



АВТОКОЛЕБАНИЯ ПРОВОДА, НАГРЕВАЕМОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ТОКОМ, С УЧЕТОМ ТЕНЗОРЕЗИСТИВНОГО ЭФФЕКТА

П.С. Ланда

Рассмотрен пример термомеханической системы, имеющий большое практическое значение. Эта система состоит из легкого металлического провода с грузом в середине, включенного в цепь переменного или постоянного тока. При определенных условиях груз и провод могут совершать автоколебания, имеющие довольно сложный характер. Практическое значение рассматриваемой задачи состоит в попытке объяснения явления раскачки проводов в линиях электропередачи даже в безветренную погоду. Для такого объяснения, прежде всего, необходимо исследование условий возбуждения автоколебаний в модели системы, подобной реальному проводу. Именно эта проблема решается в данной работе.

1. Исходные уравнения

Рассмотрим тонкий легкий металлический провод с грузом в середине, масса которого много больше массы провода. Приближенно такой провод будет изгибаться как невесомая струна. Геометрия такой струны, включенной в цепь переменного тока низкой частоты ω (такой, что выполняется условие квазистационарности), показана на рис. 1. Следует заметить, что в случае массы струны m , сравнимой с массой груза M , и (или) более высокой частоты геометрия была бы существенно более сложной, и систему следовало бы рассматривать как распределенную. При определенных условиях система, показанная на рис. 1, может совершать автоколебания как в вертикальной плоскости, так и вокруг оси O_1O_2 . Вертикальные колебания струны с грузом в схеме, подобной той, которая изображена на рис. 1, но содержащей дополнительно электромеханический прерыватель, были подробно изучены К.Ф. Теодорчиком в середине прошлого века [1, 2]. Рассмотрение вертикальных автоколебаний струны было проведено А.С. Вермелем [3],

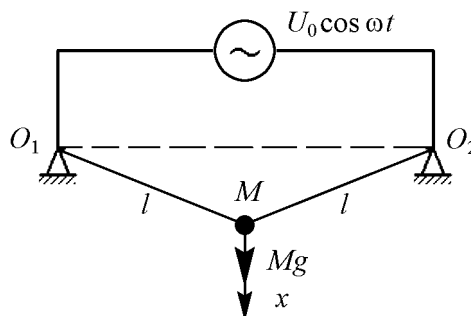


Рис. 1. Схематическое изображение натянутой металлической струны с грузом, включенной в цепь переменного тока частоты ω

а автоколебания вокруг оси O_1O_2 впервые были экспериментально обнаружены и исследованы Я.Б. Дубошинским и др. в 1971 г. [4].

Результаты детального теоретического исследования как вертикальных, так и вращательных автоколебаний изложены в [5,6]. Однако в этих работах рассмотрение указанных типов колебаний проводится отдельно, что является недостаточным для практических целей. Ниже будут приведены результаты совместного рассмотрения этих типов автоколебаний.

Уравнения автоколебаний можно получить исходя из функции Лагранжа \mathcal{L} и диссипативной функции \mathcal{D} . Введя обобщенные координаты r и φ , где r – расстояние от груза до оси O_1O_2 , находим

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{M}{2}\dot{r}^2 + \frac{Mr^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \left(Mgr \cos \varphi - \int \frac{2F(r, \theta)r}{l} dr \right), \\ \mathcal{D} &= \frac{h_1\dot{r}^2}{2} + \frac{h_2r^2\dot{\varphi}^2}{2},\end{aligned}\quad (1)$$

где $l = \sqrt{r^2 + L^2}$ – половина длины струны при температуре $T = T_0 + \theta$, T_0 – температура окружающей среды, θ – изменение температуры за счет нагрева электрическим током, L – половина расстояния между опорами; $F(r, \theta)$ – сила натяжения струны, нагретой до температуры T ¹. Последняя равна

$$F(r, \theta) = ES \left(\frac{l - l_0(1 + \alpha\theta)}{l_0} \right), \quad (2)$$

где E – модуль Юнга; $S = \pi D^2/4$ – площадь поперечного сечения струны, D – диаметр струны; $l_0 = \sqrt{x_0^2 + L^2}$ – половина длины струны в ненатянутом состоянии при $\theta = 0$, x_0 – провисание струны в ненатянутом состоянии при $\theta = 0$; α – коэффициент линейного расширения струны. Далее будем считать, что x_0 настолько мало, что его можно положить примерно равным нулю. Тогда $l_0 \approx L$.

Принимая во внимание (2), из (9) получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi + \frac{2ES}{M} \left(\frac{l - L(1 + \alpha\theta)}{L} \right) \frac{r}{l} + 2\delta_1\dot{r} &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} + \frac{g}{r} \sin \varphi + 2\delta_2\dot{\varphi} &= 0,\end{aligned}\quad (3)$$

где $\delta_1 = h_1/(2M)$, $\delta_2 = h_2/(2M)$.

Уравнение для разности температур θ запишем в предположении, что охлаждение струны происходит по закону Ньютона с коэффициентом теплоотдачи q , являющимся функцией модулей скорости обтекания всех участков струны. Это возможно, если частота изменения скоростей невелика, так что можно предположить, что выполняется условие квазистационарности. Очевидно, что скорость обтекания участка струны, расположенного на расстоянии x от ее центра, равна

$$v(x, t) = \sqrt{h^2(x)\dot{\varphi}^2 + \dot{h}^2}, \quad (4)$$

где

$$h(x) = \frac{r}{l} x, \quad \dot{h} = \frac{x}{l} \left(1 - \frac{r^2}{l^2} \right) \dot{r}.$$

¹Предполагаем, что теплопроводность струны достаточно велика, так что за период колебаний температуры всех точек струны успевают стать одинаковыми.

Следовательно,

$$v(x, t) = \frac{x}{l} \sqrt{r^2 \dot{\varphi}^2 + \left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right)^2 r^2}. \quad (5)$$

Таким образом, коэффициент теплоотдачи с учетом обтекания струны можно записать в виде

$$q(t) = \frac{1}{l} \int_0^l f(|v(x, t)|) dx, \quad (6)$$

где $f(0) \equiv q_0$ – коэффициент теплоотдачи при $v(x, t) \equiv 0$.

Предполагая, что груз теплоизолирован от струны, получаем следующее уравнение для разности температур θ :

$$mc\dot{\theta} = -q(t) \frac{S_0 l}{L} \theta + \frac{U_0^2}{R}, \quad (7)$$

где U_0 – эффективное напряжение источника питания, c – теплоемкость груза, R – электрическое сопротивление струны, $S_0 = \pi DL$ – площадь боковой поверхности ненапрянутой струны. При нагревании струны и ее удлинении сопротивление R увеличивается², так что

$$R = R_0 \left(1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \frac{l - L}{L}\right), \quad (8)$$

где β_1, β_2 – некоторые коэффициенты, причем коэффициент β_2 определяется материалом и геометрическими размерами провода [8], а коэффициент β_1 достаточно мал, так что членом $\beta_1 \theta$ пренебрегаем.

Обозначим стационарные значения переменных r и θ через r_0 и θ_0 и примем во внимание, что стационарное значение φ равно нулю. Из (3) и (7) следует, что уравнения стационарного состояния системы можно записать в виде

$$\frac{r_0^2 \beta_0 ES}{ML^3} = \omega_0^2, \quad \varphi_{\text{st}} = 0, \quad \theta_0 = \frac{U_0^2 L}{q_0 S_0 l_{\text{st}} R_{\text{st}}}, \quad (9)$$

где

$$l_{\text{st}} = \sqrt{r_0^2 + L^2}, \quad R_{\text{st}} = R_0 \left[1 + \beta_2 \left(\frac{l_{\text{st}}}{L} - 1\right)\right], \quad (10)$$

$$\beta_0 = \frac{2L^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{L(1 + \alpha\theta_0)}{l_{\text{st}}}\right), \quad \omega_0 = \sqrt{g/r_0}.$$

2. Малые отклонения от стационарного состояния

Прежде всего рассмотрим поведение системы при малых отклонениях от стационарного состояния. Для этого введем новые переменные

$$\xi = \frac{r - r_0}{r_0}, \quad \vartheta = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_0} \quad (11)$$

²Изменение сопротивления при деформации называется тензорезистивным эффектом.

и примем во внимание, что $r_0 \ll L$, $\alpha\theta_0 \ll 1$ и $\beta_0 \approx 1 - \beta$, где

$$\beta = 2\alpha\theta_0 L^2 / r_0^2. \quad (12)$$

Заметим, что параметр β играет важную роль в возбуждении автоколебаний.

В этих переменных линеаризованные уравнения (3) и (7) принимают вид

$$\ddot{\xi} + 2\delta_1 \dot{\xi} + \Omega^2 \xi = \omega_0^2 k \vartheta, \quad \dot{\vartheta} + \gamma \vartheta = -a \gamma \xi, \quad \ddot{\varphi} + 2\delta_2 \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (13)$$

где

$$\Omega \approx \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2}{\beta_0}}, \quad k = \frac{\beta}{\beta_0}, \quad \gamma = \frac{q_0 S_0}{mc}, \quad a = \frac{(1 + \beta_2) r_0^2}{L^2}.$$

Отсюда видно, что в линейном приближении вращательные колебания груза не зависят от вертикальных колебаний и являются затухающими. Поэтому вращательные колебания не могут самовозбуждаться, но, как следует из дальнейшего, при выполнении условия резонанса, когда частота Ω близка к удвоенной частоте ω_0 , возможно параметрическое возбуждение этих колебаний при маленьком (порядка δ_2/ω_0) значении амплитуды колебаний переменной ξ . Вертикальные же колебания и колебания температуры, описываемые переменными ξ и ϑ , могут самовозбуждаться, если выполняется условие (см. [6])

$$ak > \frac{2\delta_1}{\omega_0^2} \left(\frac{\Omega^2}{\gamma} + 2\delta_1 + \gamma \right). \quad (14)$$

Отсюда видно, что самовозбуждение возможно даже в отсутствие тензорезистивного эффекта, так как в этом случае коэффициент a все равно отличен от нуля за счет увеличения теплоотдачи при удлинении провода. Заметим, что эта зависимость не была учтена в работах [3, 5, 6]. Из (7) следует, что механизмом самовозбуждения автоколебаний является не отрицательное трение, а инерционное взаимодействие между переменными ξ и ϑ (см. [6]). Для такого взаимодействия необходимо, чтобы параметр инерционности γ был меньше некоторого критического значения.

Правая часть неравенства (7) минимальна при $\gamma = \Omega$. При этом условие (7) принимает вид

$$ak > \frac{4\delta_1 \Omega}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{\delta_1}{\Omega} \right). \quad (15)$$

Так как $\Omega \sim \omega_0$, условие (8) всегда выполняется при достаточно большой добротности системы.

Легко показать, что вблизи порога возбуждения переменные ξ и ϑ совершают почти гармонические колебания с частотой ω , где

$$\omega = \sqrt{\Omega^2 + 2\delta_1 \gamma} = \sqrt{\frac{\gamma(\Omega^2 + \omega_0^2 a k_{cr})}{\gamma + 2\delta_1}}, \quad (16)$$

$$k_{cr} = \frac{2\delta_1}{\omega_0^2 a} \left(\frac{\Omega^2}{\gamma} + 2\delta_1 + \gamma \right).$$

При малом коэффициенте затухания δ_1 и не очень большом значении γ частота ω близка к Ω .

Если же условие (7) не выполняется, но условие резонанса справедливо, то вся система может возбуждаться только жестко. При этом порог возбуждения будет существенно выше, чем в первом случае, который мы условно будем называть случаем мягкого возбуждения.

Заметим, что резонанс может иметь место, только если параметр β близок к значению $1/3$, то есть в небольшом диапазоне температур провода, зависящем от параметра r_0 . При выполнении этого условия $k \approx 0.5$ и $\beta_0 \approx 2/3$. В случае же, когда условие резонанса не выполняется, вращательные колебания могут возбуждаться только при большой амплитуде вертикальных колебаний. Этот случай можно исследовать только численно, потому что расчету он не поддается.

3. Конечные отклонения от стационарного состояния

Чтобы найти амплитуды автоколебаний и рассмотреть случай жесткого возбуждения системы, необходимо знать зависимость $q(t)$, а для этого необходимо знание функции $f(|v(x, t)|)$. Точное аналитическое выражение для этой функции неизвестно. В различных диапазонах скоростей эта функция может быть аппроксимирована разными формулами [9, 10]. При нулевой скорости обтекания в рассматриваемой нами системе теплоотдача обусловлена, в основном, конвективным переносом тепла и определяется числом Рэлея Ra . Большая часть имеющихся аппроксимаций зависимости q_0 от Ra относится к сравнительно большим значениям Ra ($Ra \geq 10^3$). При выбранных нами параметрах Ra меньше единицы. Из экспериментальных данных, приведенных в книге [10, гл. 7], следует, что в отсутствие обтекания число Нуссельта Nu_0 приблизительно равно 0.351113. Так как число Нуссельта связано с коэффициентом теплоотдачи q соотношением

$$Nu = \frac{qD}{\kappa}, \quad (17)$$

где D – диаметр провода и κ – коэффициент теплопроводности, то $q_0 \approx 0.351113\kappa/D$. (Для воздуха $\kappa \approx 0.031$ дж/(м·с·град) и $q_0 \approx (0.0121/D)$ дж/(м²·с·град); D измеряется в метрах).

Полная зависимость $f(|v(x, t)|)$ может быть найдена исходя из экспериментальных данных, приведенных в [10, гл. 10] и справедливых при $Re \geq 0.1$, где $Re = |v(x, t)|D/\nu$ – число Рейнольдса, ν – кинематическая вязкость воздуха. Принимая во внимание, что при $v = 0$ производная от q по v должна обращаться в нуль, и полагая, что при $Re \leq 0.1$ зависимость q от Re можно аппроксимировать параболой $q = q_0(1 + c_0 Re^2)$, из условия сшивания этой параболы с экспериментальными данными при $Re = 0.1$ находим $C_0 \approx 15.0563$.

В соответствии со сказанным и с данными, приведенными в книге [10], в различных диапазонах чисел Рейнольдса число Нуссельта $Nu = f(|v(x, t)r|)D/\kappa$ может быть аппроксимировано следующими формулами:

$$Nu = \begin{cases} Nu_0(1 + 15.0563Re^2) & \text{при } 0 \leq |Re| \leq 0.1, \\ 0.036197 - 0.0151621|Re| + 0.818618|Re|^{0.294252} & \text{при } 0.1 \leq |Re| \leq 1, \\ 0.337038 + 0.478723\sqrt{|Re|} & \text{при } 1 \leq |Re| \leq 100, \end{cases} \quad (18)$$

Отсюда видно, что при $|\text{Re}| \geq 1$ зависимость коэффициента теплопередачи от скорости обтекания провода определяется формулой

$$q = q_1 + q_2 \sqrt{|v|}, \quad (19)$$

где $q_1 = 0.337038\kappa/D$, $q_2 = 0.478723\kappa/\sqrt{D\nu}$. Именно такая формула при всех значениях v использовалась в работе [11], где колеблющаяся струна рассматривалась как выпрямитель переменного тока.

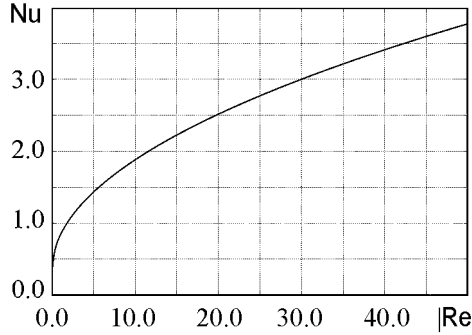


Рис. 2. Зависимость числа Нуссельта от числа Рейнольдса, построенная на основе аппроксимаций (18)

Заметим, что вычисленное таким образом q_1 оказывается несколько меньше, чем определенное раньше q_0 . Можно полагать, что разница определяется ошибками аппроксимации.

График зависимости числа Нуссельта Nu , построенный на основе аппроксимаций (10), приведен на рис. 2. За исключением маленького участка вблизи нуля, он довольно хорошо аппроксимируется формулой (19).

Рассмотрим теперь систему уравнений (3), (7) и перепишем ее в безраз-

мерных переменных ξ , φ и ϑ :

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + 2\delta_1 \dot{\xi} - (1 + \xi)\dot{\varphi}^2 + \omega_0^2(1 - \cos \varphi) + \Omega^2 \left(\xi + \frac{(3 + \xi)\xi^2}{3 - \beta} \right) &= \omega_0^2 k(1 + \xi)\vartheta, \\ \dot{\vartheta} &= -\frac{\overline{Nu}}{Nu_0} \frac{l}{L} \gamma(1 + \vartheta) + \frac{\gamma l_{st}}{L} \left(1 - \beta_2 \frac{r_0^2}{2L^2} \xi(2 + \xi) \right), \\ \ddot{\varphi} + \frac{2\xi\dot{\varphi}}{1 + \xi} + \frac{\omega_0^2}{1 + \xi} \sin \varphi + 2\delta_2 \dot{\varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{Nu} &= \frac{1}{l} \int_0^l Nu(\text{Re}(x)) dx, \quad l = \sqrt{r_0^2(1 + \xi)^2 + L^2}, \\ \text{Re}(x) &= \frac{r_0 D x}{\nu l} \sqrt{\left[(1 + \xi)^2 \dot{\varphi}^2 + \left(1 - \frac{r_0^2(1 + \xi)^2}{l^2} \right)^2 \xi^2 \right]}. \end{aligned} \quad (21)$$

3.1. Случай мягкого возбуждения вертикальных колебаний. Резонансный режим. При рассмотрении указанного случая ограничимся малым затуханием и малым превышением коэффициента k над пороговым значением k_{cr} , когда $\delta_{1,2}/\omega_0 \sim k - k_{cr} \sim (\omega - 2\omega_0)/\omega \sim \varepsilon$, где ε – условный малый параметр, который в окончательных выражениях следует положить равным единице. В этом случае амплитуды колебаний будут малы. Принимая сказанное во внимание, разложим правые части уравнений (11) с учетом (21) в ряд по ε , полагая $r_0^2/L^2 \sim \alpha\theta_0 \sim \varepsilon$, и ограничимся членами порядка ε . В этом приближении можно положить

$$Nu(x) \approx Nu_0 \left(1 + 15.0563 \frac{D^2 v^2(x)}{\nu^2} \right), \quad (22)$$

где

$$v^2(x) \approx \frac{r_0^2 x^2}{l^2} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2).$$

Интегрируя по x , находим

$$\bar{N}u \approx Nu_0 \left(1 + \frac{d}{\omega_0^2} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2) \right), \quad (23)$$

где $d = 5.0154D^2 r_0^2 \omega_0^2 / \nu^2$.

В результате получаем следующие уравнения, справедливые при малых колебаниях:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + 2\delta_1 \dot{\xi} + \Omega^2 \xi - \omega_0^2 k_{cr} \vartheta &= \frac{\varepsilon}{4} \left(\omega^2 (k - k_{cr}) \vartheta - \frac{3\omega^2}{2} \xi^3 + 4\dot{\varphi}^2 - \omega^2 \varphi^2 \right), \\ \dot{\vartheta} + \gamma \vartheta + \gamma a \xi &= -\varepsilon \frac{4\gamma d}{\omega^2} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2), \\ \ddot{\varphi} + \frac{\omega^2}{4} \varphi &= \varepsilon \left[\frac{\omega^2}{2} \Delta \varphi - 2\delta_2 \dot{\varphi} + \frac{\omega^2}{4} \left(\frac{\varphi^2}{6} + \xi - \xi^2 \right) \varphi - 2\dot{\xi} \dot{\varphi} \right], \end{aligned} \quad (24)$$

где ω определяется выражением (16), $\Delta \approx \frac{\Omega}{2\omega_0} - 1$ – относительная расстройка частот.

Решение системы уравнений (24) можно приближенно искать методом Крылова–Боголюбова [12]. В качестве порождающих уравнений для системы (24) удобно взять следующие:

$$\ddot{\xi} + 2\delta_1 \dot{\xi} + \omega^2 \xi - \frac{\omega^2}{4} k_{cr} \vartheta = 0, \quad \dot{\vartheta} + \gamma \vartheta + \gamma a \xi = 0, \quad \ddot{\varphi} + \frac{\omega^2}{4} \varphi = 0. \quad (25)$$

Их решение может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0(t) = \frac{A_1}{2} (e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1}), \\ \vartheta(t) &= \vartheta_0(t) = -\frac{A_1}{2} \left(\frac{\gamma a}{\gamma + i\omega} e^{i\psi_1} + \frac{\gamma a}{\gamma - i\omega} e^{-i\psi_1} \right), \\ \varphi(t) &= \varphi_0(t) = \frac{A_2}{2} (e^{i\psi_2} + e^{-i\psi_2}), \end{aligned} \quad (26)$$

где $\psi_1 = \omega t + \Phi_1$, $\psi_2 = (\omega/2)t + \Phi_2$; A_1 , A_2 , Φ_1 и Φ_2 – произвольные постоянные.

Решение системы (24) ищем в виде рядов по степеням малого параметра ε

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0(t) + \varepsilon u_1(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2) + \dots, \\ \vartheta(t) &= \vartheta_0(t) + \varepsilon u_2(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2) + \dots, \\ \varphi(t) &= \varphi_0(t) + \varepsilon u_3(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2) + \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

где $A_{1,2}$ и $\Phi_{1,2}$ – медленно меняющиеся амплитуды и фазы, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dA_{1,2}}{dt} &= \varepsilon f_{1,2}(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2) + \dots, \\ \frac{d\Phi_{1,2}}{dt} &= \varepsilon F_{1,2}(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2) + \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

$f_{1,2}(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2)$, $F_{1,2}(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2)$, $u(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2)$, $v(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2)$ и $w(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2)$ – неизвестные функции.

Вычислим производные $\dot{\xi}$, $\ddot{\xi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$, исходя из выражений (26), (27), (28), и представим их в виде рядов по ε :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & \frac{1}{2} \left[i\omega A_1 \left(e^{i\psi_1} - e^{-i\psi_1} \right) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(\left(e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1} \right) f_1 + iA_1 \left(e^{i\psi_1} - e^{-i\psi_1} \right) F_1 + 2\omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi_1} \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} = & \frac{\omega}{2} \left[-\omega A_1 \left(e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1} \right) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(i \left(e^{i\psi_1} - e^{-i\psi_1} \right) f_1 - A_1 \left(e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1} \right) F_1 + 2\omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi_1^2} \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} = & -\frac{1}{2} \left\{ i\omega A_1 \left(\frac{\gamma a}{\gamma + i\omega} e^{i\psi_1} - \frac{\gamma a}{\gamma - i\omega} e^{-i\psi_1} \right) + \varepsilon \left[\left(\frac{\gamma a}{\gamma + i\omega} e^{i\psi_1} + \frac{\gamma a}{\gamma - i\omega} e^{-i\psi_1} \right) f_1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + iA_1 \left(\frac{\gamma a}{\gamma + i\omega} e^{i\psi_1} - \frac{\gamma a}{\gamma - i\omega} e^{-i\psi_1} \right) F_1 - 2\omega \frac{\partial u_2}{\partial \psi_1} \right] + \dots \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = & \frac{1}{2} \left[\frac{i\omega}{2} A_2 \left(e^{i\psi_2} - e^{-i\psi_2} \right) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(\left(e^{i\psi_2} + e^{-i\psi_2} \right) f_2 + iA_2 \left(e^{i\psi_2} - e^{-i\psi_2} \right) F_2 + \omega \frac{\partial u_3}{\partial \psi_2} \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} = & \frac{\omega}{4} \left[-\frac{\omega}{2} A_2 \left(e^{i\psi_2} + e^{-i\psi_2} \right) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(i \left(e^{i\psi_2} - e^{-i\psi_2} \right) f_2 - A_2 \left(e^{i\psi_2} + e^{-i\psi_2} \right) F_2 + \omega \frac{\partial^2 u_3}{\partial \psi_2^2} \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Подставляя в правые части уравнений (24) порождающее решение (26), полагая $\omega_0 = \omega/2$ и приравнивая коэффициенты при ε , получаем уравнения для u_1 , u_2 и u_3 . Запишем эти уравнения только для составляющих функций u_1 и u_2 на частоте ω (мы обозначим эти составляющие U_1 и U_2), а для уравнения, содержащего функцию u_3 , запишем только условие отсутствия резонансных членов. Ограничиваясь членами порядка ε , получим

$$\begin{aligned} 2i\delta_1\omega U_1 - \frac{\omega^2 k_{\text{cr}}}{4} U_2 = & -2(\delta_1 + i\omega)(f_1 + iA_1 F_1) - \\ & - \frac{\omega^2}{4} (k - k_{\text{cr}}) \frac{\gamma a}{\gamma + i\omega} A_1 - \frac{9\omega^2}{32} A_1^3 - \frac{\omega^2}{4} A_2^2 e^{-i\Phi}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\gamma a U_1 + (\gamma + i\omega) U_2 = -\frac{\gamma a}{\gamma + i\omega} (f_1 + i A_1 F_1) + 2\gamma d A_2^2 e^{-i\Phi}, \quad (30)$$

$$f_2 + i A_2 F_2 = \left(-i\omega\Delta - 2\delta_2 + \frac{i\omega}{4} A_1 e^{i\Phi} \right) A_2,$$

где $\Phi = \Phi_1 - 2\Phi_2$.

Так как детерминант системы уравнений (29), определяющих U_1 и U_2 , равен нулю, одним из уравнений для функций f_1 и f_2 является условие совместности этой системы, приближенно имеющее вид

$$\begin{aligned} 2i\omega(\gamma + i\omega)(f_1 + i A_1 F_1) = \\ = -\frac{\omega^2}{4} \left[\gamma a (k - k_{cr}) A_1 + \frac{9(\gamma + i\omega)}{8} A_1^3 + (\gamma + i\omega - 2\gamma k_{cr} d) A_2^2 e^{-i\Phi} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Это уравнение справедливо при $a \sim \delta_1 \sim \varepsilon$.

Уравнение (31) совместно с (30) позволяет записать уравнения для амплитуд и фаз колебаний в явном виде. Разделяя действительные и мнимые части, из (30), (31) находим

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 = \varepsilon \frac{\omega^2 \gamma}{4(\omega^2 + \gamma^2)} \times \\ \times \left\{ \left(a(k - k_{cr}) + \frac{9}{64} A_1^2 \right) A_1 - \left[2k_{cr} d \cos \Phi - \frac{\omega^2 + \gamma^2(1 - 2k_{cr} d)}{\omega \gamma} \sin \Phi \right] A_2^2 \right\}, \\ \dot{A}_2 = -\varepsilon \omega \left(\frac{2\delta_2}{\omega} + \frac{1}{4} A_1 \sin \Phi \right) A_2, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 = \frac{\varepsilon^2 \omega}{8(\gamma^2 + \omega^2)} \left\{ \gamma a (k - k_{cr}) + \frac{9(2\omega^2 + \gamma^2)}{32} A_1^2 + \right. \\ \left. + \left(\left[\gamma(1 - 2k_{cr} d) + \omega \right] \cos \Phi - \left[\omega(1 - 2k_{cr} d) - \gamma \right] \sin \Phi \right) \frac{A_2^2}{A_1} \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\dot{\Phi}_2 = -\varepsilon \omega \left(\Delta - \frac{1}{4} A_1 \cos \Phi \right).$$

Из уравнений (32), (33) следует, что $A_1 \sim \varepsilon$ и $A_2 \sim \varepsilon^{3/2}$. Принимая это во внимание, видим, что $\dot{\Phi}_1 \sim \varepsilon^2$ и $\dot{\Phi}_2 \sim \varepsilon$, то есть $\dot{\Phi} \approx -2\dot{\Phi}_2$. Следовательно,

$$\dot{\Phi} \approx \varepsilon \omega \left(2\Delta - \frac{A_1}{2} \cos \Phi \right). \quad (34)$$

В стационарном режиме из второго уравнения (32) и уравнения (34) находим

$$\begin{aligned} \sin \Phi_{st} = -\frac{2\delta_2}{\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2 \Delta^2}}, \quad \cos \Phi_{st} = \frac{\omega \Delta}{\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2 \Delta^2}}, \\ A_{1st} = \frac{4\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2 \Delta^2}}{\omega}. \end{aligned} \quad (35)$$

Подставляя теперь (35) в первое уравнение (32), получаем

$$A_{2st}^2 = \frac{\gamma(4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2)(4\omega^2a(k - k_{cr}) + 9(4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2))}{2\omega^2[(\omega^2 + \gamma^2(1 - 2k_{cr}d))\delta_2 + \omega^2\gamma k_{cr}d\Delta]}. \quad (36)$$

Следует отметить, что в стационарном режиме частоты колебаний переменных ξ и φ отличаются от ω и $\omega/2$ на величины порядка ε^2 .

Исследуем теперь устойчивость найденного стационарного режима. Полагая $A_1 = A_{1st} + a_1$, $A_2 = A_{2st} + a_2$, $\Phi = \Phi_{st} + \phi$, где a_1 , a_2 и ϕ – малые отклонения от стационарного режима, запишем линеаризованные уравнения для этих отклонений

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \frac{\omega^2\gamma}{4(\omega^2 + \gamma^2)}(b_1a_1 - b_2A_{2st}a_2 - b_3A_{2st}^2\phi) \\ \dot{a}_2 &= \omega A_{2st} \left(\frac{2\delta_2}{\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2}}a_1 - \Delta\phi \right), \\ \dot{\phi} &= - \left(\frac{\omega^2\Delta}{2\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2}}a_1 + 4\delta_2\phi \right), \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= a(k - k_{cr}) + \frac{27(4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2)}{4\omega^2}, \\ b_2 &= \frac{4}{\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2}} \left(\frac{\delta_2(\omega^2 + \gamma^2(1 - 2k_{cr}d))}{\omega\gamma} + k_{cr}d\omega\Delta \right), \\ b_3 &= \frac{1}{\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2}} \left(4k_{cr}d\delta_2 - \frac{(\omega^2 + \gamma^2(1 - 2k_{cr}d))\Delta}{\gamma} \right). \end{aligned}$$

Отсюда находим характеристическое уравнение: $p^3 + c_1p^2 + c_2p + c_3 = 0$. С точностью до членов порядка ε коэффициенты c_1 , c_2 и c_3 равны:

$$\begin{aligned} c_1 &= 4\delta_2, \quad c_2 = \frac{\omega^2\gamma \left[4\delta_2(\omega b_2 A_{2st}^2 - 2b_1\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2}) - \omega^2 b_3 A_{2st}^2 \Delta \right]}{8(\omega^2 + \gamma^2)\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2}}, \\ c_3 &= \frac{\omega^3\gamma b_2 A_{2st}^2 (16\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2)}{8(\omega^2 + \gamma^2)\sqrt{4\delta_2^2 + \omega^2\Delta^2}}. \end{aligned}$$

Известно, что необходимым (но не достаточным) условием устойчивости является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения. Легко показать, что это условие выполняется при достаточно малых расстройках частот. Необходимым условием устойчивости является [6, 12]

$$c_1c_2 - c_3 \geq 0. \quad (38)$$

Это условие также выполняется при малых расстройках частот.

Таким образом, несмотря на то, что возбуждение вращательных колебаний происходит только после того, как амплитуда вертикальных колебаний достигает некоторого малого значения, режим установившихся колебаний с малыми амплитудами является устойчивым.

4. Жесткое возбуждение автоколебаний. Резонансный режим

Для исследования жесткого возбуждения, когда условие самовозбуждения вертикальных колебаний (7) не выполняется, рассмотрим систему уравнений (11), ограничиваясь нелинейными членами 3-й степени. При этом мы сможем вычислить только границу возбуждения, соответствующую неустойчивому предельному циклу.

Сохраняя только члены наименьшего порядка малости, уравнения (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} + 4\omega_0^2\xi &= \varepsilon\left(-2\delta_1\dot{\xi} - 8\omega_0^2\Delta\xi + \omega_0^2k\vartheta - \frac{3\omega_0^2}{2}\xi^3 + \dot{\varphi}^2 - \omega_0^2\varphi^2\right), \\ \dot{\vartheta} + \gamma\vartheta &= -\varepsilon\gamma\left(a\xi + \frac{d}{\omega_0^2}\left(\dot{\xi}^2 + \dot{\varphi}^2\right)\right), \\ \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi &= \varepsilon\left(-2\delta_2\dot{\varphi} + \omega_0^2(1-\xi)\xi\varphi - 2\dot{\xi}\dot{\varphi} + \frac{\omega_0^2\varphi^3}{6}\right).\end{aligned}\quad (39)$$

Как и раньше, решение уравнений (39) будем искать методом Крылова–Боголюбова, полагая

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{A_1}{2}\left(e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1}\right) + \varepsilon u_1(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2) + \dots, \\ \vartheta &= \varepsilon u_2(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2) + \dots, \\ \varphi &= \frac{A_2}{2}\left(e^{i\psi_2} + e^{-i\psi_2}\right) + \varepsilon u_3(A_1, A_2, \psi_1, \psi_2) + \dots,\end{aligned}\quad (40)$$

где $\psi_1 = 2\omega_0 t + \Phi_1$; $\psi_2 = \omega_0 t + \Phi_2$; A_1 , A_2 , Φ_1 и Φ_2 – медленно меняющиеся амплитуды и фазы, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{dA_{1,2}}{dt} = \varepsilon f_{1,2}(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2) + \dots, \quad \frac{d\Phi_{1,2}}{dt} = \varepsilon F_{1,2}(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2) + \dots \quad (41)$$

Вычислим производные $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$, $\dot{\xi}$, $\ddot{\xi}$ и $\dot{\vartheta}$, исходя из выражений (40), и представим их в

виде рядов по ε :

$$\begin{aligned}\dot{\xi} = & \frac{1}{2} \left[2i\omega_0 A_1 (e^{i\psi_1} - e^{-i\psi_1}) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left((e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1}) f_1 + iA_1 (e^{i\psi_1} - e^{-i\psi_1}) F_1 + 4\omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \psi_1} \right) + \dots \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} = & \frac{1}{2} \left[-4\omega_0^2 A_1 (e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1}) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(2i\omega_0 (e^{i\psi_1} - e^{-i\psi_1}) f_1 - 2\omega_0 A_1 (e^{i\psi_1} + e^{-i\psi_1}) F_1 + 8\omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi_1^2} \right) + \dots \right],\end{aligned}$$

$$\dot{\vartheta} = \varepsilon \left(2\omega_0 \frac{\partial u_2}{\partial \psi_1} + \dots \right),$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} = & \frac{1}{2} \left[i\omega_0 A_2 (e^{i\psi_2} - e^{-i\psi_2}) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left((e^{i\psi_2} + e^{-i\psi_2}) f_2 + iA_2 (e^{i\psi_2} - e^{-i\psi_2}) F_2 + 2\omega_0 \frac{\partial u_2}{\partial \psi_2} \right) + \dots \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} = & \frac{1}{2} \left[-\omega_0^2 A_2 (e^{i\psi_2} + e^{-i\psi_2}) + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(i\omega_0 (e^{i\psi_2} - e^{-i\psi_2}) f_2 - \omega_0 A_2 (e^{i\psi_2} + e^{-i\psi_2}) F_2 + 2\omega_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi_2^2} \right) + \dots \right].\end{aligned}$$

Подставляя в правые части уравнений (39) порождающее решение и приравнявая коэффициенты при ε , из условий отсутствия резонансных членов находим уравнения для функций $f_1 + iA_1 F_1$ и $f_2 + iA_2 F_2$:

$$f_1 + iA_1 F_1 = -2\delta_1 A_1 + 4i\omega_0 \Delta A_1 + \frac{9\omega_0}{16} A_1^3 + \frac{i\omega_0}{2} A_2^2 e^{-i\Phi}, \quad (42)$$

$$f_2 + iA_2 F_2 = \left(-2\delta_2 + \frac{i\omega_0}{2} A_1 e^{i\Phi} + \frac{i\omega_0}{2} A_1^2 - \frac{i\omega_0}{8} A_2^2 \right) A_2, \quad (43)$$

где $\Phi = \Phi_1 - 2\Phi_2$.

Полагая $\vartheta = B(e^{i(\psi_1 + \Phi_3)} + e^{-i(\psi_1 + \Phi_3)})$, из второго уравнения (39) находим B и Φ_3 :

$$\begin{aligned}B = & \frac{\gamma}{2(\gamma^2 + 4\omega_0^2)} \sqrt{\gamma^2 \left(aA_1 - \frac{d}{2} A_2^2 \cos \Phi \right)^2 + \omega_0^2 d^2 A_2^4 \sin^2 \Phi}, \\ \tan \Phi_3 = & -\frac{2\omega_0 d A_2^2 \sin \Phi}{\gamma(2aA_1 - dA_2^2 \cos \Phi)}.\end{aligned} \quad (44)$$

Как будет видно из полученных далее результатов, $A_1 \sim A_2 \sim \varepsilon$. Учитывая это, из уравнений (42) получаем следующие уравнения для амплитуд A_1 , A_2 и фаз Φ_1 , Φ_2 и Φ :

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \varepsilon \left(-2\delta_1 A_1 + \frac{\omega_0}{2} A_2^2 \sin \Phi \right), & \frac{dA_2}{dt} &= -\varepsilon \left(-2\delta_2 - \frac{\omega_0}{2} A_1 \sin \Phi \right), \\ \frac{d\Phi_1}{dt} &= 4\varepsilon\omega_0\Delta, & \frac{d\Phi_2}{dt} &= \frac{\varepsilon\omega_0}{2} A_1 \cos \Phi, & \frac{d\Phi}{dt} &= \varepsilon\omega_0(4\Delta - A_1 \cos \Phi). \end{aligned} \quad (45)$$

В стационарном режиме отсюда находим

$$\begin{aligned} \sin \Phi &= -\frac{\delta_2}{\sqrt{\delta_2^2 + \omega_0^2 \Delta^2}}, & \cos \Phi &= \frac{\omega_0 \Delta}{\sqrt{\delta_2^2 + \omega_0^2 \Delta^2}}, \\ A_1 &= 4\sqrt{\frac{\delta_2^2}{\omega_0^2} + \Delta^2}, & A_2 &= \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}} A_1. \end{aligned} \quad (46)$$

Найденные амплитуды A_1 и A_2 показывают наименьшие отклонения переменных ξ и φ , необходимые для возбуждения автоколебаний.

В заключение отметим, что из полученных результатов следует, что в рассматриваемой системе вращательные автоколебания возможны только в небольшом диапазоне соотношений между температурой и провисанием провода r_0 , определяемых параметром β (как уже указывалось, этот параметр должен быть близок к 1/3). В противном случае при выполнении условия (7) возможно возбуждение только вертикальных колебаний. Если же это условие не выполняется, то в отсутствие резонанса, когда β значительно отличается от 1/3, возбуждение автоколебаний, по-видимому, вообще невозможно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 06-08-0025а

Библиографический список

1. Теодорчик К.Ф. Термомеханические автоколебательные системы // Радиотехника. 1937, № 6. С. 5.
2. Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы. Москва: Гостехиздат, 1952.
3. Вермель А.С. К вопросу о терморезистивных колебаниях // В сб. Некоторые вопросы возбуждения незатухающих колебаний. Владимир: Изд-во ВГПИ, 1974. С. 159.
4. Пеннер Д.И., Дубошинский Я.Б., Дубошинский Д.Б., Петросов В.А., Поротников А.А. Параметрические термомеханические колебания // В кн. Некоторые вопросы возбуждения незатухающих колебаний. Владимир: Изд-во ВГПИ, 1974. С. 168.
5. Ланда П.С., Дубошинский Я.Б. Автоколебательные системы с высокочастотными источниками энергии // УФН. 1989. Т. 158. Вып. 4. С. 729.
6. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1965.

8. Физическая энциклопедия. М.: Научное изд-во «Большая Российская энциклопедия», 1998. Т. 5. С. 70.
9. *Hilpert R.* // Forsch. Gebiete Ingenieurw. 1933. Vol. 4. P. 215.
10. *Мак-Адамс В.Х.* Теплопередача. Металлургиздат, 1961. 1954.
11. *Бакман М.Е., Теодорчик К.Ф.* Выпрямление переменного тока колеблющейся тонкой струной // ЖТФ. 1936. Т. 6. Вып. 2. С. 298.
12. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.

*Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова*

*Поступила в редакцию 27.11.2007
После доработки 26.12.2007*

SELF-OSCILLATION OF WIRE, HEATING BY ELECTRIC CURRENT, WITH THE STRAIN-RESISTIVE EFFECT TAKING INTO ACCOUNT

P.S. Landa

On purpose to explain the wire swinging phenomenon in electro-transmission lines the investigation of the self-oscillations in a real-like model of a thermo-mechanical system is performed.



Ланда Полина Соломоновна – родилась в 1931 году в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 году. С 1956 года работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий сотрудник МГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор пяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», вышедшей в издательстве «Kluwer» (Голландия). Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика».
E-mail:landa@phys.msu.su