



ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ БИФУРКАЦИИ В БИСТАБИЛЬНОМ ГЕНЕРАТОРЕ

Т.Е. Вадивасова, А.С. Захарова, В.С. Анищенко

В работе исследуется бистабильный генератор под воздействием аддитивного белого и цветного шума. Установлены индуцированные шумом бифуркации, состоящие в качественном изменении стационарного распределения амплитуды колебаний. В области бимодального распределения как для белого, так и для цветного шума, имеет место эффект когерентного резонанса.

Ключевые слова: Влияние шума, стохастическая бифуркация, бистабильный осциллятор, когерентный резонанс.

Введение

Исследование влияния случайных воздействий (шума) на нелинейные динамические системы является одним из актуальных и интенсивно развивающихся направлений в нелинейной динамике. В общем случае шум может приводить к двум типам эффектов: индуцированному шумом сдвигу бифуркаций, имеющих место в детерминированной системе, в область других значений управляющих параметров и возникновению новых типов поведения и новых бифуркаций (фазовых переходов), не наблюдавшихся в отсутствие шума [1]. Поскольку любая реальная система неизбежно находится под действием внутренних и внешних источников шума, без учета такого рода эффектов понять результаты экспериментов зачастую становится просто невозможно. Известно достаточно много примеров, когда шум приводит к качественной перестройке поведения системы [2–7]. Однако в целом вызванные шумом нелинейные эффекты исследованы далеко не полностью.

Индуцированные шумом бифуркации представляют особый интерес, так как показывают возможность управлять поведением динамической системой с помощью шумового воздействия. Интенсивность шума служит бифуркационным параметром динамической системы. По-видимому, роль бифуркационного параметра могут играть и другие статистические характеристики шума (среднее значение, дисперсия, ширина спектра и т.д.). При рассмотрении индуцированных шумом бифуркаций, как и вообще бифуркаций в динамических системах с шумом (стохастических бифуркаций), важно дать определение самого понятия «бифуркация». Согласно подходам, изложенным в [1] и [8], одним из возможных критериев стохастической бифуркации является качественное изменение стационарного вероятностного распределения,

например переход от унимодального распределения к бимодальному. В [8] такие бифуркации названы стохастическими бифуркациями Р-типа (феноменологическим бифуркациям). Изменение закона распределения влечет за собой изменение и других статистических характеристик поведения системы, наблюдаемых экспериментально.

Целью данной работы является исследование индуцированных шумом Р-бифуркаций в классической модели автогенератора с жестким возбуждением. Рассматривается воздействие как белого гауссова, так и цветного ограниченного шума, строятся бифуркационные линии на плоскости параметров (для случая белого шума) и анализируется взаимосвязь бифуркаций с эффектом когерентного резонанса в бистабильном генераторе [9].

1. Исследуемая модель

Исследуемая модель представляет собой классический бистабильный автогенератор ван дер Поля, находящийся под действием аддитивного шума

$$\ddot{x} - (\varepsilon + x^2 - x^4)\dot{x} + x = \xi(t), \quad (1)$$

где $\xi(t)$ – случайная сила, ε – параметр управления режимом генерации. Рассматривались два вида случайного воздействия: а) белый гауссов шум $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$; б) цветной ограниченный шум $\xi(t) = C \cos \Phi(t)$, где $\dot{\Phi} = \omega_1 + \sqrt{2D}n(t)$, C , ω_1 – постоянные, $n(t)$ – нормированный источник гауссова белого шума: $\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$, $\langle n(t) \rangle = 0$. Параметр D задает интенсивность белого шума. Модель (б) представляет собой гармонический шум с постоянной амплитудой C и спектральной плотностью мощности в виде лоренциана с максимумом на частоте ω_1 (частота случайного воздействия). Интенсивность белого шума D в этом случае определяет полуширину спектральной линии на уровне половинной мощности.

В отсутствие шума при условии $-1/8 < \varepsilon < 0$ система (1) характеризуется бистабильным поведением. На фазовой плоскости существуют два аттрактора – устойчивый фокус в начале координат и устойчивый предельный цикл. Последний возникает при $\varepsilon = -1/8$ в результате седло-узловой бифуркации циклов. Фокус теряет устойчивость при $\varepsilon = 0$ в результате субкритической бифуркации Андронова–Хопфа.

2. Воздействие белого гауссова шума

В квазигармоническом режиме при слабом шуме с помощью замены переменных

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t) \cos(t + \varphi(t)), \\ \dot{x}(t) &= -a(t) \sin(t + \varphi(t)) \end{aligned} \quad (2)$$

и усреднения уравнения генератора за период автоколебаний приходим к уравнениям для медленных (в масштабе $1/(2\pi)$) переменных – мгновенной амплитуды $a(t)$ и флуктуаций фазы $\varphi(t)$.

В случае воздействия белого шума на систему (1) стохастические уравнения для амплитуды и фазы автоколебаний имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{a^2}{8} - \frac{a^4}{16} \right) a + \frac{D}{2a} + \sqrt{D}n_1(t), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\sqrt{D}}{a}n_2(t),\end{aligned}\quad (3)$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ – независимые нормированные источники гауссова белого шума. Как следует из (3), амплитуда устойчивого цикла при $D = 0$ определяется по формуле $a = \sqrt{1 + \sqrt{1 + 8\varepsilon}}$.

Бистабильный автогенератор (1) с адитивным белым гауссовым шумом и его укороченная модель (3) исследованы в [10]. Основное внимание было уделено частоте вызванных шумом переключений генератора между двумя областями – окрестностью точки равновесия и окрестностью предельного цикла. Изменения закона распределения и спектра колебаний с ростом интенсивности шума в [10] не рассматривались.

При $D \neq 0$ плотность вероятности мгновенной амплитуды $a(t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова [11, 12]

$$\frac{\partial p(a, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a} \left[\left(\frac{\varepsilon a}{2} + \frac{a^3}{8} - \frac{a^5}{16} + \frac{D}{2a} \right) p(a, t) \right] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 p(a, t)}{\partial a^2}. \quad (4)$$

Стационарное решение (4) имеет вид

$$p(a) = Na \exp \left[-\frac{1}{48D} a^2 (a^4 - 3a^2 - 24\varepsilon) \right], \quad (5)$$

где N нормировочная константа. Экстремумы распределения (5) являются корнями следующего уравнения

$$f(a_m) = a_m^6 - 2a_m^4 - 8\varepsilon a_m^2 - 8D = 0. \quad (6)$$

Значение интенсивности шума D , при котором изменяется число экстремумов стационарного распределения амплитуды (число вещественных неотрицательных корней уравнения (6)) будем называть бифуркационным, имея в виду стохастическую бифуркацию Р-типа.

Из графиков функции $f(a_m)$, представленных на рис. 1, *a*, видно, что такие бифуркации имеют место, так как при изменении D меняется число пересечений графика функции с осью абсцисс. Отметим, что графики, приведенные на рис. 1, получены при $\varepsilon = -0.13$, то есть вне области бистабильности системы без шума, хотя и вблизи седло-узловой бифуркации циклов. На рис. 1, *b* приведены графики стационарного распределения амплитуды, рассчитанные по формуле (5) при $\varepsilon = -0.13$ и различных значениях интенсивности шума. Нормировочная константа N определялась численно.

Как следует из приведенных на рис. 1 результатов, при малой интенсивности шума имеется только один вещественный положительный корень уравнения (6), соответствующий единственной точке пересечения кривой $f(a_m)$ и оси абсцисс в области $a_m > 0$ (кривая 1 на рис. 1, *a*). При этом распределение амплитуды имеет только

один максимум, расположенный в окрестности нуля (кривая 1 на рис. 1, б). Дело в том, что при слабом шуме фазовая траектория в основном находится в окрестности устойчивого фокуса, где нелинейными эффектами можно пренебречь. Соответственно, распределение амплитуды близко к релеевому. При увеличении интенсивности шума фазовая траектория все чаще оказывается далеко от начала координат, и нелинейность системы проявляется всё сильнее. При этом траектория подолгу остается в той области, где при $\varepsilon \geq -1/8$ находится устойчивый предельный цикл. Вид распределения с ростом интенсивности шума эволюционирует. Значение $D \approx 0.005$ является бифуркационным. При достижении этого значения возникают два новых вещественных положительных корня уравнения (6) (кривая 2 на рис. 1, а) и происходит стохастическая бифуркация Р-типа: переход от унимодального распределения к бимодальному (кривая 2 на рис. 1, б). В случае достаточно сильного шума траектория редко попадает в окрестность устойчивого фокуса и при $D \approx 0.0202$ происходит вторая стохастическая бифуркация, но уже приводящая к исчезновению пары экстремумов (кривая 3 на рис. 1, а). В результате распределение амплитуды снова становится унимодальным, но максимум распределения смещается в сторону больших амплитуд (кривая 3 на рис. 1, б).

На рис. 2 представлены графики функции $f(a_m)$ и стационарные распределения амплитуды, полученные в случае $\varepsilon = -0.12$, то есть в области бистабильности

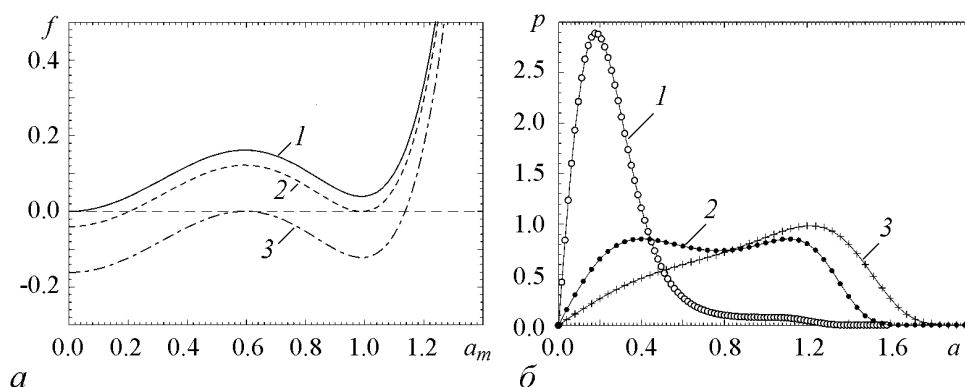


Рис. 1. а – график функции $f(a_m)$ (см. (6)) при $\varepsilon = -0.13$ и различных значениях интенсивности шума D : 1 – $1 \cdot 10^{-5}$, 2 – 0.005, 3 – 0.0202; б – стационарное распределение амплитуды при $\varepsilon = -0.13$ и различных значениях интенсивности шума D : 1 – 0.004, 2 – 0.015, 3 – 0.05

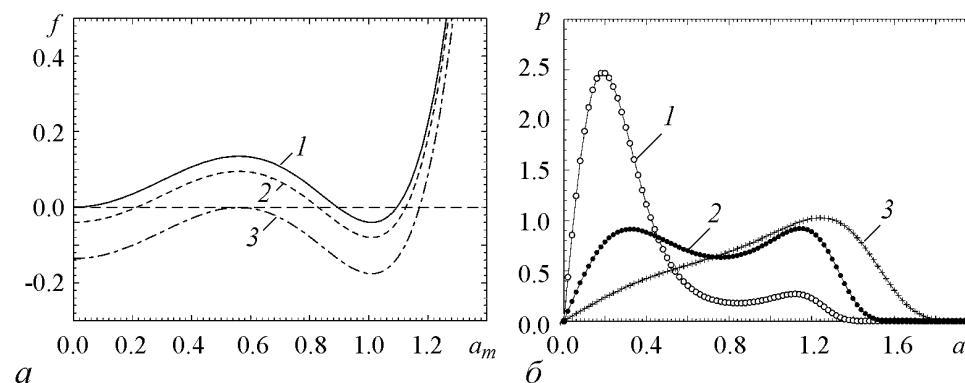


Рис. 2. а – график функции $f(a_m)$ (см. (6)) при $\varepsilon = -0.12$ и различных значениях интенсивности шума D : 1 – $1 \cdot 10^{-5}$, 2 – 0.005, 3 – 0.0169; б – стационарное распределение амплитуды при $\varepsilon = -0.12$ и различных значениях интенсивности шума D : 1 – 0.004, 2 – 0.01, 3 – 0.05

системы без шума, но вблизи седло-узловой бифуркации циклов. Они похожи на кривые, приведенные на рис. 1, но имеется одно отличие – отсутствует бифуркация, приводящая к возникновению второго максимума распределения $p(a)$. Распределение амплитуды является бимодальным при сколь угодно малой интенсивности шума (кривые 1 на рис. 2). Это связано с бистабильностью нешумящего генератора при $\varepsilon = -0.12$. С ростом интенсивности шума происходит перераспределение высоты максимумов. Первый максимум, соответствующий окрестности фокуса, уменьшается, а второй, приходящийся на область предельного цикла – увеличивается. При некотором значении D они имеют равную высоту (кривые 2 на рис. 2). При $D \approx 0.0169$ происходит бифуркация, приводящая к исчезновению пары экстремумов (кривая 3 на рис. 2, а) после чего распределение имеет только один максимум в области больших амплитуд (кривая 3 на рис. 2, б).

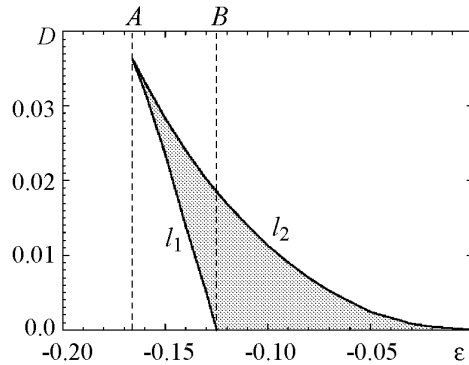


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма автогенератора (3) на плоскости управляющих параметров (ε, D) : l_1 – линия, на которой при увеличении интенсивности шума D возникает второй максимум распределения амплитуды; l_2 – линия, на которой при увеличении интенсивности шума D исчезает второй максимум распределения амплитуды; область, выделенная серым цветом, – область бимодального распределения амплитуды. Пунктирной линией A отмечено значение $\varepsilon = -1/6$, определяющее границу бимодальности по параметру ε . Пунктирной линией B отмечена граница бистабильности по параметру ε для генератора без шума

На рис. 3 приведены линии стохастических Р-бифуркаций в автогенераторе (3) на плоскости управляющих параметров (ε, D) . Область, отмеченная серым цветом, есть область, в которой стационарное распределение амплитуды является бимодальным. Бимодальное распределение для генератора с шумом служит аналогом бистабильности в нешумящем генераторе. При этом область бимодальности и область бистабильности не совпадают из-за индуцированных шумом бифуркаций. Так, при достаточно сильном шуме в бистабильном генераторе наблюдается переход к унимодальному распределению (на линии l_2). Напротив, вне области бистабильности в интервале $-1/6 < \varepsilon < -1/8$ при некоторых значениях интенсивности шума (между l_1 и l_2) имеет место бимодальное распределение.

Как показывает компьютерное моделирование, в системе (1) с белым гауссовым шумом наблюдается эффект, подобный когерентному резонансу: с ростом интенсивности шума ширина спектральной линии колебаний сначала уменьшается, а затем снова возрастает. Этот эффект был впервые описан в [9], где приведены результаты физического эксперимента с лазерным генератором и численно исследуется модель, аналогичная (3). Однако эволюция спектра не сопоставлялась с индуцированными шумом бифуркациями вероятностного распределения. Проведенные нами исследования показывают, что эффект сужения спектра, по-видимому, связан с бимодальным распределением амплитуды колебаний, поскольку минимальная ширина спектральной линии соответствует приблизительно середине области бимодального распределения (где два максимума имеют примерно одинаковую высоту). Следует отметить, что указанное поведение спектра колебаний наблюдается не только в области индуцированной шумом бимодальности, но и при $\varepsilon < -1/8$, где в отсутствие шума сосуществуют два аттрактора. На рис. 4 приведены спектры мощности колеба-

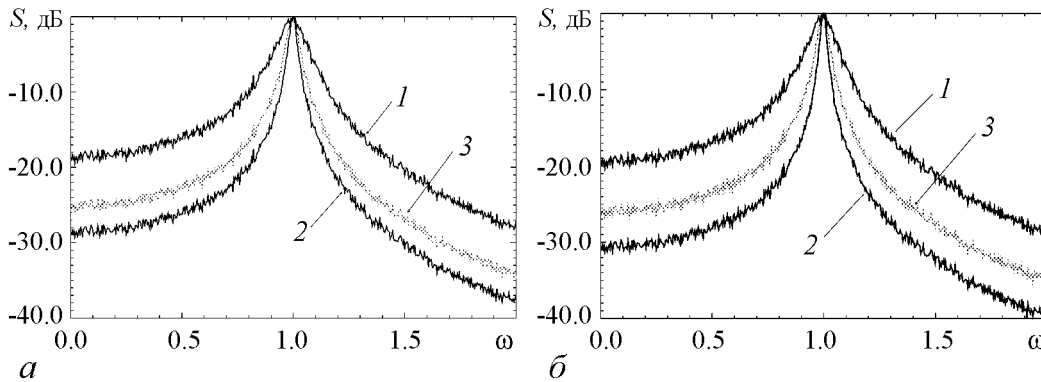


Рис. 4. Фрагменты нормированного спектра мощности колебаний при различных значениях параметра ε и интенсивности белого шума D : $a - \varepsilon = -0.13$, $1 - 0.001$, $2 - 0.01$, $3 - 0.025$; $b - \varepsilon = -0.12$, $1 - 0.001$, $2 - 0.01$, $3 - 0.025$

ний в системе (1) для двух значений ε – слева и справа от границы бистабильности, отмеченной на рис. 3 пунктирной линией B . В обоих случаях спектры, полученные при воздействии белого шума различной интенсивности, практически идентичны и отчетливо демонстрируют эффект, подобный когерентному резонансу.

3. Воздействие цветного ограниченного шума

В случае воздействия цветного шума, используя замену переменных (2) и усреднение за период автоколебаний, можно от системы (1) перейти к следующим стохастическим уравнениям для амплитуды и разности фаз:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{a^2}{8} - \frac{a^4}{16} \right) a - \frac{C}{2\omega_1} \sin(\theta), \\ \dot{\theta} &= \Delta - \frac{C}{2a\omega_1} \cos(\theta) - \sqrt{2D}n(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\theta = [t + \varphi(t) - \Phi(t)]$ – мгновенная разность фаз автогенератора и воздействия, $\Delta = (1 - \omega_1)$ – параметр расстройки, $n(t)$ – нормированный источник гауссова белого шума. Нами рассматривался случай синхронного воздействия, то есть частота спектрального максимума шума предполагается равной частоте автоколебаний ($\Delta = 0$).

Для системы (7) нельзя рассматривать амплитудное уравнение отдельно от фазового, и аналитический расчет стационарного распределения вероятностей $p(a, \theta)$ затруднителен. По этой причине стационарное распределение амплитуды $p(a)$ находилось путем интегрирования системы (7) и дальнейшей статистической обработки данных.

Зафиксируем параметр D , задающий ширину спектральной линии шумового воздействия, и будем менять его амплитуду C . Стационарные распределения амплитуды колебаний в генераторе при $\varepsilon = -0.13$, полученные для различных значений C , приведены на рис. 5. При небольшой амплитуде шума распределение $p(a)$ имеет один максимум (кривая 1), соответствующий малым колебаниям в окрестности состояния равновесия, однако амплитуда колебаний, при которой наблюдается максимум распределения, на порядок больше амплитуды воздействия C . При увеличе-

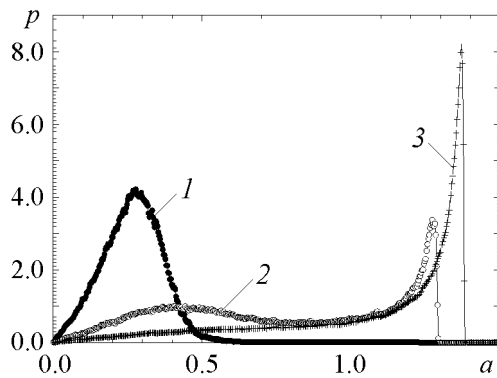


Рис. 5. Стационарные распределения амплитуды при $D = 0.1$ и различных значениях амплитуды шума C : 1 – 0.05, 2 – 0.08, 3 – 0.15

действием цветным шумом также сохраняется. Действительно, расчеты, проведенные для системы (1) с цветным ограниченным шумом при $\epsilon = -0.13$, показывают, что для заданной ширины спектра шума существует значение амплитуды шума C , при которой ширина спектра колебаний генератора минимальна (рис. 6). Эффект когерентного резонанса проявляется более отчетливо для шума с большей шириной спектра (рис. 6, a). С уменьшением ширины спектра шума (с уменьшением параметра D) изменение ширины спектра колебаний становится менее заметным. Воздействие цветного шума на генератор при $\epsilon = -0.12$ приводит к аналогичным результатам.

нии C происходит индуцированная шумом бифуркация и появляется второй максимум распределения, связанный с уходами траектории в область автоколебаний (кривая 2). Затем, при больших амплитудах шума, первый максимум распределения исчезает (кривая 3).

Таким образом, при синхронном воздействии на генератор цветного, ограниченного по амплитуде шума наблюдаются те же стохастические бифуркации, что и в случае белого шума. По этой причине можно ожидать, что эффект когерентного резонанса при воз-

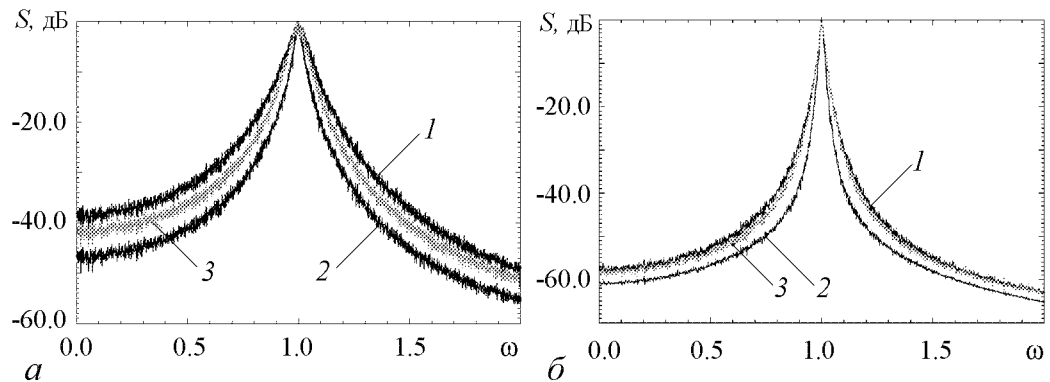


Рис. 6. Фрагменты нормированного спектра мощности колебаний при различных значениях ширины спектра (параметр D) и амплитуды цветного шума C : $a - D = 0.1$, 1 – 0.05, 2 – 0.08, 3 – 0.15; $b - D = 0.01$, 1 – 0.01, 2 – 0.05, 3 – 0.15

Выводы

Проведенные исследования показывают, что в окрестности границы бистабильности, которая в отсутствие шума соответствует седло-узловой бифуркации предельных циклов, автогенератор является особенно чувствительным к воздействию аддитивного шума. Такая чувствительность определяется наличием стохастических бифуркаций Р-типа, качественно меняющих вид стационарного распределения амплитуды колебаний. В области бистабильности детерминированной системы шум приводит к унимодальному распределению, то есть уничтожает бистабильность. Вне

этой области шум, напротив, вызывает переход к бимодальному распределению, то есть индуцирует бистабильность.

Область бимодального распределения связана с эффектом сужения спектральной линии колебаний. Наименьшая ширина спектральной линии колебаний приблизительно соответствует середине этой области. Данный эффект подобен явлению когерентного резонанса, однако природа его пока не ясна. На сегодняшний день мы не можем указать причину, почему спектральная линия колебаний сужается в середине области бимодального распределения амплитуды. Не исследован вопрос о связи ширины спектра со статистикой переключений между двумя областями фазового пространства. Не ясно также, как может повлиять на указанный эффект неизохронность системы. Выяснение этих вопросов требует дальнейших исследований.

Все отмеченные эффекты шумового воздействия являются грубыми по отношению к статистическим характеристикам этого воздействия и наблюдаются как для белого гауссова шума, так и для цветного шума с ограниченной амплитудой.

Данная работа выполнена при поддержке МОРФ в рамках программы «Развитие потенциала высшей школы».

Библиографический список

1. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
2. *Bulsara A.R., Schieve W.C., Gragg R.F.* Phase transitions induced by white noise in bistable optical systems // *Phys. Lett. A.* 1978. Vol. 68. P. 294.
3. *Анищенко В.С., Сафонова М.А.* Индуцированное шумом экспоненциальное разбегание фазовых траекторий в окрестности регулярных аттракторов // *Письма в ЖТФ.* 1986. Т. 12, № 12. С. 740.
4. *Sigeti D., Horsthemke W.* Pseudo-regular oscillations induced by external noise // *J.Stat.Phys.* 1989. Vol. 54. P. 1217.
5. *Schimansky-Geier L., Herzel H.* Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator // *Journal of Statistical Physics.* 1993. Vol. 70. P. 141.
6. *Arnbruster D., Stone E., Kirk V.* Noisy heterodinic networks // *Chaos.* 2003. Vol. 13, № 1. P. 71.
7. *Finn J.M., Tracy E.R., Cooke W.E. and Richardson A.S.* Noise stabilised random attractor // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. P. 026220(12).
8. *Arnold L.* Random Dynamical System. Springer, Berlin, 2003.
9. *Ushakov O.V., Wunsche H.-J., et al.* Coherence resonance near a Hopf bifurcation // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95, 123903(4).
10. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
11. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
12. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
13. *Pikovsky A., Kurths J.* Coherence resonance in a noisy driven excitable system // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 775.

Поступила в редакцию 25.06.2008

После доработки 3.03.2009

NOISE-INDUCED BIFURCATIONS IN BISTABLE OSCILLATOR

T.E. Vadivasova, A.S. Zakharova, V.S. Anishchenko

We investigate bistable oscillator under the influence of additive, white and colored, noise. We have found noise-induced bifurcations that consist in a qualitative change of stationary distribution of oscillations amplitude. In the region of bimodal distribution the effect of coherent resonance takes place both for white and colored noise.

Keywords: Noise influence, stochastic bifurcation, bistable oscillator, coherent resonance.



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

E-mail: tanya@chaos.ssu.runnet.ru

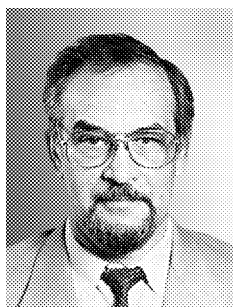
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, Астраханская, 83



Захарова Анна Сергеевна – инженер учебной лаборатории кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: теория динамического хаоса, статистические характеристики хаоса, стохастические процессы в нелинейных системах, влияние случайного воздействия на динамику нелинейных систем. Имеет 9 научных публикаций по данному направлению.

E-mail: Zakharova-as@mail.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, Астраханская, 83



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАЕН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012, Саратов, Астраханская, 83