



ИЗМЕНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ УСРЕДНЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ШУМА И ВИБРАЦИЙ

П.С. Ланда

Обсуждается важная проблема вызванного шумом изменения эффективных параметров усредненных движений в нелинейных системах. Эта проблема давно известна в физике в связи с выводом уравнений движения тел с учетом столкновений с молекулами окружающей среды, причем не только в нелинейном случае, но и в линейном. Но многие исследователи неявно полагают, что она существенна только при переходе от микроскопических уравнений к макроскопическим. В то же время эта проблема часто проявляет себя в современной макроскопической физике. Мы рассмотрим здесь несколько примеров такого изменения.

Введение

Из статистической физики известно, что уравнения движения макроскопических тел являются необратимыми, тогда как исходные уравнения движения на молекулярном уровне обратимы – это гамильтоновы уравнения. Появление необратимости связано с усреднением исходных уравнений по случайным воздействиям со стороны окружающих молекул [1]. Однако теория Больцмана справедлива только для идеального газа, поскольку он учел только парные столкновения молекул. Более общее решение задачи было дано Ю.Л. Климонтовичем [2]. В частности, Ю.Л. Климонтович применил свою теорию для вычисления силы Стокса в уравнении Ланжевена для броуновской частицы, совершив усреднение по быстрым флуктуациям, обусловленным столкновениями с молекулами окружающего газа.

Ниже мы рассмотрим примеры, где изменение за счет шума параметров усредненных движений в макроскопических системах играет исключительно важную роль.

1. Турбулентная вязкость и парадокс Прандтля

Известно, что в турбулентном потоке сопротивление движению тел увеличивается. Обычно это объясняют так называемой турбулентной вязкостью, которая, как правило, существенно больше кинематической вязкости. Турбулентную вяз-

кость можно трактовать как некую эффективную вязкость, вызванную турбулентными пульсациями. Понятие турбулентной вязкости ν_{turb} впервые было введено Прандтлем [3], который предложил феноменологическую формулу $\nu_{\text{turb}} = a\delta\Delta U$, где δ – толщина пограничного слоя, ΔU перепад скорости течения на пограничном слое, a – некоторый коэффициент. Эта формула находится в хорошем согласии со многими экспериментальными результатами. Однако, как писал Ландау [4], из-за наличия произвольного коэффициента a другие выражения для турбулентной вязкости также могут дать хорошее согласие с экспериментом. Ландау предложил следующую формулу для турбулентной вязкости: $\nu_{\text{turb}} \sim \nu \text{Re}/\text{Re}_{\text{cr}}$, где Re_{cr} – критическое число Рейнольдса.

Используя понятие турбулентной вязкости, Прандтль [5] предложил качественное объяснение известного парадокса о том, что баржа (или плот), движущиеся по течению реки, обгоняют течение до такой степени, что могут управляться рулем. Объяснение Прандтля основывалось на том, что вокруг баржи (или плота) образуется пограничный слой, обладающий меньшей турбулентной вязкостью, чем течение окружающей воды, и потому оказывающий меньшее сопротивление. Относительно недавно А.С. Гиневский и А.В. Колесников [6] разработали теорию, позволяющую рассчитать выигрыш в скорости. Они получили, что скорость баржи (или плота) должна превышать скорость течения примерно в полтора раза. Отсюда следует, что турбулентные пульсации весьма заметно изменяют силу сопротивления воды.

2. Парадокс, связанный с кажущимся нарушением второго закона термодинамики

В 50-х годах прошлого столетия во многих физических журналах (см., например, [7–11]) развернулась большая дискуссия, связанная с вопросом о справедливости второго закона термодинамики в неравновесных системах. Авторы этой дискуссии рассматривали простейший электрический выпрямитель, состоящий из диода и конденсатора (рис. 1). В работах [8, 9] было показано, что в такой цепи конденсатор может заряжаться без внешнего источника, только за счет тепловых флуктуаций. Этот парадоксальный результат даже вызвал некоторые сомнения в справедливости второго закона термодинамики применительно к рассматриваемому явлению [11].

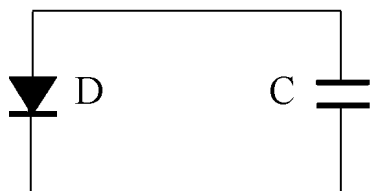


Рис. 1. Схематическое изображение электрического выпрямителя

Несколько раньше, а именно в 1950 году, Бриллюэн [7], рассматривая диод как нелинейное сопротивление, показал, что для справедливости второго закона термодинамики нужно ввести некоторый сдвиг вольт-амперной характеристики этого нелинейного сопротивления. Используя определенную модель диода, Стратонович [12] установил, что такой сдвиг,

действительно, существует, и рассчитал его. Этот сдвиг оказался как раз таким, который приводит к равенству нулю среднего значения напряжения на конденсаторе и среднего тока в цепи, не содержащей дополнительного источника. Ниже мы покажем, что это, действительно, так. Следует отметить, что подобная проблема, только не для электрического, а для механического выпрямителя (храповик с собачкой), была решена, по-видимому независимо, Фейнманом [13].

Рассмотрим простейшую цепочку, состоящую из диода D и конденсатора C (см. рис. 1). Напряжение на конденсаторе описывается следующим уравнением:

$$C\dot{V} + I(V) = 0, \quad (1)$$

где $I(V)$ – ток, текущий через диод, C – суммарная емкость диода и конденсатора.

Известно, что в состоянии теплового равновесия распределение вероятностей для напряжения V описывается формулой (см., например, [12])

$$w(V) = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{CV^2}{2kT}\right), \quad (2)$$

где k – постоянная Больцмана, T – температура.

Чтобы вычислить $I(V)$, мы, в соответствии с [12], рассмотрим вакуумный диод с двумя плоскопараллельными электродами, катодом и анодом. Известно, что в пространстве между электродами такого диода всегда имеется постоянный отрицательный заряд, создающий электрическое поле, которое можно описать потенциалом $U(x)$, где x – расстояние от катода. Качественное поведение функции $-eU(x)$, где $(-e)$ – заряд электрона, иллюстрирует рис. 2. Из рисунка видно, что на пути электронов имеется потенциальный барьер, высота которого равна максимальному значению функции $-U(x)$, которое мы обозначим $-U(x_0)$, где x_0 – значение x , соответствующее этому максимуму.



Рис. 2. Качественное поведение функции $-eU(x)$, где $(-e)$ – заряд электрона, $U(x)$ – разность потенциалов между электродами

Только те электроны перейдут через потенциальный барьер, энергия которых больше, чем $-eU(x)$. Остальные электроны вернуться обратно. Предполагая, что скорости электронов подчиняются максвелловскому распределению, легко показать, что относительное количество электронов, перешедших через потенциальный барьер, пропорционально $\exp(-eU(x_0)/(kT))$. Отсюда следует, что в отсутствие разности потенциалов между электродами токи, текущие через диод в противоположных направлениях, равны между собой и описываются выражением

$$I_+ = I_- = I_0 \exp\left(-\frac{eU(x_0)}{kT}\right), \quad (3)$$

где I_0 – некоторый коэффициент, имеющий размерность тока.

Если разность потенциалов между электродами отлична от нуля, то она должна изменяться во времени в силу изменения со временем заряда, индуцированного на электродах. Например, если электрон, вылетевший из катода, в момент времени t находится в точке x , где $0 < x < d$, d – расстояние между электродами, то заряд, индуцированный на аноде, и разность потенциалов равны

$$Q_1(x) = Q - \frac{ex}{d}, \quad V_1(x) = V - \frac{ex}{Cd}, \quad (4)$$

где $V = Q/C$.

Когда электрон, движущийся в противоположном направлении, находится в той же точке x , заряд, индуцированный на аноде, и разность потенциалов равны

$$Q_2(x) = Q + \frac{e(d-x)}{d}, \quad V_2(x) = V + \frac{e(d-x)}{Cd}. \quad (5)$$

Очевидно, что сила, действующая на электрон, в первом случае равна

$$F_1(x) = e \frac{\partial U(x)}{\partial x} + \frac{eV}{d} - \frac{e^2x}{Cd^2}, \quad (6)$$

а во втором случае

$$F_2(x) = e \frac{\partial U(x)}{\partial x} + \frac{eV}{d} + \frac{e^2(d-x)}{Cd^2}. \quad (7)$$

Точки максимума потенциала (x_1 и x_2) в первом и втором случае определяются уравнениями

$$F_1(x_1) = 0, \quad F_2(x_2) = 0. \quad (8)$$

Принимая во внимание, что $U(0) = U(d) = 0$, и интегрируя (6) по x от $x = 0$ до $x = x_1$ и (7) от $x = d$ до $x = x_2$, находим высоту потенциального барьера для электронов, движущихся в противоположных направлениях,

$$U_1 = -\frac{1}{e} \int_0^{x_1} F_1(x) dx = -U(x_1) - V \frac{x_1}{d} + \frac{e^2x_1^2}{2Cd^2}, \quad (9)$$

$$U_2 = -\frac{1}{e} \int_d^{x_2} F_2(x) dx = -U(x_2) + V \frac{d-x_2}{d} + \frac{e^2(d-x_2)^2}{2Cd^2}.$$

По аналогии с (3) находим выражения для тока, текущего от катода к аноду (I_+) и от анода к катоду (I_-),

$$I_+ = I_0 \exp\left(-\frac{eU_1}{kT}\right), \quad I_- = I_0 \exp\left(-\frac{eU_2}{kT}\right). \quad (10)$$

Суммарный ток равен

$$I(V) = I_0 \left[\exp\left(-\frac{eU_1}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{eU_2}{kT}\right) \right]. \quad (11)$$

Подставляя в (11) выражения (9), получаем

$$I(V) = I_0 \left[\exp \left(-\frac{eU(x_1)}{kT} + \frac{ex_1}{kTd} V - \frac{e^2 x_1^2}{2kTCd^2} \right) - \exp \left(-\frac{eU(x_2)}{kT} - \frac{e(d-x_2)}{kTd} V - \frac{e^2 (d-x_2)^2}{2kTCd^2} \right) \right]. \quad (12)$$

Для простоты расчетов предположим, что силы F_1 и F_2 мало отличаются друг от друга и приближенно равны

$$F_1 \approx F_2 \approx e \frac{\partial U(x)}{\partial x}.$$

В этом случае точки максимума потенциалов x_1 и x_2 приблизительно совпадают, не зависят от V и приближенно равны x_0 . Тогда

$$I(V) \approx I_{00} \left[\exp \left(\frac{ex_0}{dkT} (V - V_{01}) \right) - \exp \left(-\frac{e(d-x_0)}{kTd} (V + V_{02}) \right) \right], \quad (13)$$

где $I_{00} = I_0 \exp(-eU(x_0)/(kT))$,

$$V_{01} = \frac{ex_0}{2Cd}, \quad V_{02} = \frac{e(d-x_0)}{2Cd}. \quad (14)$$

Из формулы (13) видно, что ток $I(V)$ обращается в нуль в точке

$$V = V_0 = \frac{x_0 V_{01} - (d-x_0) V_{02}}{d}, \quad (15)$$

то есть зависимость тока от разности потенциалов V не проходит через начало координат ($I(0) \neq 0$). Смещение отсутствует, только если $x_0 V_{01} = (d-x_0) V_{02}$. Но в этом случае рассматриваемая цепочка не выполняет функцию выпрямителя.

Вычисленное смещение вольт-амперной характеристики диода является именно той причиной, которая приводит к равенству нулю средних значений тока, текущего через диод, и напряжения на пластинах конденсатора, то есть к выполнению второго закона термодинамики. Действительно, принимая во внимание (2), мы получаем следующее выражение для среднего тока:

$$\begin{aligned} \langle I(V) \rangle &= I_{00} \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp \left(\frac{ex_0}{dkT} (V - V_{01}) \right) - \exp \left(-\frac{e(d-x_0)}{dkT} (V + V_{02}) \right) \right] \times \\ &\times \exp \left(-\frac{CV^2}{2kT} \right) dV = \exp \left[-\frac{ex_0}{dkT} \left(V_{01} - \frac{ex_0}{2Cd} \right) \right] - \\ &- \exp \left[-\frac{e(d-x_0)}{dkT} \left(V_{02} - \frac{e(d-x_0)}{2Cd} \right) \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Подставляя сюда формулы (14), получаем, что $\langle I(V) \rangle = 0$.

3. Перемещение легкой частицы в вязкой среде с пилообразным потенциалом под действием гармонической и случайной сил

В последние годы явление шумоиндуцированного перемещения броуновских частиц привлекает к себе значительное внимание многих исследователей, главным образом, в контексте различных биологических и химических проблем (см., например, [14–20]). Чаще всего рассмотрение этих проблем ограничивается случаем, когда движение частицы можно описать дифференциальным уравнением первого порядка вида

$$\dot{x} = -f(x) + \zeta(t) + \xi(t), \quad (17)$$

где $f(x)$ – периодическая функция x , обладающая некоторой асимметрией; $\zeta(t)$ – регулярная или случайная сила; $\xi(t)$ – белый шум, имитирующий тепловые флуктуации. Простейший вид функции $f(x)$ соответствует пилообразному потенциалу $U(x)$, показанному на рис. 3. В этом случае

$$f(x) = \begin{cases} a_1 & \text{для } nL < x < nL + x_1, \\ -a_2 & \text{для } nL - x_2 < x < nL, \end{cases} \quad (18)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $L = x_1 + x_2$ – период функции $f(x)$.

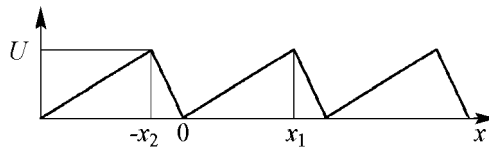


Рис. 3. Пример пилообразного потенциала

Ради простоты зададим силу $\zeta(t)$, изменяющейся по гармоническому закону

$$\zeta(t) = B \sin \omega t. \quad (19)$$

Обычно эта проблема решается посредством вычисления потока вероятности, исходя из уравнения Фоккера–Планка. Ниже эта задача рассмотрена с точки зрения определения средней силы $f(x)$ и показано, что в этой средней силе появляется постоянная составляющая, отсутствующая в исходной суммарной силе, действующей на частицу.

Усредняя уравнение (17) по статистическому ансамблю с учетом (19), получаем уравнение для средней скорости частицы $v(t) = \langle \dot{x} \rangle$

$$v(t) = -\langle f(x) \rangle + B \sin \omega t. \quad (20)$$

Усредняя далее (20) по времени, находим

$$\overline{v(t)} = -\overline{\langle f(x) \rangle}. \quad (21)$$

Чтобы вычислить $v(t)$ и $\langle f(x) \rangle$, запишем уравнение Фоккера–Планка, соответствующее уравнению Ланжевена (17),

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(f(x) - B \sin \omega t \right) w(x, t) + \frac{K}{2} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right). \quad (22)$$

Так как $f(x)$ является периодической функцией x , плотность вероятностей $w(x, t)$ также является периодической функцией x . Последнее позволяет решать уравнение (22) на интервале от $-x_2$ до x_1 .

Уравнение (22) удобно переписать в форме

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial G(x, t)}{\partial x}, \quad (23)$$

где поток вероятности $G(x, t)$ определяется по формуле

$$G(x, t) = - \left(\frac{K}{2} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \left(f(x) - B \sin \omega t \right) w(x, t) \right). \quad (24)$$

Интегрируя уравнение (24) по x от $-x_2$ до x_1 и принимая во внимание условия периодичности и нормировки для функции $w(x, t)$, находим

$$\langle f(x) \rangle = - \int_{-x_2}^{x_1} G(x, t) dx + B \sin \omega t. \quad (25)$$

Отсюда следует, что усредненная сила, в отличие от исходной силы $f(x)$, содержит как постоянную, так и переменную составляющие.

Чтобы найти $G(x, t)$, нужно решить уравнение (22). В большинстве опубликованных работ это уравнение решается в квазистатическом приближении, когда производной $\partial w / \partial t$ можно пренебречь. Очевидно, что это приближение справедливо для низких частот ω . В отличие от этих работ, не будем использовать квазистатическое приближение, но зато ограничим рассмотрение малыми амплитудами гармонической силы, то есть положим $B \ll 1$. Такой подход позволяет определить влияние частоты ω .

При указанном выше условии, наложенном на амплитуду B , можно искать решение уравнения (22) в виде ряда по B , ограничиваясь членами порядка не выше, чем B^2 :

$$w(x, t) = w_0(x) + w_1(x, t)B + w_2(x, t)B^2. \quad (26)$$

Подставляя (26) в уравнение (22), получаем уравнения для $w_0(x, t)$, $w_1(x, t)$ и $w_2(x, t)$:

$$\frac{K}{2} \frac{dw_0(x)}{dx} + f(x)w_0(x) = -G_0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(f(x)w_1(x, t) + \frac{K}{2} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial x} \right) + \frac{dw_0(x)}{dx} \sin \omega t &= 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(f(x)w_2(x, t) + \frac{K}{2} \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_1}{\partial x} \sin \omega t &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где G_0 – поток вероятности в нулевом приближении по B .

Задавая $w_1(x, t) = w_{1s}(x) \sin \omega t + w_{1c}(x) \cos \omega t$, $w_2(x, t) = w_{20}(x)$, получаем следующие уравнения для функций $w_{1s}(x)$, $w_{1c}(x)$ и $w_{20}(x)$:

$$\frac{K}{2} \frac{d^2 w_{1s}(x)}{dx^2} + \frac{d(f(x)w_{1s}(x))}{dx} + \omega w_{1c}(x) = \frac{dw_0}{dx}, \quad (29)$$

$$\frac{K}{2} \frac{d^2 w_{1c}(x)}{dx^2} + \frac{d(f(x)w_{1c}(x))}{dx} - \omega w_{1s}(x) = 0,$$

$$\frac{K}{2} \frac{dw_{20}(x)}{dx} + f(x)w_{20}(x) - \frac{w_{1s}(x)}{2} = -G_2, \quad (30)$$

где G_2 – поток вероятности во втором приближении по B .

Плотность вероятности $w(x, t)$ должна удовлетворять условиям непрерывности при $x = 0$, периодичности по x и нормировки. Эти условия приводят к следующим уравнениям:

$$w_0(0_-) = w_0(0_+), \quad w_0(-x_2) = w_0(x_1), \quad w_{1s}(0_-) = w_{1s}(0_+), \quad w_{1c}(0_-) = w_{1c}(0_+),$$

$$w_{1s}(-x_2) = w_{1s}(x_1), \quad w_{1c}(-x_2) = w_{1c}(x_1), \quad w_{20}(0_-) = w_{20}(0_+), \quad w_{20}(-x_2) = w_{20}(x_1),$$

$$\int_{-x_2}^{x_1} w_0(x) dx = 1, \quad \int_{-x_2}^{x_1} w_{1s}(x) dx = 0, \quad \int_{-x_2}^{x_1} w_{1c}(x) dx = 0, \quad \int_{-x_2}^{x_1} w_{20}(x) dx = 0. \quad (31)$$

Принимая во внимание (18), (31) и интегрируя уравнения (29) по x от $-\Delta$ до Δ , где $\Delta \rightarrow 0$, получаем условия разрыва производных для функций $w_{1s}(x)$ и $w_{1c}(x)$ в точке $x = 0$:

$$\left. \frac{dw_{1s}}{dx} \right|_{x=0_+} - \left. \frac{dw_{1s}}{dx} \right|_{x=0_-} = -\frac{2(a_1 + a_2)}{K} w_{1s}(0), \quad (32)$$

$$\left. \frac{dw_{1c}}{dx} \right|_{x=0_+} - \left. \frac{dw_{1c}}{dx} \right|_{x=0_-} = -\frac{2(a_1 + a_2)}{K} w_{1c}(0).$$

Интегрируя далее уравнения (29) по x от $-x_2$ до x_1 , находим соотношения между производными функций $w_{1s}(x)$ и $w_{1c}(x)$ в точках x_1 и $-x_2$:

$$\left. \frac{dw_{1s}}{dx} \right|_{x=x_1} - \left. \frac{dw_{1s}}{dx} \right|_{x=-x_2} = -\frac{2(a_1 + a_2)}{K} w_{1s}(x_1), \quad (33)$$

$$\left. \frac{dw_{1c}}{dx} \right|_{x=x_1} - \left. \frac{dw_{1c}}{dx} \right|_{x=-x_2} = -\frac{2(a_1 + a_2)}{K} w_{1c}(x_1).$$

Итак, чтобы вычислить $w(x, t)$, необходимо решить уравнения (27), (29) и (30) с граничными условиями (31), (32) и (33). Для функции $f(x)$, определяемой формулой (18), эти уравнения решаются точно. Общее решение уравнения (27) имеет вид

$$w_0(x) = \begin{cases} \left(C_0 + \frac{G_0}{a_1} \right) \exp\left(-\frac{2a_1x}{K}\right) - \frac{G_0}{a_1} & \text{для } 0 < x < x_1, \\ \left(C_0 - \frac{G_0}{a_2} \right) \exp\left(\frac{2a_2x}{K}\right) + \frac{G_0}{a_2} & \text{для } -x_2 < x < 0. \end{cases} \quad (34)$$

Из (31) следует, что $G_0 = 0$ и

$$C_0 = 2 \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \left[1 - \exp\left(-\frac{2U_0}{K}\right) \right]^{-1}, \quad (35)$$

где $U_0 = a_1 x_1 = a_2 x_2$ – высота потенциального барьера.

Общее решение уравнений (29) следующее:

$$w_{1s}(x) = \begin{cases} w_{1s}^{(1)}(x) & \text{для } 0 < x < x_1, \\ w_{1s}^{(2)}(x) & \text{для } -x_2 < x < 0, \end{cases} \quad (36)$$

$$w_{1c}(x) = \begin{cases} w_{1c}^{(1)}(x) & \text{для } 0 < x < x_1, \\ w_{1c}^{(2)}(x) & \text{для } -x_2 < x < 0, \end{cases}$$

где

$$w_{1s}^{(1)}(x) = -2\text{Im}\left[w_{11}(x)\right], \quad w_{1s}^{(2)}(x) = -2\text{Im}\left[w_{12}(x)\right], \quad (37)$$

$$w_{1c}^{(1)}(x) = 2\text{Re}\left[w_{11}(x)\right], \quad w_{1c}^{(2)}(x) = 2\text{Re}\left[w_{11}(x)\right],$$

$$w_{11}(x) = C_{11} \exp(k_{11}x) + C_{21} \exp(k_{21}x) - \frac{C_0 a_1}{\omega K} \exp\left(-\frac{2a_1x}{K}\right),$$

$$w_{12}(x) = C_{12} \exp(k_{12}x) + C_{22} \exp(k_{22}x) + \frac{C_0 a_2}{\omega K} \exp\left(\frac{2a_2x}{K}\right),$$

$$k_{11} = -\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 2i\omega K}}{K}, \quad k_{21} = -\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 2i\omega K}}{K},$$

$$k_{12} = \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 2i\omega K}}{K}, \quad k_{22} = \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 2i\omega K}}{K}.$$

Комплексные постоянные C_{11} , C_{21} , C_{12} и C_{22} находятся из условий (31), (32) и (33). Эти константы пропорциональны C_0 , и их можно записать в виде

$$C_{11} = F_{11}(a_1, a_2, r_1, r_2, U_0/K)C_0, \quad C_{12} = F_{12}(a_1, a_2, r_1, r_2, U_0/K)C_0, \quad (38)$$

$$C_{21} = F_{21}(a_1, a_2, r_1, r_2, U_0/K)C_0, \quad C_{22} = F_{22}(a_1, a_2, r_1, r_2, U_0/K)C_0,$$

где F_{11} , F_{21} , F_{12} и F_{22} некоторые функции своих аргументов, имеющие довольно громоздкий вид.

Теперь остается найти общее решение уравнения (30). Оно может быть записано в виде

$$w_{20}(x) = \begin{cases} w_{20}^{(1)}(x) & \text{для } 0 < x < x_1, \\ w_{20}^{(2)}(x) & \text{для } -x_2 < x < 0, \end{cases} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} w_{20}^{(1)}(x) &= Q_1 \exp\left(-\frac{2a_1x}{K}\right) - \frac{G_2}{a_1} - \\ &\quad - 2\text{Im}\left(\frac{C_{11}}{Kk_{11} + 2a_1} \exp(k_{11}x) + \frac{C_{21}}{Kk_{21} + 2a_1} \exp(k_{21}x)\right), \\ w_{20}^{(2)}(x) &= Q_2 \exp\left(\frac{2a_2x}{K}\right) + \frac{G_2}{a_2} - \\ &\quad - 2\text{Im}\left(\frac{C_{12}}{Kk_{12} - 2a_2} \exp(k_{12}x) + \frac{C_{22}}{Kk_{22} - 2a_2} \exp(k_{22}x)\right). \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь G_2 – постоянная составляющая потока вероятности во втором приближении по B .

Из условий (31) получаем

$$\begin{aligned} \frac{G_2(a_1 + a_2)}{a_1 a_2} &= Q_1 - Q_2 - \\ &\quad - 2\text{Im}\left(\frac{C_{11}}{Kk_{11} + 2a_1} + \frac{C_{21}}{Kk_{21} + 2a_1} - \frac{C_{12}}{Kk_{12} - 2a_2} - \frac{C_{22}}{Kk_{22} - 2a_2}\right), \\ (Q_1 - Q_2) \exp\left(-\frac{2U_0}{K}\right) &- \frac{G_2}{a_1} - \frac{G_2}{a_2} - 2\text{Im}\left[\frac{C_{11} \exp(k_{11}x_1)}{Kk_{11} + 2a_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_{21} \exp(k_{21}x_1)}{Kk_{21} + 2a_1} - \frac{C_{12} \exp(-k_{12}x_2)}{Kk_{12} - 2a_2} - \frac{C_{22} \exp(-k_{22}x_2)}{Kk_{22} - 2a_2}\right] = 0, \\ \frac{K}{2} \left(\frac{Q_1}{a_1} + \frac{Q_2}{a_2}\right) &\left[1 - \exp\left(-\frac{2U_0}{K}\right)\right] + 2\text{Im}\left[\frac{C_{11}(1 - \exp(k_{11}x_1))}{(Kk_{11} + 2a_1)k_{11}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_{21}(1 - \exp(k_{21}x_1))}{(Kk_{21} + 2a_1)k_{21}} - \frac{C_{12}(1 - \exp(-k_{12}x_2))}{(Kk_{12} - 2a_2)k_{12}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_{22}(1 - \exp(-k_{22}x_2))}{(Kk_{22} - 2a_2)k_{22}}\right] - G_2 \left(\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

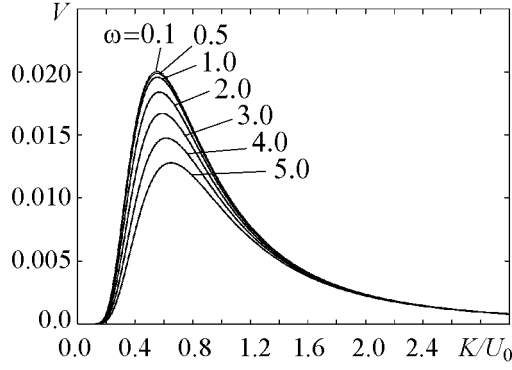


Рис. 4. Зависимости относительной средней скорости частицы от относительной интенсивности шума при $a_1 = 1.25$, $a_2 = 5$, $U_0 = 1$ и различных значений ω

Решая теперь уравнения (41), находим

$$\begin{aligned}
 G_2 = & -\frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{2U_0}{K}\right) \right]^{-1} \times \\
 & \times \operatorname{Im} \left\{ \frac{C_{11}}{Kk_{11} + 2a_1} \left[\exp(k_{11}x_1) - \exp\left(-\frac{2U_0}{K}\right) \right] + \right. \\
 & + \frac{C_{21}}{Kk_{21} + 2a_1} \left[\exp(k_{21}x_1) - \exp\left(-\frac{2U_0}{K}\right) \right] - \\
 & - \frac{C_{12}}{Kk_{12} - 2a_2} \left[\exp(-k_{12}x_2) - \exp\left(-\frac{2U_0}{K}\right) \right] - \\
 & \left. - \frac{C_{22}}{Kk_{22} - 2a_2} \left[\exp(-k_{22}x_2) - \exp\left(-\frac{2U_0}{K}\right) \right] \right\}. \quad (42)
 \end{aligned}$$

Примеры зависимостей относительной средней скорости частицы $V = \bar{v}/B^2 = G_2L$ от K/U_0 показаны на рис. 4 для $a_1 = 1.25$, $a_2 = 5$, $x_1 = 0.8$, $x_2 = 0.2$ и различных значений частоты ω . Сравнивая эти результаты с соответствующими результатами, полученными с использованием квазистатического приближения (см. [22]), видим, что они очень близки для частот ω , меньших или порядка 0.5. Для больших значений ω средняя скорость частицы зависит от частоты: с увеличением частоты средняя скорость уменьшается, а ее максимум сдвигается в направлении больших значений относительной интенсивности шума K/U_0 .

4. Стохастический резонанс в осцилляторе с большим затуханием

Явление стохастического резонанса чаще всего рассматривается на примере уравнения движения легкой частицы в простейшем бистабильном потенциальном

поле, возмущенном слабым гармоническим сигналом и белым шумом [21]:

$$\dot{x} + x^3 - x = A \cos \omega t + \xi(t), \quad (43)$$

где x – смещение частицы, $A \cos \omega t$ – периодический сигнал частоты ω , $\xi(t)$ – белый шум интенсивности K , то есть $\langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = K\delta(\tau)$.

Поскольку при использовании уравнения (43) трудно проследить влияние массы частицы и коэффициента затухания, рассмотрим уравнение более общего вида

$$\mu^2 \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + x^3 - x = A \cos \omega t + \xi(t), \quad (44)$$

где δ – коэффициент затухания; μ^2 – малый параметр, пропорциональный массе частицы.

Впервые результаты рассмотрения стохастического резонанса с точки зрения изменения эффективных параметров системы для усредненного движения, а не с принятой в литературе (см. [21]) точки зрения резонанса между частотой сигнала и средней частотой перескоков частицы из одного стационарного состояния в другое, были изложены в работах [22, 23]. Ниже дается обобщение результатов этих работ на уравнение (44).

Как следует из [24], спектральная плотность решений уравнений (43) и (44) содержит дискретные составляющие (нечетные гармоники частоты ω) и непрерывную составляющую, обусловленную шумом. Поэтому можем представить $x(t)$ в виде

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad (45)$$

где

$$s(t) = \langle x(t) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} \cos\left((2k+1)\omega t + \psi_{2k+1}\right), \quad \langle n(t) \rangle = 0. \quad (46)$$

Отношение B_1 к A будем называть коэффициентом передачи сигнала и обозначать $Q(K)$. Результаты расчетов показывают, что в определенном диапазоне интенсивностей шума коэффициент передачи в несколько раз больше единицы. Поэтому рассматриваемое явление предлагалось использовать для выделения слабых сигналов из шумов. При этом, однако, следует иметь в виду, что зависимость Q от K имеет максимум при некотором значении K , сильно зависящем от частоты ω (отсюда и возник термин «резонанс»). Однако в системе, описываемой уравнением первого порядка (см. (43)), резонанса в классическом смысле этого слова быть не может; тем более что зависимость Q от ω при фиксированном значении K является монотонно спадающей и не имеет максимума. Этот факт послужил одной из причин пересмотра механизма стохастического резонанса (см. [22, 23]).

Подставив (45) в уравнение (44), можно расщепить его на два уравнения, одно из которых описывает величины, усредненные по статистическому ансамблю, а другое – отклонения от этих величин. Следует заметить, что такое расщепление подобно разделению движений на быстрые и медленные, предложенное Блехманом [25] и использованное в [26–28] при рассмотрении вибрационного резонанса. Только, в отличие от [25], здесь разделяются движения на регулярные (усредненные) и случайные.

Так как в отсутствие сигнала (при $s = 0$) все нечетные моменты шума $m_j = \langle n^j \rangle$ равны нулю, в первом приближении по s можем положить $m_3 = as + b\dot{s}$, где a и b – неизвестные функции K и ω , которые будут найдены ниже. Принимая это во внимание, запишем уравнения для $s(t)$ и $n(t)$ в линейном приближении по s следующим образом:

$$\mu^2 \ddot{s} + (2\delta + b)\dot{s} + cs = A \cos \omega t, \quad (47)$$

$$\mu^2 \ddot{n} + 2\delta \dot{n} + n^3 - n + (3n^2 - 1 - c)s - b\dot{s} = \xi(t), \quad (48)$$

где эффективная жесткость

$$c = 3m_2 - 1 + a, \quad (49)$$

b – вызванная шумом добавка к коэффициенту затухания, $m_2 = \langle n^2 \rangle|_{s=0}$.

Чтобы рассчитать моменты m_j и найти a , b и c , используем уравнение Фоккера–Планка, соответствующее уравнению (48). При $\mu = 0$ указанное уравнение Фоккера–Планка является одномерным и решается относительно просто. Если же $\mu \neq 0$, оно является двумерным, что в общем случае значительно усложняет его решение. Однако при $\mu \ll 1$ для решения этого уравнения можно использовать метод, подобный предложенному в книге [24] для существенно более простого уравнения 2-го порядка с малым параметром μ .

По аналогии с [24] перепишем уравнение (48) в форме двух следующих уравнений Ланжевена:

$$\mu \dot{n} = y, \quad \mu \dot{y} = -\frac{2\delta}{\mu} y - n^3 + n - (3n^2 - 1 - c)s + b\dot{s} + \xi(t). \quad (50)$$

Этим уравнениям соответствует уравнение Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & -\frac{1}{\mu} \left(y \frac{\partial w}{\partial n} + \left[n - n^3 - (3n^2 - 1 - c)s + b\dot{s} \right] \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{1}{\mu^2} \left(2\delta \frac{\partial(yw)}{\partial y} + \frac{K}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (51)$$

Как и в работе [23], решение уравнения (51) удобно представить в форме суммы трех составляющих

$$w(n, y, t) = w_0(n, y) + w_1(n, y)s(t) + \frac{w_2(n, y)\dot{s}(t)}{\omega}. \quad (52)$$

Так как в линейном приближении $s(t)$ представляет собой гармонический сигнал частоты ω , то выполняется соотношение $\dot{s}(t) = -\omega^2 s(t)$. Принимая это во внимание, при подстановке (52) в уравнения (51), для функций $w_0(n, y)$, $w_1(n, y)$ и $w_2(n, y)$ получаем следующие уравнения:

$$\left(2\delta \frac{\partial(yw_0)}{\partial y} + \frac{K}{2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - \mu \left(y \frac{\partial w_0}{\partial n} - (n^3 - n) \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0, \quad (53)$$

$$2\delta \frac{\partial(yw_1)}{\partial y} + \frac{K}{2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - \mu \left(y \frac{\partial w_1}{\partial n} - (n^3 - n) \frac{\partial w_1}{\partial y} - \mu \omega w_2 \right) = -\mu(3n^2 - 1 - c) \frac{dw_0}{dy}, \quad (54)$$

$$2\delta \frac{\partial(yw_2)}{\partial y} + \frac{K}{2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} - \mu \left(y \frac{\partial w_2}{\partial n} - (n^3 - n) \frac{\partial w_2}{\partial y} + \mu \omega w_1 \right) = \mu \omega b \frac{dw_0}{dy}.$$

Как показано в [24], решение уравнения (53) может быть найдено путем приравнивания нулю каждой из скобок. В результате получаем

$$w_0(n, y) = C_0 \exp \left[-\frac{4\delta}{K} \left(\frac{y^2}{2} + u(n) \right) \right], \quad (55)$$

где $u(n) = n^4/4 - n^2/2$, C_0 – постоянная нормировки. Следует подчеркнуть, что $w_0(n, y)$ не зависит от параметра μ . Из (55) можно вычислить второй момент m_2 как функцию K и δ

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n^2 w_0(n, y) dy dn. \quad (56)$$

Чтобы найти неизвестные параметры c и b , необходимо рассчитать плотности вероятностей

$$v_{1,2}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{1,2}(n, y) dy. \quad (57)$$

Для этого используем метод разложения решения уравнений (54) по собственным функциям $Y_m(y)$ краевой задачи, описываемой уравнением

$$\frac{K}{4\delta} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{d(yY)}{dy} + \lambda Y = 0 \quad (58)$$

с граничными условиями $Y(\pm\infty) = 0$. Заметим, что каждое из уравнений (54) при $\mu = 0$ сводится к уравнению (58) при $\lambda = 0$.

Как показано в [22,24], собственные значения $\lambda_m = m$, а собственные функции $Y_m(y)$ выражаются через полиномы Эрмита $H_m(z)$:

$$Y_m(y) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\delta}{\pi K 2^m m!}} \exp \left(-\frac{2\delta y^2}{K} \right) H_m \left(y \sqrt{\frac{2\delta}{K}} \right). \quad (59)$$

Легко показать, что функции $Y_m(y)$ удовлетворяют следующим условиям ортогональности и нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_m(y) Y_l(y)}{Y_0(y)} dy = \delta_{ml}, \quad (60)$$

где δ_{ml} – символ Кронекера. Кроме того, следующие соотношения вытекают из

свойств полиномов Эрмита [22]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y_m(y) dy = \delta_{m0}, \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \frac{dY_m(y)}{dy} &= \sqrt{\frac{4\delta(m+1)}{K}} Y_{m+1}(y), \quad yY_m(y) = -\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\sqrt{m+1} Y_{m+1}(y) + \sqrt{m} Y_{m-1}(y) \right), \\ \frac{d(yY_m(y))}{dy} &= -\left(\sqrt{(m+1)(m+2)} Y_{m+2}(y) + mY_m(y) \right). \end{aligned} \quad (62)$$

Разложение решения уравнений (54) по собственным функциям $Y_m(y)$ может быть записано в форме

$$w_1(n, y) = \sum_{m=0}^{\infty} v_{1m}(n) Y_m(y), \quad w_2(n, y) = \sum_{m=0}^{\infty} v_{2m}(n) Y_m(y). \quad (63)$$

Интегрируя (63) по y и используя свойство (61), находим

$$v_1(n) = v_{10}(n), \quad v_2(n) = v_{20}(n). \quad (64)$$

Отсюда следует, что для решения нашей задачи достаточно вычислить функции $v_{10}(n)$ и $v_{20}(n)$.

Подставляя (63) в уравнения (54) и учитывая, что

$$w_0(n) = v_0(n) Y_0(y),$$

где

$$v_0(n) = C \exp\left(-\frac{4\delta u(n)}{K}\right), \quad C = \sqrt{\frac{\pi\mu K}{2\delta}} C_0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\sqrt{m+1} Y_{m+1}(y) + \sqrt{m} Y_{m-1}(y) \right) \frac{dv_{1m}}{dn} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{4\delta(m+1)}{K}} (n^3 - n) Y_{m+1}(y) v_{1m}(n) - \frac{2\delta}{\mu} m Y_m(y) v_{1m}(n) + \right. \\ \left. + \mu\omega Y_m(y) v_{2m}(n) \right) = -\sqrt{\frac{4\delta}{K}} (3n^2 - 1 - c) Y_1(y) v_0(n), \\ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\sqrt{m+1} Y_{m+1}(y) + \sqrt{m} Y_{m-1}(y) \right) \frac{dv_{2m}}{dn} + \right. \\ \left. + (n^3 - n) \sqrt{\frac{4\delta(m+1)}{K}} Y_{m+1}(y) v_{2m}(n) - \frac{2\delta}{\mu} m Y_m(y) v_{2m}(n) - \right. \\ \left. - \mu\omega Y_m(y) v_{1m}(n) \right) = \sqrt{\frac{4\delta}{K}} \omega b Y_1(y) v_0(n). \end{aligned} \quad (65)$$

Собирая члены, содержащие $Y_m(y)$ с одинаковыми индексами, и используя условие ортогональности, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{11}}{dn} + \mu \omega v_{20} = 0, \quad \sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{21}}{dn} - \mu \omega v_{10} = 0, \\
\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\frac{dv_{10}}{dn} + \sqrt{2} \frac{dv_{12}}{dn} \right) + \sqrt{\frac{4\delta}{K}} (n^3 - n) v_{10} - \frac{2\delta}{\mu} v_{11} + \mu \omega v_{21} = \\
= -\sqrt{\frac{4\delta}{K}} (3n^2 - 1 - c) v_0(n),
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\frac{dv_{20}}{dn} + \sqrt{2} \frac{dv_{22}}{dn} \right) + \sqrt{\frac{4\delta}{K}} (n^3 - n) v_{20} - \frac{2\delta}{\mu} v_{21} - \mu \omega v_{11} = \\
= \sqrt{\frac{4\delta}{K}} \omega b v_0(n),
\end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\sqrt{j} \frac{dv_{1,j-1}}{dn} + \sqrt{j+1} \frac{dv_{1,j+1}}{dn} \right) + \sqrt{\frac{4j\delta}{K}} (n^3 - n) v_{1,j-1} - \\
- \frac{2j\delta}{\mu} v_{1j} + \mu \omega v_{2j} = 0 \quad (j \geq 2),
\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\sqrt{j} \frac{dv_{2,j-1}}{dn} + \sqrt{j+1} \frac{dv_{2,j+1}}{dn} \right) + \sqrt{\frac{4j\delta}{K}} (n^3 - n) v_{2,j-1} - \\
- \frac{2j\delta}{\mu} v_{2j} - \mu \omega v_{1j} = 0 \quad (j \geq 2).
\end{aligned}$$

Разлагая далее v_{1m} и v_{2m} в ряд по μ

$$v_{1m} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k v_{1m}^{(k)}, \quad v_{2m} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k v_{2m}^{(k)} \tag{68}$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ , из уравнений (66) находим

• при μ^0 :

$$\omega v_{10}^{(0)} - \sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{21}^{(1)}}{dn} = 0, \quad \omega v_{20}^{(0)} + \sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{11}^{(1)}}{dn} = 0,$$

$$v_{11}^{(1)} = \frac{1}{2\delta} \left(\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{10}^{(0)}}{dn} + \sqrt{\frac{4\delta}{K}} (n^3 - n) v_{10}^{(0)} + \sqrt{\frac{4\delta}{K}} (3n^2 - 1 - c) v_0(n) \right), \tag{69}$$

$$v_{21}^{(1)} = \frac{1}{2\delta} \left(\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{20}^{(0)}}{dn} + \sqrt{\frac{4\delta}{K}} (n^3 - n) v_{20}^{(0)} - \sqrt{\frac{4\delta}{K}} \omega b v_0(n) \right);$$

• при μ^2 :

$$\begin{aligned}
\omega v_{10}^{(2)} - \sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{21}^{(3)}}{dn} &= 0, & \omega v_{20}^{(2)} + \sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{11}^{(3)}}{dn} &= 0, \\
v_{11}^{(3)} &= \frac{1}{2\delta} \left[\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\frac{dv_{10}^{(2)}}{dn} + \frac{4\delta}{K} (n^3 - n)v_{10}^{(2)} + \sqrt{2} \frac{dv_{12}^{(2)}}{dn} \right) + \omega v_{21}^{(1)} \right], & (70) \\
v_{21}^{(3)} &= \frac{1}{2\delta} \left[\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\frac{dv_{20}^{(2)}}{dn} + \frac{4\delta}{K} (n^3 - n)v_{20}^{(2)} + \sqrt{2} \frac{dv_{22}^{(2)}}{dn} \right) - \omega v_{11}^{(1)} \right], \\
v_{12}^{(2)} &= \frac{\sqrt{2}}{4\delta} \left(\sqrt{\frac{4\delta}{K}} (n^3 - n)v_{11}^{(1)} - \omega v_{20}^{(0)} \right), \\
v_{22}^{(2)} &= \frac{\sqrt{2}}{4\delta} \left(\sqrt{\frac{4\delta}{K}} (n^3 - n)v_{21}^{(1)} + \omega v_{10}^{(0)} \right); & (71)
\end{aligned}$$

• при μ^4 :

$$\begin{aligned}
\omega v_{10}^{(4)} - \sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{21}^{(5)}}{dn} &= 0, & \omega v_{20}^{(4)} + \sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{11}^{(5)}}{dn} &= 0, \\
v_{11}^{(5)} &= \frac{1}{2\delta} \left[\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\frac{dv_{10}^{(4)}}{dn} + \frac{4\delta}{K} (n^3 - n)v_{10}^{(4)} + \sqrt{2} \frac{dv_{12}^{(4)}}{dn} \right) + \omega v_{21}^{(3)} \right], & (72) \\
v_{21}^{(5)} &= \frac{1}{2\delta} \left[\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\frac{dv_{20}^{(4)}}{dn} + \frac{4\delta}{K} (n^3 - n)v_{20}^{(4)} + \sqrt{2} \frac{dv_{22}^{(4)}}{dn} \right) - \omega v_{11}^{(3)} \right], \\
v_{12}^{(4)} &= \frac{1}{4\delta} \left[\sqrt{\frac{K}{2\delta}} \left(\frac{dv_{11}^{(3)}}{dn} + \frac{4\delta}{K} (n^3 - n)v_{11}^{(3)} + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{dv_{13}^{(3)}}{dn} \right) + \omega v_{22}^{(2)} \right], \\
v_{22}^{(4)} &= \frac{1}{4\delta} \left[\sqrt{\frac{K}{2\delta}} \left(\frac{dv_{21}^{(3)}}{dn} + \frac{4\delta}{K} (n^3 - n)v_{21}^{(3)} + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{dv_{23}^{(3)}}{dn} \right) - \omega v_{12}^{(2)} \right], \\
v_{13}^{(3)} &= \frac{1}{6\delta} \left[\sqrt{\frac{3K}{4\delta}} \left(\frac{dv_{12}^{(2)}}{dn} + \frac{4\delta}{K} (n^3 - n)v_{12}^{(2)} + \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{dv_{14}^{(2)}}{dn} \right) + \omega v_{23}^{(1)} \right], & (73) \\
v_{23}^{(3)} &= \frac{1}{6\delta} \left[\sqrt{\frac{3K}{4\delta}} \left(\frac{dv_{12}^{(2)}}{dn} + \frac{4\delta}{K} (n^3 - n)v_{22}^{(2)} + \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{dv_{24}^{(2)}}{dn} \right) - \omega v_{13}^{(1)} \right],
\end{aligned}$$

...

Здесь учтено, что

$$v_{10}^{(2k+1)} = 0, \quad v_{20}^{(2k+1)} = 0, \quad v_{11}^{(2k)} = 0, \quad v_{21}^{(2k)} = 0, \quad v_{1j}^{(l)} = v_{2j}^{(l)} = 0 \quad (j \geq 2l).$$

Уравнения (68), (70) и (72) удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_{10}^{(0)}}{dn^2} + \frac{4\delta}{K} \left((n^3 - n) \frac{dv_{10}^{(0)}}{dn} + (3n^2 - 1)v_{10}^{(0)} + 2\omega\delta v_{20}^{(0)} \right) = \\ = -\frac{4\delta}{K} \frac{d}{dn} \left((3n^2 - 1 - c)v_0(n) \right), \end{aligned} \quad (74)$$

$$\frac{d^2 v_{20}^{(0)}}{dn^2} + \frac{4\delta}{K} \left((n^3 - n) \frac{dv_{20}^{(0)}}{dn} + (3n^2 - 1)v_{20}^{(0)} - 2\omega\delta v_{10}^{(0)} \right) = \frac{4\delta}{K} \omega b \frac{dv_0(n)}{dn},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_{10}^{(2)}}{dn^2} + \frac{4\delta}{K} \left((n^3 - n) \frac{dv_{10}^{(2)}}{dn} + (3n^2 - 1)v_{10}^{(2)} + 2\omega\delta v_{20}^{(2)} \right) = \\ = - \left(\sqrt{2} \frac{d^2 v_{12}^{(2)}}{dn^2} + \omega^2 \frac{4\delta}{K} v_{10}^{(0)} \right), \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_{20}^{(2)}}{dn^2} + \frac{4\delta}{K} \left((n^3 - n) \frac{dv_{20}^{(2)}}{dn} + (3n^2 - 1)v_{20}^{(2)} - 2\omega\delta v_{10}^{(2)} \right) = \\ = - \left(\sqrt{2} \frac{d^2 v_{22}^{(2)}}{dn^2} + \omega^2 \frac{4\delta}{K} v_{20}^{(0)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_{10}^{(4)}}{dn^2} + \frac{4\delta}{K} \left((n^3 - n) \frac{dv_{10}^{(4)}}{dn} + (3n^2 - 1)v_{10}^{(4)} + 2\omega\delta v_{20}^{(4)} \right) = \\ = - \left(\sqrt{2} \frac{d^2 v_{12}^{(4)}}{dn^2} + \omega \sqrt{\frac{4\delta}{K}} \frac{dv_{21}^{(3)}}{dn} \right), \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_{20}^{(4)}}{dn^2} + \frac{4\delta}{K} \left((n^3 - n) \frac{dv_{20}^{(4)}}{dn} + (3n^2 - 1)v_{20}^{(4)} - 2\omega\delta v_{10}^{(4)} \right) = \\ = - \left(\sqrt{2} \frac{d^2 v_{22}^{(4)}}{dn^2} - \omega \sqrt{\frac{4\delta}{K}} \frac{dv_{11}^{(3)}}{dn} \right), \end{aligned}$$

где $v_{12}^{(2)}$, $v_{22}^{(2)}$, $v_{12}^{(4)}$ и $v_{22}^{(4)}$ описываются уравнениями (71), (73).

Так как система уравнений (74)–(76), (71), (73) является линейной, то ее общее решение представляет собой сумму общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы. Но, поскольку нас интересуют только решения в виде нечетных функций n , стремящиеся к нулю при $|n| \rightarrow \infty$, то в качестве решения однородной системы можно выбрать сумму только двух частных решений, оба из которых удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} v_{10}^{(0)}(0) = 0, \quad v_{20}^{(0)}(0) = 0, \quad v_{10}^{(2)}(0) = 0, \quad v_{20}^{(2)}(0) = 0, \quad v_{10}^{(4)}(0) = 0, \\ v_{20}^{(4)}(0) = 0, \quad v_{10}^{(2)}(n_0) = 0, \quad v_{20}^{(2)}(n_0) = 0, \quad v_{10}^{(4)}(n_0) = 0, \quad v_{20}^{(4)}(n_0) = 0, \\ v_{11}^{(1)}(0) = 0, \quad v_{21}^{(1)}(0) = 0, \quad v_{11}^{(3)}(0) = 0, \quad v_{21}^{(3)}(0) = 0, \end{aligned}$$

где n_0 – некоторое достаточно большое число (мы задавали $n_0 = 10$). Дополнительные условия для первого решения следующие:

$$\frac{dv_{10}^{(0)}}{dn}(n_0) = 10^{-6}, \quad \frac{dv_{20}^{(0)}}{dn}(n_0) = 0,$$

а для второго

$$\frac{dv_{10}^{(0)}}{dn}(n_0) = 0, \quad \frac{dv_{20}^{(0)}}{dn}(n_0) = 10^{-6}.$$

Таким образом, интересующее нас решение однородной системы, с точностью до членов порядка μ^4 , имеет вид

$$\begin{aligned} v_{10}^{(h)}(n) &= C_1 \left[v_{101}^{(0)}(n) + \mu^2 v_{101}^{(2)}(n) + \mu^4 v_{101}^{(4)}(n) \right] + C_2 \left[v_{102}^{(0)}(n) + \mu^2 v_{102}^{(2)}(n) + \mu^4 v_{102}^{(4)}(n) \right], \\ v_{20}^{(h)}(n) &= C_1 \left[v_{201}^{(0)}(n) + \mu^2 v_{201}^{(2)}(n) + \mu^4 v_{201}^{(4)}(n) \right] + C_2 \left[v_{202}^{(0)}(n) + \mu^2 v_{202}^{(2)}(n) + \mu^4 v_{202}^{(4)}(n) \right], \end{aligned} \quad (77)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, которые, наряду с неизвестными параметрами c и b , могут быть найдены из условий $\langle n \rangle = 0$ и $\langle n^3 \rangle = as + bs$, где $a = c + 1 - 3m_2$. К решению (77) следует добавить частное решение неоднородной системы уравнений (74)–(76), (71), (73), которое, в силу линейности, можно представить в виде суммы трех решений:

$$\begin{aligned} v_{10in}^{(0)}(n) &= v_{100}^{(0)}(n) + v_{10c}^{(0)}(n)c + v_{10b}^{(0)}(n)b, \quad v_{20in}^{(0)}(n) = v_{200}^{(0)}(n) + v_{20c}^{(0)}(n)c + v_{20b}^{(0)}(n)b, \\ v_{10in}^{(2)}(n) &= v_{100}^{(2)}(n) + v_{10c}^{(2)}(n)c + v_{10b}^{(2)}(n)b, \quad v_{20in}^{(2)}(n) = v_{200}^{(2)}(n) + v_{20c}^{(2)}(n)c + v_{20b}^{(2)}(n)b, \\ v_{10in}^{(4)}(n) &= v_{100}^{(4)}(n) + v_{10c}^{(4)}(n)c + v_{10b}^{(4)}(n)b, \quad v_{20in}^{(4)}(n) = v_{200}^{(4)}(n) + v_{20c}^{(4)}(n)c + v_{20b}^{(4)}(n)b. \end{aligned} \quad (78)$$

Из изложенного следует, что условия $\langle n \rangle = 0$ и $\langle n^3 \rangle = as + bs$ можно записать в виде следующих уравнений:

$$\begin{aligned} &\left(J_{101}^{(0)} + \mu^2 J_{101}^{(2)} + \mu^4 J_{101}^{(4)} \right) C_1 + \left(J_{102}^{(0)} + \mu^2 J_{102}^{(2)} + \mu^4 J_{102}^{(4)} \right) C_2 + J_{100}^{(0)} + \mu^2 J_{100}^{(2)} + \\ &+ \mu^4 J_{100}^{(4)} + \left(J_{10c}^{(0)} + \mu^2 J_{10c}^{(2)} + \mu^4 J_{10c}^{(4)} \right) c + \left(J_{10b}^{(0)} + \mu^2 J_{10b}^{(2)} + \mu^4 J_{10b}^{(4)} \right) b = 0, \\ &\left(J_{201}^{(0)} + \mu^2 J_{201}^{(2)} + \mu^4 J_{201}^{(4)} \right) C_1 + \left(J_{202}^{(0)} + \mu^2 J_{202}^{(2)} + \mu^4 J_{202}^{(4)} \right) C_2 + J_{200}^{(0)} + \mu^2 J_{200}^{(2)} + \\ &+ \mu^4 J_{200}^{(4)} + \left(J_{20c}^{(0)} + \mu^2 J_{20c}^{(2)} + \mu^4 J_{20c}^{(4)} \right) c + \left(J_{20b}^{(0)} + \mu^2 J_{20b}^{(2)} + \mu^4 J_{20b}^{(4)} \right) b = 0, \\ &\left(I_{101}^{(0)} + \mu^2 I_{101}^{(2)} + \mu^4 I_{101}^{(4)} \right) C_1 + \left(I_{102}^{(0)} + \mu^2 I_{102}^{(2)} + \mu^4 I_{102}^{(4)} \right) C_2 + I_{100}^{(0)} + \mu^2 I_{100}^{(2)} + \\ &+ \mu^4 I_{100}^{(4)} + \left(I_{10c}^{(0)} + \mu^2 I_{10c}^{(2)} + \mu^4 I_{10c}^{(4)} \right) c + \left(I_{10b}^{(0)} + \mu^2 I_{10b}^{(2)} + \mu^4 I_{10b}^{(4)} \right) b = a, \\ &\left(I_{201}^{(0)} + \mu^2 I_{201}^{(2)} + \mu^4 I_{201}^{(4)} \right) C_1 + \left(I_{202}^{(0)} + \mu^2 I_{202}^{(2)} + \mu^4 I_{202}^{(4)} \right) C_2 + I_{200}^{(0)} + \mu^2 I_{200}^{(2)} + \\ &+ \mu^4 I_{200}^{(4)} + \left(I_{20c}^{(0)} + \mu^2 I_{20c}^{(2)} + \mu^4 I_{20c}^{(4)} \right) c + \left(I_{20b}^{(0)} + \mu^2 I_{20b}^{(2)} + \mu^4 I_{20b}^{(4)} \right) b = \omega b, \end{aligned} \quad (79)$$

где

$$\begin{aligned}
 J_{101}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{101}^{(j)}(n) dn, & J_{201}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{201}^{(j)}(n) dn, & J_{102}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{102}^{(j)}(n) dn, \\
 J_{202}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{202}^{(j)}(n) dn, & J_{100}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{100}^{(j)}(n) dn, & J_{200}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{200}^{(j)}(n) dn, \\
 J_{10c}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{10c}^{(j)}(n) dn, & J_{20c}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{20c}^{(j)}(n) dn, & J_{10b}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{10b}^{(j)}(n) dn, \\
 J_{20b}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{20b}^{(j)}(n) dn, & j &= 0, 2, 4.
 \end{aligned}$$

Уравнения (79) позволяют найти эффективную жесткость c и поправку к коэффициенту затухания b как функции K , ω , δ и μ .

Чтобы продемонстрировать влияние частоты сигнала, на рис. 5 показаны зависимости c , ωb и a от интенсивности шума K при $\mu = 0$, $\delta = 0.5$ и различных значениях ω . Влияние коэффициента затухания δ проиллюстрировано на рис. 6, где показаны те же зависимости при $\mu = 0$, $\omega = 0.1$ и $\delta = 0.25, 0.5, 1.0$. Из рисунка видно, что при увеличении δ все кривые смещаются в сторону больших значений интенсивности шума и максимальное значение поправки к коэффициенту затухания несколько уменьшается. Наконец, рис. 7 иллюстрирует влияние массы частицы (параметра μ). Этот рисунок построен для $\delta = 0.5$, $\omega = 0.1$. Видно, что зависимости параметров c , ωb и a от μ являются относительно слабыми. С увеличением μ все кривые смещаются в направлении больших значений интенсивности шума, минимальное значение c увеличивается, а максимальное значение ωb уменьшается.

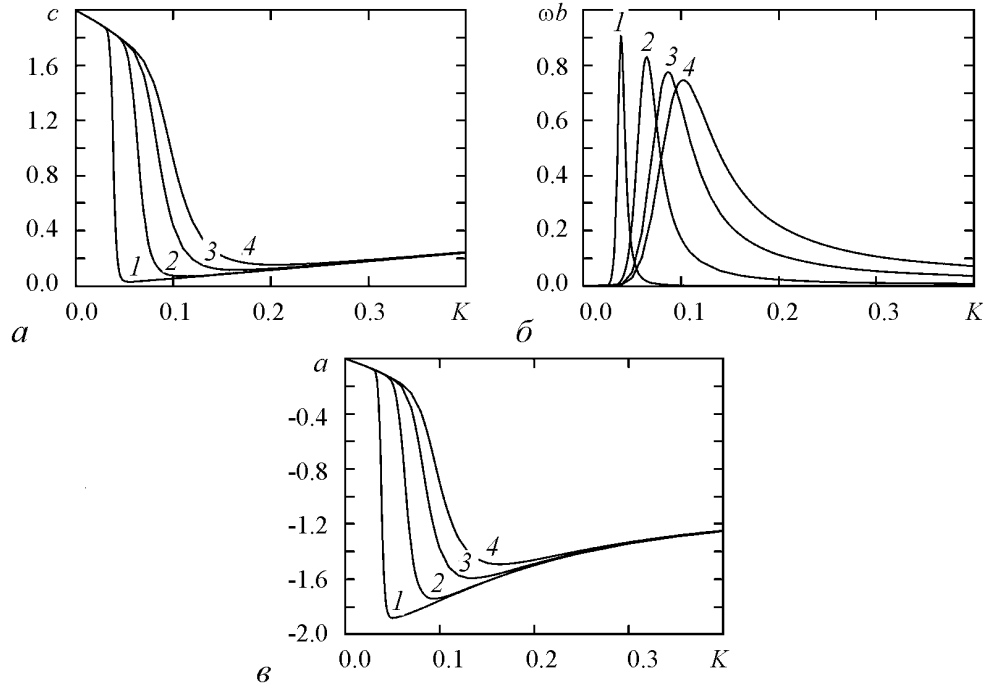


Рис. 5. Зависимости эффективных параметров c , ωb и a от интенсивности шума K при $\delta = 0.5$ для различных значений ω : 1 - 0.0001, 2 - 0.01, 3 - 0.05, 4 - 0.1

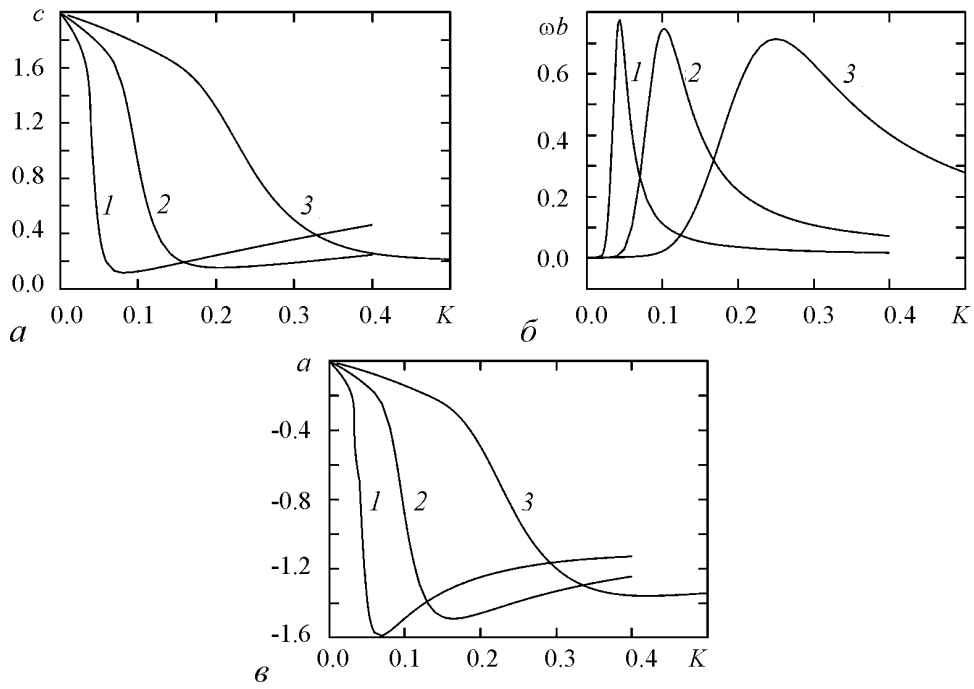


Рис. 6. Зависимости эффективных параметров c , ωb и a от интенсивности шума K при $\omega = 0.1$ и различных значениях коэффициента затухания δ : 1 – 0.25, 2 – 0.5, 3 – 1.0

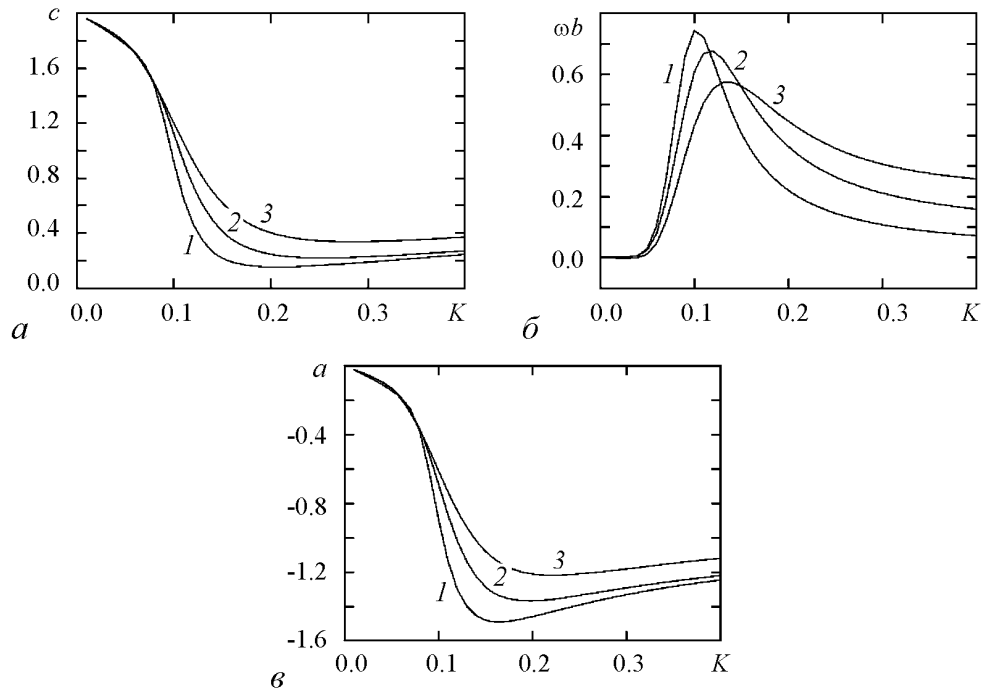


Рис. 7. Зависимости эффективных параметров c , ωb и a от интенсивности шума K при $\omega = 0.1$, $\delta = 0.5$ и различных значениях массы частицы μ : 1 – 0, 2 – 0.5, 3 – 1.0

Заклучение

Итак, на ряде примеров показано, что шум может вызывать изменение эффективных параметров усредненных движений нелинейных систем. Найденные изменения являются как раз теми причинами, которые приводят к явлению кажущегося резонанса в такой системе с половинным числом степеней свободы, как передемпфированный осциллятор, к направленному смещению частиц в отсутствие направленной силы, к невозможности существования демона Максвелла и многим другим интересным явлениям.

Библиографический список

1. *Boltzmann L.* Лекции по теории газов. М.: Гостехиздат, 1956.
2. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1982.
3. *Prandtl L.* Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz // *Zs. angew. Math. Mech.* 1925. Vol. 5, № 2. P. 136.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
5. *Prandtl L.* Führer durch die Strömungslehre. 3 ed. / F. Vieweg. Braunschweig, 1949.
6. *Гиневский А.С., Колесников А.В.* Теория идеального плота // Доклады АН. 1980. Т. 251, № 2. С. 312.
7. *Brillouin L.* Can the rectifier become a thermodynamical demon // *Phys. Rev.* 1950. Vol. 78. P. 627.
8. *MacDonald D.K.C.* Brownian movement // *Phys. Rev.* 1957. Vol. 108. P. 541.
9. *Alkemade C.T.J.* On the problem of Brownian motion of nonlinear systems // *Physica.* 1958. Vol. 24. P. 1029.
10. *Van Kampen N.G.* Thermal fluctuations in a nonlinear system // *Phys. Rev.* 1958. Vol. 110. P. 319.
11. *Marek A.* A note to recent theories of Brownian motion in nonlinear systems // *Physica.* 1959. Vol. 25. P. 1358.
12. *Стратонович Р.Л.* О парадоксе в теории тепловых флуктуаций нелинейных сопротивлений // Вестник МГУ. 1960. № 4. С. 99.
13. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике // М.: Мир, 1965. Т. 4, гл. 46.
14. *Peskin C., Odell G., and Oster G.* // *Biophys. J.* 1993. Vol. 65. P. 316.
15. *Svoboda K., Schmidt C.F., Schnapp B.J. and Block S.M.* // *Nature.* 1993. Vol. 365. P. 721.
16. *Magnasco M.O.* Forced thermal ratchets // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71. P. 1477.
17. *Astumian R. Dean and Bier M.* Fluctuation driven ratchets: molecular motors // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 72. P. 1766.
18. *Doering C.R.* Randomly rattled ratchets // *Nuovo Cimento Soc. Ital. Fiz.* 1995. Vol. 17D. P. 685.
19. *Hänggi P. and Bartussek R.* // in *Nonlinear Physics and Complex Systems – Current Status and Future Trends*, Lect. Notes in Physics Vol. 476 / Ed. by J. Parisi, S.C. Müller, and W. Zimmermann. Berlin: Springer-Verlag, 1996. P. 294.
20. *Landa P.S.* Noise-induced transport of Brownian particles with consideration for their mass // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. P. 1325.

21. *Gammaitoni L.* // Rev. Mod. Phys. 1998. Vol. 70. P. 223.
22. *Landa P.S.* Regular and chaotic oscillations. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
23. *Ланда П.С.* Механизм стохастического резонанса // ДАН. 2004. Т. 399, № 4. С. 1.
24. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. Радио, 1961.
25. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
26. *Блехман И.И., Ланда П.С.* Сопряженные резонансы в нелинейных системах при двухчастотном воздействии. Виброиндуцированные бифуркации // Изв. вузов. ПНД. 2002. Т. 10, № 1-2. С. 44.
27. *Blekhman I.I. and Landa P.S.* Conjugate resonances and bifurcations in nonlinear systems under biharmonic excitation // Int. J. of Non-linear Mechanics. 2004. Vol. 39. P. 421.
28. *Блехман И.И., Ланда П.С.* Эффект сопряженности резонансов и бифуркаций при двухчастотном воздействии на маятник с вибрирующей осью подвеса // ДАН. 2004. Т. 395, № 2. С. 192.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию 17.12.2007

CHANGES IN THE EFFECTIVE PARAMETERS OF AVERAGED MOTIONS IN NONLINEAR SYSTEMS SUBJECT TO NOISE OR VIBRATION

P.S. Landa

An important problem of the change in the effective parameters of averaged motions in nonlinear systems is described. This problem is known in physics for a long time. It is concerned with the derivation of bodies motion equations taking into account the collisions with the molecules of the surrounding gas. Many researchers believe implicitly that this problem is essential only for the transfer from microscopic equations to macroscopic ones. However this problem reveals often itself in the present-day macroscopic physics. Below we give a number of the examples of such the change.



Ланда Полина Соломоновна – родилась в 1931 году в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 году. С 1956 года работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий научный сотрудник МГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор пяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», вышедшей в издательстве «Kluwer» (Голландия). Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика».
E-mail:landa@phys.msu.su