



МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ СИНХРОННЫХ РЕЖИМОВ В АНСАМБЛЯХ НЕИДЕНТИЧНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ:

Цепочка и решетка связанных элементов

А.К. Крюков, Г.В. Осипов, А.В. Половинкин

Изучается синхронизация в одно- и двумерных ансамблях локально связанных неидентичных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля. Доказано, что в малых ансамблях ($N \leq 4$) возможно сосуществование 2^{N-1} синхронных режимов. В цепочке из N элементов возможно сосуществование не менее 2^{N-1} устойчивых режимов глобальной синхронизации. Изучаются особенности кластерной синхронизации при слабой связи между элементами. Изучены синхронные режимы, обусловленные существованием волн, задающих общий ритм колебаний всем элементам ансамбля.

Ключевые слова: Синхронизация, мультистабильность, синхронный режим, численные методы, моделирование, ФитцХью–Нагумо, Бонхоффер–ван дер Поль.

Введение

В последнее время значительный интерес исследователей, работающих в области нелинейной динамики, привлечен к изучению поведения систем связанных нелинейных осцилляторов, обладающих свойством мультистабильности, то есть наличием в фазовом пространстве большого числа сосуществующих аттракторов. При этом установление того или иного движения в системе определяется начальными условиями. Мультистабильность обнаружена во многих электрических [1], лазерных [2, 3], механических [4] и биологических [5, 6] системах. В больших ансамблях в связи с наличием многих степеней свободы взаимодействие временных и пространственных масштабов приводит к возникновению нетривиальных коллективных эффектов – формированию пространственно-временных структур, распространению бегущих волн различной конфигурации, появлению пространственно-временного беспорядка и т.д. Одним из наиболее важных с точки зрения приложений и наиболее интенсивно изучаемых коллективных эффектов является синхронизация [7–9]. Наличие ряда сосуществующих различных синхронных режимов имеет важное значение в нейронных системах при сохранении и передаче информации, при распознавании образов и др. [10, 11]. Теоретические и экспериментальные результаты показывают,

что электрические и синаптические связи способны обеспечивать различные синхронные режимы – синфазные и противофазные (см. [12] и ссылки там).

Одна из наиболее популярных динамических систем, используемых при исследовании общих закономерностей поведения нейронных ансамблей, это система Бонхоффера–ван дер Поля [13]. Несмотря на ее сравнительную простоту, ансамбли таких систем демонстрируют широкий спектр коллективных явлений. В настоящей работе изучается синхронизация в одно- и двумерных ансамблях локально связанных неидентичных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля.

1. Модель

Система Бонхоффера–ван дер Поля [13] (иногда называемая системой ФитцХью–Нагумо) описывается уравнениями

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_j = x_j - \frac{x_j^3}{3} - y_j + \beta(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}), \\ \dot{y}_j = (x_j + a_j), \\ j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь β – величина связи, ε – малый параметр, a_j – отвечает за период и симметрию колебаний, N – количество элементов.

В работе анализируется коллективная динамика системы (1) при граничных условиях «свободные концы»

$$\begin{cases} x_0(t) = x_1(t), \\ x_N(t) = x_{N+1}(t), \end{cases} \quad (2)$$

и при периодических граничных условиях

$$\begin{cases} x_j(t) = x_{j+N}(t), \\ \dot{x}_j(t) = \dot{x}_{j+N}(t), \end{cases} \quad (3)$$

Мультистабильность синхронных режимов в системе Бонхоффера–ван дер Поля обусловлена индивидуальной динамикой элементов: при $a_j < 1$ (но близком к 1) колебания получаются сильно асимметричными, вследствие этого в ансамбле присутствует мультистабильность синхронных режимов. Если $|a_j| \ll 1$, то есть, если асимметрия колебаний мала, то такой мультистабильности нет.

2. Три связанных элемента

Рассмотрим динамику цепочки из трех элементов с линейно распределенными значениями параметра a : $a_{j+1} = a_j - \Delta a$, что определяет монотонное распределение индивидуальных частот элементов.

При исследовании синхронизации в цепочке из трех элементов было обнаружено сосуществование четырех различных режимов глобальной синхронизации: синфазного режима и трех смешанных режимов. В смешанном режиме два элемента из трех колеблются синфазно, а третий – в противофазе к ним. Режим, при котором второй элемент колеблется в противофазе к первому и третьему, может рассматриваться как противофазный.

В цепочке из трех осцилляторов синфазный режим устанавливается на максимальной частоте среди всех синхронных режимов; она близка к частоте самого быстрого (высокочастотного) элемента ансамбля и практически не зависит от параметра связи β . В остальных синхронных режимах частота синхронизации уменьшается с увеличением связи.

Зависимость частот элементов от параметра связи для различных синхронных режимов представлена на рис. 1. Видно, что, если система находится в противофазном режиме и связь начинает увеличиваться, то после перехода параметра связи через некое критическое значение противофазный режим становится неустойчивым. В результате устанавливается либо синфазный режим, либо один из смешанных режимов, который при дальнейшем увеличении связи также станет неустойчивым, и система опять может перейти либо в синфазный режим, либо в другой смешанный режим. Таким образом, при увеличении параметра связи сначала исчезает противофазный режим, затем поочередно оба смешанных режима, и при сильной связи остается устойчивым только синфазный синхронный режим.

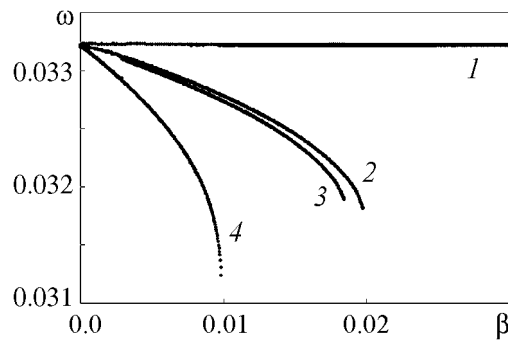


Рис. 1. Зависимость частот синхронизации от параметра связи при $a_1 = 0.995$, $\Delta a = 0.001$, $\varepsilon = 0.02$ (1 – синфазный синхронный режим, 2 и 3 – смешанные синхронные режимы, 4 – противофазный синхронный режим)

3. Четыре связанных элемента

Предположим, что в цепочке из K элементов возможно сосуществование M синхронных режимов. Присоединяем новый элемент к исходной цепочке. Этот элемент может быть синхронизован синфазно или противофазно с соседним. То есть получается $2M$ режимов (M в случае синфазной синхронизации нового элемента с соседним и еще M в случае противофазной синхронизации). Таким образом, полученные результаты в малых ансамблях ($N = 2$, $N = 3$) позволяют сделать вывод о существовании 2^{N-1} синхронных режимов.

Верность утверждения о существовании 2^{N-1} синхронных режимов показывают и эксперименты с четырьмя связанными элементами. В эксперименте параметры a_j были распределены линейно. Граничные условия выбраны периодическими. При одних и тех же значениях параметров было обнаружено восемь синхронных режимов, которые представлены на рис. 2.

Заметим, что получение 2^{N-1} синхронных режимов в системе из $N = 6$ или $N = 8$ ($2^{8-1} = 128$) элементов принципиально не отличается от случая с $N = 4$, за исключением объема и трудоемкости получения и представления результатов.

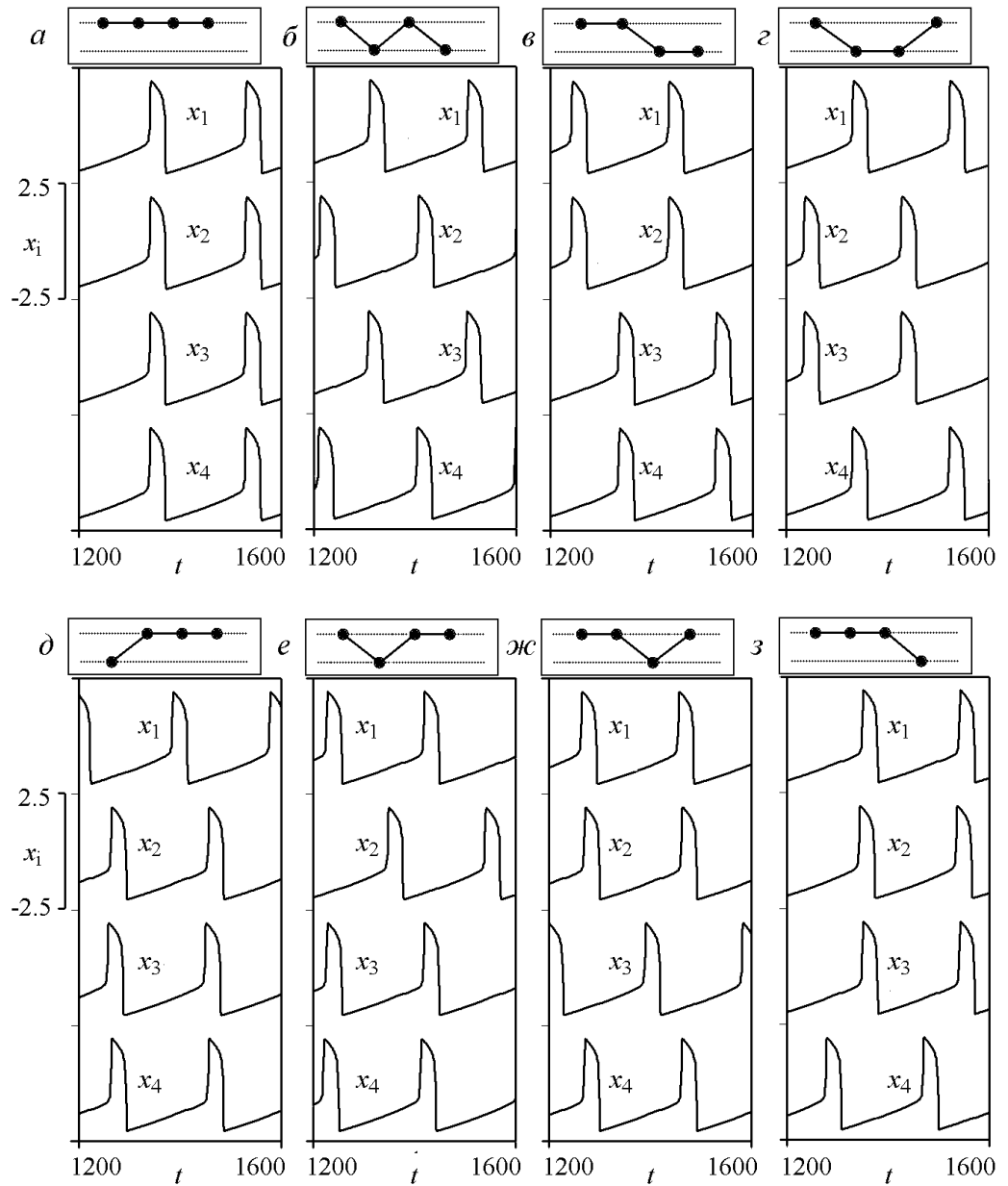


Рис. 2. Восемь устойчивых синхронных режимов в системе четырех связанных элементов: синфазный режим $\omega_a = 0.033131$ (а); противофазный режим, $\omega_b = 0.032255$ (б); смешанные режимы: $\omega_c = 0.032740$ (в), $\omega_z = 0.032744$ (г), $\omega_d = 0.032583$ (д), $\omega_e = 0.032613$ (е), $\omega_{ж} = 0.032633$ (ж), $\omega_z = 0.032661$ (з). Значения параметров: $\varepsilon = 0.02$, $a_1 = 0.995$, $\Delta = 0.00007$, $\beta = 0.0055$; периодические граничные условия

4. Цепочка связанных элементов

Для исследования синхронизации в больших ансамблях рассмотрена цепочка из пятидесяти связанных элементов. Проведена серия вычислительных экспериментов. Полученные результаты позволяют предположить что и в длинных цепочках при некоторых значениях параметров возможно сосуществование 2^{N-1} раз-

личных устойчивых режимов глобальной синхронизации. В численных экспериментах было найдено несколько таких режимов. Зависимость частот элементов от параметра связи в цепочке из пятидесяти элементов показана на рис. 3. В эксперименте для всех β начальные условия брались одинаковые (противофазные). Характер изменения частот синхронизации в цепочке из пятидесяти элементов аналогичен характеру изменения частот синхронизации в цепочке из трех элементов: частота синфазного режима не меняется при изменении связи, частоты смешанных и противофазного режима уменьшаются при увеличении связи. На этом же рисунке можно видеть различные синхронные режимы в цепочке.

В цепочке из 128 элементов с периодическими граничными условиями был обнаружен синхронный режим, имеющий более высокую частоту, чем синфазный синхронный режим. Этот режим обусловлен волной возбуждения, бегущей по кольцу элементов. Частота определяется периодом обращения волны. Характерные пространственно-временные диаграммы данного и синфазного режимов приведены на рис. 4.

Численно также установлено, что, если связь недостаточна для установления глобальной синхронизации, формируются группы соседних элементов, колеблющиеся с одинаковой частотой. Этот эффект известен как кластерная синхронизация [15]. При отсутствии связи каждый элемент колеблется с собственной частотой. При включении связи образуются группы элементов, внутри которых элементы

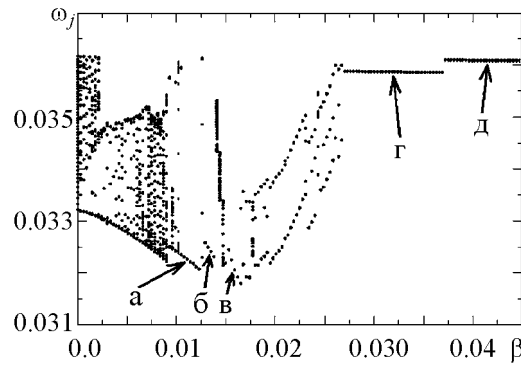


Рис. 3. Зависимость частот элементов от параметра связи; $a_1 = 0.995$, $\Delta a = 0.001$, $\varepsilon = 0.02$; а, б, в, г – смешанные синхронные режимы, д – синфазный синхронный режим

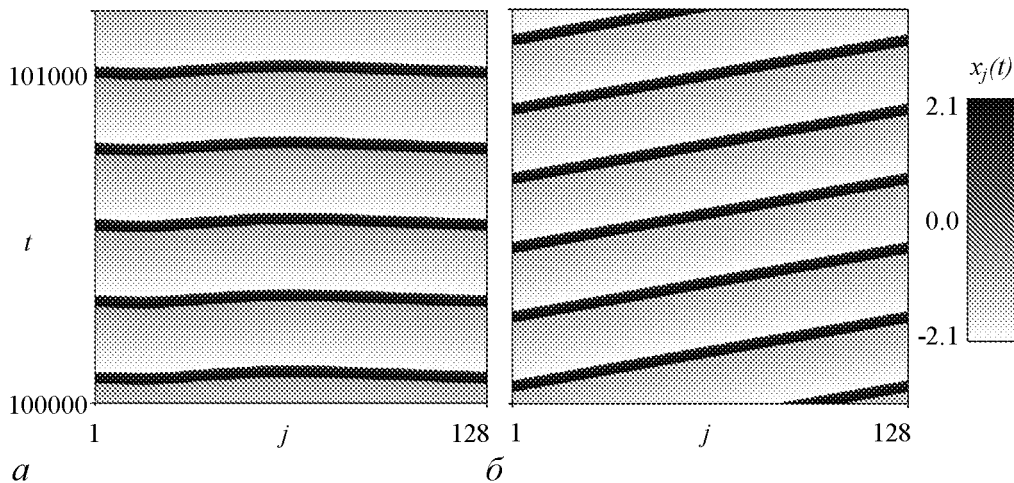


Рис. 4. Пространственно-временные диаграммы синфазного режима (а) и режима, обусловленного распространением волны возбуждения по цепочке элементов с периодическими граничными условиями (б)

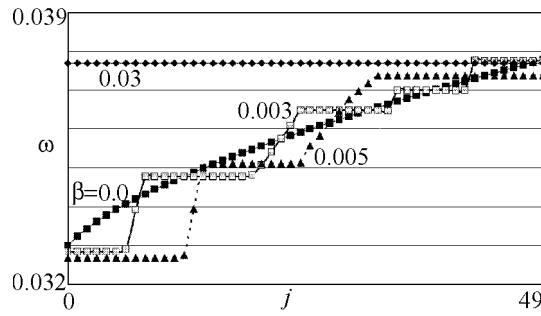


Рис. 5. Кластерная и глобальная синфазная синхронизация в цепочке из 50 элементов при $a_1 = 0.995$, $\Delta a = 0.001$, $\varepsilon = 0.02$ для различных β

совершают колебания с одной и той же частотой (кластеры синхронизации). При увеличении связи число кластеров сокращается, и при дальнейшем увеличении связи наступает глобальная синхронизация. Поскольку в представленном эксперименте глобальная синхронизация синфазная, то она устанавливается на частоте, близкой к индивидуальной частоте самого быстрого элемента (рис. 5).

5. Решетка связанных элементов

В двумерной решетке взаимодействующих элементов кроме уже описанных синхронных режимов могут возникать синхронные режимы, обусловленные существованием волн, реализующихся в двумерных средах. В решетке 100×100 элементов со свободными концами были обнаружены два режима, характеризующиеся распространением волны возбуждения в системе: режим с одной концентрической волной, распространяющейся от самого быстрого элемента в решетке, и режим, обусловленный существованием спиральной волны в решетке.

Характерное распределение $x_{ij}(t)$ в системе с синхронным режимом с одной концентрической волной показано на рис. 6, а. Частота этого режима совпадает с частотой самого быстрого элемента в решетке. В некотором смысле данный режим может быть назван синфазным режимом синхронизации.

Характерное распределение $x_{ij}(t)$ системы в режиме со спиральной волной показано на рис. 6, б. Ритм, задающийся этим режимом, выше частоты режима с концентрической волной, так как частота спиральной волны выше частоты самого быстрого элемента в решетке.

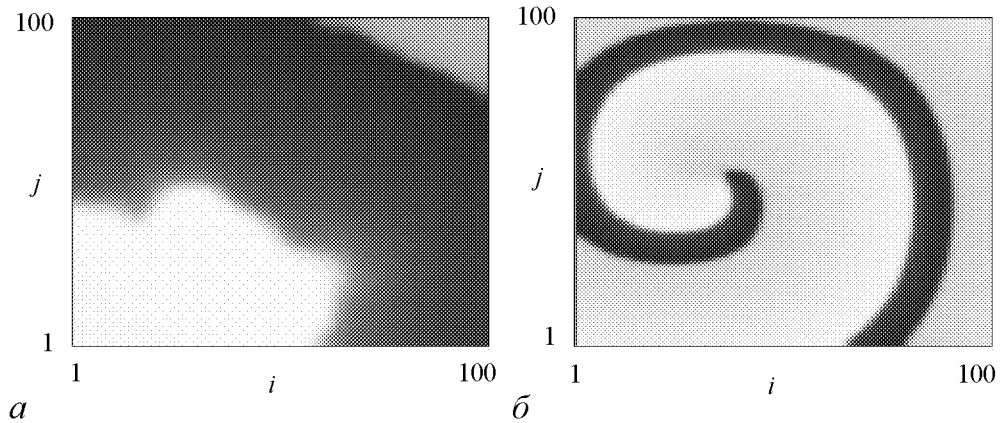


Рис. 6. Характерное распределение $x_{ij}(t)$ в синхронном режиме с одной концентрической волной (а). Характерное распределение $x_{ij}(t)$ в режиме с одной спиральной волной (б)

Заключение

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что в ансамбле из N связанных автоколебательных элементов Бонхоффера–ван дер Поля при фиксированных значениях параметров может сосуществовать не менее 2^{N-1} различных режимов глобальной синхронизации. Сосуществование 2^{N-1} синхронных режимов было численно подтверждено для $N \leq 4$.

В цепочках с периодическими граничными условиями возможно существование режима, обусловленного волной возбуждения, бегущей по кольцу в системе и задающей ритм всем элементам цепочки. В решетке существует режим, при котором ритм задается спиральной волной. При малой связи в ансамблях элементов наблюдается кластерная синхронизация.

Многие теоретические и экспериментальные исследования показывают, что синхронизация играет ключевую роль в сетях автоколебательных элементов. Синхронизация лежит в основе преобразования информации в таких сетях. Рассмотренная мультистабильность синхронных режимов важна для понимания таких механизмов работы сетей, как хранение и распознавание изображений, выделение контуров изображений [16], визуальное восприятие [17], работа памяти [18], самоорганизация и структурообразование [19].

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 06-02-16596, 08-02-92004 и 08-02-97049.

Библиографический список

1. *Maurer J. and Libchaber A.* // J.Phys. Lett. (France) 1982. Vol. 41. P. 515.
2. *Brun E., Derighette B., Meier D., Holzner R., and Raveni M.* // J.Opt.Soc.Am. B. 1985. Vol. 2. P. 156.
3. *Dangoisse D., Glorieux P., and Hennequin D.* // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 36. P. 4775.
4. *Thompson J.M.T. and Stewart H.B.* // Nonlinear Dynamics and Chaos. Wiley, Chichester, 1986.
5. *Foss J., Longtin A., Mensour B., and Milton J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 708.
6. *Simonotto E., Riani M., Seife C., Roberts M., Twitty J., and Moss F.* // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 1186.
7. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., and Kurths J.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
8. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., and Postnov D.* World Scientific, Singapore, 2002.
9. *Osipov G.V., Kurths J., and Zhou Ch.* Springer, Berlin, 2007.
10. *Sompolinsky H., Kanter I.* // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 57. P. 2861.
11. *Canavier C., Baxter D., Clark J. and Byrne J.* // J. Neurophysiol. 1993. Vol. 69. P. 2252.
12. *Rabinovich M.I., Varona P., Selverston A.I., and Abarbanel H.D.I.* // Rev. of Modern Phys. 2006. Vol. 78. P. 1213.

13. *Bonhoeffer K.F.* // *Naturwissenschaften*. 1953. Vol. 40. P. 301.
14. *Torre V.* // *J.Theor.Biol.* 1976. Vol. 61. P. 55.
15. *Osipov G.V. and Sushchik M.M.* // *Phys.Rev.E.* 1998. Vol. 58. P. 7198.
16. *Macleod K., Bäcker A., and Laurent G.* // *Nature*. 1998. Vol. 395. P. 693.
17. *Ambiguity in Mind and Nature* / Eds P. Kruse and M. Stadler. New York. Springer-Verlag, 1995.
18. *Mensour B. and Longtin A.* // *Phys. Lett. A.* 1995. Vol. 205. P. 18.
19. *Beuter A., Milton J.G., Labrie C., and Glass L.* // *IEEE Systems Man Cybern*, 1989, 899.

Поступила в редакцию 15.08.2008

После доработки 1.12.2008

VARIETY OF SYNCHRONOUS REGIMES IN ENSEMBLES OF NONIDENTICAL OSCILLATORS:

Chain and lattice

A.K. Kryukov, G.V. Osipov, A.V. Polovinkin

We study synchronization in one- and two-dimensional ensembles of nonidentical Bonhoeffer–van der Pol oscillators. Small chains (number of elements $N \leq 4$) are proved to have not less than 2^{N-1} coexisting stable different synchronous regimes. The chain of N elements is supposed to have not less than 2^{N-1} synchronous regimes at the same values of parameters. Formation of synchronization clusters at weak coupling is shown. Regimes, provided by existing of waves, setting rhythm for all elements in ensemble, are investigated.

Keywords: Synchronization, multistability, synchronous regime, numerical methods, modeling, FitzHugh–Nagumo, Bonhoeffer–van der Pol.