последовательность мягких бифуркаций определенного семейства седловых циклов  $2^N C_{10}$ , которое формирует «скелет» хаотического аттрактора. Потеря устойчивости симметричного хаотического множества в трансверсальном направлении начинается с бифуркации седловой точки  $C_{10}$ , которая индуцирует в системе пузырящийся переход.

Бифуркации седловых циклов более высокого периода усиливают эффект пузыря. Описанный бифуркационный сценарий является достаточно общим для взаимодействующих систем с удвоением периода. Однако необходимо отметить и отличие. Например, в бифуркационном сценарии разрушения синфазной синхронизации хаоса в связанных кубических отображениях присутствует явление изрешечивания бассейна притяжения. Изрешечивание бассейна притяжения происходит благодаря тому, что стабилизация периодических орбит, лежащих вне симметричного подпространства происходит до бифуркации прорыва. При потере управляемой противофазной синхронизации хаоса с симметричными управляющими воздействиями на подсистемы это происходит уже после бифуркации прорыва, и изрешечивающего перехода в системе не наблюдается.

*Работа поддержана программой «Развитие научного потенциала высшей школы» Министерства образования и науки РФ.*

### Библиографический список

1. Кузнецов Ю.И., Ланда П.С., Ольховой А.Ф. Амплитудный порог синхронизации как мера хаоса в стохастических автоколебательных системах // ДАН СССР. 1985. Т. 281. С. 1164.
2. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36. С. 338.
3. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 1804.
4. Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4528.
5. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Progress of theoretical physics. 1983. Vol. 69, № 1. P. 32.
6. Пиковский А.С. О взаимодействии странных аттракторов // Препринт № 79, ИПФ АН СССР, Горький, 1983.
7. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов: Радиофизика. 1985. Т. 28, № 8. С. 991.
8. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов: Радиофизика. 1986. Т. 29, № 9. С. 1050.
9. Cao L.-Y., Lai Y.-C. // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, № 1. P. 382.
10. Astakhov V., Shabunin A., Stalmakhov P. // Известия ВУЗов: Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 3. С. 63.
11. Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V. «Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits», Physical Review Letters, 1997. Vol. 79, № 6. P. 1014.
12. Ashvin P., Buescu J., Stewart I. «Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators» // Physics Letters A. 1994. № 193. P. 126.

*Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 28.07.2006*

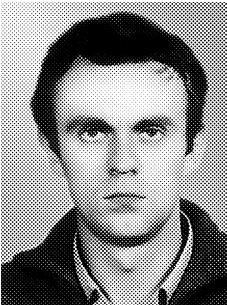
**BIFURCATIONAL MECHANISMS OF DESTRUCTION  
OF ANTI PHASE CHAOTIC SYNCHRONIZATION  
IN COUPLED DISCRETE-TIME SYSTEMS**

*V.V. Astakhov, A.V. Shabunin, P.A. Stalmakhov*

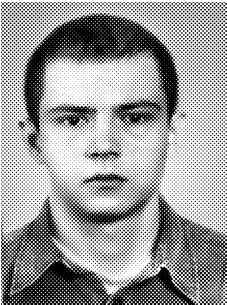
Bifurcational mechanisms responsible for destruction of antiphase synchronization of chaos are studied. Two cubic discrete maps with symmetric diffusive coupling and additional control term are used as a model. Phenomenon of synchronization formation and destruction are explored in connection with bifurcations of principal periodic orbits embedded in the chaotic attractor.



*Астахов Владимир Владимирович* – окончил Саратовский государственный университет (1980). Доктор физико-математических наук (1999), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях. E-mail: [astakhov@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:astakhov@chaos.ssu.runnet.ru)



*Шабунин Алексей Владимирович* – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, кандидат физико-математических наук (1998). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций. E-mail: [alexey@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:alexey@chaos.ssu.runnet.ru)



*Стальмахов Петр Андреевич* – окончил Саратовский государственный университет (2001, кафедра радиофизики и нелинейной динамики), аспирантуру, защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2006, СГУ). Область научных интересов – хаотическая динамика, синхронизация, управление хаосом. Имеет 8 научных публикаций.