



КВАНТОВЫЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР В СИСТЕМЕ С ТРЕНИЕМ И ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

А.Л. Санин, А.А. Смирновский

Динамика квантовых волновых пакетов в одномерной системе с пространственно-ограниченным квадратичным потенциалом, обратной связью и трением исследована численно в рамках уравнения Шредингера–Ланжевена–Костина. При определенных значениях силы обратной связи и коэффициента трения возможны когерентные колебания в системе. Существуют критические значения этих параметров, когда колебания становятся сложными, произведение неопределенностей резко возрастает, осциллирует, а фурье-спектр колебаний становится всюду плотным.

Введение: обратная связь и формулировка задачи

Квантовые системы, характеризующиеся в классическом пределе нелинейными динамическими свойствами, являются объектом интенсивных исследований как теоретических, так и экспериментальных. Среди них особое внимание уделяется гамильтоновым системам, у которых потенциальные функции являются периодическими по координате и времени. Временная зависимость может быть непрерывной, в виде мгновенных ударов или импульсов конечной длительности [1, 2]. Одна из моделей таких квантовых систем – частица в потенциальной яме с непроницаемыми стенками – исследовалась во многих статьях, например, в [3, 4]. Другая – осциллятор в потенциальной яме – представляет не меньший интерес как для теории, так и приложений. Эта модель также обсуждалась неоднократно, в частности, в [5, 6]. Классические системы, являющиеся «двойниками» квантовых, с периодическими по координате и времени потенциальными функциями изучались длительное время; им посвящено много публикаций, следует отметить хотя бы некоторые из них [7–9]. Наряду с гамильтоновыми системами, в классической теории детально исследованы нелинейные диссипативные системы, например, осциллятор ван дер Поля, электронные автогенераторы [7, 9]. Переход к наноразмерам, аттосекундным лазерным импульсам является стимулом для исследования квантовых динамических закономерностей и разработки теории квантового осциллятора с трением и обратной связью, который в классическом пределе соответствует известным моделям автоколебательной системы. Для построения простейшего квантового осциллятора-аналога можно использовать классическую модель механических часов, достаточно общую и не зависящую от конкретной конструкции, которая обсуждалась в монографии [9]. Эта

модель описывается уравнением

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x = p \sum_{t_s} \delta(t - t_s), \quad (1)$$

где t_s – моменты включения импульсного источника (удара), когда система проходит через равновесное состояние; δ – дельта-функция Дирака; p – параметр интенсивности обратной связи. Если правая часть (1) отсутствует, то это уравнение описывает затухающие колебания осциллятора, параметр k характеризует трение. В целом уравнение (1) описывает автоколебания в системе с трением и обратной связью. Оно анализировалось в [9] как для $k > 0$, так и для $k < 0$. Наряду с моделью, описываемой уравнением (1), можно рассмотреть другую классическую модель, задаваемую в виде потенциала обратной связи

$$U_{oc} = \begin{cases} -F_0 x, & t \in (t_s, t_s + \Delta t), \\ 0, & t \notin (t_s, t_s + \Delta t). \end{cases} \quad (2)$$

Этот потенциал определяет силу F_0 , действующую на промежутке $t_s < t < t_s + \Delta t$, где Δt есть длительность действия силы. В качестве моментов t_s выбирались различные варианты, отличающиеся положением фазовой точки на фазовой плоскости. Один из них – когда система проходит через равновесное состояние. Предложенный потенциал (2) применялся ниже для анализа классической модели осциллятора и его квантового аналога.

В настоящей статье представлены результаты исследования когерентных колебаний квантового осциллятора, подверженного обратной связи и трению, а также сложных колебаний, когда соотношение неопределенностей не является минимизированным, а фурье-спектр становится всюду плотным. Для описания динамических закономерностей используется уравнение Шредингера–Ланжевена–Костина (ШЛК) [10]. Это уравнение обсуждалось нами и применялось для исследования конкретных квантовых систем, в том числе для упомянутых выше [11–14]. Статья содержит четыре раздела. В первом формулируются основные уравнения и решения стационарной задачи. Второй раздел посвящён когерентным колебаниям пространственно-ограниченного осциллятора, подверженного обратной связи и трению. В третьем и четвертом разделах анализируются временные промежутки между последовательными включениями обратной связи и переход к сложным колебаниям.

1. Основные положения, спектр энергий

Уравнение ШЛК, записанное в безразмерном виде, можно представить как

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \zeta^2} + \tilde{U}_\Sigma \tilde{\psi} - \frac{ik}{2} \left(\ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}^*} - \left\langle \ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}^*} \right\rangle \right) \tilde{\psi}, \quad (3)$$

где безразмерные величины определяются следующим образом: $\zeta = x/b_\delta$, $\tau = t/t_\delta$, $\tilde{U}_\Sigma = U_\Sigma/U_\delta$, $\tilde{\psi} = \psi/\psi_\delta$, $k = f/(m_e \omega_\delta)$, $\partial/\partial t = (1/\tau_\delta) \partial/\partial \tau$, $\partial^2/\partial x^2 = (1/b_\delta^2) \partial^2/\partial \zeta^2$, а единицы измерения равны $b_\delta = \sqrt{\hbar/(m_e \omega_\delta)}$, $t_\delta = \omega_\delta^{-1}$, $U_\delta = \hbar^2/(m_e b_\delta^2)$, $\psi_\delta = \sqrt{b_\delta^{-1}}$. Здесь x , t – координата и время, соответственно;

f – диссипативный коэффициент; ψ – волновая функция; m_e , \hbar – масса частицы и постоянная Планка, соответственно. Безразмерная комплексно-сопряженная волновая функция обозначена как $\tilde{\psi}^*$, i – мнимая единица. Рассматриваемая квантовая система ограничена непроницаемыми стенками в точках $\zeta = \pm\zeta_L$, где $\zeta_L = L/b_\delta$, L – полуширина системы. Величина \tilde{U}_Σ состоит из двух слагаемых

$$\tilde{U}_\Sigma = \frac{1}{2}\Omega_0^2\zeta^2 + \tilde{U}_{oc}, \quad (4)$$

где $\Omega_0 = \omega_0/\omega_\delta$, ω_0 – характеристическая частота осциллятора. Первое слагаемое в (4) определяет ограниченный квадратичный потенциал на отрезке $-\zeta_L \leq \zeta \leq \zeta_L$. Второе слагаемое в (4) представляет собой безразмерную форму (2)

$$\tilde{U}_{oc}(\zeta, \tau) = \begin{cases} -\tilde{F}_0\zeta, & \tau \in (\tau_s, \tau_s + \Delta\tau), \\ 0, & \tau \notin (\tau_s, \tau_s + \Delta\tau). \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\tilde{F}_0 = F_0/F_\delta$, F_0 – классическая сила, $F_\delta = U_\delta/b_\delta$, τ_s – моменты включения импульса, n – целое число. Слагаемое в (3), включающее множитель k , характеризует диссипативные свойства системы. Величина $\ln(\tilde{\psi}/\tilde{\psi}^*)$ может быть представлена в виде

$$\ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}^*} = i(2 \arg(\tilde{\psi}) + 2n\pi), \quad (6)$$

где $\arg(\tilde{\psi}) = \arctg(\text{Im}\tilde{\psi}/\text{Re}\tilde{\psi})$ есть главное значение фазы. Необходимо отметить, что физически корректные решения имеют место, когда фаза является непрерывной функцией координаты ζ . Символ $\langle \rangle$ означает среднее значение, так что

$$\left\langle \ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}^*} \right\rangle = \int \tilde{\psi}^* \ln \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}^*} \tilde{\psi} d\zeta. \quad (7)$$

Ниже используются безразмерные величины для плотности вероятности N и полевой скорости V , определяемые при помощи соотношений

$$N = \tilde{\psi}^*\tilde{\psi}, \quad V = \frac{1}{2iN} \left(\tilde{\psi}^* \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \zeta} - \tilde{\psi} \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial \zeta} \right). \quad (8)$$

Условие нормировки для волновой функции $\tilde{\psi}$ может быть записано в виде

$$\int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} N d\zeta = 1. \quad (9)$$

Расчетные формулы для средних значений динамических переменных и функций от них выражаются формулами

$$\begin{aligned} \langle \zeta \rangle &= \int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} \tilde{\psi}^* \zeta \tilde{\psi} d\zeta, & \langle V \rangle &= \int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} \tilde{\psi}^* \left(-i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \tilde{\psi} d\zeta, \\ \langle \tilde{T} \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} \left| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \zeta} \right|^2 d\zeta, & \langle \tilde{U}_\Sigma \rangle &= \int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} \tilde{\psi}^* \tilde{U}_\Sigma \tilde{\psi} d\zeta. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\langle \zeta \rangle$, $\langle V \rangle$ – средние значения координаты и скорости, соответственно; $\langle \tilde{T} \rangle$, $\langle \tilde{U}_\Sigma \rangle$ – средние значения кинетической и потенциальной энергий, соответственно. В отдельных случаях проводились вычисления средней полной энергии $\langle \tilde{E} \rangle$ как суммы $\langle \tilde{T} \rangle$, $\langle \tilde{U}_\Sigma \rangle$. Величины $\langle \zeta \rangle$, $\langle V \rangle$, $\langle \tilde{T} \rangle$, $\langle \tilde{U}_\Sigma \rangle$ являются безразмерными. Для анализа соотношения неопределенностей проведены вычисления стандартных отклонений координаты и скорости $\langle (\Delta \zeta)^2 \rangle$, $\langle (\Delta V)^2 \rangle$, а также стандартных отклонений, определяемых как

$$\sigma_\zeta = \sqrt{\langle (\Delta \zeta)^2 \rangle}, \quad \sigma_V = \sqrt{\langle (\Delta V)^2 \rangle}. \quad (11)$$

Произведение $\sigma_\zeta \sigma_V$ описывает соотношение неопределенностей как функцию времени. Используя метод дискретного преобразования Фурье (см. [15]), мы анализировали только квадраты модулей $|\Phi_W(\Omega)|^2$ как функцию Ω . Здесь W – некоторая переменная времени, $\Phi_W(\Omega)$ – фурье-преобразование, $\Omega = \omega/\omega_\delta$, ω – частота процесса. С использованием обозначения

$$F_W(\Omega) = |\Phi_W(\Omega)|^2, \quad (12)$$

были вычислены квадраты модулей фурье-компонент для $W = \langle \zeta \rangle$. Граничные условия на стенках системы и начальное условие задавались в виде

$$\tilde{\psi}(\pm \zeta_L, \tau) = 0, \quad \tilde{\psi}(\zeta, \tau = 0) = \tilde{\psi}_0(\zeta), \quad (13)$$

где $\tilde{\psi}_0(\zeta) = A \exp(-\zeta^2/2 + iV_0\zeta)$, постоянная A определялась из условия нормировки, V_0 – начальная скорость пакета.

Было проведено численное интегрирование уравнения ШЛК при заданных начальном и граничных условиях. Поскольку уравнение является нелинейным, использовался итерационный конечно-разностный метод установления по псевдовремени, который является аналогом метода простых итераций. Производные по координате аппроксимировались со вторым порядком точности. Временные производные также вычислялись со вторым порядком точности, за исключением тех моментов времени, где потенциал обратной связи \tilde{U}_{oc} меняется скачком (первый порядок аппроксимации). В процессе вычислений контролировалось условие нормировки (7), которое сохранялось с точностью до 10^{-6} . Реализованный численный метод также тестировался на простейших задачах (например, для гармонического осциллятора). Для получения приведенных ниже результатов в расчетах использовалась равномерная пространственно-временная сетка с шагом по времени $\Delta \tau_{\text{сетки}} = \pi/1024$ и с 400 узлами по координате.

Для интерпретации результатов полезно знать энергетический спектр стационарной задачи, когда обратная связь и трение отсутствуют, то есть $\tilde{U}_{oc} = 0$, $k = 0$. В этом частном случае уравнение для собственных функций и собственных значений имеет вид

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} \Omega^2 \zeta^2 \right) \varphi_n = \varepsilon_n \varphi_n, \quad (14)$$

где ε_n , φ_n – собственные числа энергетического спектра и собственные функции, соответственно; n – номер квантового состояния. При нулевых граничных условиях

для φ_n на стенках системы $\xi = \pm \zeta_L$ были проведены расчеты собственных значений ε_n , $n = 0, 1, \dots, 46$. Энергетические спектры ε_n для гармонического осциллятора на полном интервале $(-\infty, \infty)$, для частицы в потенциальной яме с непроницаемыми стенками, для пространственно-ограниченного осциллятора на конечном промежутке $[-\zeta_L, \zeta_L]$ в целом различаются между собой. Здесь кратко обсудим расчеты для $\Delta\varepsilon_n$.

Результаты расчетов для $\Delta\varepsilon_n$ как функции n приведены на рис. 1. Здесь же приведены данные для потенциальной ямы без квадратичного потенциала. Грубо можно выделить три режима движения: осцилляторный, промежуточный и для частицы в потенциальной яме без квадратичного потенциала. Осцилляторный режим определяется тем, что $\Delta\varepsilon_n \approx \Omega_0$, то есть разница энергий между соседними уровнями приблизительно равна частоте осциллятора Ω_0 . Если $\Omega_0 = 1$, то число состояний n , удовлетворяющих этому условию, равно 5; при $\Omega_0 = 2$ число n равно 11. С увеличением n разница $\Delta\varepsilon_n$ постепенно возрастает. Например, при $\Omega_0 = 1$ для $n = 6$ величина $\Delta\varepsilon_n = 1.08166$; при $\Omega_0 = 2$ для $n = 15$ величина $\Delta\varepsilon_n = 2.1712$.

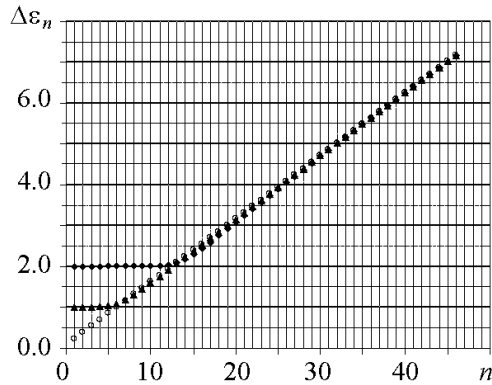


Рис. 1. Зависимость $\Delta\varepsilon_n$ от квантового числа. Горизонтальные участки определяют режим гармонического осциллятора с $\Omega_0 = 1$ (▲), 2 (◆), для которых $\Delta\varepsilon_n = \Omega_0$ с высокой степенью точности. После излома функциональных зависимостей $\Delta\varepsilon_n$ имеем промежуточный режим. При достаточно больших n влияние квадратичного потенциала ослабевает и решения приближаются к спектру частицы в потенциальной яме (○), значения $\Delta\varepsilon_n$ для пространственно-ограниченного осциллятора и свободной частицы в яме совпадают при достаточно больших n

Затем происходит излом функциональной зависимости $\Delta\varepsilon_n(n)$, почти горизонтальная прямая переходит в наклонную прямую, возникает промежуточная область. В промежуточной области значения $\Delta\varepsilon_n$ увеличиваются с ростом n , однако отличаются от значений $\Delta\varepsilon_n$ для потенциальной ямы без квадратичного потенциала. При больших n решения задачи соответствуют решениям для ямы без квадратичного потенциала.

Отметим свойства решений нестационарной системы при $\tilde{U}_{oc} = 0$, $k = 0$, рассмотренной нами ранее в [11]. При малых начальных скоростях гауссова пакета V_0 и $\zeta_0 = 0$ фактически генерируется основная частота как и для гармонического осциллятора, а с увеличением V_0 ситуация изменяется: появляются высшие гармоники, а также другие особенности спектра [11].

2. Квантовый аналог классического осциллятора с трением и обратной связью

Прежде чем перейти к квантовой модели движения с трением и обратной связью, полезно кратко обсудить численные решения уравнения для классического осциллятора с трением и обратной связью, обусловленной потенциалом (5), например, для параметров $\tilde{F}_0 = -0.5$, $k = 0.1$, $\Delta\tau = \pi/16$ и начального условия $\zeta_0 = 0$, $V_0 = -1$ (рис. 2). Последовательным значениям τ_s соответствуют $\zeta = 0$, $V \leq 0$.

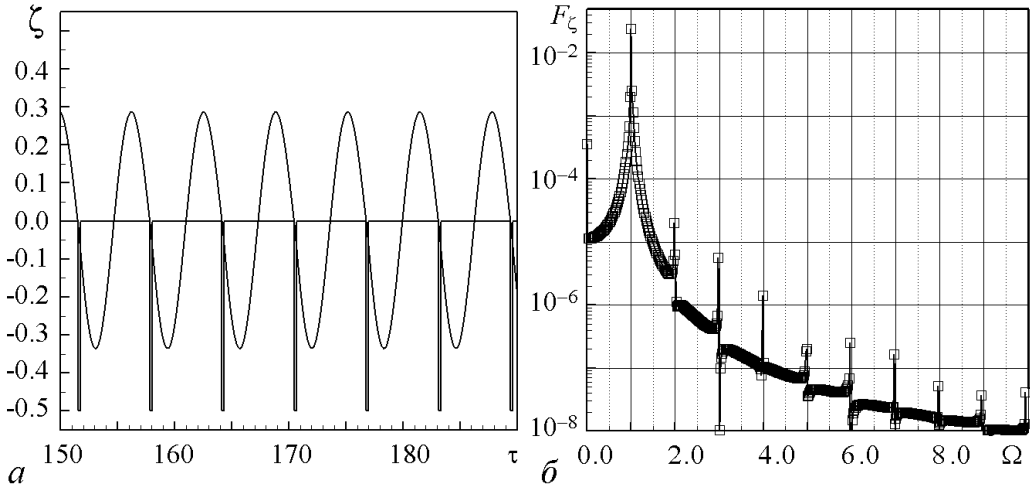


Рис. 2. Классический осциллятор с трением и обратной связью при $\tilde{F}_0 = -0.5$, $k = 0.1$, $V_0 = -1$, $\zeta_0 = 0$: *a* – фрагмент временной зависимости $\zeta(\tau)$ и импульсов силы \tilde{F}_0 на промежутке $[150, 190]$, длительность импульсов силы здесь и далее равна $\Delta t = \pi/16$; *б* – функция $F_\zeta(\Omega)$ вычислена для реализации $\zeta(\tau)$ на временном промежутке $[0, 200]$

На интервале $[0, 70]$ функция ζ осциллирует с затуханием, затем её амплитуда колебаний становится неизменной (рис. 2, *a*). Основная гармоника $F_\zeta(\Omega)$ имеет частоту $\Omega \leq 1$, высшие гармоники являются слабыми (рис. 2, *б*). Если коэффициент трения увеличить, например, до $k = 0.5$, а остальные параметры и начальное условие оставить неизменными, то в системе будут генерироваться колебания с меньшей амплитудой. В этом случае основная частота будет заметно меньше единицы, интенсивность фурье-компоненты на этой частоте более чем на порядок ниже по сравнению с предыдущим случаем, когда $k = 0.1$. Высшие гармоники также возбуждаются слабо.

Теперь рассмотрим задачу о колебаниях для динамических средних $\langle \zeta \rangle$, $\langle V \rangle$ с позиции квантового уравнения ШЛК при тех же значениях параметров $\tilde{F}_0 = -0.5$, $V_0 = -1$, $k = 0.1$. В моменты времени τ_s , когда $\langle \zeta \rangle = 0$, $\langle V \rangle \leq 0$, включается сила \tilde{F}_0 , характеризующая обратную связь. Плотность вероятности N распределена вдали от стенок системы (рис. 3, *a*). На рис. 3, *б* даны реализации для средних $\langle \zeta \rangle$, $\langle V \rangle$ как функции времени. Колебания этих величин смещены по фазе относительно друг друга, а относительно оси $\langle \zeta \rangle = 0$ не являются совершенно симметричными. Между последовательными включениями \tilde{U}_{oc} промежутки времени $\Delta \tau_s$ сохраняются и характеризуют период колебательного процесса, который равен $\Delta \tau_s \approx 2\pi$. Функция $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ содержит интенсивную основную частоту $F_{\langle \zeta \rangle}(1) = 2 \cdot 10^{-2}$, вторая гармоника является слабой $F_{\langle \zeta \rangle}(2) \approx 10^{-3} F_{\langle \zeta \rangle}(1)$, остальные также малы и спадают с увеличением номера гармоники (рис. 3, *в*). Установившееся колебательное движение характеризуется минимальным значением произведения неопределённостей $\sigma_\zeta \sigma_V = 0.5$. Как известно, аналогичная ситуация имеет место для когерентных колебаний гармонического осциллятора. Поэтому можно сказать, что для данного режима колебаний диссипация не играет деструктивной роли в ослаблении когерентности. В характере динамического поведения следует отметить аналогию с классическим осциллятором (ср. рис. 2) и выполнение принципа соответствия.

Для того, чтобы рассмотреть влияние начальной скорости пакета V_0 на переход к установившимся колебаниям и на произведение стандартных отклонений $\sigma_\zeta \sigma_V$,

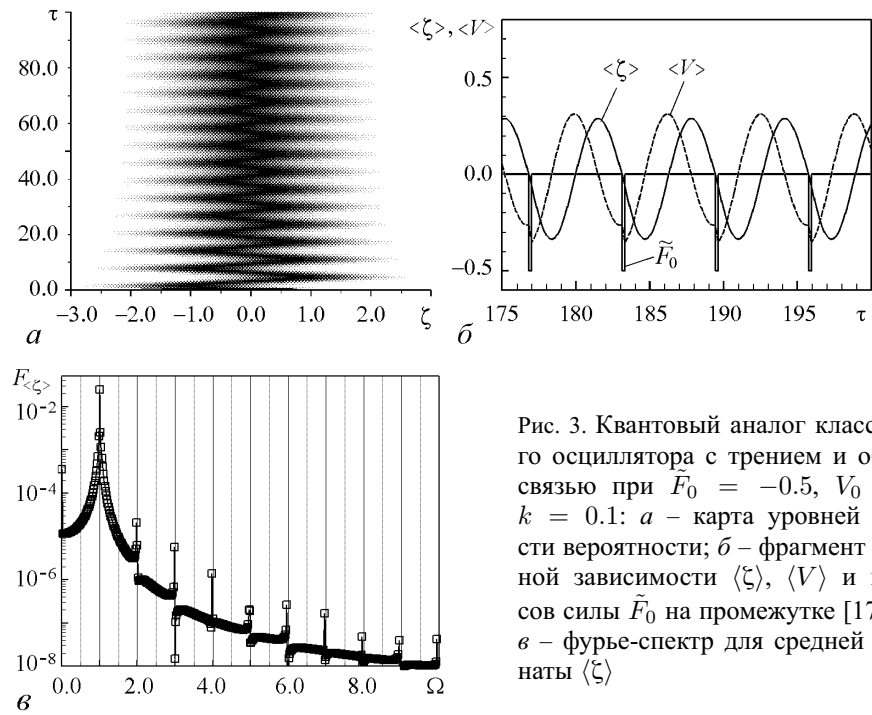


Рис. 3. Квантовый аналог классического осциллятора с трением и обратной связью при $\tilde{F}_0 = -0.5$, $V_0 = -1$, $k = 0.1$: a – карта уровней плотности вероятности; b – фрагмент временной зависимости $\langle \zeta \rangle$, $\langle V \rangle$ и импульсов силы \tilde{F}_0 на промежутке $[175, 200]$; c – фурье-спектр для средней координаты $\langle \zeta \rangle$

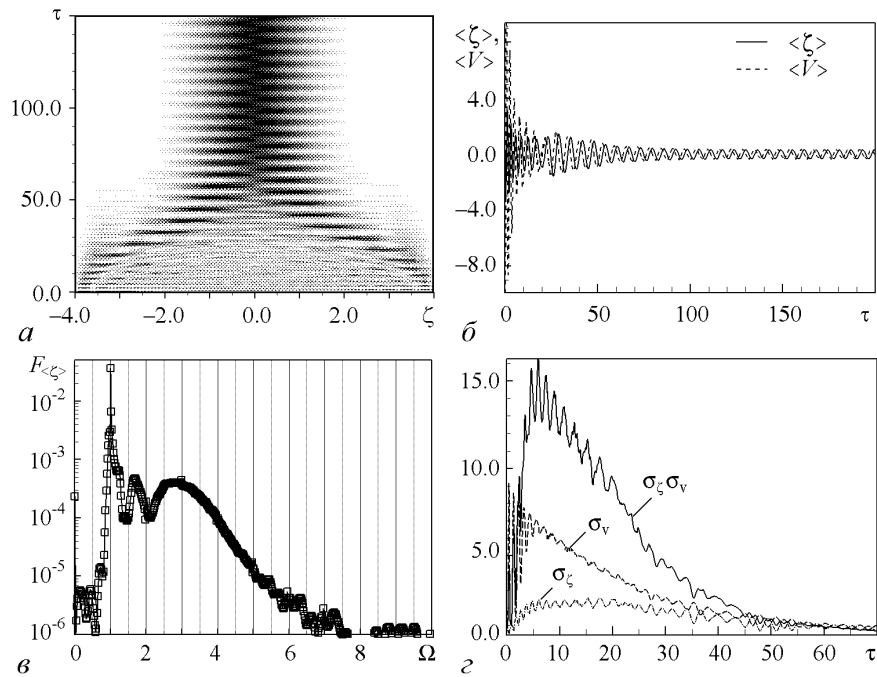


Рис. 4. Влияние начальной скорости пакета V_0 на переход к установившимся колебаниям при $\tilde{F}_0 = -0.5$, $V_0 = -10$, $k = 0.1$: a – карта уровней плотности вероятности характеризует заметные изменения волнового пакета на промежутке $[0, 70]$ и затем неизменную картину на плоскости (ζ, τ) ; b – динамические средние $\langle \zeta \rangle$, $\langle V \rangle$ на промежутке $[0, 200]$; c – фурье-спектр колебаний для средней координаты $\langle \zeta \rangle$; d – стандартные отклонения σ_ζ , σ_V на промежутке $[0, 70]$ (при $\tau > 120$ произведение $\sigma_\zeta \sigma_V \approx 0.5$)

был исследован динамический режим, характеризующийся параметрами: $\tilde{F}_0 = -0.5$, $k = 0.1$, $V_0 = -10$. По сравнению с предыдущим режимом, когда $V_0 = -1$, здесь следует отметить заметную фрагментацию исходного волнового пакета и последующее постепенное удаление его от стенок ямы (рис. 4, *a*). Синхронно с этой картиной меняется характер колебаний для средних $\langle \xi \rangle$, $\langle V \rangle$, а также для стандартных отклонений σ_ξ , σ_V (рис. 4, *б, з*). Стандартные отклонения превосходят средние значения. Только при $\tau > 120$ произведение $\sigma_\xi \sigma_V$ приближается к минимальной величине, равной 0.5. Наибольшие значения σ_ξ , σ_V и их произведение $\sigma_\xi \sigma_V$ приобретают для $\tau \in [0, 70]$ (см. рис. 4, *з*). Фурье-спектр колебаний средней координаты (рис. 4, *в*) отличается от предыдущего режима (см. рис. 3, *в*) тем, что высшие гармоники не являются выраженными, а распределение $F_{\langle \xi \rangle}(\Omega)$, соответствующее высшим гармоникам, размывается. Это отличие обусловлено переходными процессами на промежутке $[0, 100]$. Отметим, что установившийся режим колебаний характеризуется величинами амплитуд $\langle \xi \rangle$, $\langle V \rangle$, которые приближаются к соответствующим значениям для режима колебаний при $V_0 = -1$, представленного на рис. 3. В тех случаях, когда начальная скорость V_0 гауссова пакета велика, он может приближаться к стенкам ямы, видоизменяться, но через определённый промежуток времени снова становится гауссовым по форме с минимизированным соотношением неопределённостей.

3. Неравномерные временные промежутки между импульсами обратной связи

Выше были исследованы режимы колебаний, когда промежутки $\Delta\tau_s = \tau_s - \tau_{s-1}$ между последовательными включениями τ_s были одинаковыми. Форма этих колебаний и их фурье-спектры были достаточно простыми, а произведение неопределённостей для координаты и скорости было минимизированным. Для этих режимов колебаний величина \tilde{F}_0 была относительно малой, а коэффициент трения $k < \Omega_0$. Естественно возникает вопрос о динамических свойствах системы при изменении силы \tilde{F}_0 и коэффициента трения k . Изменяя одну из этих величин при фиксированном значении другой, можно реализовать переход к колебаниям более сложного вида, чем рассмотренные в предыдущем разделе. Здесь представлены результаты численного моделирования при достаточно высоком значении \tilde{F}_0 и варьируемой величины k . Последовательность моментов времени τ_s , в которые «включается» сила \tilde{F}_0 , может генерировать неодинаковые промежутки времени $\Delta\tau_s$, подчиняющиеся определённым закономерностям и распределениям по величине $\Delta\tau_s$. Теперь значения $\Delta\tau_s$ зависят от τ_s , то есть $\Delta\tau_s$ является функцией дискретного аргумента τ_s и может изменяться скачкообразно. Характер изменения существенно зависит от параметров системы \tilde{F}_0 , k , $\Delta\tau$, V_0 . Расчёты были проведены для $\tilde{F}_0 = -10$, $V_0 = -1$ при $k = 0.2, 0.167, 0.165, 0.16, 0.14, 0.1$ и 0 (при фиксированном значении $\Delta\tau$). Как и раньше, сила \tilde{F}_0 «включалась» в моменты времени τ_s , соответствующие $\langle \xi \rangle = 0$ и $\langle V \rangle \leq 0$. Величина временного интервала варьировалась в широких пределах от 300 до 8000, длительность импульса обратной связи была неизменной и равной $\Delta\tau = \pi/16$.

В зависимости от величины k динамические режимы можно условно разделить на две группы: одна из них при $k > 0.165$, другая при $k \leq 0.165$. Значение $k \approx 0.165$ можно назвать критическим, так как при этом значении происходят замет-

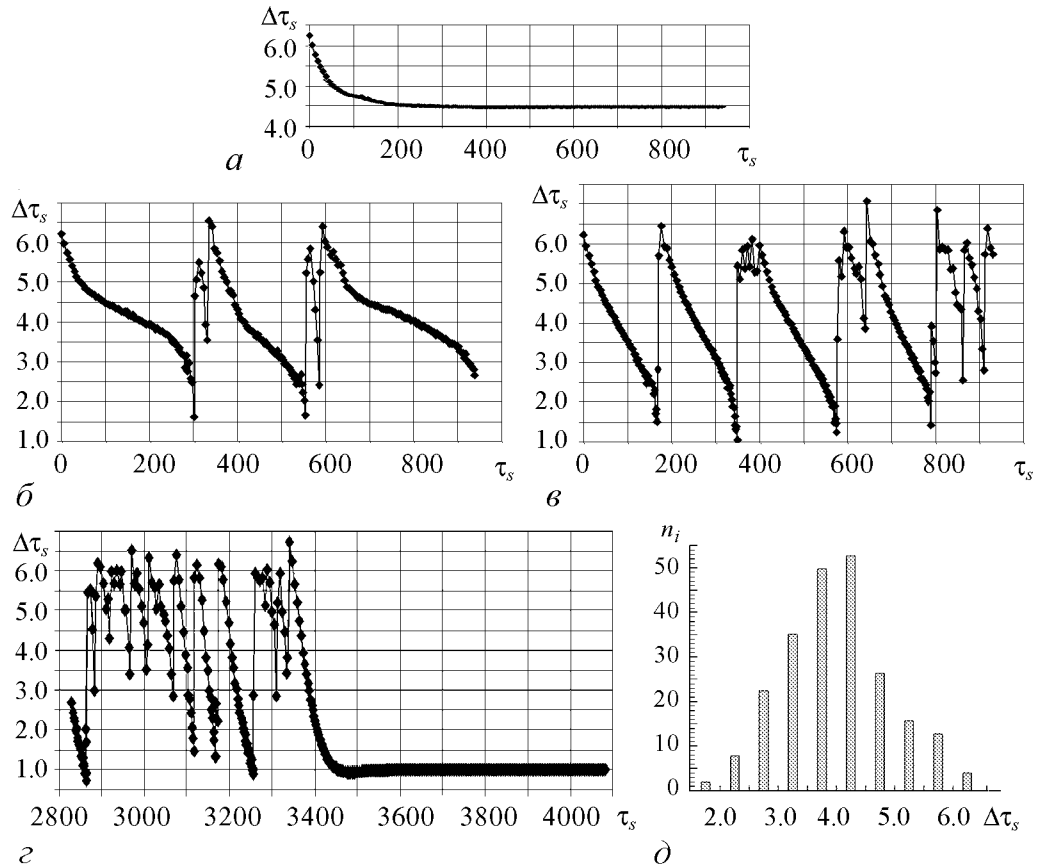


Рис. 5. Эволюция временных масштабов $\Delta\tau_s(\tau_s)$ при разных коэффициентах трения k : $a - 0.167$, $b - 0.165$, $c - 0.16$, $d - 0.14$; $d -$ количество временных масштабов n_i как функция величины $\Delta\tau_s$ на длине временной реализации T при $k = 0.165$

ные качественные изменения в динамике колебаний. На рис. 5 представлены графики $\Delta\tau_s(\tau_s)$ для $k = 0.167, 0.165, 0.16, 0.14$ (рис. 5, $a-z$) и гистограмма, характеризующая распределения $\Delta\tau_s$ на временных длинах T (рис. 5, d). Наиболее простая зависимость $\Delta\tau_s(\tau_s)$ имеет место для $k = 0.167$. На участке $\tau_s \in [0, 80]$ постепенно $\Delta\tau_s(\tau_s)$ скачками уменьшаются, некоторые малые отклонения от такого вида зависимости происходят для $\tau_s > 120$, спустя некоторое время спадание замедляется и зависимость $\Delta\tau_s(\tau_s)$ выходит почти на прямую, то есть практически $\Delta\tau_s$ становятся постоянными и равными 4.5. Промежутки $\Delta\tau_s$ определяют соответствующую частоту $\Omega = 2\pi/\Delta\tau_s$. При увеличении k (например, при $k = 0.2$) функциональная зависимость $\Delta\tau_s(\tau_s)$ имеет сходный вид с предыдущей формой для 0.167, однако величина $\Delta\tau_s$ спадает до значения $\Delta\tau_s \approx 5.92$. При $k = 0.5$ практически все промежутки $\Delta\tau_s$ одинаковы, то есть характеризуют один и тот же период колебаний.

После приведенного краткого обсуждения функциональных зависимостей $\Delta\tau_s(\tau_s)$ для группы с $k > 0.165$, можно перейти к граничной величине $k = 0.165$, а затем для $k < 0.165$. Картина функциональной зависимости $\Delta\tau_s(\tau_s)$ для $k = 0.165$ дана на рис. 5, b . В отличие от предыдущего расчета (см. рис. 5, a), характер зависимости усложняется. Теперь можно отметить 3 участка для τ_s : $(0, 300)$, $(330, 550)$, $(595, 940)$. На этих участках происходят скачкообразные уменьшения величин $\Delta\tau_s$,

то есть последующие значения $\Delta\tau_{s+1}$ меньше предыдущих $\Delta\tau_s$ для подавляющего числа точек (значений τ_s). Однако возможны отдельные точки или набор их, нарушающие это правило, отклонения в этих случаях очень малы, а затем спад значений продолжается. В среднем на этих участках функциональную зависимость $\Delta\tau_s(\tau_s)$ можно назвать монотонно убывающей. На каждом из трех участков уменьшение $\Delta\tau_s$ происходит до некоторой минимальной величины. Однако монотонно убывающие участки перемежаются участками малой длительности по времени, которые имеют восходящую и нисходящую ветви (см. рис. 5, б), своего рода всплески. С последующим уменьшением коэффициента трения k увеличивается число убывающих участков и всплесков на одном и том же временном интервале (см. рис. 5, в, г), а расстояния между минимальными (или максимальными) значениями $\Delta\tau_s$ уменьшаются. При увеличении длины временной реализации вплоть до 8000 для $k = 0.165, 0.16$ характер функциональных зависимостей $\Delta\tau_s(\tau_s)$ сохраняется, однако для параметра $k = 0.14$ происходит переход функциональной зависимости $\Delta\tau_s(\tau_s)$ на пологий участок. Для интервала $\tau \in (3460, 4090)$ величина $\Delta\tau_s$ близка к единице, однако не является строго постоянной, а слабо осциллирует относительно этой величины. Минимальное отклонение между соседними τ_s составляет 0.001, а максимальное 0.009. Расчеты для $k = 0.1$ показывают переход зависимости $\Delta\tau_s(\tau_s)$ на пологий участок, как и для режима $k = 0.14$, но в более ранний момент времени $\tau \approx 840$. Контроль полученных функциональных зависимостей $\Delta\tau_s(\tau_s)$ проводился посредством уменьшения шага интегрирования в два, в четыре и в восемь раз. При такой процедуре зависимости $\Delta\tau_s(\tau_s)$ качественно не меняются, однако имеют место некоторые различия во временных промежутках, соответствующих падающим и восходящим участкам.

Последовательность моментов включения импульсов обратной связи и соответствующая им зависимость $\Delta\tau_s(\tau_s)$, как видно из графиков рис. 5, а–г, подчиняются определённым закономерностям. Для установления этих закономерностей диапазон изменения $\Delta\tau_s$ делился на поддиапазоны шириной ε , равной 0.5, и подсчитывалось количество попаданий чисел $\Delta\tau_s$ на каждый из этих поддиапазонов. Гистограмма попаданий для $k = 0.14$ дана на рис. 5, д. Количество точек (значений $\Delta\tau_s$), содержащихся в i поддиапазоне обозначим через n_i , общее количество точек n на длине временной реализации может быть найдено путем суммирования по i , то есть $n = \sum_i n_i$. Тогда частота попадания W_i может быть определена как $W_i = n_i/n$. Гистограмма попаданий, представленная на рис. 5, д, имеет один максимум; увеличение числа n не приводило к деформации формы распределения. Последовательно уменьшая ε , можно построить функцию распределения, задаваемую как предел

$$P(\Delta\tau_s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} W_i.$$

В том случае, когда $k = 0$, а остальные параметры остаются неизменными, следует отметить следующие свойства. Во-первых, как и для предыдущих режимов движения, существует переходный участок $\tau \in (0, 70)$, на котором происходит постепенное уменьшение $\Delta\tau_s$ до некоторого значения в окрестности $\Delta\tau_s \approx 0.5$. Во-вторых, возникает отличие, обусловленное сокращением длительности участков убывания и возрастания $\Delta\tau_s$. Характер зависимости $\Delta\tau_s(\tau_s)$ представляет собой мелкомасштабные осцилляции, которые также можно обрабатывать на основе функций распре-

деления. В целом, промежутки времени $\Delta\tau_s$ между последовательными возвратами пакета в область с $\langle\zeta\rangle = 0$, $\langle V\rangle \leq 0$ можно рассматривать как циклы Пуанкаре в рамках теоремы Пуанкаре о возвратах, а область с $\langle\zeta\rangle = 0$, $\langle V\rangle \leq 0$ как малую часть ограниченной фазовой плоскости $(\langle\zeta\rangle, \langle V\rangle)$.

Наряду с интерпретацией промежутков $\Delta\tau_s$ как циклов Пуанкаре для динамических средних, полезно сравнить величины $\omega_s = 2\pi/\Delta\tau_s$ с частотами переходов $\Delta\varepsilon_n$ между состояниями энергетического спектра стационарной задачи (см. рис. 1). Оказалось, что ω_s близки к $\Delta\varepsilon_n$, разница $\Delta\varepsilon_n - \omega_s$ была незначительна. Например, для $k = 0.1$ на первом участке убывания $\omega_s \in [1.029, 5.233]$ наблюдалась $\Delta\varepsilon_n - \omega_s < 0.02$, и лишь в отдельных случаях она достигала 0.06.

Таким образом, обратная связь приводит: к модуляции временных промежутков $\Delta\tau_s$ между последовательными включениями силы \tilde{F}_0 ; возникновению убывающих и возрастающих участков $\Delta\tau_s(\tau_s)$; изменению временных расстояний между ними вплоть до величины $\Delta\tau_s$. Это обеспечивает перемешивание в фазовом пространстве системы, подтверждаемое (см. ниже) характером фурье-спектров.

4. Сложные режимы движения

Расчеты динамических закономерностей при $V_0 = -1$, $\tilde{F}_0 = -10$, $\Delta\tau = \pi/16$ и значениях $k = 0.5, 0.3, 0.25, 0.2, 0.17$ показывают переход к установившимся колебаниям. Режим колебаний при $k = 0.167$ все еще сохраняет черты динамических закономерностей, имеющих место при более высоких значениях параметра k . При значении $k = 0.167$ функция плотности вероятности $N(\zeta, \tau)$ имеет области повышенной локализации вблизи стенок потенциальной ямы, то есть вблизи $\zeta_L = \pm 4$ пакет фрагментирован слабо (рис. 6, а). На временном промежутке $[0, 70]$ происходит

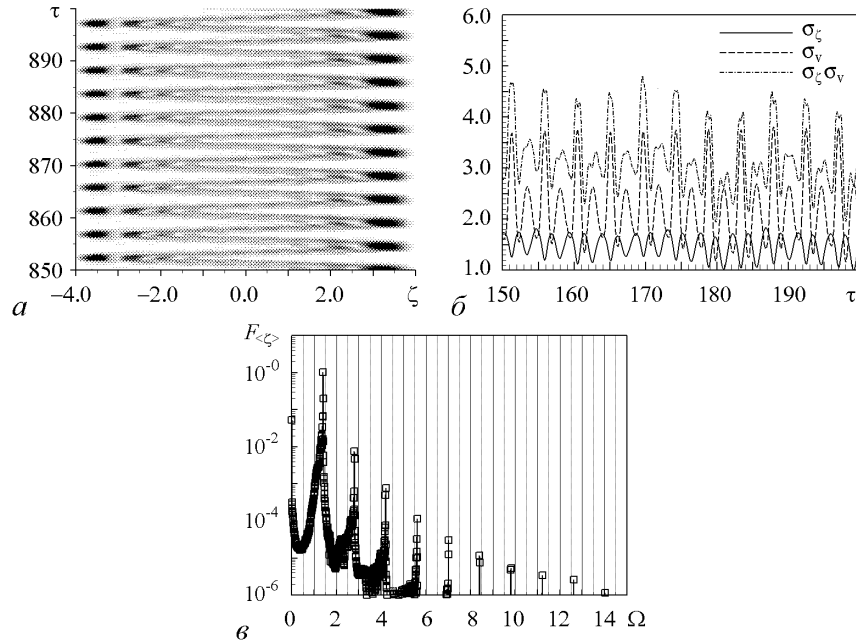


Рис. 6. Динамический режим при $k = 0.167$: а – карта уровней плотности вероятности для $\tau \in [850, 900]$ соответствует заметной локализации волнового пакета вблизи стенок; б – стандартные отклонения σ_ζ , σ_V и их произведение $\sigma_\zeta\sigma_V$; в – основная спектральная линия $F_{\langle\zeta\rangle}(\Omega)$ при $\Omega \approx 1.4$ и её высшие гармоники

постепенный переход к режиму с установившимися колебаниями. Колебания σ_ζ , σ_V и их произведение $\sigma_\zeta\sigma_V$, как функции времени, показаны на рис. 6, б. Произведение $\sigma_\zeta\sigma_V$ не является минимизированным и заметно больше минимальной величины 0.5. Фурье-спектр временной зависимости $\langle \zeta \rangle$ вычислялся для $\tau \in [0, 900]$, так что влияние процессов переходного участка $\tau \in [0, 70]$ автоматически учитывалось (рис. 6, в). Согласно зависимости $\Delta\tau_s = f(\tau_s)$ (см. рис. 5, а), для $\tau_s > 200$ имеем $\Delta\tau_s \approx 4.5$, соответствующая ей величина $\omega_s = 2\pi/\Delta\tau_s \approx 1.395$ является основной в спектре частот, величина $F_{\langle \zeta \rangle}(1.395) \approx 1$ наибольшая. Кроме того, существенно выражены высшие гармоники основной частоты и нулевая частота. Уширение спектральных линий обусловлено переходными процессами, которые происходят одновременно с изменением $\Delta\tau_s$ и, соответственно, с частотой ω_s . Характер спектра можно считать достаточно простым.

Ситуация качественно изменяется по мере дальнейшего уменьшения коэффициента трения k . Значение $k = 0.165$ можно назвать критическим (бифуркационным). Как отмечалось в разделе 3, при этом значении k промежутки $\Delta\tau_s$ не только убывают, но и возрастают по величине, а функциональная зависимость $\Delta\tau_s(\tau_s)$ имеет восходящие и нисходящие ветви (см. рис. 5, б). С другой стороны, бифуркационную точку $k = 0.165$ при $\tilde{F}_0 = -10$ можно проанализировать на основе формулы отклонения вероятности $\Delta P_L = \sqrt{\langle (P_L(t) - \langle P_L(t) \rangle)^2 \rangle}$, где $P_L(t) = \int_0^{\xi_L} N d\xi$. Эта формула использовалась для анализа когерентного и некогерентного движения [16]. Если k изменяется от 0.2 до 0, то ΔP_L монотонно уменьшается от 0.38 до 0.068, но величина отношения $\Delta P_L/\Delta k$ претерпевает скачок более чем на порядок как раз при $k = 0.165$.

Расчеты средних значений $\langle \zeta \rangle$, $\langle V \rangle$ для $\tau \in [0, 900]$ дают картину колебаний с переменным периодом, фрагмент таких колебаний представлен на рис. 7, а. Для $\tau \in [250, 350]$ следует отметить наличие вариации амплитуд $\langle \zeta \rangle$, $\langle V \rangle$ при уменьшении периода $\Delta\tau_s$, а также при скачкообразном увеличении периода $\Delta\tau_s$ для $\tau \in [302, 305]$. Аналогичные картины имеют место и на других участках. Произведение стандартных отклонений $\sigma_\zeta\sigma_V$ существенно возрастает по сравнению с предыдущим режимом колебаний ($k = 0.167$): осциллируя, оно изменяется от минимального значения, примерно равного 2, до максимального значения, примерно равного 13.5 (рис. 7, б). Пределы этих изменений значительно больше, чем в предыдущем режиме и, тем более, когда $k \geq 0.2$. Несмотря на очень маленькое уменьшение $\Delta k = 0.002$ по сравнению с режимом движения при $k = 0.167$, фурье-спектр колебаний $\langle \zeta \rangle$ существенно видоизменяется – он всюду плотно заполняет частотный диапазон (рис. 7, в; расчет проводился на временном промежутке $[0, 900]$). Увеличение временного промежутка вдвое не изменяет характера заполнения указанного частотного диапазона, расстояние между соседними спектральными линиями соответствует минимальной частоте разрешения $\Omega_{\min} = 2\pi/T$, где T – полный временной промежуток реализации колебательного процесса для $\langle \zeta \rangle$. Дополнительное описание сложного движения может быть получено на основе точечных отображений $V_{s+1}(V_s)$. Здесь в качестве временного масштаба следует брать промежуток времени между импульсами обратной связи, то есть между моментами τ_{s+1} и τ_s . Для периодического процесса значения V_{s+1} и V_s совпадают, и на графике $V_{s+1}(V_s)$ они отображаются точкой на биссектрисе квадранта. В других ситуациях, когда $V_{s+1} \neq V_s$, точки могут распределяться по обе стороны биссектрисы. Зависимость V_{s+1} от V_s представлена на рис. 7, з, она характе-

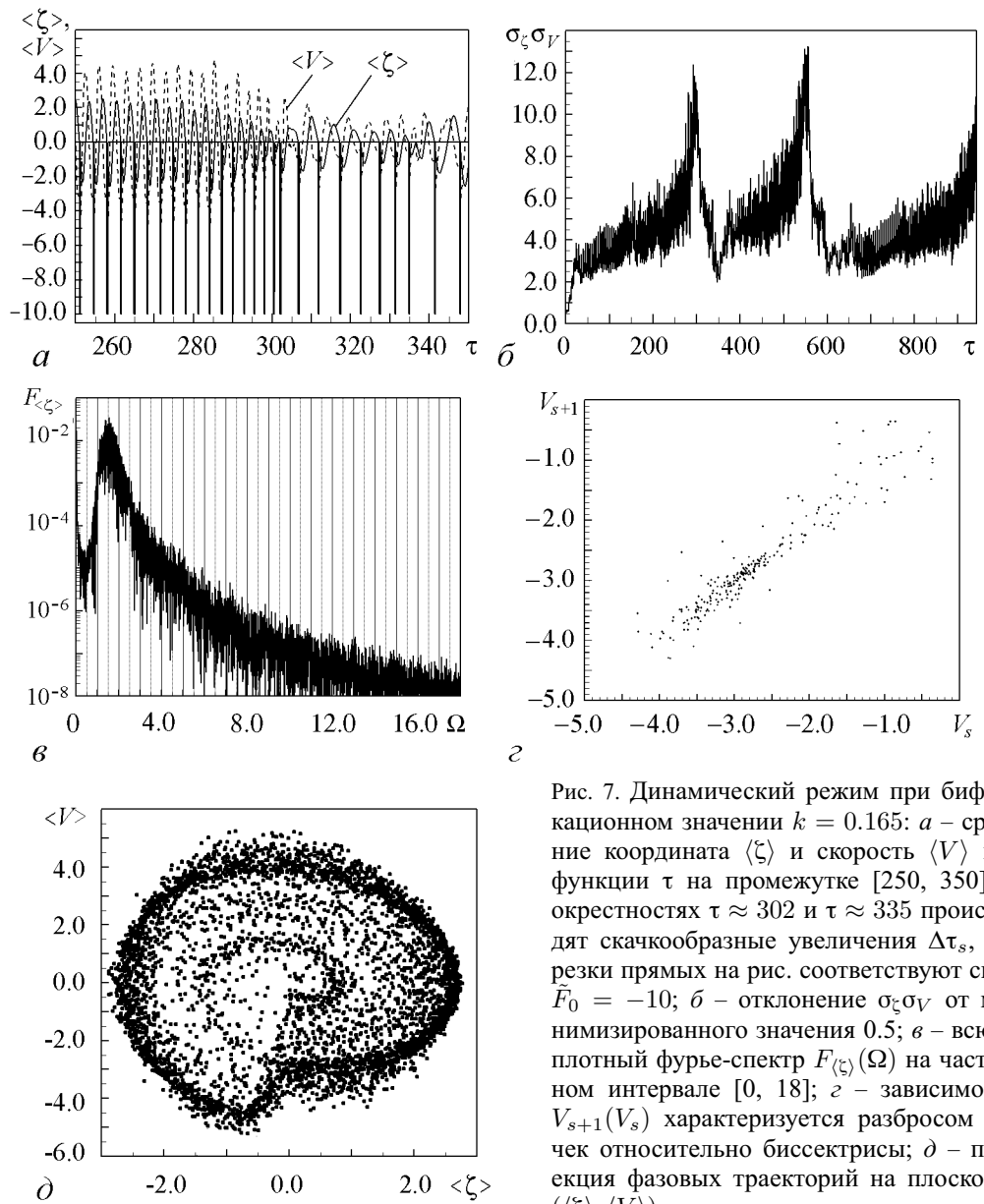


Рис. 7. Динамический режим при бифуркационном значении $k = 0.165$: a – средние координата $\langle \zeta \rangle$ и скорость $\langle V \rangle$ как функции τ на промежутке $[250, 350]$, в окрестностях $\tau \approx 302$ и $\tau \approx 335$ происходят скачкообразные увеличения $\Delta\tau_s$, отрезки прямых на рис. соответствуют силе $\bar{F}_0 = -10$; $б$ – отклонение $\sigma_\zeta \sigma_V$ от минимизированного значения 0.5; $в$ – всюду плотный фурье-спектр $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ на частотном интервале $[0, 18]$; $г$ – зависимость $V_{s+1}(V_s)$ характеризуется разбросом точек относительно биссектрисы; $д$ – проекция фазовых траекторий на плоскость $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$

ризуется случайно распределенными точками относительно биссектрисы квадранта. На плоскости $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$ имеем «распылённую» фазовую траекторию, которая хранит память о регулярном движении в виде более плотной «упаковки» точек и разрушение контура этой памяти в виде разреженного облака блуждающих точек (рис. 7, $д$). Следует считать, что движение является более сложным по сравнению с режимами, когда коэффициент трения не является малым. При дальнейшем уменьшении параметра k характерные свойства колебаний в целом сохраняются, однако возникают некоторые качественные и количественные изменения.

Численные результаты моделирования для параметра $k = 0.16$ даны на рис. 8, $a, б$. Для $k = 0.16$ временные зависимости $\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle$ характеризуются такими же свойствами, как и для $k = 0.165$ (см. рис. 7, a). Характер эволюции точечных

фазовых траекторий на плоскости $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$ виден из рис. 8, б. Если для $k = 0.165$ внешняя «оболочка» в виде набора точек довольно плотно упакована (см. рис. 7, д), то для $k = 0.16$ происходит разрежение и фазовые точки более равномерно заполняют плоскость $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$.

Частотный спектр для режима движения с обратной связью при $k = 0.16$ рассматривался детально с минимальной частотой разрешения $\Omega_{\min} = 0.0067$ на сетке частот $\Omega \in [0, 5]$. Для всех частот $\Omega_l = l\Omega_{\min}$ (l – целое) компоненты $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_l) \neq 0$ и заключены на промежутке $[10^{-5}, 2.96 \cdot 10^{-2}]$, причем $F_{\langle \zeta \rangle}(1.1467) = 2.96 \cdot 10^{-2}$; с уменьшением частоты разрешения Ω_{\min} появляются новые компоненты, а спектр остается всюду плотным.

Уместно сравнить режим движения при обратной связи и режим движения, когда нет обратной связи, но включается периодическая последовательность импульсов \tilde{F}_0 в моменты $\tau \in (nT, nT + \Delta\tau)$, $\Delta\tau$ – длительность импульса, T – средний период; для случая с $k = 0.16$ величина T определялась посредством вычисления среднего значения $\Delta\tau_s$. В таком режиме фурье-спектр не был всюду плотным, а состоял из отдельных дискретных линий (высших гармоник основной частоты).

Уменьшение k на 0.02 (до значения $k = 0.14$) изменяет картину распределения «блуждающих» точек: наиболее плотная «упаковка» фазовых точек происходит в центральной части $-2 < \langle \zeta \rangle < 1.6$, $-0.3 < \langle V \rangle < 0.2$ и на границе (рис. 8, в). Граница имеет форму полосы с конечной шириной и плотной «упаковкой» и соответствует выходу на почти установившийся режим колебаний. Между центральной и граничной областями распределение точек является менее плотным. Такая картина соответствует тому факту, что при малых отклонениях пакета от центра $\zeta = 0$ существует один тип колебаний, когда влияние квадратичного потенциала существенно. При сильных отклонениях пакета от центра роль непроницаемых стенок значительна, а влияние квадратичного потенциала практически исключается. В отличие от режимов движения при $0.14 < k \leq 0.16$, здесь при $k = 0.14$, а также при $k = 0.1$ для достаточно больших τ имеет место переход к практически установившимся колебаниям с высокой средней частотой, относительно которой происходят очень малые вариации её значения. Такие колебания для $k = 0.14$ изучались на временном промежутке $\tau \in [3450, 4100]$. При этом для $\tau \in [0, 3450]$ наблюдался сложный режим колебаний.

Динамический режим при $k = 0$ и тех же значениях V_0, \tilde{F}_0 характеризуется тем, что на временном промежутке $[0, 50]$ колебания наиболее интенсивные – для $\tau \in [10, 50]$ амплитуды осцилляций удовлетворяют неравенству $-2 < \langle \zeta \rangle < 2$; затем при $\tau > 70$ они резко уменьшаются, но сильно возрастают стандартные отклонения σ_ζ, σ_V . Для временного промежутка $\tau \in [70, 300]$ точки фазовой плоскости $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$ локализуются в области $\langle \zeta \rangle \in (-0.2, 0.2)$, $\langle V \rangle \in (-5, 5)$. Вне этой области, на периферии, точки разрежены и соответствуют промежутку $[0, 50]$. Общее число пар точек $(\langle V_i \rangle, \langle \zeta_i \rangle)$, характеризующее фазовый портрет на плоскости $(\langle V \rangle, \langle \zeta \rangle)$, примерно $3 \cdot 10^5$; на рис. 8, з их в 64 раза меньше.

Расчеты временных реализаций и фурье-спектров были проведены для трех временных интервалов T : 300, 600, 1200. Для интервала $T = 600$ соответствующая минимальная частота $\Omega_{\min} = 2\pi/600 \approx 0.01$, а равномерная сетка частот $\Omega_l = l \cdot \Omega_{\min}$, l – целое. На рис. 8, д представлен фурье-спектр $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ для $T = 600$. Наиболее интенсивные пики $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_l)$ заключены в диапазоне $0 \leq \Omega_l \leq 12.8$, при $\Omega > 12.8$ спектр резко обрывается. Пики $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ всюду плотно заполняют диапазон частот. При увеличении длины временной реализации $T = 1200$ (и, соответственно, уменьшении Ω_{\min}) происходит образование новых пиков, но спектр остается всюду плотным. Для трех рассчитанных временных реализаций $T = 300, 600, 1200$ не было

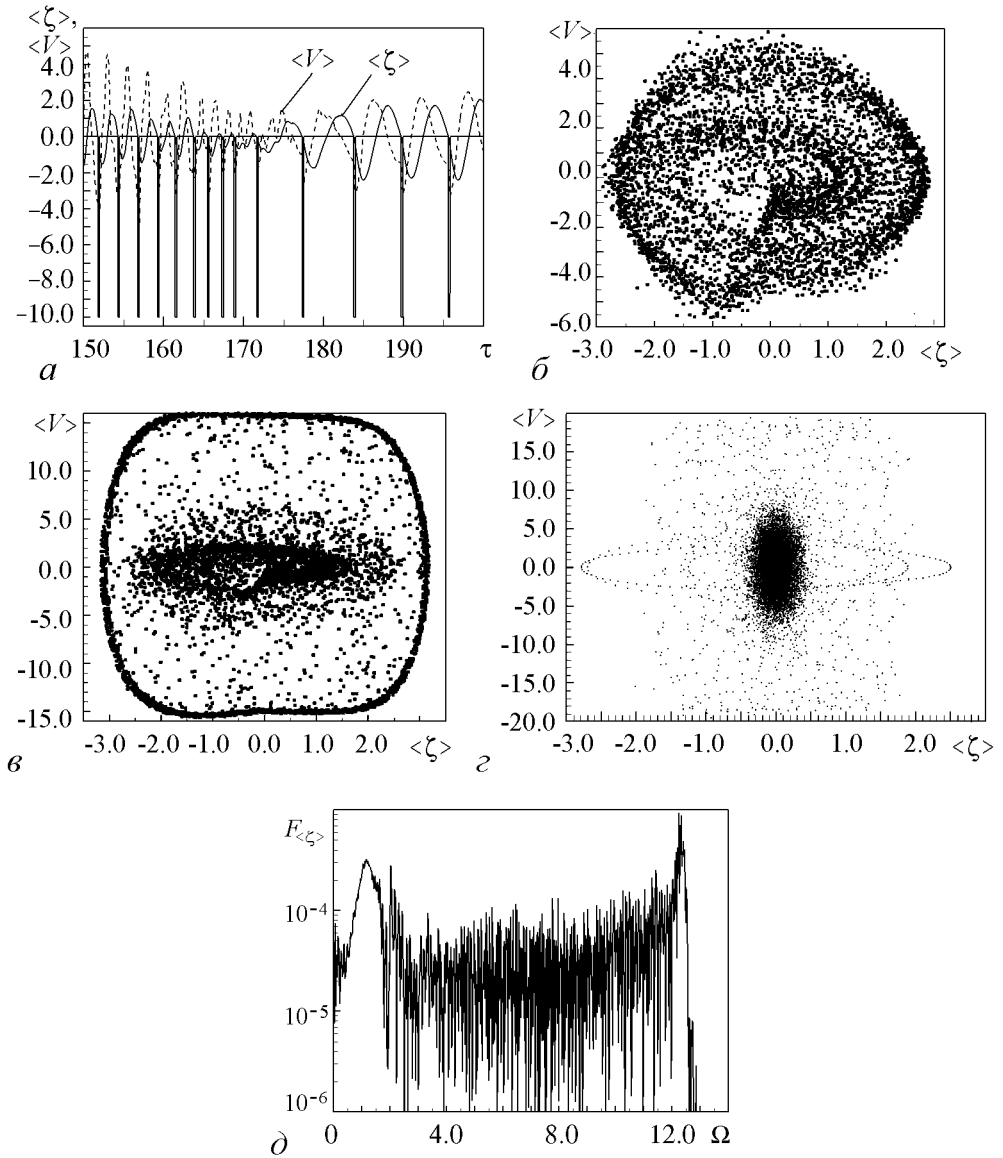


Рис. 8. Сложные колебания при $k = 0.16$ (а, б), $k = 0.14$ (в), $k = 0$ (г, д): а – средние координата и скорость для $\tau \in [150, 200]$ (скачкообразные изменения $\Delta\tau_s$ на промежутке [169, 173]), отрезки прямых, равные -10 , соответствуют моментам включения \tilde{F}_0 ; б – проекция фазового портрета на плоскости $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$; в – на плоскости $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$ фазовые точки распределены неравномерно – больше в центральной области и на периферии, меньше в промежуточной области; г – фазовый портрет временной реализации с $T = 300$, фазовые точки распределены неравномерно – наиболее плотно в области с $\langle \zeta \rangle \in (-0.2, 0.2)$, $\langle V \rangle \in (-5, 5)$; д – фурье-спектр временной реализации $\langle \zeta \rangle$ для $T = 600$, $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ имеет максимумы в окрестностях $\Omega = 1$, $\Omega = 12.7$, а также при $\Omega = 0$. Набор частот спектра соответствует переходам режима гармонического осциллятора в промежуточный и затем в динамический режим частицы в потенциальной яме, когда влияние квадратичного потенциала становится несущественным

ни одной частоты Ω_l , для которой фурье-спектр $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_l)$ приближался бы к уровню компьютерного шума. Эти расчеты позволяют утверждать, что спектр стремится к непрерывному и соответствует хаотическому движению.

Краткие выводы

Проведен анализ динамических режимов пространственно-ограниченного осциллятора, подверженного действию сил трения и обратной связи. При умеренных значениях силы и коэффициента трения возможен режим колебаний с минимизированным произведением неопределенностей, как и для гармонического осциллятора. При увеличении силы обратной связи реализуется промежуточный режим: произведение неопределенностей возрастает, спектр колебаний остается дискретным. Установлено критическое значение параметра (коэффициента трения), при котором движение становится сложным; оно характеризуется неравномерностью временных возвратов в состояние с нулевой средней координатой, а также всюду плотным фурье-спектром. Если трение отсутствует, колебания остаются сложными, а всюду плотный фурье-спектр имеет максимумы в окрестностях характеристической частоты осциллятора и некоторой частоты перехода для свободной частицы в яме.

Библиографический список

1. *Штокман Х.-Ю.* Квантовый хаос / Пер. с англ. А.И. Малышева; Под ред. В.Я. Демиховского. М.: Физматлит, 2004.
2. *Демиховский В.Я., Малышев А.И.* Квантовая диффузия Арнольда в канале с гофрированной границей в присутствии переменного электрического поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 5. С. 3.
3. *Sankaranarayanan R., Lakshminarayan A., Sheorey V.B.* Quantum chaos of a particle in a square well: competing length scales and dynamical localization // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 046210.
4. *Беляев М.В., Лазерсон А.Г.* Сложная динамика неавтономного квантового осциллятора // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 2. С. 25.
5. *Mott N., Sneddon I.* Wave mechanics and its applications. Oxford and the Clarendon Press, 1948. 427 p.
6. *Багманов А.Т., Санин А.Л.* Резонансы пространственно-ограниченного квантового осциллятора // Успехи современной радиоэлектроники. 2005. № 12. С. 46.
7. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1984.
8. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
9. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука – Физматлит, 1997.
10. *Kostin M.D.* On the Schrödinger–Langevin equation // J. Chem. Phys. 1972. vol. 57(9). P. 3589.
11. *Санин А.Л., Смирновский А.А.* Вынужденные колебания квантовых волновых пакетов в системе с трением, квадратичным потенциалом и стенками // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 4. С. 68.
12. *Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* Oscillatory motion in confined potential systems with dissipation in the context of the Schrödinger–Langevin–Kostin equation // Phys. Lett. A. 2007. Vol. 372. P. 21.

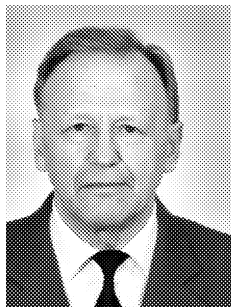
13. *Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* Influence of dissipation on quantum wave dynamics in confined potential systems // Proc. SPIE. 2007. Vol. 6597. P. 659704.
14. *Смирновский А.А.* Уравнение Шредингера–Ланжевена–Костина с диссипативным слагаемым в интегральной форме // Материалы докладов XIV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» / Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылев. [Электронный ресурс] М.: Издательский центр Факультета журналистики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007.
15. *Grindlay J.* On an application of a generalization of the discrete Fourier transform to short time series // Can. J. Phys. 2001. Vol. 79. P. 857.
16. *Igarashi A., Yamada H.S.* Quantum dynamics and delocalization in coherently driven one-dimensional double-well system // arXiv:cond-mat/0508483.

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет *Поступила в редакцию* *21.12.2007*
После доработки *6.02.2008*

QUANTUM SPATIALLY CONFINED OSCILLATOR IN SYSTEM WITH FRICTION AND FEEDBACK

A.L. Sanin, A.A. Smirnovsky

The dynamics of quantum wave packets in one-dimensional system with spatially confined quadratic potential, feedback and friction was numerically investigated in the context of the Schrödinger–Langevin–Kostin equation. The coherent oscillations are possible in the system under determined values of the feedback force and friction coefficient. There are the critical values of these quantities when the packet oscillations become complicated, the uncertainty product increases sharply, oscillates, but the Fourier-spectrum is everywhere dense.



Санин Андрей Леонардович – родился в Ленинграде (1935). Окончил Ленинградский политехнический институт (1963), инженер-физик. Работает на кафедре «Теоретическая физика» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (СПбГПУ), доктор физико-математических наук, профессор кафедры. Область научных интересов: качественный анализ и численное моделирование электронных волн, структур, квантовая динамика гамма-тоновых и диссипативных систем, фундаментальное образование. По данной тематике имеет более 150 публикаций.



Смирновский Александр Андреевич – родился в Ленинграде (1982). Окончил СПбГПУ (2005), магистр по направлению «Прикладные математика и физика». В настоящее время аспирант кафедры «Теоретическая физика» СПбГПУ. Область научных интересов: квантовая механика, гидроаэродинамика, нелинейные и диссипативные системы, численные методы. Опубликовал около 20 работ, включая тезисы докладов.