

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ХАОС В НЕЛИНЕЙНО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРАХ ЛАНДАУ–СТЮАРТА С МЕДЛЕННОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ПАРАМЕТРОВ

Л.В. Тюрюкина, А.С. Пиковский

Рассмотрена хаотическая динамика системы, состоящей из четырех нелинейно связанных идентичных осцилляторов типа Ландау–Стюарта. Осцилляторы возбуждаются поочередно парами, в силу периодического изменения параметра, ответственного за бифуркацию рождения предельного цикла. Показано, что в зависимости от выбора вида связи между осцилляторами в сечении Пуанкаре для разности фаз парных осцилляторов получаются разные варианты отображения типа отображения Бернулли. Исследовано несколько примеров системы с разными видами связи, отвечающих «минимальному» и «максимальному» хаосу.

Ключевые слова: Связанные осцилляторы, гиперболический аттрактор, хаотическая динамика.

Введение

Одним из перспективных направлений в нелинейной динамике является исследование вопроса о возможности реализации гиперболических хаотических аттракторов, примером которых служат такие математические конструкции, как аттрактор Плыкина, соленоид Смейла–Вильямса и др. [1–5], в физических системах. В последние годы появился ряд работ, в которых приводятся примеры систем, допускающих физическую реализацию, у которых в сечении Пуанкаре имеет место гиперболический аттрактор указанного выше типа. Так, в работах [6, 7] была предложена система, состоящая из двух связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля, в которых при отношении рабочих частот 1:2 осуществляется попеременная генерация подсистем благодаря принудительной относительно медленной вариации параметра, ответственного за бифуркацию рождения предельного цикла, а возбуждение по очереди передается от одного осциллятора к другому. Для этой системы была выполнена компьютерная проверка известных из математической литературы достаточных условий наличия гиперболического аттрактора [8, 9]. Было показано, что в 4-мерном фазовом пространстве отображения Пуанкаре, описывающего изменение состояния системы за период воздействия, наблюдается хаотический гиперболический аттрактор типа соленоида Смейла–Вильямса, а фаза колебаний одного из осцилляторов, определенная на последовательных стадиях возбуждения осциллятора, подчиняется отображению Бернулли.

Другие варианты подобных систем на основе автономных и неавтономных осцилляторов обсуждаются в работах [10–15]. Общий принцип, положенный в основу функционирования этих систем, состоит в манипуляции фазами колебаний при передаче возбуждения между парциальными осцилляторами, которые становятся активными попеременно, с тем чтобы трансформация фаз отвечала итерациям отображения с хаотической динамикой. Такого рода системы могут быть реализованы на практике в различных областях физики, например в электронике, лазерной физике, механике, акустике, нелинейной оптике и т.д. В настоящей работе рассматривается еще один пример системы, сконструированной на основе указанного выше принципа, состоящей из четырех идентичных осцилляторов типа Ландау–Стюарта, описываемых в терминах комплексных амплитуд. Генерация осцилляторов происходит попеременно, но парами, при этом возбуждение передается от одной пары осцилляторов к другой по определенному правилу. Связь между осцилляторами осуществляется резонансным образом: из сигналов «активной» пары формируются сигналы на частоте колебаний, которые воздействуют на «пассивную» пару во время перехода последней через бифуркацию рождения предельного цикла и навязывают ей соответствующие фазы. Как следствие, отображение типа отображения Бернулли получается не для фазы колебаний какого-либо осциллятора, а для разности фаз парных осцилляторов. Кроме того, как показано в работе, в зависимости от выбора правила, по которому передается возбуждение от одной пары осцилляторов к другой, будут получаться разные отображения.

1. Исходная система: вывод отображения для разности фаз

Рассмотрим следующую систему, состоящую из четырех связанных осцилляторов Ландау–Стюарта с периодической модуляцией управляющего параметра, ответственного за бифуркацию рождения предельного цикла, описываемых в терминах комплексных амплитуд:

$$\frac{da_1}{dt} = a_1(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_1|^2) + \varepsilon a_3^\alpha (a_4)^{1-\alpha}, \quad (1)$$

$$\frac{da_2}{dt} = a_2(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_2|^2) + \varepsilon a_3^\beta (a_4)^{1-\beta}, \quad (2)$$

$$\frac{da_3}{dt} = a_3(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_3|^2) + \varepsilon a_1^\chi (a_2)^{1-\chi}, \quad (3)$$

$$\frac{da_4}{dt} = a_4(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_4|^2) + \varepsilon a_1^\delta (a_2)^{1-\delta}. \quad (4)$$

Здесь a_1 , a_2 , a_3 и a_4 – комплексные медленно меняющиеся амплитуды осцилляторов (для обозначения комплексно-сопряженной амплитуды осцилляторов далее используется символ «*»); γ_0 – управляющий параметр, ответственный за бифуркацию Андронова–Хопфа; γ_1 и Ω – соответственно амплитуда и частота периодической модуляции управляющего параметра; ε – параметр связи, принятый для простоты изложения одинаковым для всех осцилляторов. Параметры α , β , χ , δ представляют собой целые числа, описывающие нелинейную связь между осцилляторами. При этом мы

ввели обозначение

$$a^\alpha = \begin{cases} a^\alpha, & \alpha > 0, \\ (a^*)^\alpha, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (5)$$

В результате, как нетрудно видеть, общая «степень» силы, действующей на каждый осциллятор, равна единице, что соответствует приложению резонансной силы на частоте колебаний.

Наша цель – получить преобразования фаз колебаний, которые есть не что иное, как аргументы комплексных амплитуд a_k . Рассмотрим динамику системы (1)–(4), следуя методологии, развитой в работе [6]. Периодическая модуляция управляющего параметра приводит к тому, что осцилляторы попарно проходят через активную и пассивную стадии. А именно, на первом полупериоде модуляции амплитуды первого и второго осцилляторов велики (считаем, что осцилляторы находятся в активной стадии – генерируют колебания), а амплитуды третьего и четвертого осцилляторов малы (осцилляторы находятся в пассивной стадии – не генерируют колебания). На втором полупериоде осцилляторы меняются местами. Тогда каждые полпериода происходит передача фаз от одной пары осцилляторов к другой. Пусть на первом полупериоде модуляции управляющего параметра (период модуляции параметра $T = 2\pi/\Omega$) активны первый и второй осцилляторы. Для них можно записать $\varphi_1 = \arg(a_1)$ и $\varphi_2 = \arg(a_2)$. Через полпериода начинают генерировать третий и четвертый осцилляторы, получая в качестве «затравки» сигналы от первого и второго осцилляторов вида $a_1^\chi(a_2)^{1-\chi}$ и $a_1^\delta(a_2)^{1-\delta}$. В соответствии с правилом (5), фазы этих сигналов есть $\chi\varphi_1 + (1-\chi)\varphi_2$ и $\delta\varphi_1 + (1-\delta)\varphi_2$. Эти фазы передаются осцилляторам (3), (4), для фаз которых получаем

$$\begin{pmatrix} \varphi'_3 \\ \varphi'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi & 1-\chi \\ \delta & 1-\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Еще через полпериода начнут генерировать первый и второй осцилляторы, получив в качестве «затравки» сигналы от третьего и четвертого, $a_3^\alpha(a_4)^{1-\alpha}$ и $a_3^\beta(a_4)^{1-\beta}$. Если фазы третьего и четвертого осцилляторов на момент передачи сигнала были φ_3 и φ_4 , то для фаз первого и второго осцилляторов будет верно

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В итоге, через период модуляции, для фаз первого и второго осцилляторов получим

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi & 1-\chi \\ \delta & 1-\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Здесь φ'_1 и φ'_2 – фазы первого и второго осцилляторов в момент времени $t = (n+1)T$, а φ_1 и φ_2 – в момент времени $t = nT$. Выражение (7) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi & 1 - \chi \\ \delta & 1 - \delta \end{pmatrix} \quad (10)$$

– матрица 2×2 . Эта матрица имеет два собственных числа μ , которые можно найти, используя выражение

$$\mu_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - J}, \quad (11)$$

где S и J – след и якобиан матрицы M , соответственно. Тогда легко показать, что одно из собственных чисел матрицы M будет равно единице, а второе, определяющее «степень» хаотизации системы, будет определяться по формуле

Таблица

Значения собственного числа μ
и отвечающие ему наборы коэффициентов $\alpha, \beta, \chi, \delta$

μ	Коэффициенты $\alpha, \beta, \chi, \delta$							
1	-2 -1 -2 -1;	-2 -1 -1 0;	-2 -1 0 1;	-2 -1 1 2;	-1 -2 -1 -2;	-1 -2 0 -1;	-1 -2 1 0;	
	-1 -2 2 1;	-1 0 -2 -1;	-1 0 -1 0;	-1 0 0 1;	-1 0 1 2;	0 -1 -1 -2;	0 -1 0 -1;	
	0 -1 1 0;	0 -1 2 1;	0 1 -2 -1;	0 1 -1 0;	0 1 0 1;	0 1 1 2;	1 0 -1 -2;	
	1 0 0 -1;	1 0 1 0;	1 0 2 1;	1 2 -2 -1;	1 2 -1 0;	1 2 0 1;	1 2 1 2;	
	2 1 -1 -2;	2 1 0 -1;	2 1 1 0;	2 1 2 1				
2	-2 -1 -2 0;	-2 -1 -1 1;	-2 -1 0 2;	-2 0 -2 -1;	-2 0 -1 0;	-2 0 0 1;	-2 0 1 2;	
	-1 -2 0 -2;	-1 -2 1 -1;	-1 -2 2 0;	-1 0 -2 0;	-1 0 -1 1;	-1 0 0 2;	-1 1 -2 -1;	
	-1 1 -1 0;	-1 1 0 1;	-1 1 1 2;	0 -2 -1 -2;	0 -2 0 -1;	0 -2 1 0;	0 -2 2 1;	
	0 -1 0 -2;	0 -1 1 -1;	0 -1 2 0;	0 1 -2 0;	0 1 -1 1;	0 1 0 2;	0 2 -2 -1;	
	0 2 -1 0;	0 2 0 1;	0 2 1 2;	1 -1 -1 -2;	1 -1 0 -1;	1 -1 1 0;	1 -1 2 1;	
	1 0 0 -2;	1 0 1 -1;	1 0 2 0;	1 2 -2 0;	1 2 -1 1;	1 2 0 2;	2 0 -1 -2;	
	2 0 0 -1;	2 0 1 0;	2 0 2 1;	2 1 0 -2;	2 1 1 -1;	2 1 2 0		
3	-2 -1 -2 1;	-2 -1 -1 2;	-2 1 -2 -1;	-2 1 -1 0;	-2 1 0 1;	-2 1 1 2;	-1 -2 1 -2;	
	-1 -2 2 -1;	-1 0 -2 1;	-1 0 -1 2;	-1 2 -2 -1;	-1 2 -1 0;	-1 2 0 1;	-1 2 1 2;	
	0 -1 1 -2;	0 -1 2 -1;	0 1 -2 1;	0 1 -1 2;	1 -2 -1 -2;	1 -2 0 -1;	1 -2 1 0;	
	1 -2 2 1;	1 0 1 -2;	1 0 2 -1;	1 2 -2 1;	1 2 -1 2;	2 -1 -1 -2;	2 -1 0 -1;	
	2 -1 1 0;	2 -1 2 1;	2 1 1 -2;	2 1 2 -1				
4	-2 -1 -2 2;	-2 0 -2 0;	-2 0 -1 1;	-2 0 0 2;	-2 2 -2 -1;	-2 2 -1 0;	-2 2 0 1;	
	-2 2 1 2;	-1 -2 2 -2;	-1 0 -2 2;	-1 1 -2 0;	-1 1 -1 1;	-1 1 0 2;	0 -2 0 -2;	
	0 -2 1 -1;	0 -2 2 0;	0 -1 2 -2;	0 1 -2 2;	0 2 -2 0;	0 2 -1 1;	0 2 0 2;	
	1 -1 0 -2;	1 -1 1 -1;	1 -1 2 0;	1 0 2 -2;	1 2 -2 2;	2 -2 -1 -2;	2 -2 0 -1;	
	2 -2 1 0;	2 -2 2 1;	2 0 0 -2;	2 0 1 -1;	2 0 2 0			
6	-2 0 -2 1;	-2 0 -1 2;	-2 1 -2 0;	-2 1 -1 1;	-2 1 0 2;	-1 1 -2 1;	-1 1 -1 2;	
	-1 2 -2 0;	-1 2 -1 1;	-1 2 0 2;	0 -2 1 -2;	0 -2 2 -1;	0 2 -2 1;	0 2 -1 2;	
	1 -2 0 -2;	1 -2 1 -1;	1 -2 2 0;	1 -1 1 -2;	1 -1 2 -1;	2 -1 0 -2;	2 -1 1 -1;	
	2 -1 2 0;	2 0 1 -2;	2 0 2 -1					
8	-2 0 -2 2;	-2 2 -2 0;	-2 2 -1 1;	-2 2 0 2;	-1 1 -2 2;	0 -2 2 -2;	0 2 -2 2;	
	1 -1 2 -2;	2 -2 0 -2;	2 -2 1 -1;	2 -2 2 0;	2 0 2 -2			
9	-2 1 -2 1;	-2 1 -1 2;	-1 2 -2 1;	-1 2 -1 2;	1 -2 1 -2;	1 -2 2 -1;	2 -1 1 -2;	
	2 -1 2 -1							

$$\mu = (\alpha - \beta)(\chi - \delta). \quad (12)$$

Если теперь отображения (8) переписать так, чтобы в явном виде выразить зависимость φ'_1 и φ'_2 от φ_1 и φ_2 , то легко показать, что для разности фаз первого и второго осцилляторов через период модуляции будет выполняться отображение

$$(\varphi'_1 - \varphi'_2) = \mu(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (13)$$

Аналогично можно получить и отображение для разности фаз третьего и четвертого осцилляторов через период модуляции управляющего параметра

$$(\varphi'_3 - \varphi'_4) = \mu(\varphi_3 - \varphi_4). \quad (14)$$

Отметим, что формулы (13) и (14) представляют собой отображения типа отображения Бернулли и будут с ним совпадать в случае $\mu=2$.

Очевидно, что в зависимости от выбора коэффициентов α , β , χ и δ отличное от единицы собственное число μ матрицы M , заданное формулой (12), будет принимать различные целые значения. Причем, если коэффициенты изменяются в диапазоне от $-m$ до m , то число μ будет лежать в диапазоне от $-(2m)^2$ до $(2m)^2$. При этом каждому набору коэффициентов будет отвечать свой вариант системы (1)–(4). В таблице приведены наборы коэффициентов α , β , χ и δ для некоторых (положительных) значений числа μ . Вычисления проводились по формуле (12), а коэффициенты менялись в диапазоне от -2 до 2 . Из таблицы видно, что наибольшее число наборов коэффициентов получается для случая $\mu = 2$, а для некоторых значений μ , например 5 и 7, таких наборов нет вообще.

В следующем разделе мы приведем несколько вариантов системы (1)–(4), отвечающих соответственно небольшому ($\mu=2$) и достаточно большому ($\mu=9$) значениям собственного числа матрицы M . В первом случае будем говорить, что рассматривается система с «минимальным» хаосом, в во втором – с «максимальным».

2. Примеры системы, демонстрирующей «минимальный» и «максимальный» хаос

Теперь приведем несколько примеров системы (1)–(4), в которых выбраны определенные комбинации коэффициентов α , β , χ и δ (выделены жирным в таблице). Начнем со случая «минимального» хаоса, когда собственное число матрицы M равно двум. Одна из подходящих комбинаций будет $\alpha = -1$, $\beta=1$, $\chi=0$ и $\delta=1$. В этом случае система (1)–(4) примет вид

$$\frac{da_1}{dt} = a_1(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_1|^2) + \varepsilon a_4^2 a_3^*, \quad (15)$$

$$\frac{da_2}{dt} = a_2(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_2|^2) + \varepsilon a_3, \quad (16)$$

$$\frac{da_3}{dt} = a_3(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_3|^2) + \varepsilon a_2, \quad (17)$$

$$\frac{da_4}{dt} = a_4(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_4|^2) + \varepsilon a_1. \quad (18)$$

Отображения для разности фаз парных осцилляторов, определенных в моменты времени $(n + 1)T$ и nT , согласно формулам (13) и (14), будут иметь вид

$$(\varphi'_1 - \varphi'_2) = 2(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (19)$$

$$(\varphi'_3 - \varphi'_4) = 2(\varphi_3 - \varphi_4). \quad (20)$$

Исследуем систему (15)–(18) более подробно. На рис. 1 представлены зависимости от времени величин a_{12} и a_{34} , вычисленных по формулам

$$a_{12} = |a_1| + |a_2|, \quad (21)$$

$$a_{34} = |a_3| + |a_4|, \quad (22)$$

и представляющих собой суммы амплитуд парных осцилляторов, для системы (15)–(18). Из рисунка видно, что осцилляторы действительно генерируют хаотические колебания попеременно: минимум величины a_{12} отвечает максимуму a_{34} и наоборот. На рис. 2 представлены зависимости от времени фаз φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) осцилляторов, образующих систему (15)–(18), и численно построенное отображение

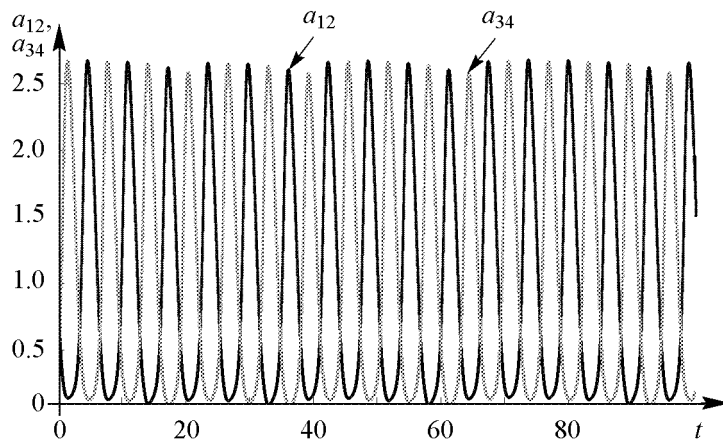


Рис. 1. Зависимости суммы амплитуд первого и второго a_{12} (черный цвет) и третьего и четвертого a_{34} (серый цвет) осцилляторов от времени для системы (15)–(18). Зависимости построены для $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\Omega = 1$ и $\varepsilon = 0.05$

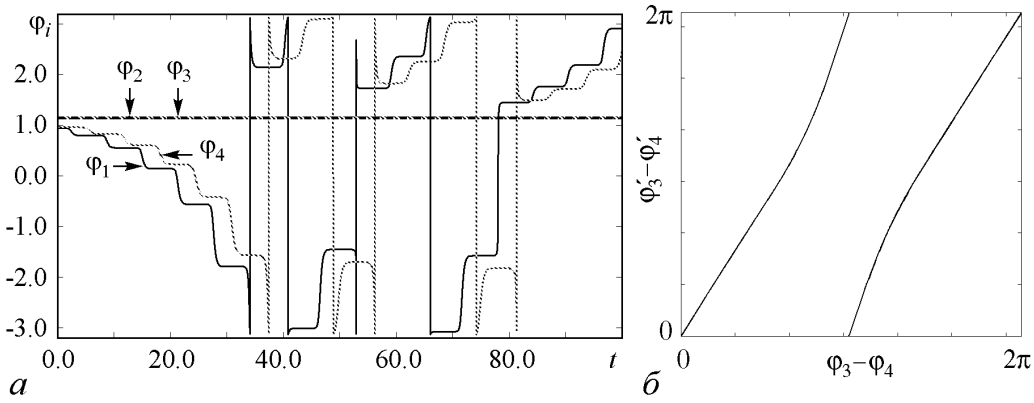


Рис. 2. Зависимости фаз φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) осцилляторов от времени, полученные при численном решении системы (15)–(18) (а) и численно построенное отображение для разности фаз третьего и четвертого осцилляторов, определенных в моменты времени $t_n = nT$ (б). Иллюстрации построены для $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\Omega = 1$ и $\varepsilon = 0.05$. Скачки фаз на рис. а носят фиктивный характер и связаны со способом определения фаз ($0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$)

для разности фаз третьего и четвертого осцилляторов. Фазы определялись в сечении Пуанкаре, заданном условием $t_n = nT$, и вычислялись по следующей формуле:

$$\varphi_i = \begin{cases} \arctan\left(\frac{-y_i}{x_i}\right), & x_i > 0, \\ \arctan\left(\frac{-y_i}{x_i}\right) + \pi, & x_i < 0, \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (23)$$

Здесь x_i и y_i – действительная и мнимая части комплексной амплитуды a_i , соответственно. Из рисунка видно, что фазы первого и четвертого осцилляторов также меняются во времени довольно сложным образом, а вот фазы второго и третьего осцилляторов принимают постоянное значение равное $\varphi_2 = \varphi_3 = 1.1565\dots$ (рис. 2, а). При этом, однако, отображение для разности фаз третьего и четвертого осцилляторов (рис. 2, б) качественно эквивалентно отображению Бернулли и совпадает с формулой (19). Отметим, что, если бы мы численно построили отображение для разности фаз первого и второго осцилляторов, то оно было бы аналогично рис. 2, б. И, наконец, на рис. 3 представлен аттрактор четвертого осциллятора и его увеличенный фрагмент. На увеличенном фрагменте хорошо видно, что аттрактор имеет канторово-подобную структуру, характерную для гиперболических аттракторов, описываемых отображением Бернулли. Отметим, что аттрактор, так же как и отображение для разности фаз, строится в сечении Пуанкаре, заданном условием $t_n = nT$.

Описанная выше динамика фаз второго и третьего осцилляторов позволяет переписать систему (15)–(18), оставив лишь два уравнения – для первого и четвертого осцилляторов

$$\frac{da_1}{dt} = a_1(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_1|^2) + \varepsilon a_4^2 a_3^*, \quad (24)$$

$$\frac{da_4}{dt} = a_4(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_4|^2) + \varepsilon a_1. \quad (25)$$

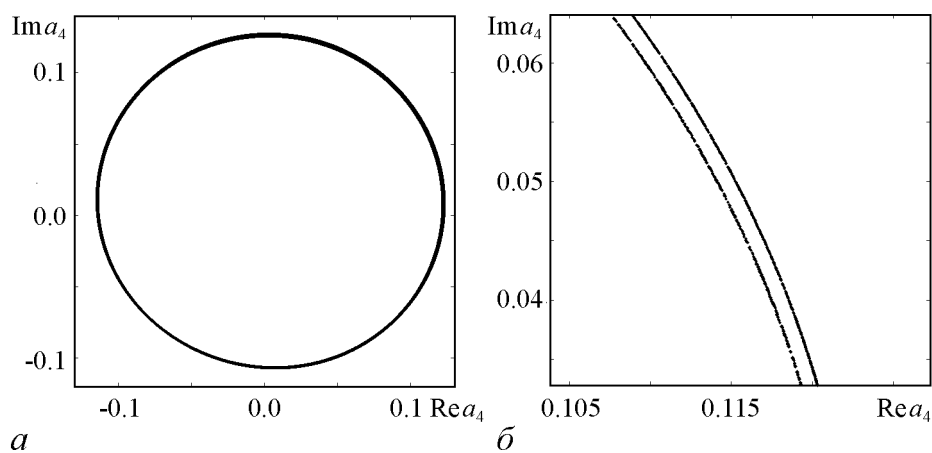


Рис. 3. Аттрактор четвертого осциллятора системы (15–18) (а) и его увеличенный фрагмент (б). Координаты осциллятора определялись в моменты времени $t_n = nT$. Аттрактор построен для $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\Omega = 1$ и $\varepsilon = 0.05$

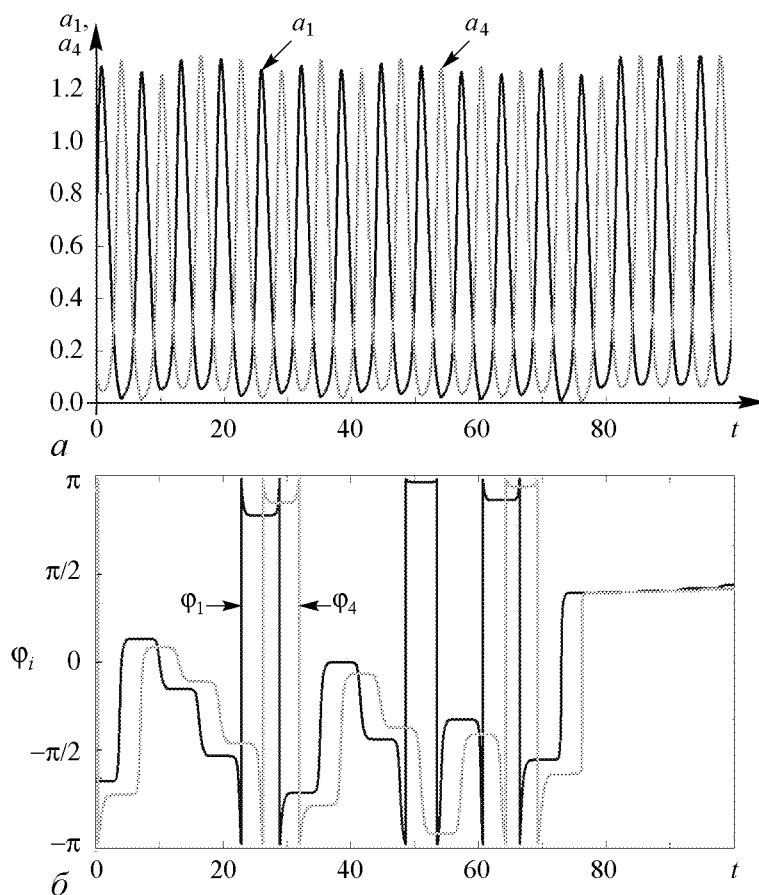


Рис. 4. Зависимости амплитуд (а) и фаз (б) осцилляторов (24), (25) от времени. Зависимости построены для $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\Omega = 1$, $\varepsilon = 0.05$. Используются следующие обозначения: черным цветом обозначены характеристики осциллятора (24), а серым – осциллятора (25). Скачки фаз на рис. б носят фиктивный характер и связаны со способом определения фазы

При этом переменную a_3 положим равной некоторой комплексной константе, такой чтобы $|a_3| = 1$. Пусть, например, $a_3 = \cos \varphi + i \sin \varphi$, где $\varphi = \varphi_2 = \varphi_3 = 1.1565$. Отметим, что система (24), (25) весьма близка модели, рассмотренной в работе [6]. Однако в нашем случае осцилляторы имеют одну и ту же собственную частоту и разные коэффициенты связи. На рис. 4 представлены зависимости амплитуд и фаз осцилляторов от времени, а на рис. 5 – численно построенное отображение для фазы, вычисленной в моменты времени $t_n = nT$, и аттрактор осциллятора, заданного уравнением (25). (Заметим, что отображение для фазы и аттрактор осциллятора (24) будут качественно эквивалентны рис. 5.) Все иллюстрации построены для тех же значений параметров, что и в предыдущем случае. Отметим, что иллюстрации системы (15)–(18) и системы (24), (25) демонстрируют хорошее соответствие (сравним рис. 4 с рис. 1 и рис. 2, *a* и рис. 5 с рис. 2, *b* и рис. 3), что позволяет сделать вывод, что система (24), (25) может служить адекватной аппроксимацией системы (15)–(18). Однако следует отметить, что численно построенное отображение для фазы осциллятора (24) слегка отличается от отображения для разности фаз осцилляторов (17) и (18): оно совпадает с отображением Бернулли с точностью до сдвига на постоянную величину (рис. 5, *a*). Это обусловлено комплексностью коэффициента взаимодействия ϵa_3^* в (24). Кроме того, аттрактор осциллятора (18) демонстрирует более сильное сжатие в поперечном направлении (сравним рис. 3, *a* и рис. 5, *b*); это, по-видимому, связано с заменой зависящей от времени переменной a_3^* на постоянную.

Если вернуться к вопросу о своеобразном поведении фаз осцилляторов (16), (17) (см. рис. 2, *a*), то, по-видимому, оно определено видом связи между осцилляторами, то есть тем, какие значения принимают коэффициенты α , β , χ и δ . Так, например, если мы выберем другой набор коэффициентов, то качественно динамика рассматриваемой модели не изменится: осцилляторы будут генерировать хаотические колебания попеременно; отображение для разности фаз парных осцилляторов будет представлять отображение Бернулли, описываемое формулами (19) и (20) и т.д. А вот индивидуальное поведение фаз осцилляторов изменится. На рис. 6 приведены

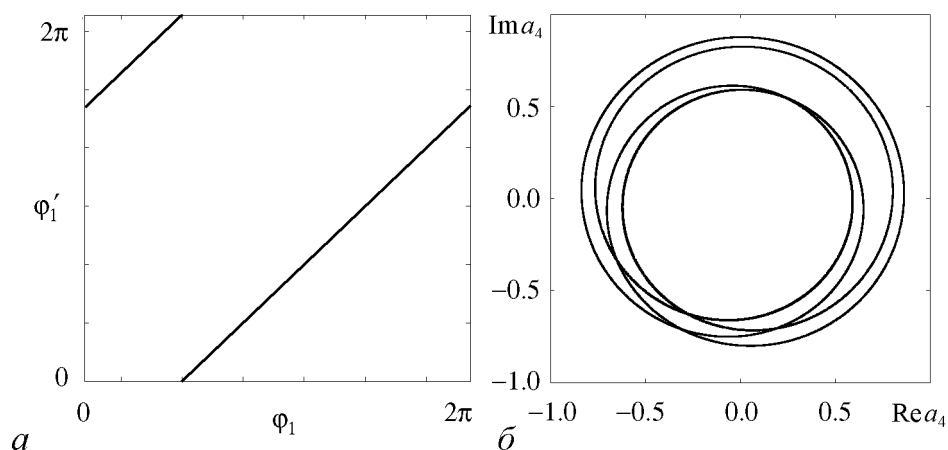


Рис. 5. Численно построенное отображение для фазы осциллятора (25), определенной в моменты времени $t_n = nT$ (*a*) и аттрактор того же осциллятора (*b*). Иллюстрации построены для $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\Omega = 1$ и $\epsilon = 0.05$

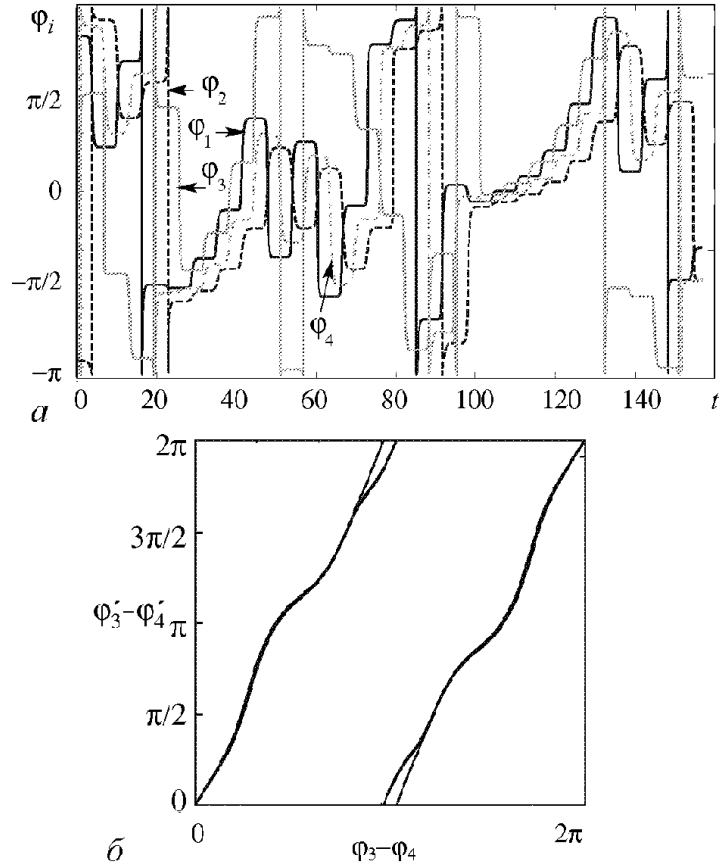


Рис. 6. Зависимости фаз φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) осцилляторов от времени, полученные при численном решении системы (26)–(29) (а) и численно построенное отображение для разности фаз третьего и четвертого осцилляторов, определенных в моменты времени $t_n = nT$ (б). Иллюстрации построены для $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\Omega = 1$ и $\varepsilon = 0.05$. На рис. а используются следующие обозначения: черный сплошной график отвечает зависимости φ_1 от времени, черный пунктирный – φ_2 , серый сплошной – φ_3 , серый пунктирный – φ_4 . Скачки фаз на рис. б носят фиктивный характер и связаны со способом определения фаз ($0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$)

соответствующие зависимости фаз осцилляторов от времени и численно построенное отображение для разности фаз третьего и четвертого осцилляторов для $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\chi = 2$ и $\delta = 1$. В этом случае система (1)–(4) примет вид

$$\frac{da_1}{dt} = a_1(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_1|^2) + \varepsilon a_3^2 a_4^*, \quad (26)$$

$$\frac{da_2}{dt} = a_2(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_2|^2) + \varepsilon a_4, \quad (27)$$

$$\frac{da_3}{dt} = a_3(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_3|^2) + \varepsilon a_1^2 a_2^*, \quad (28)$$

$$\frac{da_4}{dt} = a_4(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_4|^2) + \varepsilon a_1. \quad (29)$$

Сопоставив рис. 6 с рис. 2, мы видим, что теперь фазы всех четырех осцилляторов изменяются во времени. Кроме того, несмотря на то, что в обоих примерах

численно полученное отображение для разности фаз парных осцилляторов описывается формулой (20) и представляет собой отображение Бернулли, во втором случае вид отображения существенно отличается от прямой линии и демонстрирует небольшое расщепление (рис. 6, б). В первом случае это не наблюдалось.

Теперь рассмотрим случай «максимального» хаоса ($\mu=9$). Одна из подходящих комбинаций коэффициентов будет $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\chi = 2$ и $\delta = -1$. В этом случае система (1)–(4) примет вид

$$\frac{da_1}{dt} = a_1(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_1|^2) + \varepsilon a_3^2 a_4^*, \quad (30)$$

$$\frac{da_2}{dt} = a_2(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_2|^2) + \varepsilon a_4^2 a_3^*, \quad (31)$$

$$\frac{da_3}{dt} = a_3(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_3|^2) + \varepsilon a_1^2 a_2^*, \quad (32)$$

$$\frac{da_4}{dt} = a_4(\gamma_0 - \gamma_1 \cos(\Omega t) - |a_4|^2) + \varepsilon a_2^2 a_1^*. \quad (33)$$

Отображение для разности фаз парных осцилляторов, согласно приведенным в первом разделе выкладкам, будут

$$(\varphi'_1 - \varphi'_2) = 9(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (34)$$

$$(\varphi'_3 - \varphi'_4) = 9(\varphi_3 - \varphi_4). \quad (35)$$

На рис. 7 и рис. 8 соответственно приведены зависимости величин a_{12} и a_{34} , вычисленных по формулам (21), (22), и фаз φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) осцилляторов (30)–(33) от времени, а также численно построенное отображение для разности фаз третьего

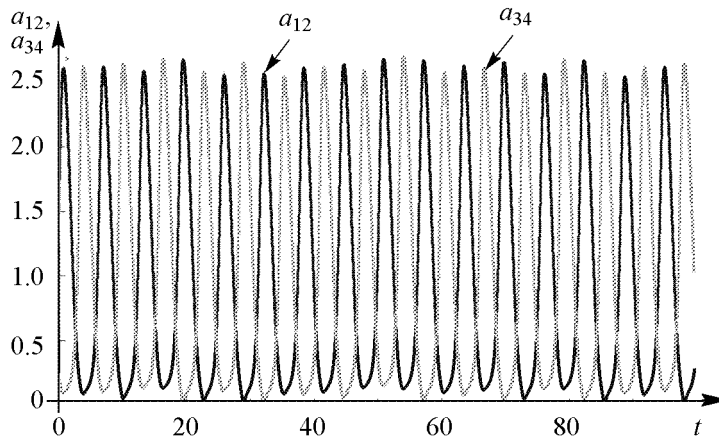


Рис. 7. Зависимости суммы амплитуд первого и второго a_{12} (черный цвет) и третьего и четвертого a_{34} (серый цвет) осцилляторов от времени для системы (30)–(33). Зависимости построены для $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\Omega = 1$ и $\varepsilon = 0.05$

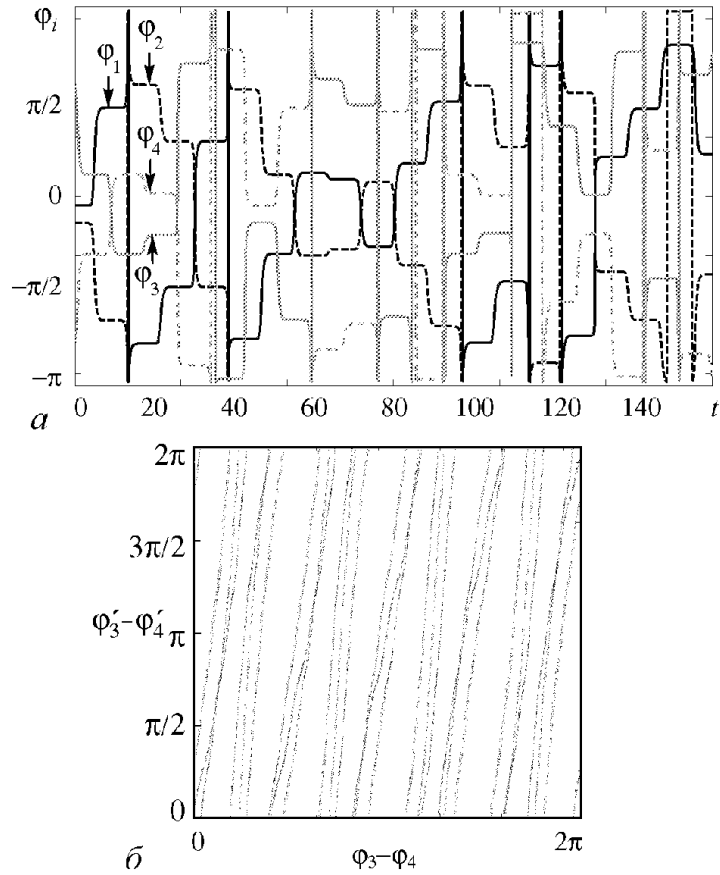


Рис. 8. Зависимости фаз φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) осцилляторов от времени, полученные при численном решении системы (30)–(33) (а) и численно построенное отображение для разности фаз третьего и четвертого осцилляторов, определенных в моменты времени $t_n = nT$ (б). Иллюстрации построены для $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_1 = 2$, $\Omega = 1$ и $\varepsilon = 0.05$. На рис. а используются следующие обозначения: черный сплошной график отвечает зависимости φ_1 от времени, черный пунктирный – φ_2 , серый сплошной – φ_3 , серый пунктирный – φ_4 . Скачки фаз на рис. б носят фиктивный характер и связаны со способом определения фаз ($0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$)

и четвертого осцилляторов. Как и ранее, фазы определялись в сечении Пуанкаре, заданном условием $t_n = nT$, и вычислялись по формуле (23). Из рисунков видно, что, как и в случае «минимального» хаоса, осцилляторы демонстрируют хаотические колебания попеременно (рис. 7), а отображение для разности фаз третьего и четвертого осциллятора представляет собой отображение типа отображения Бернулли и совпадает с формулой (35) (рис. 8, б). Кроме того, между графиками зависимости фаз осцилляторов от времени есть довольно заметное сходство. Так, фазы первого и второго (или третьего и четвертого) осцилляторов изменяются одинаковым образом, причем $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_4 = \text{const}$ как следствие симметричного выбора коэффициентов α , β , χ и δ .

Однако есть и ряд отличий. Основное из них состоит в том, что, если в случае «минимального» хаоса отображение для разности фаз осцилляторов представляло собой два отрезка, демонстрирующих лишь незначительное расщепление, то в слу-

чае «максимального» хаоса численно построенное отображение для разности фаз осцилляторов демонстрирует существенное расщепление отрезков. Причем практически каждый отрезок расщепился на три части.

Заключение

Таким образом, в работе проведено исследование системы, состоящей из четырех идентичных осцилляторов типа Ландау–Стюарта, описываемых в терминах комплексных амплитуд, для которой генерация осцилляторов происходит попеременно, но парами, при этом возбуждение передается от одной пары осцилляторов к другой по определенному правилу. Особенностью системы является строго резонансная связь: возбуждающая сила имеет несущую частоту, совпадающую с частотой колебаний осцилляторов. Было показано, что для системы такого вида отображение типа отображения Бернулли получается не для фазы колебаний какого-либо осциллятора, а для разности фаз парных осцилляторов. При этом в зависимости от выбора правила, по которому передается возбуждение от одной пары осцилляторов к другой (в зависимости от набора коэффициентов), получаются различные виды отображения. Конкретный вид отображения зависит от величины отличного от единицы собственного числа μ матрицы, определяющей правило передачи возбуждения между осцилляторами. А именно число отрезков в получаемом отображении совпадает с указанным собственным числом μ . Были исследованы конкретные примеры систем для случая собственных чисел $\mu=2$ и $\mu=9$. Было показано, что в обоих случаях система демонстрирует гиперболический хаос, а численно полученное отображение для разности фаз парных осцилляторов совпадает с предсказанным теоретически. Однако, как показало исследование, чем большее значение принимает величина μ , тем на больше частей расщепляется отображение для разности фаз.

И, наконец, отметим, что, если система уравнений в терминах комплексных амплитуд представляет собой аппроксимацию какой-либо модели*, то следует говорить о свойствах частично гиперболических аттракторов, так как в этом случае будет иметь место разрушение симметрии относительно фазового сдвига, присущей рассмотренной модели. Однако этот вопрос требует отдельного исследования.

Авторы благодарят профессора С.П. Кузнецова за внимание к работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-ННИО 08-02-91963.

Библиографический список

1. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // В кн. Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, 192 с.
2. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A Tutorial // Int. J. of Bif. & Chaos. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353.
3. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем / Пер. с англ. М.: Факториал, 1999. 768 с.

*Например, решение системы дифференциальных уравнений методом медленно меняющихся амплитуд.

4. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.: Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. 2002. 559 с.
5. Анищенко В.С. и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003.
6. Kuznetsov S.P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of a Smale–Williams type // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. P. 144101.
7. Кузнецов С.П., Селезнев Е.П. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // *ЖЭТФ.* 2006. Вып. 129, № 2. С. 400.
8. Кузнецов С.П., Сатаев И.П. Проверка устойчивости гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2006. Т. 14, № 5. С. 3.
9. Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Hyperbolic attractor in a system of coupled non-autonomous van der Pol oscillators: Numerical test for expanding and contracting cones // *Physics Letters A.* 2007. Vol. 365, № 1–2. P. 97.
10. Isaeva O.B., Jalnina A.Yu. and Kuznetsov S.P. Arnold’s cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E.* 2006, № 74. P. 046207.
11. Купцов П.В., Кузнецов С.П. О феноменах, сопровождающих переход к режиму синхронного хаоса в связанных неавтономных осцилляторах, представленных уравнениями для комплексных амплитуд // *Нелинейная динамика.* 2006, № 2. С. 307.
12. Isaeva O.B., Kuznetsov S.P. and Osbaldestin A.H. A system of alternately excited coupled non-autonomous oscillators manifesting phenomena intrinsic to complex analytical maps // *Physica D.* 2008, № 237. P. 873.
13. Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // *Physica D.* 2007, № 232. P. 87.
14. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В. Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2007. Т. 15, № 6. С. 75.
15. Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S. Hyperbolic chaos in the phase dynamics of a Q-switched oscillator with delayed nonlinear feedbacks // *Europhysics Letters.* 2008, № 28. P. 10013.

Поступила в редакцию 11.01.2009

HYPERBOLIC CHAOS IN A SYSTEM OF NONLINEAR COUPLED LANDAU-STUART OSCILLATORS

L.V. Turukina, A. Pikovsky

Chaotic dynamics of a system of four nonlinear coupled non-identical Landau-Stuart oscillators is considered. Subsystems are activated alternately by pairs due to a

slow variation of their parameters responsible for the Andronov–Hopf bifurcation. It is shown, that system dynamics depends of coupling type. Different types of phase map (Bernoulli type map) are obtained in Poincaré section depending of coupling. Some systems with different type of coupling corresponded to «maximum» and «minimum» chaos are investigated.

Keywords: Coupled oscillators, hyperbolic attractor, chaotic dynamics.

Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами посредством коротких импульсов. Автор более 50 научных публикаций, из них около 20 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов.



E-mail: lvTUR@rambler.ru
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
410019, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38.

Пиковский Аркадий Самуилович – родился в Горьком (1956), окончил Горьковский государственный университет (1977). После окончания работал в Институте прикладной физики АН, затем в университетах Вупперталя и Потсдама. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (ГГУ, 1982). Область научных интересов – нелинейная динамика, статистическая физика и теория хаоса.



E-mail: pikovsky@uni-potsdam.de
Department of Physics and Astronomy, Potsdam University
14476 Potsdam-Golm, Germany