



## СИНХРОНИЗАЦИЯ ИМПУЛЬСАМИ И СИНХРОНИЗАЦИЯ В СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ: НОВЫЕ АСПЕКТЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

*А.П. Кузнецов, Ю.П. Роман, Н.В. Станкевич, Л.В. Тюрюкина*

В работе обсуждаются различные особенности синхронизации автоколебательных систем импульсами: роль неизохронности, возможность стабилизации неустойчивых систем, синхронизация связанных осцилляторов в режиме гибели колебаний и др. Представлены иллюстрации динамики связанных неизохронных осцилляторов и осцилляторов, неидентичных по управляющим параметрам и нелинейной диссипации.

### Введение

Синхронизация – одно из наиболее популярных направлений исследования в теории колебаний и нелинейной динамике. Интерес к задачам о синхронизации обусловлен огромным количеством примеров в радиофизике, электронике, биологии, химии, климатологии и др. [1–5]. Наличие ритмов и их взаимосвязь – фундаментальное свойство природы. Кроме того, синхронизация для своего описания требует интересной теории, которая по мере своего развития обнаруживает все новые и новые существенные моменты, часто превращающиеся в самостоятельные направления исследований.

Одним из интересных аспектов теории синхронизации является синхронизация импульсами. Такие задачи привлекательны по ряду причин. Например, многие процессы в радиофизике, радиотехнике, электронике, биофизике и др. характеризуются наличием импульсного воздействия. (В этом легко убедиться с помощью поиска в сети Интернет на сочетание слов «синхронизация импульсами».) С другой стороны, импульсный характер воздействия может приводить к новым аспектам картины синхронизации и к новым колебательным эффектам, не имеющим аналогов в случае гармонического воздействия. Важно и то, что системы в случае коротких импульсов существенно проще для анализа, поскольку в промежутках между импульсами их динамика автономна. Поэтому использование в промежутках между импульсами приближенных методов приводит к более простым дискретным моделям, демонстрирующим, однако, сложное поведение. Наконец, для таких систем четко разделяются стадии воздействия и отклика, что облегчает интерпретацию результатов.

К изучению систем с импульсным возбуждением обращались многие авторы. Например, еще В.И. Арнольд в своей дипломной работе<sup>1</sup> для обоснования существования языков синхронизации, использовал воздействие сигналов в форме различных типов импульсов. При отсутствии компьютеров именно такие системы облегчают качественное понимание происходящих процессов. Для анализа систем с импульсным возбуждением является существенной модель воздействия в виде коротких, но значительных по амплитуде импульсов, которые представляются последовательностью  $\delta$ -функций. Классической в такой постановке является задача о воздействии периодической последовательности  $\delta$ -функций на автоколебательный осциллятор ван дер Поля. (В монографии [4] такая система названа маятником Ю.И. Неймарка.) Подобная система изучалась известным исследователем биологических систем Л. Глассом (L. Glass), Е. Дингом (E. Ding) и другими авторами [7– 26]. Для нее были выявлены многие аспекты теории синхронизации импульсами; некоторые из них отражены в настоящей работе.

Постоянное развитие компьютерной техники и теории динамических систем дает замечательную возможность вновь и вновь обращаться к классическим по постановке задачам. Это относится как к уже известным эффектам, для которых, однако, можно получить новые иллюстрации, так и к обнаружению новых интересных типов поведения. Более того, новые иллюстрации для традиционных, «уже изученных» задач, как правило, обнаруживают и новые, существенные аспекты, которые ранее не обсуждались. Таким образом, оказывается, что теория синхронизации даже «простых» автоколебательных систем не столь близка к завершению, что иллюстрирует сложность и многогранность нелинейных явлений. В настоящей работе дан обзор некоторых идей, подходов и результатов, относящихся к анализу синхронизации импульсами и взаимной синхронизации связанных осцилляторов с постепенным усложнением автономных систем с позиций размерности фазового пространства. Сначала рассмотрены автоколебательные системы с двумерным фазовым пространством, затем трехмерным и, наконец, четырехмерным фазовым пространством. Для двумерных систем указаны простейшие модели, исследована существенная роль неизохронности в картине синхронизации, эффект стабилизации неустойчивого предельного цикла импульсным сигналом, возможные типы режимов в возбуждаемой импульсами системе с бифуркацией слияния устойчивого и неустойчивого циклов. Для трехмерных автоколебательных систем обсуждаются вопросы зависимости картины синхронизации от направления импульса, возможность стабилизации импульсами системы в режиме «убегающих» фазовых траекторий и сопутствующие эффекты. Для четырехмерных систем рассматриваются некоторые моменты теории взаимной синхронизации: синхронизация неизохронных систем и систем с «лидирующим» осциллятором в случае неидентичных управляющих параметров и величины нелинейной диссипации. В заключение обсуждаются особенности синхронизации импульсами системы диссипативно связанных осцилляторов.

---

<sup>1</sup>Выполнена в 1959 г., опубликована в журнале Chaos в 1991 [6] с оригинальными рисунками из дипломной работы.

## 1. Двумерные системы

**1.1. Иерархия моделей.** Наиболее популярными двумерными системами, демонстрирующими автоколебания, являются система ван дер Поля и ее развитие – система ван дер Поля–Дуффинга [1–5]. Как известно, любая (типичная) автоколебательная система у порога бифуркации Андронова–Хопфа приводится к универсальной нормальной форме [1, 5, 27]. Это означает, что синхронизация таких систем при небольшом превышении над порогом бифуркации должна обладать определенными универсальными чертами. По этой причине система ван дер Поля–Дуффинга может выступать не только как удобный пример для изучения синхронизации, но и как некоторая обобщающая модель.

Обратимся к системе ван дер Поля–Дуффинга, возбуждаемой периодической последовательностью  $\delta$ -функций

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = B \sum \delta(t - nT). \quad (1)$$

Здесь  $x$  – динамическая переменная,  $T$  – период следования импульсов,  $B$  – их амплитуда. Параметр  $\lambda$  отвечает за бифуркацию Андронова–Хопфа (при  $\lambda > 0$  в системе реализуется устойчивый предельный цикл),  $\beta$  – параметр нелинейности, введенной по типу нелинейности осциллятора Дуффинга.

Если превышение над порогом бифуркации невелико (параметр  $\lambda$  мал), то в промежутке между импульсами можно воспользоваться квазигармоническим приближением [1, 2, 5]. В момент действия импульса координата осциллятора  $x$  не меняется, а скорость  $\dot{x}$  получает добавку, равную амплитуде импульса  $B$ . Такое рассмотрение позволяет получить аналитически двумерное отображение для комплексной переменной  $z = x + i\dot{x}$ , выражающейся через координату и скорость осциллятора сразу после очередного импульса [20] следующим образом:

$$z_{n+1} = \frac{z_n \exp\left(\frac{\lambda T}{2} - iT\right) \exp(-i\psi_n)}{\sqrt{1 + |z_n|^2 \frac{\exp(\lambda T) - 1}{4\lambda}}} + iB, \quad (2)$$

где

$$\psi_n = \frac{3}{2}\beta \ln \left| \frac{|z_n|^2}{4\lambda} (\exp(\lambda T) - 1) + 1 \right| \quad (3)$$

– дополнительный набег фазы, связанный с нелинейной зависимостью скорости ее изменения от амплитуды колебаний.

В свою очередь, можно сделать еще одно приближение, состоящее в том, что в промежутке между импульсами изображающая точка успевает вернуться на предельный цикл. Тогда из (2) при  $\lambda T \gg 1$  приходим к одномерному отображению для фазы [20]

$$\theta_{n+1} = \arctg \left( \frac{\sin \theta_n + C}{\cos \theta_n} \right) - \Omega - \frac{3}{2}\beta \ln (1 + 2C \sin \theta_n + C^2). \quad (4)$$

Здесь  $C = B/(2\sqrt{\lambda})$  имеет смысл нормированной амплитуды внешнего воздействия, а

$$\Omega = T \left( 1 + \frac{3}{2}\beta\lambda \right) \quad (5)$$

– нормированного периода.

Уравнения (1), (2), (4) образуют иерархию моделей (дифференциальная система, двумерное отображение, одномерное отображение), описывающих синхронизацию автоколебательной системы короткими импульсами. На рис. 1 показаны карты динамических режимов для дифференциальной системы и ее двумерного отображения при значениях параметров  $\lambda = 0.2$  и  $\beta = 1$ . На картах оттенками серого цвета обозначены определяемые численно области различных периодических режимов. Белый цвет соответствует режиму периода 1, а черный – квазипериодическим режимам и хаосу. Для дифференциальной системы (1) периоды режимов определялись в стробоскопическом сечении, проводимом через период воздействия. На рис. 1 можно видеть систему языков синхронизации, причем указанный метод выявляет и их сложное внутренне устройство: наличие удвоений, характерных структур «crossroad area» [28] и др. Различные языки синхронизации периода 1 на рис. 1 отвечают разному числу оборотов изображающей точки на фазовой плоскости вокруг начала координат в промежутке между импульсами. Отметим, что значение параметра

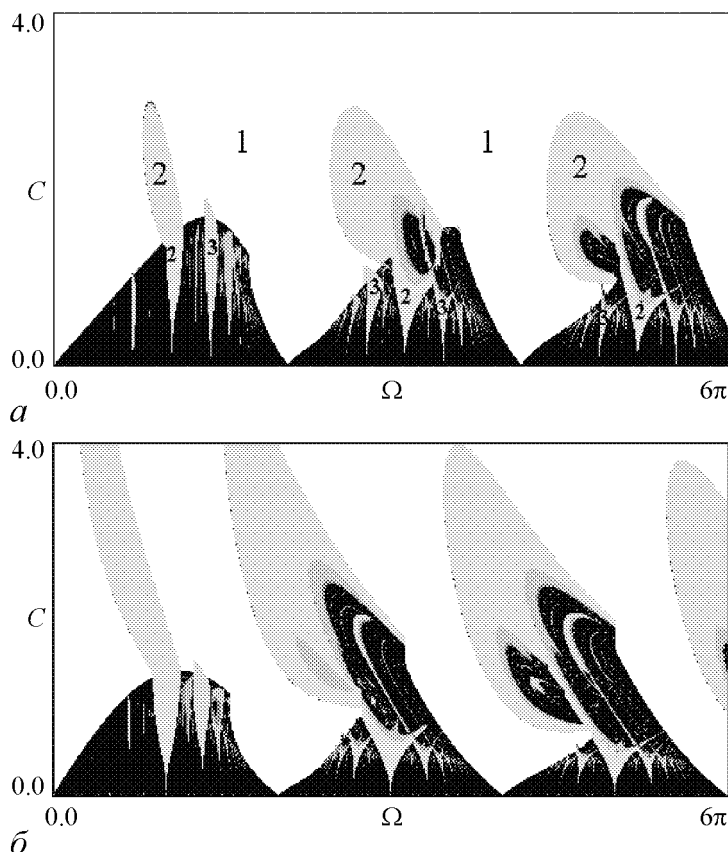


Рис. 1. Карты динамических режимов: *a* – возбуждаемого импульсами осциллятора ван дер Поля–Дуффинга (1); *б* – полученного для него двумерного отображения (2)

$\lambda = 0.2$  невелико, поэтому квазигармоническое приближение эффективно, и рисунки для дифференциальной системы и двумерного отображения мало различаются. Для значений  $\lambda$  больше или порядка единицы это оказывается уже не так [14, 19, 20].

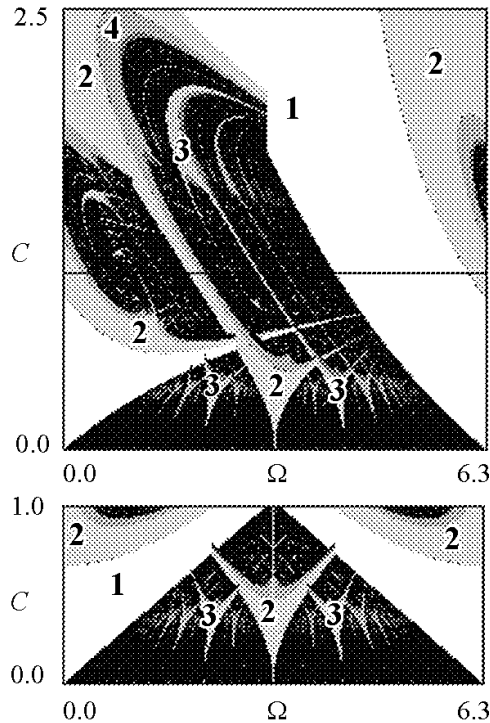


Рис. 2. *a* – Карта динамических режимов отображения окружности (4) для неизохронной системы ( $\beta = 1$ ). *б* – Карта динамических режимов синус-отображения окружности (7)

няется условие возвращения на предельный цикл. Этот факт находит свое выражение на рис. 1 – с ростом периода воздействия (движение направо по карте) система языков модифицируется, приближаясь к картине на рис. 2, *a*. Тем не менее указанная тонкость говорит о том, что для релаксационных режимов необходим дополнительный анализ, и «универсальность» картины синхронизации может нарушаться. Соответствующее такому режиму одномерное отображение для системы ван дер Поля с импульсным возбуждением достаточно специфично. Оно получено и обсуждается в [14].

Еще одна особенность одномерного отображения для фазы (4) – строгая периодичность по нормированному периоду воздействия  $\Omega$ , заданному выражением (5). Природа этой периодичности состоит в том, что режимы, различающиеся на целое число оборотов изображающей точки вокруг начала координат, неразличимы. Для исходной системы (1) и для двумерного отображения (2), как хорошо видно на рис. 1, это не так.

**1.2. Сравнение синхронизации изохронных и неизохронных систем.** При анализе моделей (1), (2), (4) выделяются два важных случая: изохронные и существенно неизохронные системы. Первые отличаются тем, что параметр  $\beta$  равен

На рис. 2, *a* показана карта динамических режимов одномерного отображения для фазы (4) при  $\beta = 1$ . Можно видеть характерную структуру языков синхронизации, которую интересно сравнить с рис. 1. На первый взгляд может показаться, что условия работоспособности двумерного и одномерного отображений противоречивы: для эффективности первого нужно, чтобы было справедливо квазигармоническое приближение, то есть  $\lambda \ll 1$ . С другой стороны, для эффективности одномерного отображения необходима быстрая возвращаемость изображающей точки на предельный цикл. Это противоречие снимается за счет того, что последнее условие может быть обеспечено не только большой величиной самого параметра  $\lambda$ , но и его соотношением с периодом воздействия, то есть  $\lambda T \gg 1$ . Физически это легко объяснимо: чем реже импульсы, тем дольше свободно движется изображающая точка, и тем лучше в промежутке между импульсами выполняется

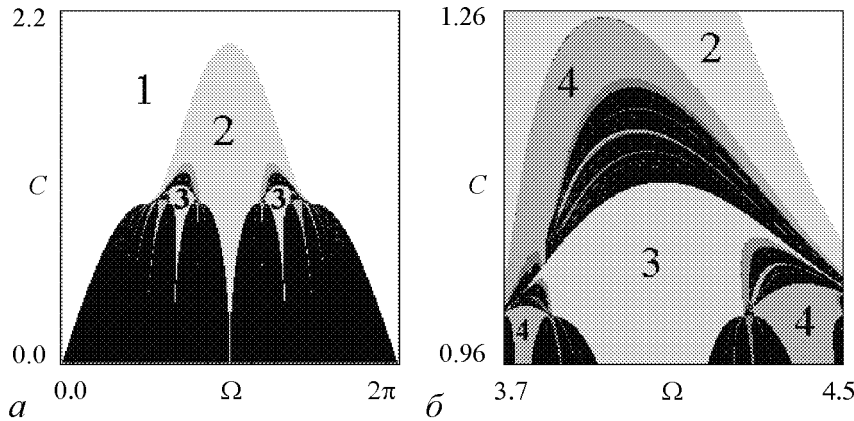


Рис. 3. Карта динамических режимов отображения Гласса (6); б – увеличенный фрагмент

нулю. В этом случае в соответствии с (2) и (3) набег фазы за время между импульсами равен просто  $T$  и не зависит от радиуса орбиты осциллятора. Последнее и определяет свойство изохронности системы.

Простейшая модель возбуждаемой импульсами изохронной системы получается из (4) при  $\beta=0$  и имеет вид

$$\theta_{n+1} = \text{arctg}\left(\frac{\sin \theta_n + C}{\cos \theta_n}\right) - T. \quad (6)$$

Это отображение впервые, по-видимому, было получено Л. Глассом [7–9].

Для неизохронной системы, для которой параметр  $\beta$  отличен от нуля, при описании динамики фазы следует использовать обобщенное отображение окружности (4). Если неизохронность достаточно велика, а именно параметр  $\beta$  порядка или больше единицы, из (4) в случае небольших значений амплитуды воздействия  $C$  ( $C \ll 1$ ) нетрудно получить стандартное синус-отображение окружности [1, 28] вида

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - 3\beta C \sin \theta_n. \quad (7)$$

Карта динамических режимов изохронного отображения Гласса (6) и ее увеличенный фрагмент показаны на рис. 3. Карта неизохронной системы (4) при  $\beta = 1$  показана на рис. 2, а. Рядом, на рис. 2, б, в соответствующих масштабах показана карта динамических режимов для стандартного синус-отображения окружности (7). Таким образом, рис. 2 иллюстрирует эффективность последнего в области  $C < 1$  в случае большой неизохронности.

Проведем краткое сравнение отображений для изохронной и неизохронной систем. Оба они выявляют систему языков синхронизации, в промежутках между которыми реализуются квазипериодические режимы. В обоих случаях возникает ситуация перекрытия языков: при  $C = 1$  для изохронной системы, и при  $C \approx 1/(3\beta)$  для неизохронной<sup>2</sup>. Что касается внутреннего устройства языков синхронизации и

<sup>2</sup>Условие  $C = 1$  имеет простой физический смысл – амплитуда импульса точно равна размеру предельного цикла автономной системы. С этим и связана особая роль данного условия. Оценку  $C \approx 1/(3\beta)$  получаем из (7), приравняв единице множитель перед синусом.

области выше линии их перекрытия, то здесь имеют место существенные различия. Так, удвоения периода в изохронной системе реализуются при уменьшении амплитуды воздействия, а в неизохронной – наоборот, при ее увеличении. При этом для изохронной системы вдоль линии  $C = 1$  отображение для фазы является кусочно-линейным, а для стандартного синус-отображения окружности линия начала перекрытия языков определяется условием появления кубической точки перегиба. Соответственно, закономерности лестницы чисел вращения на этой линии оказываются в этих случаях существенно разными. (Сравните соответствующее обсуждение изохронной системы в работах [10–12] и «классическое» ренормгрупповое описание для синус-отображения окружности [28, 29].) Другие детали, отличающие изохронные и неизохронные системы с импульсным возбуждением, можно найти в работе [20]. Обсуждение двумерной изохронной модели (2), а также целый ряд «тонкостей», связанных с ее предельным переходом к одномерному отображению (6), содержится в работе [7].

Таким образом, неизохронность играет важную роль в устройстве пространства параметров системы, причем именно для существенно неизохронных систем работоспособно традиционное синус-отображение окружности.

**1.3. Эффект стабилизации неустойчивых предельных циклов.** Свойство неизохронности обуславливает еще один интересный эффект в возбуждаемых импульсами системах. Обратимся к ситуации, когда в автономной системе имеет место субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. А именно, когда при  $\lambda > 0$  фокус в начале координат из неустойчивого становится устойчивым и от него отделяется неустойчивый предельный цикл. Для этого рассмотрим следующую дифференциальную систему, которая возбуждается периодической последовательностью  $\delta$ -импульсов:

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = B \sum \delta(t - nT); \quad (8)$$

(отличие от системы (1) состоит в смене знака перед диссипативным членом).

На рис. 4 показана карта динамических режимов системы (8) на плоскости параметров период  $T$  – амплитуда  $B$  внешнего воздействия для  $\lambda = 1.2$ . На этой карте доминируют области периода один и область убегания траекторий на бесконечность, показанная одним из оттенков серого цвета. Это физически совершенно естественно: при малых амплитудах воздействия изображающая точка приближается к устойчивому фокусу, при больших – импульсы «выбрасывают» ее за границы неустойчивого цикла, и точка уходит на бесконечность. Однако на карте, представленной на рис. 4, можно видеть и очень узкую полосу устойчивых режимов другого типа, разделяющую эти области. На рис. 4 приведен увеличенный фрагмент карты, на котором полоса устойчивых режимов показана более детально. Внутри нее наблюдаются квазипериодические режимы со встроенной системой языков синхронизации периода два, три и т.д. Для этих режимов представлены портреты аттракторов (рис. 4, *a–d*). На них хорошо видно, что траектория движется в окрестности неустойчивого предельного цикла автономной системы, при этом с течением времени она уходит от него, а внешний сигнал своими ударами возвращает траекторию в эту окрестность.

Однако одной «возвращаемости» траекторий недостаточно для стабилизации неустойчивости, поскольку две близкие траектории даже в этом случае могут

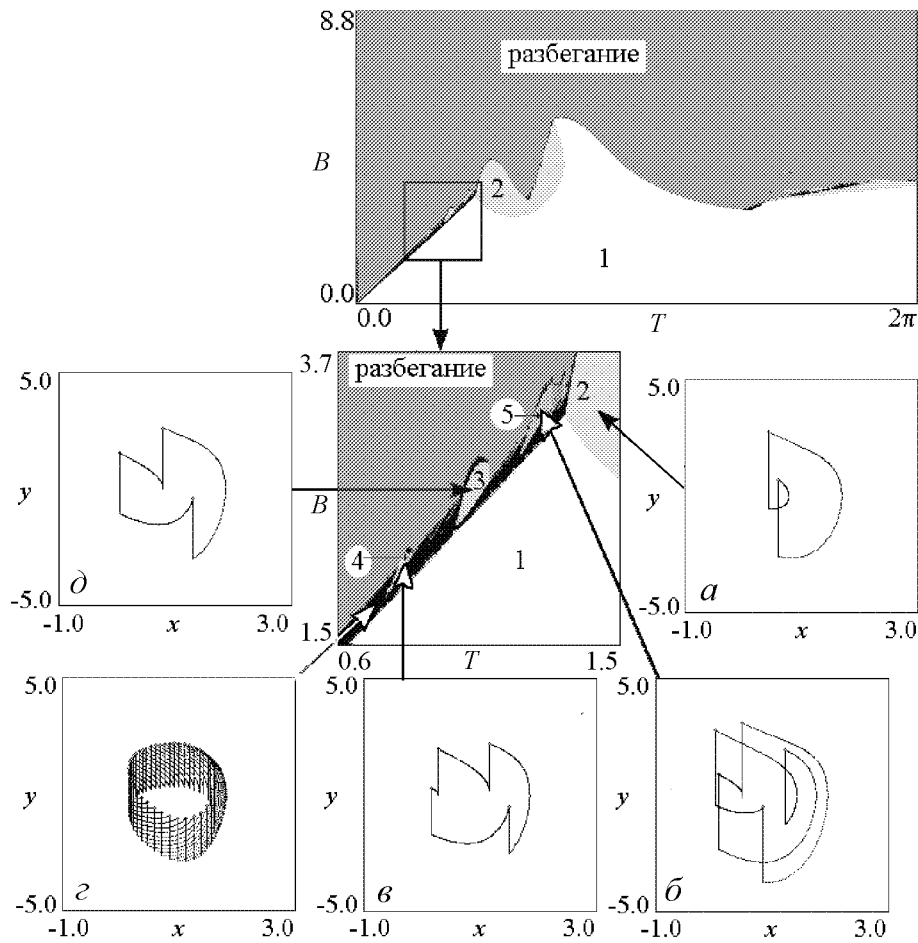


Рис. 4. Карта динамических режимов возбуждаемой импульсами системы с неустойчивым предельным циклом (8), ее увеличенный фрагмент и портреты аттракторов для языков синхронизации периодов: два (*a*), три (*d*), четыре (*e*), пять (*b*) и квазипериодического режима (*c*). Все иллюстрации построены для  $\lambda = 1.2$ ,  $\beta = 1$

расходиться. Принципиальную роль в этом процессе играет неизохронность. Этот факт иллюстрирует рис. 5, на котором показано по паре фазовых траекторий, стартовавших из близких точек в окрестности неустойчивого цикла. Рис. 5, *a* относится к случаю отсутствия неизохронности; *b* – к случаю сильно неизохронной системы. Хорошо видно, что траектории на рис. 5, *a* достаточно быстро расходятся, несмотря на наличие внешних импульсов.

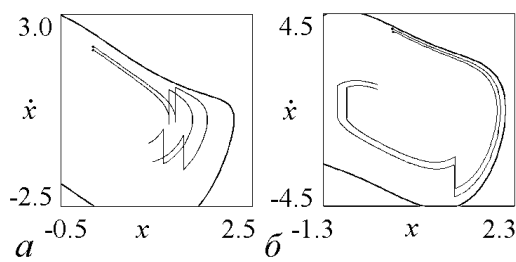


Рис. 5. Фазовые траектории, стартовые из близких точек в окрестности неустойчивого предельного цикла (показан жирной линией) для системы (8) в случае  $\beta = 0$  (*a*) и  $\beta = 1$  (*b*). Остальные параметры  $\lambda = 1.2$ ,  $T = 1.5$  и  $B = 1.8$

В свою очередь, из рис. 5, *b* видно, что благодаря соответствующей зависимости угловой скорости от амплитуды изображающая точка, движущаяся по орбите большего радиуса, ускоряется. В результате расстояние между траекториями после двух



импульсов практически не изменилось. Другими словами, неизохронность (или фазовая нелинейность) компенсировала неустойчивость. Более детальное обсуждение стабилизации импульсами системы (8) с неустойчивым предельным циклом можно найти в работах [21, 22].

**1.4. Синхронизация импульсами автогенератора с жестким возбуждением у порога исчезновения автоколебаний.** Мы рассмотрели колебательные явления в возбуждаемых импульсами системах с устойчивым или неустойчивым предельными циклами. Однако интересные режимы при наличии импульсного возбуждения может демонстрировать и система, в которой сосуществуют оба эти цикла. Одна из таких возможных моделей рассмотрена, например, в [15]. Обратимся здесь к классической модели автогенератора с жестким возбуждением [4, 5], находящимся под воздействием периодической последовательности  $\delta$ -импульсов<sup>3</sup>

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2 + kx^4)\dot{x} + x + \beta x^3 = B \sum \delta(t - nT). \quad (9)$$

Здесь по сравнению с (8) появился новый бифуркационный параметр  $k$ . При малых  $k$  в автономной системе (9) имеется неустойчивый предельный цикл, близкий к предельному циклу системы (8). Кроме того, имеется устойчивый предельный цикл

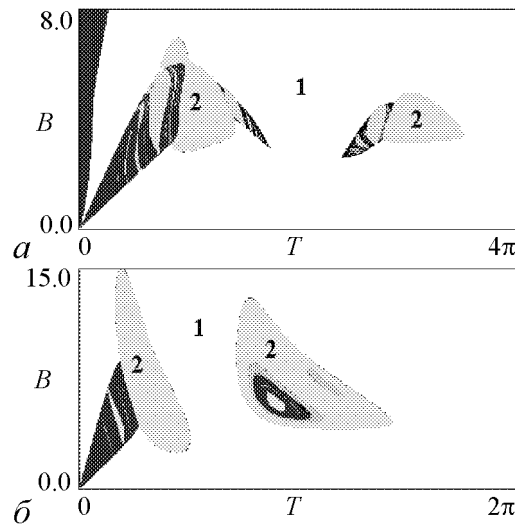


Рис. 6. Карты динамических режимов неавтономного автогенератора с жестким возбуждением (9) за порогом бифуркации слияния устойчивого и неустойчивого циклов:  $a$  – для изохронного случая ( $\beta = 0, \lambda = 1.2, k = 0.11$ ) и  $b$  – для неизохронного ( $\beta = 2, \lambda = 1.2, k = 0.165$ )

большого радиуса. С ростом  $k$  предельные циклы сближаются и при некотором бифуркационном значении  $k_{\text{биф}}$  сливаются и исчезают [2, 4–5]. С помощью квазигармонического приближения для бифуркационного значения параметра имеем оценку  $k_{\text{биф}} = 1/(8\lambda)$  [5]. Как следствие, для  $\lambda = 1.2$  (значение, которое будем использовать далее) оценка с помощью укороченного уравнения дает  $k_{\text{биф}} \approx 0.10417$ , а для дифференциальной системы (9) численно можно найти весьма близкое значение  $k_{\text{биф}} = 0.10791$ .

На рис. 6,  $a$  показана карта динамических режимов системы (9) в изохронном случае для значения параметра  $k$  немного больше бифуркационного. Можно констатировать, что устойчивые режимы сохраняются не только до порога бифуркации слияния циклов, но и за ним, когда предельные циклы в автономной системе исчезли. В этом случае устойчивые режимы реализуются в окрестности «сгущения» фазовых траекторий, образовавшегося вблизи орбиты, отвечающей слиянию циклов. На карте хорошо видны как квазипериодические, так и синхронные режимы. При этом области устойчивых режимов на плоскости параметров период–амплитуда воздействия выглядят как острова квазипериодических режимов, которые пересекают окна периодических

<sup>3</sup>Имеется обширная литература, относящаяся к такой системе под действием гармонического сигнала, начиная с классических работ Л.И. Мандельштама и Н.Д. Папалекси [30], в которых приближенными методами выявлена возможность режимов биений в ситуации, когда автоколебания в автономном режиме отсутствуют. Здесь мы ограничиваемся системами с импульсным возбуждением и не используем приближенных методов.

режимов. С ростом параметра  $k$  острова уменьшаются в размерах и поэтапно исчезают. При этом исчезают в первую очередь те из них, которые отвечают большим периодам воздействия. Это естественно – чем больше промежуток времени между импульсами, тем дальше движется изображающая точка, и тем ближе она оказывается к устойчивому фокусу в начале координат.

Учет неизохронности также заметно сказывается на характере наблюдаемых режимов. В случае сильно неизохронной системы острова устойчивых режимов за порогом бифуркации слияния циклов сохраняются, однако среди них начинают доминировать области удвоенного периода и хаоса, которые вытесняют квазипериодические режимы (рис. 6, б). Важно отметить и то, что с ростом неизохронности растет и бифуркационное значение  $k_{\text{биф}}$ .

## 2. Трехмерные системы

### 2.1. Зависимость картины синхронизации от направления импульсов.

Известно множество автоколебательных систем с трехмерным фазовым пространством: система Ресслера, генератор Анищенко–Астахова, генератор Кислова–Дмитриева и др. [1–2, 4, 28, 31]. В этих системах также возможна бифуркация Андронова–Хопфа. Поэтому, в силу универсальности этой бифуркации, на первый взгляд кажется, что картина синхронизации импульсами для таких систем должна укладываться в рамки картины, описанной в п. 1.1 и 1.2. Отличия могут наступать лишь в области, где существенно проявляется наличие третьего измерения в автономной системе: удвоения периода и хаос. Это оказывается, однако, не вполне так. Действительно, бифуркация Андронова–Хопфа универсальна. Однако в трехмерной системе она «разыгрывается», фактически, на некоторой поверхности, вложенной в трехмерное фазовое пространство. Поэтому действие импульсов в пределах этой поверхности дает описанную выше картину. Однако есть третье, трансверсальное к указанной поверхности направление. Картина синхронизации при действии импульсов в этом направлении вполне может оказаться иной. Это можно проиллюстрировать на примере системы Ресслера [28]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + py, \\ \dot{z} &= q + z(x - r),\end{aligned}\tag{10}$$

где  $x, y, z$  – динамические переменные;  $p, q, r$  – параметры системы. Положим значения параметров  $p = 0.2, q = 0.1, r = 1.5$ . В этом случае в автономной системе Ресслера реализуется устойчивый предельный цикл. Его особенность состоит в том, что он почти целиком располагается в плоскости  $(x, y)$  и лишь малая его часть «выступает» в направлении оси  $z$ . На рис. 7 показаны карты динамических режимов системы (10) с внешним импульсным воздействием на плоскости параметров период  $T$  – амплитуда  $B$  воздействия. Периоды режимов, отмеченных на карте, определялись в стробоскопическом сечении, проводимом через период воздействия.

Нетрудно видеть, что рис. 7, а вполне отвечает ситуации, рассмотренной в п. 1.1 и 1.2, и система языков синхронизации качественно близка случаю двумерных неизохронных систем и стандартному синус-отображению окружности. Однако имеется и отличие – в трехмерной системе появляется область убегания тра-

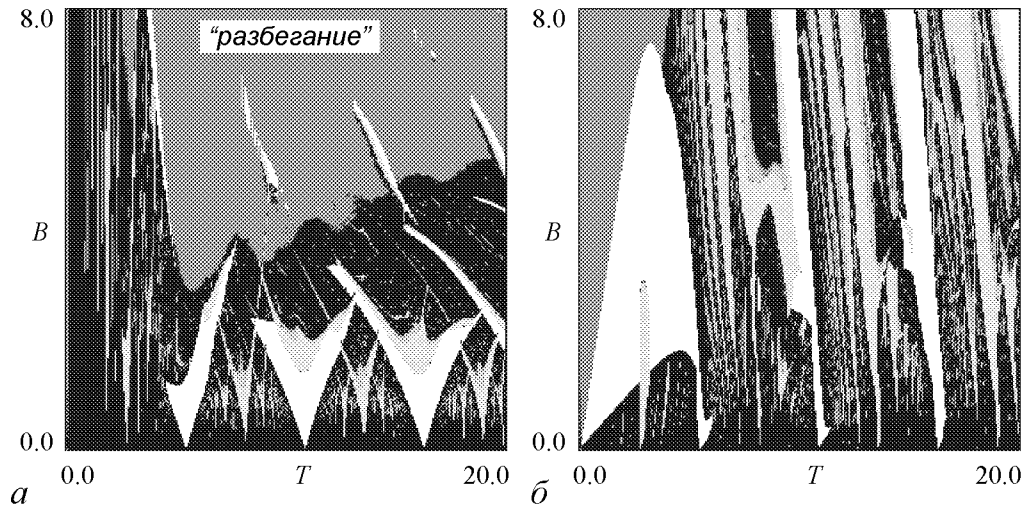


Рис. 7. Карты динамических режимов неавтономной системы Ресслера в случае воздействия импульсов вдоль оси  $x$  (а) и вдоль оси  $z$  (б)

ектории на бесконечность, отвечающая достаточно большой амплитуде импульсов. А вот рис. 7, б дает совершенно другую, специфическую картину языков синхронизации. Таким образом, картина синхронизации в трехмерных автоколебательных динамических системах может зависеть от направления действия импульса. Более подробное обсуждение этих вопросов и другие примеры (в частности, генератор Кислова–Дмитриева) можно найти в работах [24–26].

## 2.2. Стабилизация импульсами в режиме «убегающей» траектории.

В трехмерных динамических системах возможны и другие интересные колебательные режимы, инициированные внешним воздействием. Будем, например, уменьшать ответственный за бифуркацию Андронова–Хопфа основной управляющий параметр. Тогда предельный цикл будет уменьшаться в размере, пока не исчезнет. Оставшаяся устойчивая неподвижная точка также может исчезнуть в результате последующей седло-узловой бифуркации. Особенность трехмерных систем состоит в том, что неподвижные точки характеризуются не двумя, а тремя собственными числами. Поэтому в результате седло-узловой бифуркации могут слиться, например, устойчивый фокус и седло-фокус [2]. После слияния точек такого типа создается поток фазовых траекторий «с вращением», и у системы сохраняется некоторый внутренний ритм, хотя устойчивые и неустойчивые режимы в автономной системе отсутствуют. Такая ситуация не имеет аналога в двумерных системах и создает определенные предпосылки для возникновения синхронных и квазипериодических режимов.

Обсудим описанную ситуацию на примере системы Ресслера (10). Эта система имеет две неподвижные точки

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{r \mp \sqrt{r^2 - 4pq}}{2}, \\
 y_0 &= \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4pq}}{2p}, \\
 z_0 &= \frac{r \mp \sqrt{r^2 - 4pq}}{2p}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что седло-узловая бифуркация имеет место при условии  $r^2 = 4pq$ . Зафиксируем параметры  $p = 0.2$ ,  $q = 0.2$ . Тогда седло-узловая бифуркация происходит при  $r = 0.4$ . Соответствующее характеристическое уравнение в этой точке имеет одно действительное и пару комплексно-сопряженных собственных чисел

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{2}. \quad (12)$$

Таким образом, можно оценить период внутреннего «ритма» системы как

$$T_{\text{вн}} = \frac{2\pi}{|\text{Im}\lambda_{2,3}|} = \sqrt{2}\pi \approx 4.5. \quad (13)$$

Понятно, что при некотором смещении от точки бифуркации период осцилляций несколько изменится, но не сильно. На рис. 8, *a* показана реализации  $x(t)$  автономной системы Ресслера при  $r = 0.2$ , что отвечает отсутствию неподвижных точек в системе. Нетрудно видеть, что динамика переменной  $x$  действительно характеризуется наличием осцилляций, причем их период хорошо совпадает с оценкой, данной формулой (13). Динамика переменной  $y(t)$  также характеризуется наличием осцилляций, на которые наложен медленный дрейф. Этот дрейф, в конечном итоге, и отвечает за убегание изображающей точки на бесконечность (рис. 8, *б*).

Добавим теперь в систему (10) внешнее импульсное воздействие следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z + B \sum \delta(t - nT), \\ \dot{y} &= x + py, \\ \dot{z} &= q + z(x - r). \end{aligned} \quad (14)$$

На рис. 8 вместе с реализациями автономной системы показаны и реализации возбуждаемой системы (14). Из рис. 8, *a* нетрудно видеть, что имеет место режим синхронизации с соотношением частот 1:4 по отношению к внутреннему ритму системы. Графики реализации  $y(t)$  на рис. 8, *б* демонстрируют, как внешние толчки меняют скорость изменения переменной  $y$  и тем самым компенсируют дрейф, характерный для свободного движения.

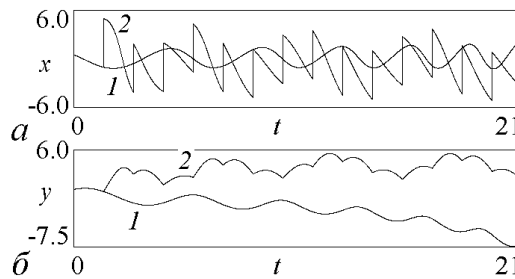


Рис. 8. Реализации автономной (1) и возбуждаемой импульсами (2) системы Ресслера  $x(t)$  и  $y(t)$  при  $p = q = r = 0.2$ . Импульсы включаются в момент времени  $t = 1.4$

На рис. 9 показана карта динамических режимов системы (14) на плоскости параметров период – амплитуда внешнего воздействия в случае, когда в автономной системе вообще нет неподвижных точек. Тем не менее нетрудно видеть, что наряду с областью убегания траектории на бесконечность возможны и устойчивые режимы. Так, имеет место система языков синхронизации разной кратности. Внутри языков можно видеть области удвоенного периода. Вне языков реализуются квазипериодические режимы. Рядом с картой показаны фазовые портреты системы в режиме синхронизации 1:4 и в случае квазипериодических колебаний. На портретах аттракторов хорошо видны импульсы, действующие на систему в направлении оси  $x$ .

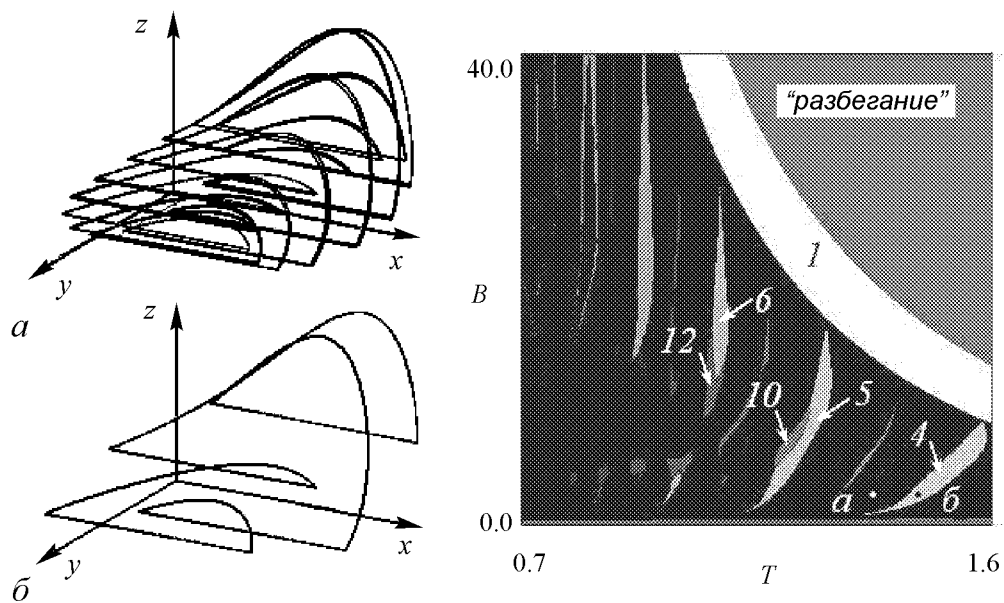


Рис. 9. Карта динамических режимов возбуждаемой импульсами системы Ресслера (14) и портреты аттракторов, отвечающих режиму периода 4 – точка  $\bar{b}$  ( $T = 1.4$ ,  $B = 6$ ) и квазипериодическому режиму – точка  $a$  ( $T = 1.3$ ,  $B = 6$ )

Таким образом, особенности трехмерных динамических систем дают возможность наблюдать устойчивые синхронные режимы разной кратности и квазипериодические режимы даже в случае, когда в автономной системе отсутствуют неподвижные точки и аттракторы.

**2.3. Удвоения торов в системе с «убегающей» траекторией.** Возбуждаемая импульсами трехмерная динамическая система в режиме «убегающих» траекторий может демонстрировать еще один интересный тип поведения. Вновь обратимся к неавтономной системе Ресслера (14). При постепенном уменьшении периода воздействия при фиксированной амплитуде в системе (14) возрастает кратность языков синхронизации (рис. 9) и, соответственно, число импульсов, наблюдаемых на аттракторе. В этом случае удобно перейти от фазовых портретов типа рис. 9 к сечениям Пуанкаре. С этой целью в трехмерном пространстве  $(x, y, z)$  изображаем последовательно точки, отвечающие стробоскопическому сечению Пуанкаре, то есть «зафиксированные» через период внешнего воздействия  $T$ . Примеры таких иллюстраций даны на рис. 10. На нем можно видеть замкнутую инвариантную кривую, которая, в силу определения сечения Пуанкаре, отвечает квазипериодическому режиму.

Будем еще более уменьшать период воздействия. Если периоды воздействия будут совсем малыми, то возникает новый эффект. Инвариантная кривая становится «двухоборотной» (рис. 10, б). В нелинейной динамике принято называть такой тип перестройки удвоением тора [31]. При дальнейшем уменьшении периода воздействия происходит удвоение уже двухоборотной инвариантной кривой и т.д. (рис. 10, в, г).

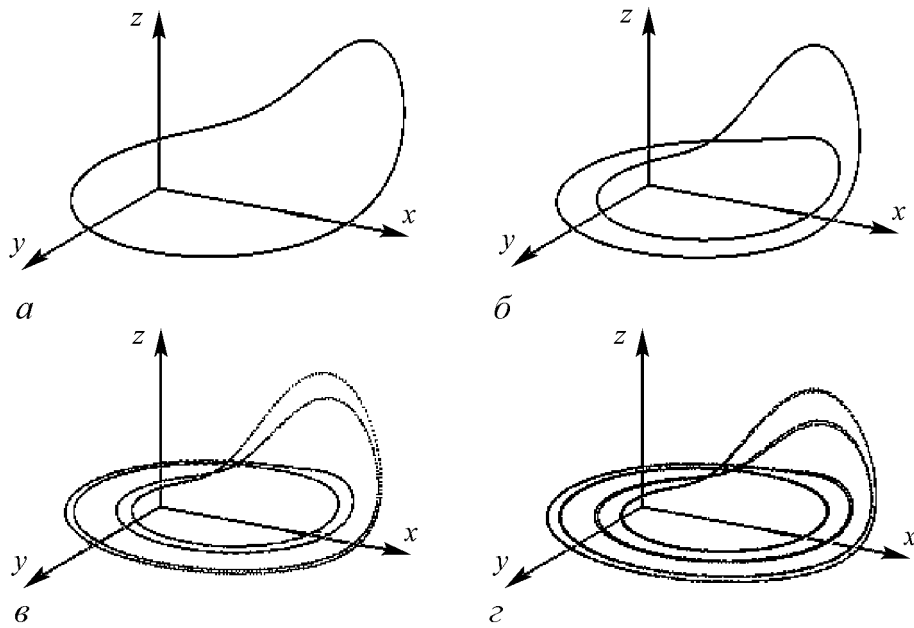


Рис. 10. Иницированные импульсами удвоения торов в системе Ресслера (14) в режиме «убегающей» траектории. Показаны траектории, отвечающие стробоскопическому сечению Пуанкаре через период внешнего воздействия. Параметры неавтономной системы выбраны следующие:  $p = q = r = 0.2$ ;  $B = 6$ ;  $T = 0.5$  (а); 0.4 (б); 0.32 (в); 0.305 (г)

Итак, в трехмерной системе с «убегающими» в автономном режиме траекториями возможен каскад удвоения торов, реализующийся при уменьшении периода воздействия. При этом особенность данной задачи – большое число наблюдаемых удвоений торов, когда торы не разрушаются, что связано, надо полагать, с очень простой динамикой автономной системы.

### 3. Четырехмерные системы

**3.1. Взаимная синхронизация неизохронных осцилляторов.** Перейдем теперь к обсуждению свойств системы с четырехмерным фазовым пространством. Она может состоять из двух составляющих – самостоятельных двумерных автоколебательных систем, а значит, может наблюдаться «внутренняя», взаимная синхронизация. Теория взаимной синхронизации систем с предельными циклами – обширная область теории колебаний и нелинейной динамики, и ей посвящено значительное число работ (см., например [1–4, 32–44] и цитированную там литературу). Мы обсудим некоторые ее аспекты, не получившие пока достаточного освещения.

Классической моделью для изучения взаимной синхронизации может служить система связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)y + \beta y^3 + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – параметры, характеризующие степень превышения над порогом бифуркации Андронова–Хопфа в автономных осцилляторах;  $\Delta$  – частотная расстройка

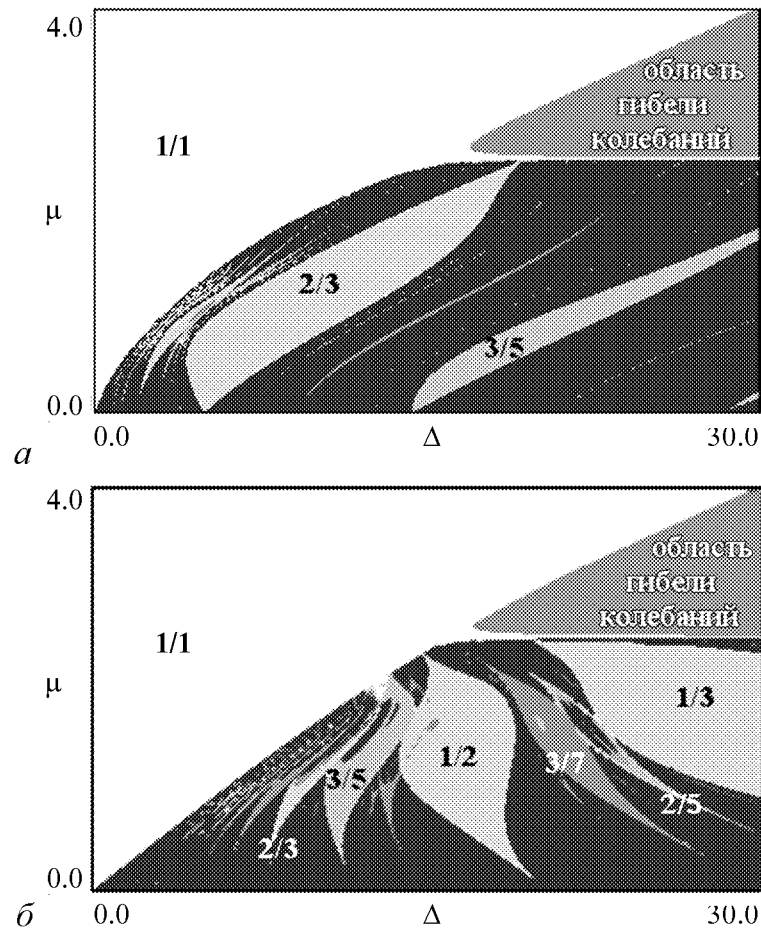


Рис. 11. Карты динамических режимов системы (15) в случае изохронных  $\beta = 0$  (а) и неизохронных  $\beta = 1$  (б) связанных осцилляторов. Управляющие параметры:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2.5$

второго осциллятора относительно первого;  $\beta$  – параметр неизохронности осцилляторов;  $\mu$  – коэффициент диссипативной связи<sup>4</sup>.

Как мы видели при обсуждении режимов вынужденной синхронизации в п. 1.1 и 1.2, неизохронность оказывает заметное влияние на картину наблюдаемых режимов. Естественно ожидать, что неизохронность заметно скажется и на динамике системы (15). Показанные на рис. 11 карты динамических режимов (15) позволяют сравнить между собой изохронный (рис. 11, а) и неизохронный (рис. 11, б) случаи. Сделаем одно замечание, касающееся построения карт режимов для связанных систем. В этом случае нет воздействия с фиксированным периодом, поэтому построить стробоскопическое сечение Пуанкаре невозможно. Исследуемая система характеризуется четырехмерным фазовым пространством  $(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ . Поэтому в качестве сечения Пуанкаре будет выступать трехмерная гиперповерхность, заданная некоторым дополнительным условием, например, равенством нулю скорости второго осциллятора  $\dot{y} = 0$ . В этом случае определялось число точек  $n$  пересечений траектории и секущей. На картах цвет выбран в соответствии с периодом  $n$ .

<sup>4</sup>Мы ограничиваемся здесь случаем связи через скорости осцилляторов, то есть диссипативной связи.

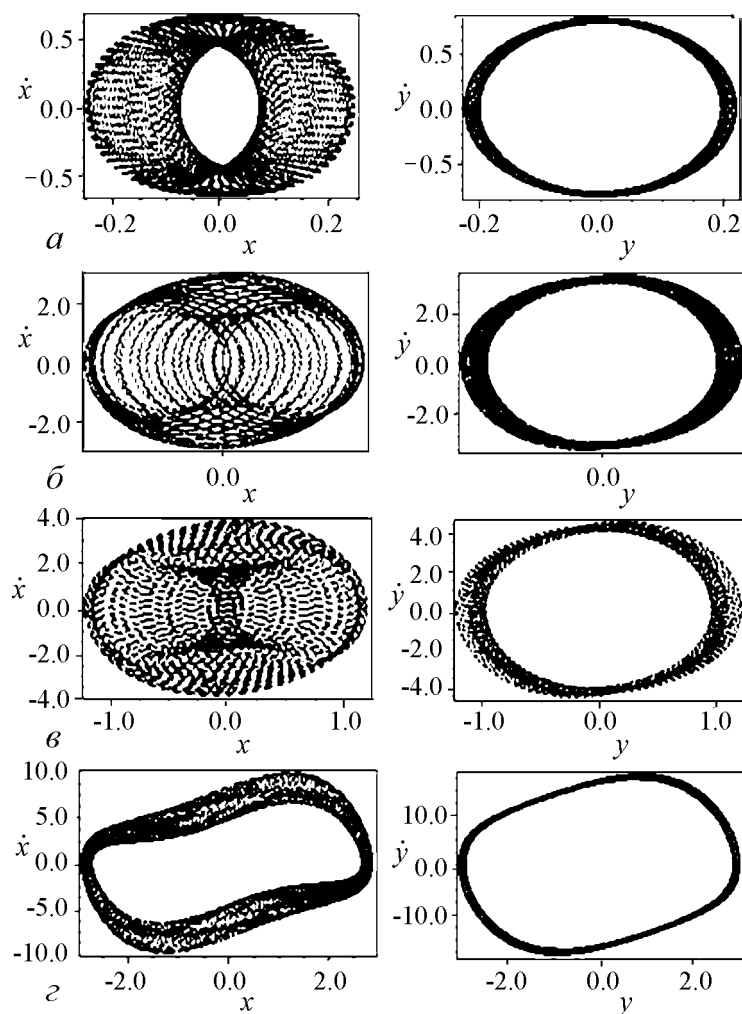


Рис. 12. Фазовые портреты квазипериодических режимов первого и второго связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга (15). (Здесь и далее первому осциллятору соответствует переменная  $x$ , второму  $y$ .)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2.5$ ,  $\beta = 1$ . Значения параметров:  $\Delta = 19.82$ ,  $\mu = 2.48$  (а);  $\Delta = 19.82$ ,  $\mu = 2.31$  (б);  $\Delta = 19.82$ ,  $\mu = 2.21$  (в);  $\Delta = 26.97$ ,  $\mu = 0.41$  (г)

На карте рис. 11, а обнаруживаются области квазипериодического поведения, языки синхронизации с разным соотношением захваченных частот и специфическая область эффекта «гибели колебаний» [1, 32], которому отвечает устойчивая неподвижная точка, расположенная в начале координат.

Сравнение рис. 11, а и б говорит о том, что при наличии неизохронности происходит смещение кратных языков синхронизации в сторону больших значений частотной расстройки. Языки заметно расширяются, так что можно видеть ситуацию перекрытия языков синхронизации, характерную для стандартного синусотображения окружности (6). Также изменяется внутреннее устройство языков: наблюдаются удвоения периода и возникновение областей хаотической динамики внутри самих языков синхронизации. С ростом параметра неизохронности  $\beta$  происходит рождение новых островов удвоенного периода. Визуально возникают две системы языков, вершины первой выстроены вдоль линии нулевой связи, а второй – вдоль



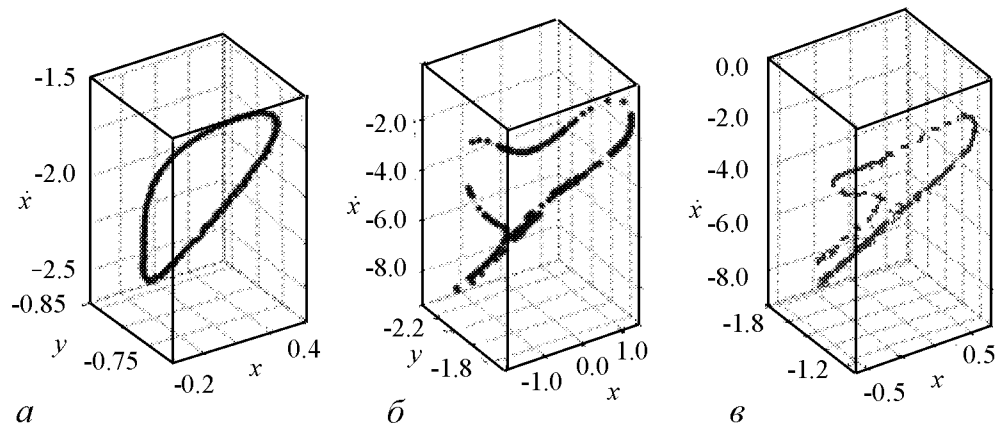


Рис. 13. Инвариантная кривая и ее разрушение в сечении Пуанкаре связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга (15).  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2.5$ ,  $\beta = 1$ . Отмечены точки, отвечающие стробоскопическому сечению через период воздействия. Значения параметров:  $\Delta = 18.72$ ,  $\mu = 2.33$  (а);  $\Delta = 12.51$ ,  $\mu = 1.63$  (б);  $\Delta = 10.05$ ,  $\mu = 1.56$  (в)

границы основной области синхронизации 1:1, которая, очевидно, является линией бифуркации Неймарка–Сакера. Область хаоса формируется в пространстве, разделяющем эти системы языков синхронизации.

На рис. 12 показано несколько характерных фазовых портретов первого и второго осциллятора системы (15) в квазипериодическом режиме. При небольшой связи портреты аттракторов представляют собой достаточно мало возмущенные предельные циклы индивидуальных осцилляторов. При этом изображающая точка никогда не посещает окрестность начала координат. С ростом связи траектории индивидуальных осцилляторов возмущаются все сильнее, и наступает момент, когда изображающая точка первого осциллятора может посещать и окрестность начала координат. Соответствующий фазовый портрет выглядит как полностью «замазанный» траекториями. Очевидно, что фаза этого осциллятора оказывается плохо определяемой. По мере приближения к области гибели колебаний происходит существенное уменьшение размера аттракторов (см. масштабы по осям координат). Изображающая точка вновь перестает посещать начало координат, но вид аттрактора отличается от случая малой связи.

На рис. 13 представлены некоторые трехмерные «сечения Пуанкаре», иллюстрирующие динамику системы связанных осцилляторов в областях квазипериодических режимов и вблизи порога хаоса. Напомним, что сечение Пуанкаре выбиралось в виде гиперповерхности  $\dot{y} = 0$  в четырехмерном фазовом пространстве  $(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ . Таким образом, сечение Пуанкаре – это траектория системы в трехмерном пространстве  $(x, \dot{x}, y)$ , как и показано на рис. 13. Можно видеть, что фазовый портрет в таком сечении Пуанкаре представляют инвариантные кривые, что иллюстрирует квазипериодический характер динамики. При приближении к области хаоса кривые начинают деформироваться и разрушаются через потерю гладкости.

**3.2. Синхронизация неидентичных осцилляторов. Широкополосная синхронизация.** Мы рассмотрели случай синхронизации идентичных по управляющим параметрам осцилляторов  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Стоит отметить, что это традиционное предположение, характерное почти для всех публикаций на данную тему. В то же время

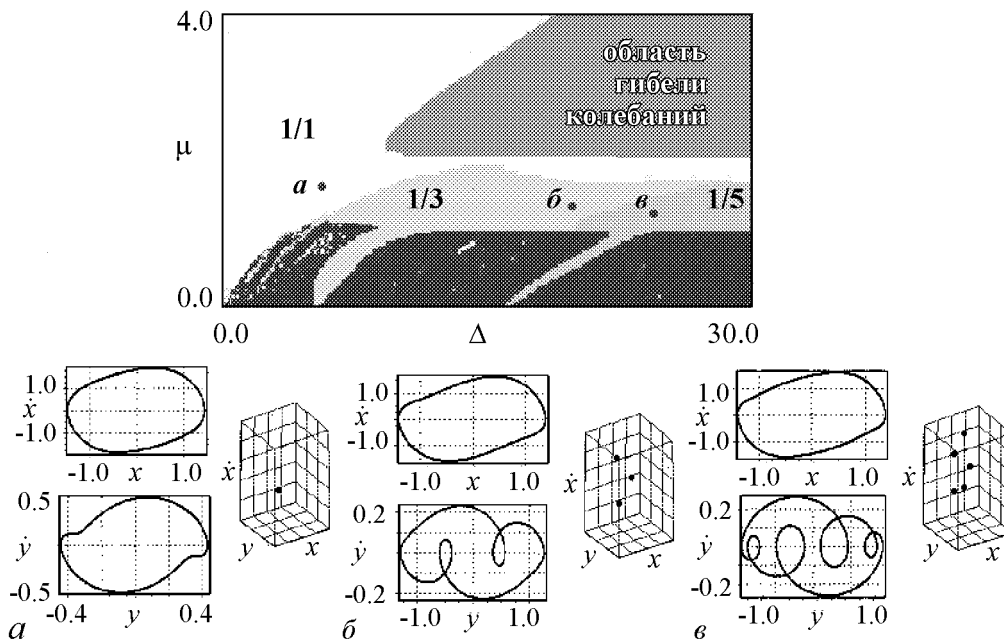


Рис. 14. Карта динамических режимов системы связанных неидентичных осцилляторов ван дер Поля (15) для  $\lambda_1 = 2.0$ ,  $\lambda_2 = 1.0$ ,  $\beta = 0$  и характерные фазовые портреты первого и второго осцилляторов, а также трехмерные портреты аттракторов в сечении Пуанкаре, отвечающем пересечению поверхности  $\dot{y} = 0$

случай неидентичных управляющих параметров выявляет интересные и существенные особенности картины синхронизации [40, 42–44]. На рис. 14 показана карта динамических режимов и характерные фазовые портреты осцилляторов в случае неидентичных параметров ( $\lambda_1 = 2.0$ ,  $\lambda_2 = 1.0$ ). Можно видеть, что неидентичность существенно сказалась на устройстве плоскости параметров. Область гибели колебаний и квазипериодических режимов оказалась разделенной узкой полосой синхронных периодических режимов. Размер этой полосы определяется по величине связи управляющими параметрами осцилляторов и задается неравенством  $\lambda_1 < \mu < \lambda_2$ .

По частотной же расстройке размер этой новой области ничем не ограничен. При продвижении внутри полосы на фазовом портрете второго осциллятора увеличивается число «петель», однако, сохраняются режимы взаимной синхронизации. Это хорошо видно также и на портретах в сечении Пуанкаре в пространстве  $(x, \dot{x}, y)$ . Мы видим небольшое число точек, что отвечает синхронным режимам, причем число пересечений с секущей поверхностью растет по мере продвижения вглубь выявленной области.

Таким образом, возникает ситуация, которую можно охарактеризовать как «широкополосная синхронизация» [43, 44]. Природа ее понятна: при условии  $\lambda_2 < \mu < \lambda_1$  первый, более возбужденный осциллятор доминирует над вторым. Это находит свое воплощение в заметном уменьшении размеров предельного цикла второго осциллятора при увеличении частотной расстройки. (Обратите внимание на масштабы по осям координат на фазовых портретах.) Другие детали особенности динамики неидентичных по управляющему параметру осцилляторов можно найти в работах [40, 42–44].

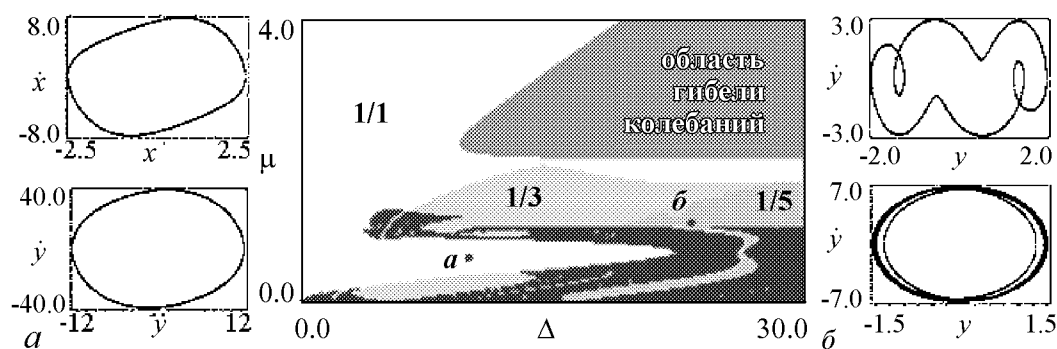


Рис. 15. Карта динамических режимов системы связанных неидентичных по управляющим параметрам и нелинейной диссипации осцилляторов ван дер Поля (16) для  $\lambda_1 = 2.0$ ,  $\lambda_2 = 1.0$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $\beta = 0$  и характерные фазовые портреты первого и второго осцилляторов в отмеченных на карте точках  $a$  и  $b$

Можно, однако, при большой частотной расстройке добиться возникновения режимов синхронизации и в случае, когда осцилляторы равноправны. Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - \gamma y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)\dot{y} + \beta y^3 + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь введен дополнительный параметр  $\gamma$ , характеризующий нелинейную диссипацию второго осциллятора. С помощью квазигармонического приближения нетрудно получить оценки размеров предельных циклов в автономном случае: для первого осциллятора – это  $\sqrt{\lambda_1}$ , а для второго –  $\sqrt{\lambda_2/\gamma}$ . Таким образом, если использовать малые значения  $\gamma$ , можно заметно увеличить размер предельного цикла второго осциллятора.

Карта режимов для системы (16) при  $\gamma = 0.01$ ,  $\beta = 0$  и несколько характерных фазовых портретов показаны на рис. 15. Можно видеть, что в этом случае широкополосная синхронизация сохраняется, более того, у основного языка синхронизации появился дополнительный «отросток», в пределах которого осцилляторы теперь равноправны. (О «равноправности» или доминировании осциллятора судим по виду фазового портрета и размерам аттрактора.) В областях кратной синхронизации осцилляторы теперь могут быть как равноправными, так может произойти и смена «лидирующего» осциллятора, когда второй осциллятор доминирует.

**3.3. Возбуждение импульсами диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов. Эффект «вымирания» островов квазипериодических режимов.** Обратимся теперь к системе диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля, возбуждаемых внешними импульсами

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= B \sum \delta(t - nT), \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - \gamma y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)\dot{y} + \beta y^3 + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Интересным является вопрос: как проявится в динамике возбуждаемой системы возможность режима «гибели колебаний» связанных осцилляторов? Для ответа на него будем следить за устройством плоскости параметров период  $T$  – амплитуда

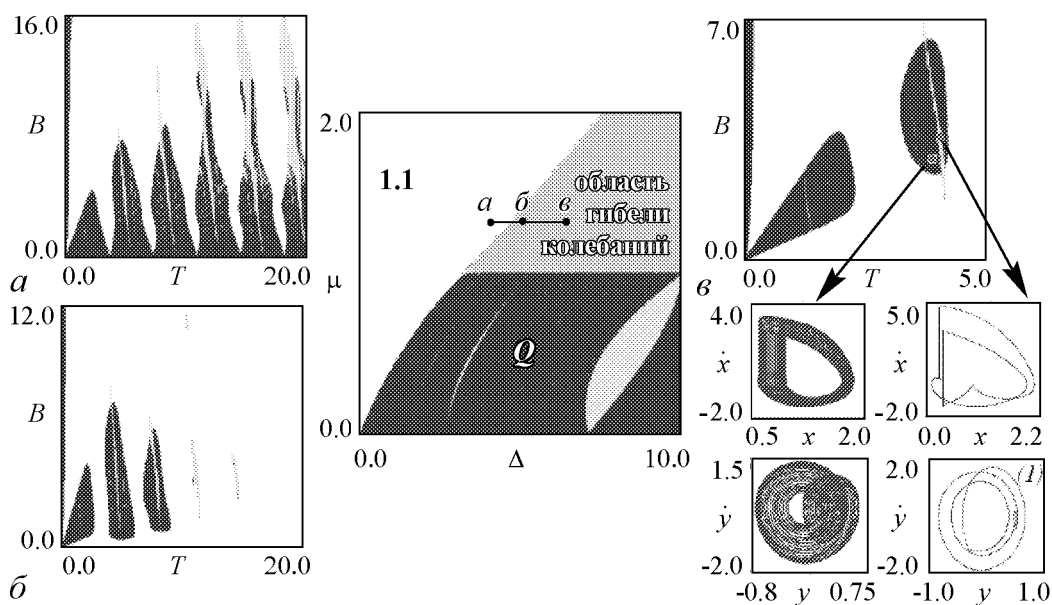


Рис. 16. Эволюция карты динамических режимов возбуждаемой импульсами системы диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля (17) при продвижении вглубь области «гибели колебаний» автономной системы:  $\mu = 1.3$ ;  $\Delta = 4(a)$ ,  $5(b)$ ,  $6(в)$ . Фазовые портреты первого и второго осцилляторов в избранных точках «острова», отвечающих квазипериодическому режиму и режиму периода два

воздействия  $B$ , постепенно продвигаясь по плоскости параметров связанных осцилляторов вглубь области «гибели колебаний». С этой целью зафиксируем величину связи, и будем постепенно увеличивать частотную расстройку осцилляторов  $\Delta$ .

На рис. 16 показаны характерные плоскости параметров воздействия  $(T, B)$  системы (17), отвечающие трем избранным точкам вблизи границы области гибели колебаний. Можно видеть, что колебательные режимы, причем достаточно разнообразные, сохраняются и внутри области гибели колебаний. В точке, отвечающей рис. 16,  $a$ , в автономной системе наблюдается захват частот колебаний осцилляторов с соотношением 1:1. В этом случае картина синхронизации в неавтономном режиме на плоскости  $(T, B)$  в значительной мере аналогична случаю воздействия импульсами на отдельный осциллятор ван дер Поля [19].

При продвижении вдоль выделенной горизонтальной линии в сторону области «гибели колебаний», однако, наблюдается существенное изменение картины. С ростом частотной расстройки  $\Delta$  в момент перехода в режим гибели колебаний области квазипериодических режимов «отрываются» от оси нулевой амплитуды воздействия (переход от рис. 16,  $a$  к рис. 16,  $б$ ). Теперь они отделены от оси областью периода 1. При этом области квазипериодических режимов образуют отдельные изолированные «острова». При дальнейшем увеличении частотной расстройки осцилляторов острова постепенно уменьшаются в размерах и поэтапно «вымирают». Наиболее долгоживущим является остров, отвечающий наименьшему периоду внешнего воздействия. При этом вымирание островов квазипериодических режимов происходит достаточно глубоко внутри области гибели колебаний системы связанных осцилляторов<sup>5</sup>. На рис. 16 представлены также два фазовых портрета осцилляторов, относящихся

<sup>5</sup>Нетрудно усмотреть здесь некоторую аналогию с механизмом исчезновения колебательных режимов в возбуждаемом импульсами автогенераторе с жестким возбуждением, см. п. 1.4.

к наиболее крупному «долгоживущему» острову. Можно видеть, что некоторые из областей периодических режимов, например, области периода 3 и 2, образуют очень узкие «окна», пересекающие остров.

Таким образом, при наличии большой диссипативной связи две связанные системы ван дер Поля ведут себя как затухающий осциллятор – демонстрируют режим «гибели колебаний». Однако внешнее импульсное воздействие даже в этом режиме выявляет присущие системе автоколебательные свойства, инициируя квазипериодическое поведение. Подчеркнем пороговый характер возникновения квазипериодических движений в режиме гибели колебаний автономных осцилляторов. А именно, для фиксированной частоты воздействия необходима некоторая минимальная величина импульсов, начиная с которой такой режим возможен.

*Работа поддержана грантами РФФИ № 06-02-16773 и фонда «Династия».*

### **Библиографический список**

1. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация, фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
3. *Гласс Л., Мэки М.* От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. 248 с.
4. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, Физматлит, 1997. С. 247.
5. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. Сер. Современная теория колебаний и волн. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006.
6. *Arnold V.I.* Cardiac arrhythmias and circle mappings // *Chaos*. 1991. Vol. 1, № 1. P. 20.
7. *Glass L., Sun J.* Periodic forcing of a limit-cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations // *Phys. Rev.* 1994. Vol. 50, № 6. P. 5077.
8. *Glass L. et al.* Global bifurcations of a periodically forced biological oscillator // *Phys. Rev. A*. 1983. № 29. P. 1348.
9. *Keener J.P., Glass L.* Global bifurcation of a periodically forced nonlinear oscillator // *J. Math. Biology*. 1984. № 21. P. 175.
10. *Ding E.J.* Analytic treatment of periodic orbit systematics for a nonlinear driven oscillator // *Phys. Rev.* 1986. Vol. A34, № 4. P. 3547.
11. *Ding E.J.* Analytic treatment of a driven oscillator with a limit cycle // *Phys. Rev.* 1987 Vol. A35, № 6. P. 2669.
12. *Ding E.J. and Hemmer P.C.* Exact treatment of mode locking for a piecewise linear map // *Journal of Statistical Physics*. 1987. Vol. 46, № 1–2. P. 99.
13. *Ding E.J.* Structure of parameter space for a prototype nonlinear oscillator // *Phys. Rev.* 1987. Vol. A36, № 3. P. 1488.
14. *Ding E.J.* Structure of the parameter space for the van der Pol oscillator // *Physica Scripta*. 1988. Vol. 38. P. 9.
15. *Cecchi C., Keener J.P., Glass L.* Periodically kicked hard oscillators // *Chaos*. 1993. № 1. P. 51.

16. *Viana R.L. and Batista A.M.* Synchronization of coupled kicked limit cycle systems // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1998. Vol. 9, № 12. P. 1931.
17. *Ullmann K. and Caldas I.L.* Transitions in the parameter space of a periodically forced dissipative system // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1996. № 11. P. 1913.
18. *Campbell A. et al.* Isochrones and the dynamics of kicked oscillators // *Physica A*. 1989. № 155. P. 565.
19. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Осциллятор ван дер Поля с импульсным воздействием: От дифференциального уравнения к отображению // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2001. Т. 9, № 6. С. 69.
20. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация автоколебательной системы ван дер Поля–Дуффинга короткими импульсами // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2004. Т. 12, № 5. С. 16.
21. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация в системе с неустойчивым циклом, инициированная внешним сигналом // *Письма в ЖТФ*. 2003. Т. 29, вып. 8. С. 52.
22. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Инициированные короткими импульсами устойчивые квазипериодические и периодические режимы в системе с неустойчивым предельным циклом // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2006. Т. 14, № 1. С. 72.
23. *Айдарова Ю.С., Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Сравнительный анализ синхронизации гармоническим и импульсным сигналом на примере системы Лоренца // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2007. Т. 15, № 4. С. 55.
24. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Особенности картины синхронизации импульсами в автоколебательной системе с трехмерным фазовым пространством // *Письма ЖТФ*. 2006. Т. 32, вып. 8. С. 41.
25. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Особенности синхронизации импульсами в системе с трехмерным фазовым пространством на примере системы Ресслера // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2006. Т. 14, № 6. С. 43.
26. *Kuznetsov A.P., Stankevich N.V. and Turukina L.V.* Picture of pulsed synchronization in the Dmitriev–Kislov generator // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2007. № 4. P. 407.
27. *Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М.: МЦНМО, 2005. 415 с.
28. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
29. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1990. 240 с.
30. *Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д.* К теории асинхронного возбуждения // *Журнал технической физики*. 1934. Т. IV, вып. 1. С. 98.
31. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
32. *Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N.* Amplitude response of coupled oscillators // *Physica D*. 1990. Vol. 41. P. 403.
33. *Rand R., Holmes.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1982. Vol. 17. P. 143.

34. *Storti D.W., Rand R.H.* Dynamics of two strongly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1980. Vol. 15. P. 387.
35. *Chakraborty T., Rand R.H.* The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1988. Vol. 23, № 5/6. P. 369.
36. *Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W.* Chaos and nonisochronism in weakly coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A*. 1991. № 44. P. 3452.
37. *Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W.* Hysteresis of synchronous – asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators // *Phys. Rev. A*. 1991. № 43. P. 5638.
38. *Pastor I., Perez-Garcia V.M., Encinas-Sanz F., Guerra J.M.* Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E*. 1993. № 48. P. 171.
39. *Camacho E., Rand R.H., Howland H.* Dynamics of two van der Pol oscillators coupled via a bath // *Int. J. of Solids and Structures*. 2004. № 41. P. 2133.
40. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // *Physica D*. 2004. Vol. 189, № 1–2. P. 8.
41. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* О динамике двух осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга с диссипативной связью // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2003. Т. 11, № 6. С. 48.
42. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* Особенности устройства пространства параметров двух неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2005. Т. 13. № 4. С. 3.
43. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе связанных осцилляторов ван дер Поля, неидентичных по управляющему параметру // *Письма в ЖТФ*. 2007. Т. 33, вып. 15. С. 15.
44. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга. Широкополосная синхронизация // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2007. Т. 15, вып. 4. С. 3.

*Саратовский филиал ИРЭ РАН  
Саратовский государственный  
университет*

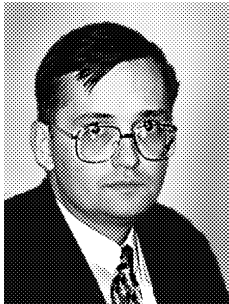
*Поступила в редакцию 15.03.2008*

## **PULSED SYNCHRONIZATION AND SYNCHRONIZATION IN COUPLED SYSTEMS: NEW ASPECTS OF CLASSICAL PROBLEM**

*A.P. Kuznetsov, Yu.P. Roman, N.V. Stankevich, L.V. Turukina*

Different features of the pulsed synchronization of self-oscillatory systems are considered. Namely nonisochronous, stabilization of the unstable systems, synchronization of the coupled oscillators in the region of the «oscillatory death» and etc. Illustrations for the coupled nonisochronously oscillators and nonidentical (controlling parameter and nonlinear dissipation) oscillators are presented.

*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). E-mail: [alkuz@sgu.ru](mailto:alkuz@sgu.ru); [www.sgnd.narod.ru](http://www.sgnd.narod.ru)



*Роман Юлия Павловна* – родилась в 1987 году. Окончила с золотой медалью Лицей прикладных наук города Саратова (2004). В настоящее время студентка 4 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Лауреат фонда поддержки фундаментальной физики «Династия». Опубликовала 2 статьи в научных журналах, участвовала во многих научных конференциях с публикацией тезисов докладов.

E-mail: [yuliaro@mail.ru](mailto:yuliaro@mail.ru)



*Станкевич Наталья Владимировна* – родилась в 1985 году. С 2000 по 2002 год обучалась в Лицее прикладных наук. В 2002 году поступила в Саратовский госуниверситет на факультет нелинейных процессов. В 2007 году закончила университет с отличием. В настоящее время аспирант факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается исследованием особенностей синхронизации короткими импульсами в многомерных автоколебательных системах. Автор 15 публикаций, в том числе 5-ти статей в российских и международных журналах.



*Тюрюкина Людмила Владимировна* – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами посредством коротких импульсов. Автор более 50 научных публикаций, из них около 20 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов.

E-mail: [ludmila@forpost.ru](mailto:ludmila@forpost.ru)

