Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 2, 2008 УДК 53 (076)

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ И ДИСКРЕТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ В КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ:
Решения задач научной олимпиады

А.П. Кузнецов, М.Н. Рыскина

Представлено решения двух задач научной олимпиады, которые иллюстрируют на школьном уровне примеры систем, в которых возможно качественное изменение состояния и применим метод дискретных отображений.

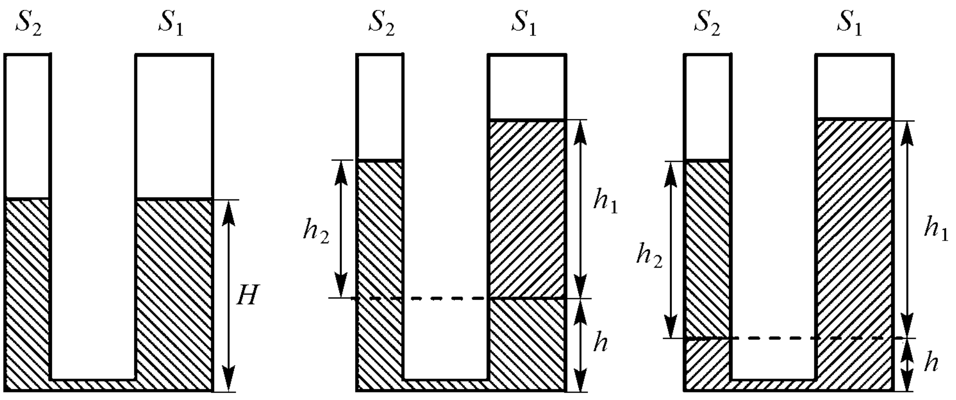
В этом сообщении представлены решения двух *задач 1 и 3* (8 класс) *научной олимпиады*[1]. Эти решения иллюстрируют возможность ***анализа*** физической системы, что очень важно для будущих исследователей и способствует неформальному изучению физики. Одна задача решается с использованием компьютерного моделирования и метода дискретных отображений, что позволяет учащимся познакомиться с ними на «уровне» 8-го класса. Для удобства мы воспроизводим условия задач.

Задача 1. В сообщающихся сосудах находится жидкость с плотностью $\rho_т$, так что ее высота равна H. В один из сосудов начинают очень медленно подливать другую, более легкую жидкость с плотностью $\rho_л$. Что будет происходить в системе? Жидкости не перемешиваются.

Решение. Начальное состояние системы показано на рис. 1, *а*. Начнем подливать жидкость в одно (правое) колено. В этом случае уровень жидкости в обоих коленах начнет повышаться, однако, с разной скоростью: суммарная высота в правом колене будет больше, чем в левом (рис. 1, *б*). Если продолжать подливать жидкость, то наступит момент, когда давление столба легкой жидкости окажется достаточно велико для того, чтобы вытеснить всю тяжелую жидкость из колена 1 (рис. 1, *в*). Тогда в колене 2 будут находиться обе жидкости, а в колене 1 – только легкая. Таким образом, при некотором критическом количестве подлитой в жидкости $V_{кр}$ в системе происходит качественное изменение, и, соответственно, изменяется вид зависимости высоты жидкости в коленах от добавляемого объема. Таким образом, это пример системы, в которой имеет место качественное изменение системы при переходе параметра через некоторое «бифуркационное» значение.

Теперь несложно провести количественный анализ задачи.

[1]См. статью А.П., Кузнецов, С.П., Кузнецов, А.В. Савин. Научная олимпиада «Физик-исследователь», с. 55 в этом номере.



а *б* *в*

Рис. 1. Начальное (*а*) и два качественно разные состояния системы (*б*), (*в*)

Обратимся сначала к ситуации, показанной на рис. 1, *б*. Обозначим: объем влитой легкой жидкости через V; площадь поперечного сечения правого колена – S_1; левого колена – S_2; высоту, выше которой находится легкая жидкость – h; высоты столбов легкой и тяжелой жидкости выше уровня h обозначим как h_1 и h_2 (рис. 1, *б*); причем очевидно, что $h_1 = V/S_1$.

Давления столба легкой жидкости высоты h_1 в первом колене и тяжелой жидкости высоты h_2 во втором колене равны

$$\rho_{\text{т}} g h_2 = \rho_{\text{л}} g h_1. \tag{1}$$

Поскольку объем тяжелой жидкости не меняется, должно выполняться соотношение

$$h\left(S_1 + S_2\right) + h_2 S_2 = H\left(S_1 + S_2\right). \tag{2}$$

Из соотношений (1)–(2), с учетом $h_1 = V/S_1$, получаем высоту жидкости в правом колене

$$h + h_1 = H + \frac{\rho_{\text{т}}\left(S_1 + S_2\right) - \rho_{\text{л}} S_2}{\rho_{\text{т}}\left(S_1 + S_2\right) S_1} V \tag{3}$$

и в левом колене

$$h + h_2 = H + \frac{\rho_{\text{л}} V}{\rho_{\text{т}}\left(S_1 + S_2\right)}. \tag{4}$$

Эта ситуация, однако, будет сохраняться до критического момента, когда легкая жидкость вытиснит всю тяжелую из правого колена. Критический момент, очевидно, отвечает условию $h = 0$. Тогда из (1)-(2) получаем для критического объема подлитой жидкости

$$V = \frac{\rho_{\text{т}}(S_1 + S_2) S_1}{\rho_{\text{л}} S_2} H. \tag{5}$$

Если $V > V_{\text{кр}}$, то реализуется ситуация, показанная на рис. 1, *в*. В этом случае удобно ввести обозначения, как показано на этом рисунке. Из условия равенства давлений жидкости, находящейся выше уровня h, имеем

$$\rho_{\text{т}} g h_2 = \rho g h_1. \tag{6}$$

Условия сохранения объема тяжелой жидкости в этом случае имеет вид

$$h_2 S_2 = H\left(S_1 + S_2\right). \tag{7}$$

С другой стороны, высоту h_1 можно выразить через объем V налитой легкой жидкости

$$h_1 S_1 + h\left(S_1 + S_2\right) = V. \tag{8}$$

Собирая соотношения (6)-(7) вместе, получаем высоту жидкости в первом колене

$$h + h_1 = \frac{V}{(S_1 + S_2)} + \frac{\rho_{т} H}{\rho_{л}} \tag{9}$$

и во втором колене

$$h + h_2 = \frac{V}{(S_1 + S_2)} + \frac{\rho_{л}(S_1 + S_2) - \rho_{т} S_1}{\rho_{л} S_2} H. \tag{10}$$

Можно отметить, что в соответствии с (4) график зависимости уровня жидкости в левом колене от объема подлитой жидкости V до критической ситуации имеет наклон

$$k_1 = \frac{\rho_{л}}{\rho_{т}(S_1 + S_2)_1}, \tag{11}$$

а после критической ситуации

$$k_2 = \frac{1}{(S_1 + S_2)}. \tag{12}$$

Таким образом, этот график имеет в критической точке $V = V_{кр}$ излом, поскольку $\rho_{л}/\rho_{Т_1} < 1$.

Полезно получить более простые формулы, отвечающие частному случаю, когда площади колен одинаковы. Наконец, отметим, что несложно провести и экспериментальное исследование, используя воду и различные более легкие жидкости (масло, бензин и др.)[2]. Экспериментальное исследование можно снабдить фотографиями различных ситуаций.

Задача 3. Ученик вышел из дома в школу, но на полпути он передумал и решил пойти в кинотеатр. Пройдя полпути в кинотеатр, он передумал и пошел на каток, затем на полпути снова пошел в школу и т.д. Создайте компьютерную модель, иллюстрирующую движение ученика. Каким будет в конечном итоге характер его движения? Чем он определяется? Определите период установившегося движения. Все объекты расположены на открытой местности. Обсудите возможные частные случаи и предельные переходы. Может быть, задача допускает какое-то обобщение?

Решение. Обозначим координаты дома $x_{д}$, $y_{д}$, школы – $x_{ш}$, $y_{ш}$, кинотеатра – $x_{кт}$, $y_{кт}$, катка – $x_{к}$, $y_{к}$. Составим компьютерную модель движения ученика. Сначала он прошел половину расстояния от дома до школы. Вычислим координаты точки, в которую сместится ученик, по формуле середины отрезка

$$\begin{aligned} x &:= \frac{x_{д} + x_{ш}}{2}, \\ y &:= \frac{y_{д} + y_{ш}}{2}. \end{aligned} \tag{13}$$

[2]Экспериментальное исследование было выполнено и представлено учениками 56-й школы Саратова.

(Символом «:=» обозначаем оператор присвоения.) После этого ученик проходит половину расстояния до кинотеатра и попадает в точку с координатами

$$x := \frac{x + x_{\text{кт}}}{2},$$
$$y := \frac{y + y_{\text{кт}}}{2}. \tag{14}$$

Затем он идет на каток

$$x := \frac{x + x_{\text{к}}}{2},$$
$$y := \frac{x + y_{\text{к}}}{2}. \tag{15}$$

И далее циркулирует по маршруту школа–кинотеатр–каток. Каждый раз его координаты x, y определяются по формуле (13)-(15), куда нужно подставить соответствующие координаты школы, кинотеатра или катка. Была составлена программа на языке Борланд–Паскаль, которая рассчитывает координаты ученика и выводит траекторию его движения на экран. Можно реализовать различные компьютерные модели системы. Так, удобно составить программу, которая при щелчке мыши на плоскости параметров (экране компьютера), задающем стартовую точку, рисует траекторию пути движения ученика.

В результате моделирования движения ученика обнаружено, что если кинотеатр, каток и школа не лежат на одной прямой, то через некоторое число шагов ученик начинает периодически обходить вершины некоторого треугольника, приближаясь к каждой вершине все ближе и ближе (рис. 2).

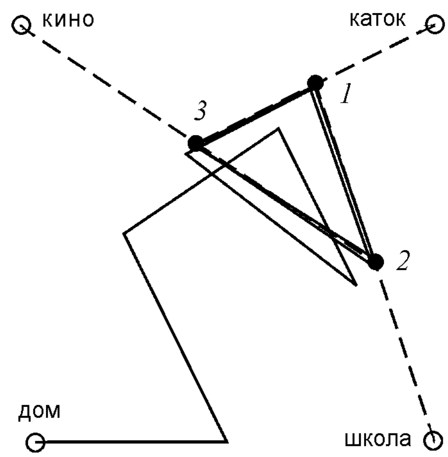


Рис. 2. Компьютерная реализация движения ученика

Вычислим координаты вершин этого треугольника. Пусть первая вершина (см. рис. 2) имеет координаты x_1, y_1. Тогда вторая вершина есть середина расстояния от первой вершины до школы, и ее координаты

$$x_2 = \frac{x_1 + x_{\text{ш}}}{2}, \tag{16}$$
$$y_2 = \frac{y_1 + y_{\text{ш}}}{2}.$$

Третья вершина есть середина расстояния от второй вершины до кинотеатра, ее координаты

$$x_3 = \frac{x_2 + x_{\text{кт}}}{2} = \frac{x_1 + x_{\text{ш}} + 2x_{\text{кт}}}{4}, \tag{17}$$
$$y_3 = \frac{y_2 + y_{\text{кт}}}{2} = \frac{y_1 + y_{\text{ш}} + 2y_{\text{кт}}}{4}.$$

В этом случае первая вершина является также серединой расстояния от третьей вершины до катка, и ее координаты удовлетворяют уравнению

$$x_1 = \frac{x_3 + x_{\text{к}}}{2} = \frac{x_1 + x_{\text{ш}} + 2x_{\text{кт}} + 4x_{\text{к}}}{8}, \quad (18)$$
$$y_1 = \frac{y_3 + y_{\text{к}}}{2} = \frac{y_1 + y_{\text{ш}} + 2y_{\text{кт}} + 4y_{\text{к}}}{8}.$$

Из этих уравнений находим

$$x_1 = \frac{x_{\text{ш}} + 2x_{\text{кт}} + 4x_{\text{к}}}{7}, \quad (19)$$
$$y_1 = \frac{y_{\text{ш}} + 2y_{\text{кт}} + 4y_{\text{к}}}{7}.$$

Попробуем обосновать тот факт, что найденный треугольник является «притягивающей» траекторией, то есть «старт» школьника из любой точки плоскости обязательно в асимптотике больших времен приводит его к этому режиму. Для этого предположим, что начальная точка имеет координаты (x_n, y_n). Пусть ученик совершит один полный цикл движений: в школу, на каток и в кинотеатр. Используя полученные выше соотношения, получим, что он придет в точку (x_{n+1}, y_{n+1}), координаты которой даются формулой

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n + x_{\text{ш}} + 2x_{\text{кт}} + 4x_{\text{к}}}{8}, \quad (20)$$
$$y_{n+1} = f(y_n) = \frac{y_n + y_{\text{ш}} + 2y_{\text{кт}} + 4y_{\text{к}}}{8}.$$

Таким образом, координаты ученика в моменты времени, отвечающие тому, что он в очередной $(n+1)$-й раз отправляется в школу, могут быть получены с помощью итерационных соотношений, представляющих собой пример *дискретного отображения* [1–3]. Отметим, что хотя наша задача двумерна, система распадается на два независимых одномерных отображения.

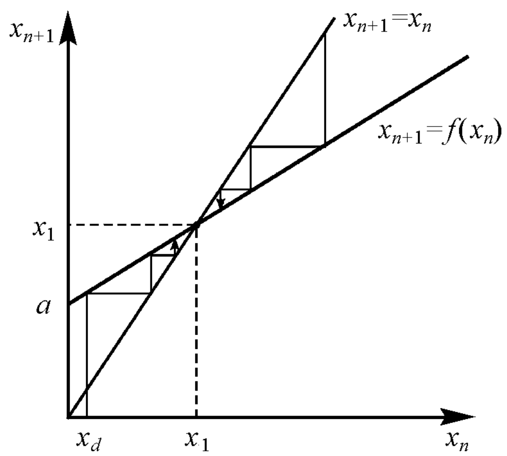


Рис. 3. Итерационная диаграмма, иллюстрирующая движение ученика за один полный цикл. $a = (x_{\text{ш}} + 2x_{\text{кт}} + 4x_{\text{к}})/8$

Полезно представить движение ученика в виде итерационной диаграммы, как показано на рис. 3.

Из представленной итерационной диаграммы хорошо видно, что отображение имеет ***устойчивую неподвижную точку***, к которой стремится изображающая точка. Неподвижная точка легко ищется аналитически из условия $x = f(x)$, $y = f(y)$, и приводит к выражению (19).

Устойчивость неподвижной точки в данном случае вытекает из того, что формула (20) задает прогрессию с показателем $1/8$. Более формально устойчивость обусловлена неравенством

$$f'(x) = \frac{1}{8} < 1. \tag{21}$$

На языке дискретных отображений – мультипликатор неподвижной точки меньше единицы: $\mu = f'(x) < 1$ [1–3]. На этом же языке можно сказать, что предельная траектория – ***аттрактор*** в кинематической задаче на плоскости.

Обсудим также некоторые «вырожденные» случаи и обобщения задачи.

Если школа, каток и кинотеатр лежат на одной прямой, то точки *1*, *2* и *3* также лежат на этой прямой, а ученик по-прежнему последовательно обходит эти три точки. Исследовать вырожденные ситуации и вид аттрактора удобно, написав следующую программу.

Две точки (например, каток и кинотеатр) фиксированы. Фиксируем мышью положение школы, а программа рисует на экране компьютера предельную траекторию. Тогда можно визуально отследить метаморфозы предельной траектории при различных взаимных положениях объектов, «перетаскивая» мышью точку школы, в частности, ситуацию, когда школа, кинотеатр и каток лежат на одной прямой. Можно рассмотреть вырождение большей кратности, когда положение школы находится вдоль этой прямой и приближается к катку и т.д.

Интересной модификацией компьютерной модели может служить задача о движении двух учеников. В этом случае возникает вопрос о том, какое расстояние установится между ними при выходе на предельную траекторию? Компьютерное моделирование такой задачи, однако, уже нельзя ограничить видом траектории – необходимо отследить движения учеников в «реальном» времени. Можно рассмотреть задачу о динамике «ансамбля» учеников, то есть об эволюции некоторой области на плоскости (x, y).

Если школьник движется между n пунктами с координатами X_i,Y_i, $i = 1, 2, ..., n$, то траектория его движения представляет собой n-угольник, координаты вершин которого определяются по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{X_1 + 2X_2 + ... + 2^{n-1}X_n}{2^n - 1}, \\ y_1 &= \frac{Y_1 + 2Y_2 + ... + 2^{n-1}Y_n}{2^n - 1}, \end{aligned} \tag{22}$$

координаты остальных вершин определяются путем циклической перестановки величин X_i, Y_i в формуле (6).

Заметим, что задача о «циркулирующем» ученике является известной олимпиадной математической задачей [4]. Представленный здесь материал позволяет установить связь ее математической интерпретации с возможностями компьютерного моделирования, использования дискретных отображений, анализа частных случаев и допустимых обобщений.

Библиографический список

1. Интернет-страница «Нелинейный минимум» на сайте «Окно в науку» http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/index.htm
2. *Кузнецов А.П.* Как работают и думают физики. Ижевск-Москва: РХД, 2006. 180 с.
3. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. Москва: Физматлит, 2005. 292 с.
4. *Кириллов А.А.* Пределы. Библиотечка физико-математической школы. М., 1973. 96 с.

Саратовский государственный университет
Саратовский филиал ИРЭ РАН
Физико-технический лицей № 1, Саратов

Поступила в редакцию 13.03.2008

QUALITATIVE ANALYSIS AND DISCRETE MAP FOR THE KINEMATIC PROBLEM: Solutions of problems of scientific olympiad

A.P. Kuznetsov, M.N. Ryskina

The solution of two problems of scientific Olympiad are discussed. At the school level the analysis of the solutions illustrates examples of systems, which can display qualitative change of a state and for which a method of discrete maps may be applied.

Рыскина Мария Никитична – родилась в Саратове в 1993 году. Учащаяся 9-го класса Физико-технического лицея № 1 Саратова. Призер городских олимпиад по физике, математике, русскому и английскому языку.