



АТТРАКТОР ЛОРЕНЦА В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

А.М. Мухамедов

В рамках ранее предложенной модели хаотической динамики сплошной среды получена реализация трехмерного режима пульсаций скорости течения, отвечающего аттрактору типа Лоренца. Решение представляет собой набор структур, определяющих геометрию редуцированного к трехмерному случаю расслоенного многообразия, образованного пульсациями скоростей течения среды. Сама динамика аттрактора Лоренца проявляется в виде временной зависимости пульсаций скоростей вдоль линий тока среднего течения.

Как известно, один из классических примеров детерминированного хаоса – аттрактор Лоренца – открытый в результате гидродинамических исследований прикладного характера, все еще не получил адекватного воспроизведения в формализме существующей турбулентной механики. В работах автора [1, 2] была высказана гипотеза о том, что классическое гидродинамическое решение этой задачи не может быть получено в принципе, и предложено обоснование такого вывода. В его основе лежало понимание того, что аттракторные модели хаотической динамики затрагивают мезоскопический уровень движения сплошной среды, и что в классических уравнениях Навье – Стокса этот уровень не представлен. Отсюда следовало предложение расширить варианты решения проблемы аттрактора Лоренца за счет явного включения в математический формализм гидродинамики дополнительных мезоструктур, выводящих аппарат этой теории за рамки классических операций с уравнениями Навье – Стокса.

В настоящее время аттракторные режимы динамики сплошных сред конструируются в рамках моделей, представляющих собой далеко уходящие абстракции движения сплошной среды, почти не использующие представления о механических взаимодействиях частиц среды друг с другом [3, 4]. В одних случаях эти абстракции отображают свойства операторов эволюционного типа, действующих в иерархии вложенных друг в друга гильбертовых пространств. В других случаях они отображают динамику конечномерных систем, воспроизводящих изменения состояний среды, но при этом каждое из состояний актуально представлено всего лишь точкой соответствующего фазового многообразия. Подобное моделирование не отвечает прикладному назначению гидромеханики, требующему воспроизведения всех существенных структур непосредственно, то есть в пространстве, занятом сплошной средой. Если учесть аргументы теоретических и экспериментальных данных в пользу

существования такого представления [5-7], то воспроизведение аттракторов в контексте динамики пространственно-временных характеристик среды представляется настоящей необходимостью.

В данной работе строится аттрактор Лоренца в рамках предложенной в [8] модели турбулентной динамики. Согласно этой модели, фазовыми пространствами турбулентных режимов являются расслоения струй *пульсаций* гидродинамических величин. Геометрия пульсационных расслоений предполагается априори произвольной, определяемой моделируемыми особенностями соответствующих хаотических режимов. Основным объектом моделирования является *хаотическая структура*, представляющая собой комплекс неустойчивых траекторий движения точек среды. Предполагается, что каждому *установившемуся* турбулентному режиму отвечает вполне определенная хаотическая структура. В [8] траектории хаотической структуры отождествлялись с множеством интегральных кривых неинтегрируемого (неголономного) распределения типа Пфаффа, заданного на расслоении пульсаций динамических переменных.

Характерной чертой предложенной модели является способ Лагранжа описания движения среды, не сводящийся, в общем случае, к описанию движения в переменных Эйлера. При этом оказалось, что описание Лагранжа замечательно приспособлено для отображения динамики систем со странными аттракторами. Вместо жестких ограничений парадигмы Эйлера описание Лагранжа накладывает гораздо более мягкие условия, служащие для определения геометрических объектов соответствующих неголономных распределений. Такое изменение акцента моделирования позволяет воспроизводить разнообразные аттракторы в динамике пучков частиц континуальных сред.

1. Зададимся уравнениями динамики пульсаций трехмодового режима [8]

$$dy^i + \omega_k^i(x, y^j) dx^k = A^i(x, y^j) dt \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где x^k и y^i образуют наборы пространственных и динамических координат расслоения пульсаций, а объекты $\omega_k^i(x, y^j) dx^k$ и $A^i(x, y^j) dt$ определяют собой характер межмодовых взаимодействий режима. Можно рассматривать эти объекты и само уравнение (1) как правила образования производных от динамических координат по пространственным координатам и времени, определяемых реальной турбулентной эволюцией. Инвариантный геометрический смысл этих объектов состоит в том, что в расслоении пульсаций они определяют объект внутренней связности и вертикальное векторное поле, соответственно.

Предположим, что введенные выше динамические координаты имеют смысл пульсаций скорости течения среды, то есть актуальная скорость среды может быть разложена на поле скоростей среднего течения и пульсации по формуле

$$u^i(x, y) = u_0^i(x) + y^i. \quad (2)$$

Уравнения баланса массы и импульса примем в форме стандартного уравнения неразрывности и уравнения Навье – Стокса

$$\nabla u = 0, \quad (3)$$

$$\frac{du}{dt} = -\nabla p + \nu \Delta u. \quad (4)$$

Данная система уравнений еще не полна, так как в уравнение (4) входит давление, являющееся термодинамической переменной, динамика которой, в общем случае, выходит за рамки кинематики. Для описания пульсаций давления требуются новые динамические координаты, что увеличивает число необходимых степеней свободы для описания соответствующего турбулентного режима движения. Введем новую динамическую переменную, имеющую смысл пульсаций давления, то есть примем

$$p(x, y) = p_0(x) + y^4. \quad (5)$$

Таким образом, первоначальный набор требуемых динамических координат для отображения движения сплошной среды является четырехмерным.

Возможность редукции к трехмерной системе с динамикой, аналогичной динамике системы Лоренца, заключается в том, что в уравнение (4) давление входит в виде градиента. Отсюда следует, что редукция к трехмерной динамике пульсаций скоростей может быть выполнена, если входящий в уравнение (4) градиент давления будет содержать только первые три динамические координаты. Для этого достаточно потребовать, чтобы в уравнениях динамики для четвертой координаты

$$dy^4 + \omega_k^4(x, y)dx^k = A^4(x, y)dt \quad (6)$$

коэффициенты форм связности $\omega_k^4(x, y^j)dx^k$ зависели только лишь от первых трех динамических координат. Заметим, что трехмерный режим может оказаться неустойчивым с точки зрения более полного описания, включающего в себя рассмотрение всех возбуждаемых степеней свободы. Тем не менее, мы ограничимся моделированием именно этой априори возможной динамики.

Рассмотрим условия, накладываемые уравнениями баланса (3), (4) на выражения неизвестных величин $\omega_k^i(x, y^j)dx^k$ и $A^i(x, y^j)dt$, входящих в динамическое уравнение (1). Для этого подставим (2) и (5) в (3) и (4), и воспользуемся уравнениями (1) и (6). Для упрощения возникающих выражений будем считать пространственные координаты x^k декартовыми. В этом случае можно не различать верхние и нижние индексы, поднимая и опуская их по мере необходимости записи ковариантных выражений. Тогда получим следующие уравнения для коэффициентов уравнения (1)

$$\partial_k u_0^k - \omega_k^k = 0, \quad (7)$$

$$A^i + (u_0^k + y^k)(\partial_k u_0^i - \omega_k^i) = -(\partial^i p_0 - \omega^{4i}) - v D_k \omega^{ik}. \quad (8)$$

где введено обозначение $D_k = \partial_k - \omega_k^i \frac{\partial}{\partial y^i}$.

Для дальнейшего конкретизируем постановку задачи. Будем рассматривать режим, среднее поле скоростей которого описывает течение простого сдвига

$$u_0^i = Ax^3 \delta_1^i. \quad (9)$$

Кроме того, сделаем предположения и в отношении геометрии расслоенного пространства пульсаций. Будем считать связность расслоения линейной функцией по динамическим координатам, то есть $\omega_k^\alpha = \omega_{jk}^\alpha(x)y^j$ ($\alpha = 1, \dots, 4$). В этом случае из уравнения (8) сразу следует, что второй объект приобретает полиномиальную по динамическим координатам структуру. А именно, вертикальное векторное поле становится многочленом второго порядка по динамическим координатам, то есть

$$A^i = A_0^i(x) + A_k^i(x)y^k + A_{jk}^i(x)y^j y^k.$$

Таким образом, неизвестными функциями, определяющими уравнение динамики пульсаций рассматриваемого трехмодового режима, являются коэффициенты $\omega_{jk}^a(x)$, $A_0^i(x)$, $A_k^i(x)$ и $A_{jk}^i(x)$, для определения которых имеем уравнения (3) и (4). Заметим при этом, что уравнение (4) по существу сводится к определению коэффициентов вертикального векторного поля, тогда как выбор коэффициентов связности ограничивает только лишь уравнение неразрывности (3). Это уравнение оставляет значительный произвол в определении коэффициентов связности, оставляя тем самым широту моделирования пространственной структуры динамики пульсаций, согласованных с выбранным средним течением.

2. Рассмотрим возможность получения в данной задаче аттрактора типа Лоренца. С этой целью, прежде всего, обсудим разложение актуальных значений скорости на среднюю скорость и пульсации около среднего.

По смыслу пульсаций их временное среднее должно быть равным нулю, то есть

$$\langle y \rangle_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0. \quad (10)$$

Вместе с тем, пульсации определяются как отклонения актуальных значений скорости от осредненного значения. Если среднее течение считать заданным, то отмеченное обстоятельство не позволяет выбирать в качестве модельного уравнения хаоса произвольную систему уравнений с хаотической динамикой. Для того чтобы переменные модельной системы уравнений можно было рассматривать как пульсации реальных гидромеханических величин, требуется выполнение условий (10). Если же (10) не выполняется, то это означает существование в динамике пульсаций неучтенного дрейфа. Соответственно, принятая модельная система оказывается несогласованной либо с учитываемыми действующими факторами, либо со структурой допустимого среднего течения.

Далее, уравнение (1) является в общем случае не вполне интегрируемой системой типа Пфаффа. Свойство неинтегрируемости этого уравнения является принципиально важным, отвечающим характерной для турбулентного движения особенности. А именно, в процессе движения любые макроскопически малые турбулентные образования, частицы, моли, глобулы, утрачивают свою индивидуальность. Эта особенность учитывается неинтегрируемостью уравнения (1). По существу, (1) описывает ансамбль возможных траекторий движения точек континуума, образованного сплошной средой. Эти траектории определены в расслоении пульсаций. Их проекции на пространство, занимаемое сплошной средой, определяют динамику развития пульсаций вдоль соответствующих пространственных кривых. Заметим, что последние могут быть выбраны произвольно, определяя собой возможность рассмотрения динамики пульсаций вдоль любой пространственной кривой.

Рассмотрим для определенности динамику пульсаций вдоль линий тока среднего течения. Тогда имеем следующие динамические уравнения:

$$\dot{x}^i = u_0^i, \quad (11)$$

$$\dot{y}^i + \omega_{jk}^i y^j u_0^k = A^i. \quad (12)$$

Прежде чем рассматривать эту систему, преобразуем ее к безразмерным переменным. Для этого в исходном уравнении (4) вместо коэффициента вязкости введем

число Рейнольдса. Затем устраним явную зависимость от этого числа с помощью замены

$$\tilde{\omega}^i = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \omega^i, \quad \omega^4 = \tilde{\omega}^4, \quad \tilde{x} = x\sqrt{\text{Re}}, \quad \tilde{y} = y\sqrt{\text{Re}}, \quad \tilde{u}_0 = u_0\sqrt{\text{Re}}, \quad \tilde{p}_0 = \text{Re } p_0. \quad (13)$$

Опуская знак надчеркивания над переменными, из (12) получаем

$$\dot{y}^i = \Delta u_0^i - u_0^k \partial_k u_0^i - \partial^i p_0 + y^j (-\partial_j u_0^i + \omega_j^{4i} - \partial_k \omega_j^{ik} + \omega_s^{ik} \omega_{jk}^s) + y^j y^k \omega_{jk}^i. \quad (14)$$

Проанализируем (13). Заметим, что используемая модель предполагает развитую турбулентность, то есть число Рейнольдса должно считаться достаточно большим. Тогда, если безразмерные величины имеют значения порядка единицы, то реальные размерные величины в соответствии с (13) будут указывать масштаб проявления динамики. В частности, из (13) следует, что пространственные масштабы оказываются малыми. Тем самым, используемая модель должна рассматриваться, прежде всего, как модель процессов турбулентного перемешивания на мезоскопическом уровне разрешения сплошной среды.

Теперь обратимся к анализу (11) и (12). Легко видеть, что для выбранного среднего течения уравнение (11) имеет простые интегралы. Соответствующие этому уравнения линии тока среднего течения представляют собой прямые, параллельные координатной оси x^1 . Исключая пространственные координаты, из (12) получаем в общем случае систему неавтономных дифференциальных уравнений. При этом, если коэффициенты связности и градиент давления не зависят от координаты x^1 , то система (14) становится автономной, содержащей оставшиеся пространственные координаты x^2 и x^3 в качестве параметров. В этом случае открывается реальный путь к прямому моделированию пространственно неоднородной квазистационарной динамики пульсаций. Ниже будет приведен пример такого моделирования.

В заключение этого пункта заметим, что возникновение неголономного распределения, задаваемого системой Пфаффа (1), (6), является следствием предположения о том, что в состоянии установившейся сильной турбулентности класс возможных траекторий движения частиц среды является стабильным образованием. Необходимым условием этой новой стабильности является требование неустойчивости траекторий движения точек, что, в свою очередь, предполагает большие значения числа Рейнольдса. Попытка распространения подхода на малые значения числа Re является необоснованной.

3. Обратимся к построению примера, в котором пульсации скорости вдоль траекторий среднего течения описываются канонической системой типа Лоренца. Для простоты будем считать все коэффициенты связности постоянными. В этом случае получаем пространственно-однородную вдоль линий тока среднего течения динамику, которая, тем не менее, вдоль произвольных линий не является пространственно-однородной. Будем называть сделанное допущение квазиоднородным приближением.

Наша задача состоит в том, чтобы придать уравнению (14) вид канонической системы Лоренца. Первым видимым препятствием для этого оказывается неопределенность отождествления динамических координат и соответствующих переменных

из канонической системы. Полагая, что различные типы механизмов межмодовых взаимодействий позволят смоделировать любые из подобных отождествлений, выберем следующий вариант. Пусть структура уравнения (14) имеет следующий вид:

$$\dot{y}^1 = \sigma(-y^1 + y^2), \quad (15)$$

$$\dot{y}^2 = (r - \langle z \rangle)y^1 - y^2 - y^1 y^3, \quad (16)$$

$$\dot{y}^3 = -\gamma(y^3 + \langle z \rangle) + y^1 y^2, \quad (17)$$

где явно выделено регулярное слагаемое, которое в соответствии со сказанным в п. 2 должно быть исключено из выражения для пульсаций.

Прежде чем идти дальше, сделаем следующее замечание. Покажем, в каком смысле система (15) – (17) эквивалентна классической системе Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(-x + y), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -\gamma z + xy. \quad (18)$$

Для этого предположим, что временные средние для переменных системы (18) существуют. Исходя из инвариантности этой системы относительно преобразований

$$x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow z \quad (19)$$

естественно ожидать, что средние для первых двух переменных должны быть нулевыми. Тогда подстановка

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow z + \langle z \rangle \quad (20)$$

в (18) дает систему уравнений (15) – (17).

В этой связи отметим, что для различных значений параметров системы Лоренца возможны решения как с нулевыми, так и с отличными от нуля средними значениями первых двух переменных [9]. Имея это в виду, ограничим последующее рассмотрение первой из указанных возможностей. Кроме того, заметим, что подстановка (20) может быть выполнена и в том случае, когда слагаемое в третьем выражении (20) не будет иметь смысла временного среднего. При этом для последующей интерпретации может потребоваться новое определение процедуры осреднения. В общем случае пригодное определение потребует уточнения временных масштабов рассматриваемых явлений. Ясно то, что подобные переопределения потребуют более детального учета как начальных данных, так и вариаций параметров системы. Известный эффект взаимодействия хаотических аттракторов показывает, каким образом могут возникать неоднозначности в определении средних при малых вариациях параметров движения [10].

Вернемся к нашему рассмотрению. Сравнивая коэффициенты системы (15) – (17) и (14), получаем

$$(\Delta u_0^i - u_0^k \partial_k u_0^i - \partial^i p_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma \langle z \rangle \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$(-\partial_j u_0^i + \omega_j^{4i} - \partial_k \omega_j^{ik} + \omega_s^{ik} \omega_{jk}^s) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma 0 \\ r - \langle z \rangle & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$y^j y^k \omega_{jk}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ -y^1 y^3 \\ y^1 y^2 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Кроме того, из (7) имеем

$$\partial_k u_0^k = 0, \quad (24)$$

$$\omega_{jk}^k = 0. \quad (25)$$

Рассмотрим (21) и (24). Подставляя выражение (9), легко видеть, что (24) выполняется тождественно, а (21) сводится лишь к определению среднего градиента давления. При этом градиент оказывается перпендикулярным к средней скорости течения, что является следствием выбранного отождествления переменных канонической системы Лоренца и компонент пульсаций скорости.

Обратимся к уравнениям (23) и (25). Из (23) получаем однозначные выражения для симметризованных по нижним индексам компонент объекта связности. Антисимметричная часть определяется из (25) с некоторым произволом. Общее решение этих уравнений дается следующим выражением:

$$\omega_{jk}^i dx^k = \begin{pmatrix} adx^2 - bdx^3 & -adx^1 + cdx^3 & bdx^1 - cdx^2 \\ edx^2 - fdx^3 & -edx^1 + bdx^3 & (f-1)dx^1 - bdx^2 \\ pdx^2 - edx^3 & (-p+1)dx^1 + adx^3 & edx^1 - adx^2 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Обратимся к оставшемуся уравнению (22). Это матричное уравнение представляет собой систему из 9 квадратичных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - c(p+f) + \omega_1^{41} &= -\sigma, \\ ae - bp + \omega_1^{42} &= r - \langle z \rangle, \\ eb - af + \omega_1^{43} &= 0, \\ ae - bp + b + \omega_2^{41} &= \sigma, \\ -cf + e^2 + b^2 - (1-f)(1-p) + \omega_2^{42} &= -1, \\ -ec + ab + \omega_2^{43} &= 0, \\ -af + eb + a - A + \omega_3^{41} &= 0, \\ -ec + ab + \omega_3^{42} &= 0, \\ -cp - (1-f)(1-p) + e^2 + a^2 + \omega_3^{43} &= -\gamma. \end{aligned}$$

Неизвестными в ней являются 6 коэффициентов связности (26), 9 компонент тензора давления, 1 коэффициент, определяющий величину средней скорости, и 3 параметра системы Лоренца. Отсюда следует, что решение этой системы определяется со значительным параметрическим произволом. В рассматриваемом трехмерном режиме тензор градиента давления ω_j^{4i} является произвольным и за счет его конкретизации можно смоделировать желаемую динамику при любом, заранее фиксированном, выборе коэффициентов связности. Для многомерных режимов компоненты тензора давления включены в более полную систему уравнений, учитывающих динамику всех возбуждаемых степеней свободы. В этом случае тензор давления уже не может быть произвольным. В этой связи интересно рассмотреть различные частные варианты определения тензора давления, предполагая, что физически разумные допущения должны находить свои представления в более полных, учитывающих многомерную динамику, уравнениях. Будем предполагать тензор градиента давления диагональным с нулевой компонентой, отвечающей координате y^2 . В этом случае (22) имеет следующее точное аналитическое решение:

$$\omega_1^{41} = J - \sigma, \quad \omega_3^{43} = J - \gamma + 1, \quad J = (R - \sigma)\sigma - A^2, \quad R = r - \langle z \rangle, \quad (27)$$

$$a = A, \quad b = \sigma - R, \quad c = \frac{R - \sigma}{R}J, \quad p = \frac{R\sigma}{J}, \quad f = \frac{R - \sigma}{J}R, \quad e = -\frac{AR}{J}. \quad (28)$$

Рассмотрим полученное решение (27), (28). В нем остались произвольными величины A , r , σ , γ , определяющие величину градиента скорости среднего течения, и три параметра модельной системы Лоренца. Все остальные характеристики движения выражены как функции отмеченного набора величин. За счет выбора определенных значений этих величин можно варьировать динамику пульсаций, а по формулам (26), (27) находить соответствующие значения компонент объекта связности. Если учесть, что каждый объект определяет характер взаимодействий пульсаций, то тем самым появляется возможность варьировать различные типы самих взаимодействий. В частности, варьировать величину компонент тензора давления. Следует заметить, что в некоторых случаях эти компоненты можно обратить тождественно в нуль. Особенность решений (27), (28) состоит в том, что обратить компоненты тензора давления в нуль, оставаясь в области тех значений параметров системы, для которых возникает динамика Лоренца, оказывается невозможным. (Однако это вполне возможно в области тех значений параметров, при которых динамика пульсаций является регулярной.)

Произведем некоторые оценки. Пусть параметры модельной системы отвечают аттрактору Лоренца с параметрами $\sigma = 10$, $r = 28$, $\gamma = 8/3$. В этом случае расчеты показывают, что пульсации имеют характерное время $\tau \approx 0.7$. В пределах расчетного промежутка времени $t = 0 \div 50$, значения пульсаций принадлежат интервалам $y^1 = -17.3 \div 19.8$, $y^2 = -22.8 \div 27.2$ и $y^3 = -23.2 \div 23.7$.

Сопоставим абсолютные значения пульсаций скорости и градиента средней скорости. Из (13) следует, что пульсации получаются делением относительных значений на число \sqrt{Re} , тогда как градиент средней скорости остается неизменным. Примем для градиента скорости значение, равное единице по порядку величины, то

есть $A \sim 1$. Тогда при значении $Re=2000$, то есть при нижнем критическом значении [11], для пульсаций получаем порядок величины, равный 50% от величины градиента. Для случая $Re=40000$, пульсации скорости достигают только лишь 10% от принятого значения градиента средней скорости. Отсюда видно, что разумные пропорции между средней скоростью и пульсациями могут быть обеспечены лишь в некотором диапазоне чисел Re .

4. Новые данные выявляются при рассмотрении движения точек среды. Для динамики Лоренца в квазиоднородном приближении уравнения движения точек имеют вид

$$\dot{x}^i = u^i, \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u}^1 \\ \dot{u}^2 \\ \dot{u}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & A \\ r - \langle z \rangle & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A\sigma x^3 \\ -A(r - \langle z \rangle)x^3 \\ -\gamma \langle z \rangle \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Эта система оказывается линейной с постоянными коэффициентами. Ее общее решение легко может быть получено элементарным интегрированием. Поэтому отметим только качественные особенности траекторий движения точек. Из характеристического уравнения для скоростей движения получаем, что имеется два отрицательных и один положительный корень. Тем самым в каждой точке пространства выделяются два сжимающих и одно растягивающее направления. Эти особенности динамики являются инвариантными характеристиками, которые могут быть использованы для классификации аттракторов, отвечающих течениям с одинаковыми значениями средней скорости.

Как следует из общего решения системы (29) и (30), возможные перемещения точек среды в направлениях, трансверсальных к линиям тока среднего течения, не ограничены. А именно, в проекции на ось x^3 происходит регулярный дрейф. При этом точки, перемещаясь перпендикулярно линиям тока среднего течения, попадают в область больших значений скорости. В этом случае число Re возрастает, что ведет к уменьшению относительной величины пульсаций. В рамках сделанного квазиоднородного приближения этот эффект ведет к относительному уменьшению пульсаций и, в конечном счете, к их вырождению во флуктуации.

Библиографический список

1. *Mukhamedov A.M.* Turbulent models: problems and solutions // 17 IMACS Congress, Paper T4-1-103-0846, <http://imacs2005.ec-lille.fr>.
2. *Mukhamedov A.M.* Towards a gauge theory of turbulence // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2006. Vol. 29. P. 253.
3. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // *Commun. Math. Phys.* 1971. Vol. 20. P. 167.

4. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989. 296 с.
5. *Mandelbrot B.* The fractal geometry of nature. Freeman. San Francisco, 1982.
6. *Benzi R., Paladin G., Parisi G., Vulpiani A.* On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems // J. Phys. A. 1984. Vol.17. P.3521.
7. *Elnaschie M.S.* The Feynman path integrals and E-Infinity theory from the two-slit Gedanken experiment // International Journal of Nonlinear sciences and Numerical Simulations. 2005. Vol. 6(4). P. 335.
8. *Мухамедов А.М.* Ансамблевые режимы турбулентности в сдвиговых течениях // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. 2003, № 3. С. 36.
9. *Юдович В.И.* Асимптотика предельных циклов системы Лоренца при больших числах Релея // ВИНТИ. 31.07.78. № 2611-78.
10. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
11. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

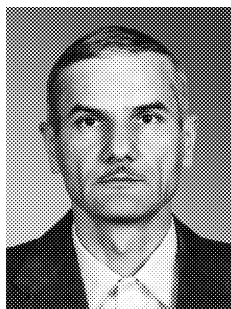
*Казанский государственный
технический университет*

*Поступила в редакцию 23.01.2006
После доработки 15.08.2006*

LORENZ ATTRACTOR IN FLOWS OF SIMPLE SHIFT

A.M. Mukhamedov

In the frame of a model given before for simulation of chaotic dynamics of continuum medium the Lorenz attractor is represented. The simulation is given with the help of the structures that define the geometry of a fiber bundle associated with 3-dimensional regime of velocity pulsations. Lorenz dynamics appears as time dependence of pulsations along the lines of average flow.



Мухамедов Альфэрид Мавиевич – родился в Казани (1953). Окончил физический факультет Казанского государственного университета по кафедре гравитации и теории относительности (1976). Докторант кафедры теоретической и прикладной механики Казанского государственного технического университета им. А.Н.Туполева. Автор 12 работ по данной тематике, а также монографии «Научный поиск и методология математики» (Казань: Изд-во КГТУ, 2005, в соавторстве с Г.Д. Тарзимановой). Область научных интересов – математические модели хаотической динамики, геометрия расслоенных многообразий, методология современной математики.