

## СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ПЕРРОНА–ФРОБЕНИУСА

*В.М. Аникин*

В статье отражена проблематика изучения спектральных свойств линейного несамосопряженного оператора Перрона–Фробениуса, вводимого при вероятностном описании дискретных динамических систем с хаотическим поведением. Изложен метод аналитического решения задачи на собственные функции и собственные числа оператора для кусочно-линейных отображений и продемонстрирована определяющая роль собственных чисел и собственных функций оператора в оценке релаксационных и корреляционных свойств хаотических отображений.

*Ключевые слова:* Линейный несамосопряженный оператор, собственные функции, собственные значения.

В основе наших современных знаний лежат прежде всего простые модели, именно они, благодаря своей простоте, позволяют понять сложности окружающего нас мира.

*Ю.И. Неймарк*

### Введение

Простейшими моделями хаотических процессов, как известно, являются динамические системы с дискретным временем – одномерные отображения, описываемые разностными уравнениями вида

$$x_{n+1} = g(x_n, \lambda), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x_n \in (a, b), \quad (1)$$

где  $g$  – нелинейная или кусочно-линейная необратимая итеративная функция, сохраняющая меру в области определения отображения – интервале  $(a, b)$ ;  $\lambda$  – параметр, определяющий особенности динамики отображения. Простейшие модели динамического хаоса и сейчас не утратили своего и научного, и методологического значения для нелинейной науки. Собственно, первые серьезные шаги на пути ее изучения и начинаются со сценария М. Фейгенбаума перехода к хаосу, обнаруженного впервые именно для одномерных отображений и впоследствии нашедшего экспериментальное подтверждение при изучении ряда физических явлений. Второй важный концептуальный пример связан с развивавшейся коллективом авторов во главе с И.Р. Пригожиным фундаментальной концепцией относительно определяющей роли хаоса в

возникновении «стрелы времени» (необратимости физических процессов при наличии обратимого характера уравнений движения) с привлечением в качестве базового объекта теории простейшего диадического отображения – сдвига Бернулли [1]. Интересен, далее, тот факт, что парадигма детерминированного хаоса заняла свою нишу в общей теории относительности, когда была открыта хаотическая осцилляция компонент метрического тензора согласно одномерному отображению Гаусса в однородной анизотропной космологической модели типа IX по Бианки вблизи особенности («перемешанный мир» – *mixmaster universe*) [2].

Глубокое математическое исследование «классики» нелинейных явлений, одномерных отображений, позволяет выявить их новые свойства как собственно математических объектов (причем в рамках аналитического решения) и открывает перспективы для их использования в качестве инструмента для анализа нелинейных явлений более сложной природы.

В данной лекции представляются результаты аналитического исследования линейного оператора Перрона–Фробениуса, ассоциированного с перемешивающими одномерными кусочно-линейными отображениями, обладающими, в частности, инвариантной плотностью. Главными особенностями данного оператора (помимо упомянутой линейности), являются его положительность (в терминах функционального анализа) и несамосопряженность и неортогональность собственных функций, выявляемые при изучении спектральных свойств оператора (собственных функций и собственных значений) в нормированных линейных функциональных пространствах.

В статье будут последовательно рассмотрены такие вопросы, как постановка задачи на собственные функции и собственные значения оператора, аналитический метод решения этой задачи на базе построения производящей функции для собственных функций оператора, значимость решения спектральной задачи для определения вида автокорреляционной функции траекторий отображения (и наблюдаемых, связанных с этой траекторией).

## 1. Постановка задачи на собственные функции и собственные значения для оператора Перрона–Фробениуса

Оператор Перрона–Фробениуса (ОПФ)<sup>1</sup> определяет изменение плотностей вероятностной меры, происходящее при действии хаотического отображения<sup>2</sup>. Вероятностное описание хаотических динамических систем связано с рассмотрением начального значения  $x_0$  и рекуррентно вычисляемых согласно (1) точек траектории  $x_n$  как случайных величин, соответственно обозначаемых как  $X_0$  и  $X_n$ . Подобная экспликация оправдана тем, что совокупность значений  $x_n$  (как ансамбля реализа-

---

<sup>1</sup>**Перрон**, Оскар (нем. Perron, Oskar) (1880–1975) – немецкий математик, профессор университетов в Гейдельберге и Мюнхене. Автор широкого спектра публикаций по алгебре, геометрии, теории чисел, матриц, интегрирования и дифференциальных уравнений, капитального труда по непрерывным дробям.

**Фробениус**, Фердинанд Георг (нем. Frobenius, Ferdinand Georg) (1849–1917) – немецкий математик, член Прусской АН в Берлине (1893). Основные работы относятся к алгебре, теории алгебраических чисел, в частности, к теории матриц, теории конечных групп и их представлений матрицами.

<sup>2</sup>Существует несколько эквивалентных форм записи оператора Перрона–Фробениуса на основе интегральных и функциональных преобразований (см., например, [3–6]).

ций  $X_n$ ) для хаотического отображения при *любом* начальном значении  $x_0$  демонстрирует идентичные распределения по области определения («нечувствительность» к  $x_0$ ). В то же время траектории системы чувствительны к незначительному изменению  $x_0$  в том смысле, что расхождение траекторий при незначительном изменении  $x_0$  в процессе итераций сравнимо с длиной интервала. Это и предопределяет необходимость прогноза хода траектории при случайном (то есть заранее неизвестном) изменении  $x_0$  исключительно в вероятностном ключе.

Условие сохранения вероятностной меры приводит к представлению ОПФ в форме интеграла с сингулярным ядром

$$Pf(x) = \int f(t)\delta(x - g(t, \lambda))dt, \quad (2)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака. В вероятностной трактовке соотношение (2) – это обычное правило преобразования вероятностных плотностей при нелинейном преобразовании случайной величины ( $X_{n+1} = g(X_n, \lambda)$ ). Выражение может быть в силу фильтрующих свойств дельта-функции преобразовано от интегрального уравнения с сингулярным ядром к функциональному уравнению. Для кусочно-линейных отображений это уравнение имеет вид линейной комбинации значений функции  $f(x)$  при различных значениях аргумента вида  $ax + b$  (табл. 1). Для отображений, представленных в этой таблице, неподвижной «точкой» оператора является равномерное распределение, что проверяется непосредственной подстановкой в выражения для ОПФ.

Под пилообразным отображением в табл. 1 понимается отображение (рис. 1)

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{N-1} \left( (-1)^k N x_n + (-1)^{k+1} \left( k + \frac{1 - (-1)^k}{2} \right) \right) \Theta_k(x_n), \quad (3)$$

где  $\Theta_k(x)$  – характеристическая функция отрезка  $[\tilde{x}_{k-1}, \tilde{x}_k]$  задания  $k$ -й ветви отображения. Она равна единице, если значение ее аргумента принадлежит отрезку

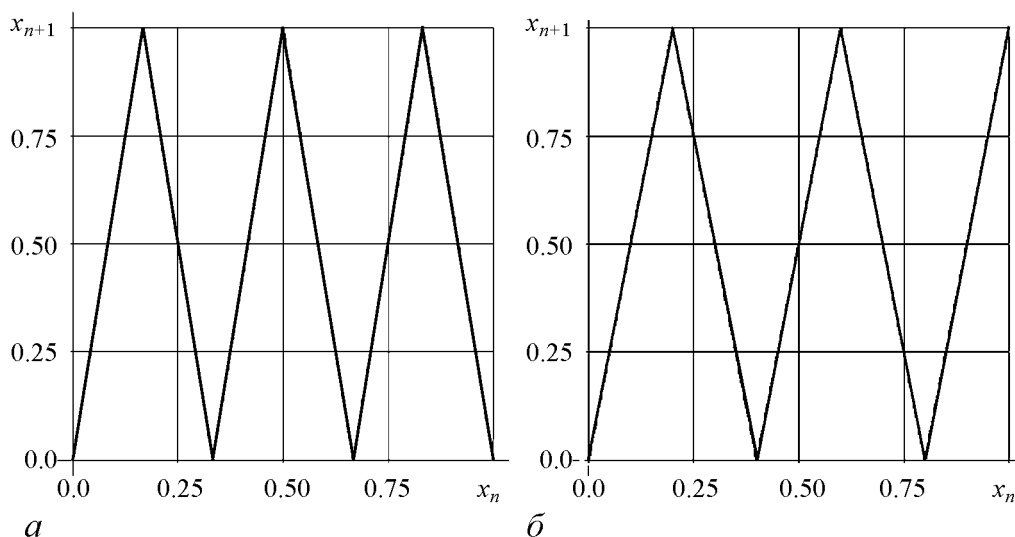


Рис. 1. Кусочно-линейное пилообразное отображение с четным (а) и нечетным (б) числом ветвей

Операторы Перрона–Фробениуса  
одномерных кусочно-линейных отображений

Отображение	Оператор Перрона–Фробениуса
Двоичный сдвиг Бернулли $x_{n+1} = 2x_n \bmod 1$	$P_B \phi(x) = \frac{1}{2} \left( \phi\left(\frac{x}{2}\right) + \phi\left(\frac{1+x}{2}\right) \right)$
Инверсный двоичный сдвиг Бернулли $x_{n+1} = 1 - 2x_n \bmod 1$	$P_{\bar{B}} \phi(x) = \frac{1}{2} \left( \phi\left(\frac{1-x}{2}\right) + \phi\left(\frac{2-x}{2}\right) \right)$
Пирамидальное отображение $x_{n+1} = 1 -  2x_n - 1 $	$P_T \phi(x) = \frac{1}{2} \left( \phi\left(\frac{x}{2}\right) + \phi\left(\frac{2-x}{2}\right) \right)$
Инверсное пирамидальное отображение $x_{n+1} =  1 - 2x_n $	$P_V \phi(x) = \frac{1}{2} \left( \phi\left(\frac{1-x}{2}\right) + \phi\left(\frac{x+1}{2}\right) \right)$
$N$ -образное отображение $x_{n+1} = \begin{cases} 3x_n, & 0 \leq x_n < 1/3, \\ 2 - 3x_n, & 1/3 \leq x_n < 2/3, \\ 3x_n - 2, & 2/3 \leq x_n \leq 1 \end{cases}$	$P_N \phi(x) = \frac{1}{3} \left( \phi\left(\frac{x}{3}\right) + \phi\left(\frac{2-x}{3}\right) + \phi\left(\frac{x+2}{3}\right) \right)$
Инверсное $N$ -образное отображение $x_{n+1} = \begin{cases} 1 - 3x_n, & 0 \leq x_n < 1/3, \\ 3x_n - 1, & 1/3 \leq x_n < 2/3, \\ 3 - 3x_n, & 2/3 \leq x_n \leq 1 \end{cases}$	$P_{\bar{N}} \phi(x) = \frac{1}{3} \left( \phi\left(\frac{1-x}{3}\right) + \phi\left(\frac{x+1}{3}\right) + \phi\left(\frac{3-x}{3}\right) \right)$
Сдвиг Бернулли общего вида $x_{n+1} = Nx_n \bmod 1$	$P_B \phi(x) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \phi\left(\frac{p+x}{N}\right)$
Инверсный сдвиг Бернулли общего вида $x_{n+1} = 1 - Nx_n \bmod 1$	$P_{\bar{B}} B(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} B\left(\frac{p+1-x}{N}, t\right) =$ $= \frac{t/N}{e^{t/N} - 1} e^{\frac{(1-x)t}{N}} \equiv B\left(1-x, \frac{t}{N}\right)$
Пилообразное отображение с $N$ ветвями	$P_{(N)} \varphi(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N/2-1} \varphi\left(\frac{x+2k}{N}\right) +$ $+ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N/2-1} \varphi\left(\frac{2(k+1)-x}{N}\right)$

$[\tilde{x}_{k-1}, \tilde{x}_k]$ ; когда же значение аргумента лежит за пределами этого отрезка, индикаторная функция принимает нулевое значение.

Как и для любого линейного оператора спектральная задача для оператора (2) основывается на соотношении

$$P\psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x), \quad (4)$$

где  $\psi_n(x)$  и  $\lambda_n$  – собственная функция оператора и отвечающее ей собственное число, соответственно. Собственная функция, соответствующая единичному собственному числу  $\lambda_0 = 1$ , является неподвижной точкой оператора и имеет смысл инвариантной плотности, наличие которой является доминантным признаком детерминированного хаоса.

Постановка задачи на собственные функции и собственные значения для ОПФ немедленно требует определения линейного функционального пространства, которому принадлежат собственные функции оператора. Говоря несколько иначе, оператор необходимо рассматривать на некотором нормированном функциональном пространстве (банаховом пространстве), где норма определена посредством скалярного произведения функций (гильбертово пространство). Это позволяет, в частности, строить и исследовать пределы для метрических выражений. С одной стороны, сами по себе вероятностные плотности не могут образовать линейное пространство (произвольная линейная комбинация плотностей не является плотностью), а с другой стороны, собственные функции оператора Перрона–Фробениуса высших порядков вообще не являются вероятностными плотностями! От них лишь требуется удовлетворение соотношению (4), при этом все они ортогональны константе [3, с. 53]

$$\int_0^1 \psi_n(x) dx = \delta_{n,0}, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Соотношение (5) имеет важное теоретическое и практическое значение, поскольку может рассматриваться как критерий правильности расчетов собственных функций ОПФ, проводимых и аналитическими, и численными методами. Для наглядной иллюстрации (5) на рис. 2 приведены несколько первых собственных функций [7] ОПФ для отображения Гаусса  $x_{n+1} = 1/x_n \bmod 1$ , описывающего преобразование иррационального подмножества единичного интервала в себя.

Впервые операторный подход при исследовании асимптотических процессов в хаотической динамической системе был применен К.Ф. Гауссом именно к отображению  $x_{n+1} = 1/x_n \bmod 1$  (с ним связан процесс разложения случайного числа в непрерывную дробь) чуть более 200 лет назад [3, гл. 3; 8–11]. В трудах Э. Вирсинга, К.И. Бабенко, Д.

Майера и М. Иосифеску (а им предшествовали работы Р.О. Кузьмина, Поля Леви, А.Я. Хинчина и некоторых других математиков<sup>3</sup>) аналитически и численно показано, в частности, что спад корреляций в динамической системе Гаусса и скорость установления в системе инвариантного вероятностного закона определяет *модуль второго (отрицательного по знаку!) собственного числа* соответствующего оператора Перрона–Фробениуса. Число  $-\lambda = 0.30366\dots$ , возведенное Д. Кнудом в ранг «фундаментальной константы», на порядок отличается от показателя Ляпунова данного отображения  $\Lambda = \pi^2/(6 \ln 2) = 2.37313\dots$

Отметим достаточно удивительное обстоятельство: первые аналитические решения спектральных задач для более простых по структуре и иным свойствам (в

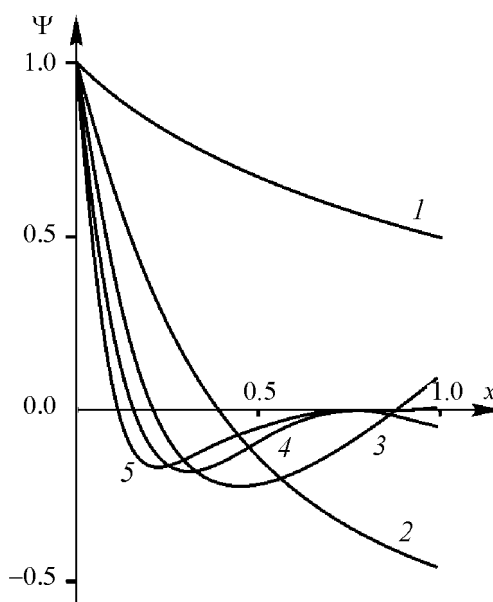


Рис. 2. Собственные функции отображения Гаусса: 1 – инвариантная плотность, 2–5 – собственные функции следующих порядков (ординаты показаны с масштабным коэффициентом  $\ln 2$ )

<sup>3</sup>См. библиографию в цит. выше книгах автора [3, 11].

сравнении с отображением Гаусса) хаотических отображений были получены гораздо позже – в первой половине 90-х годов прошлого столетия: усилиями членов научной школы Нобелевского лауреата И.Р. Пригожина [12–16]. Речь идет о таких отображениях, как сдвиг Бернулли  $x_{n+1} = Nx_n \bmod 1$ , где  $N$  – произвольное целое положительное число, и некоторых других простейших кусочно-линейных преобразованиях с итеративными функциями в виде двух-трех ветвей.

## 2. Решение спектральной задачи методом производящей функции для собственных функций оператора

Для кусочно-линейных отображений типа сдвигов Бернулли и отображений, полученных из них произвольным инвертированием ветвей, собственные функции ОПФ естественно искать в виде полиномиальных функций, ибо при действии оператора Перрона–Фробениуса этих отображений на полином степень последнего не меняется, и, таким образом, задача сводится лишь к нахождению соответствующих коэффициентов полиномов, играющих роль собственных функций. Иначе говоря, в этом случае ОПФ может быть определен в линейном пространстве целых функций. В работах членов научного коллектива И.Р. Пригожина показано, что в случае сдвигов Бернулли собственными функциями ОПФ являются полиномы Бернулли  $B_n(x)$ . Поскольку производящая функция для полиномов Бернулли суть

$$B(x, t) = \frac{te^{xt}}{e^t - 1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi \quad (6)$$

( $t$  – параметр), решение спектральной задачи можно необыкновенно изящно получить посредством воздействия оператором Перрона–Фробениуса для сдвигов Бернулли (см. табл. 1) на выражение (6)

$$P_B B(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} B\left(\frac{p+x}{N}, t\right) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{te^{(p+x)t/N}}{e^t - 1} = \frac{t}{N} \frac{e^{xt/N}}{e^{t/N} - 1} = B\left(x, \frac{t}{N}\right). \quad (7)$$

Замечательное соотношение (7) показывает, что действие оператора Перрона–Фробениуса для сдвигов Бернулли приводит к той же самой (!) производящей функции, но с параметром  $t/N$ . А это, в свою очередь, дает

$$P_B B(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_B B_n(x) \frac{t^n}{n!} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N^n} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad P_B B_n(x) = \frac{1}{N^n} B_n(x), \quad (8)$$

что и означает – полиномы Бернулли являются собственными функциями ОПФ ( $\psi_n(x) = B_n(x)$ ) с собственными числами  $\lambda_n = 1/N^n$ .

Прием нахождения собственных функций ОПФ посредством предварительного построения их производящих функций может быть развит и для других кусочно-линейных отображений. Предполагая существование собственных функций в форме полиномов

$$\psi_n(x) = \phi_n(x) \Theta_{0,1}(x), \quad \phi_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0}, \quad (9)$$

по аналогии с (5) запишем производящую функцию в виде

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad (10)$$

где  $\psi_n(x)$  – искомые собственные функции оператора. Дополнительно введем в рассмотрение четную

$$\Psi_e(x, t) = \frac{1}{2} (\Psi(x, t) + \Psi(x, -t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k}(x) \frac{t^{2k}}{(2k)!} \quad (11)$$

и нечетную

$$\Psi_o(x, t) = \frac{1}{2} (\Psi(x, t) - \Psi(x, -t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k+1}(x) \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (12)$$

части (10), определяемые стандартным образом. Согласно (5), производящие функции (10)–(12) должны удовлетворять условиям

$$\int_0^1 \Psi(x, t) dx = 1, \quad \int_0^1 \Psi_e(x, t) dx = 1, \quad \int_0^1 \Psi_o(x, t) dx = 0, \quad (13)$$

используемым для замыкания системы алгебраических уравнений при определении коэффициентов полиномиальных собственных функций.

В случае кусочно-линейных отображений с полными (переводящими интервал своего определения на весь интервал) ветвями и одинаковыми (по модулю) угловыми коэффициентами ветвей возможна факторизация производящей функции (10) и ее составляющих (11) и (12) в виде

$$\Psi(x, t) = e^{xt} H(t), \quad \Psi_{e,o}(x, t) = \frac{1}{2} (e^{xt} H_{1,2}(t) + e^{-xt} H_{1,2}(-t)), \quad (14)$$

где вспомогательные аналитические функции  $H(t)$  и  $H_{1,2}(t)$  представимы (в силу исходного предположения) степенными рядами вида  $\sum_{n=0}^{\infty} h_n \frac{t^n}{n!}$ . Тогда все (!) искомые полиномы выражаются через коэффициенты разложения вспомогательных функций:  $\psi_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k h_k x^{n-k}$ . Поэтому, в принципе, достаточно знать значения (правило вычисления) коэффициентов  $h_k$ , а не явный вид вспомогательных функций  $H(t)$  и  $H_{1,2}(t)$ . Тем не менее, существует класс отображений, для которого возможно аналитическое решение функциональных уравнений относительно  $H(t)$  и  $H_{1,2}(t)$ , получаемых подстановкой (14) в соотношение (4) для собственных функций и собственных чисел оператора.

Общая методика решения спектральных задач для ОПФ кусочно-линейных отображений с ветвями одного (по модулю) наклона представляется следующей совокупностью этапов:

1) уравнение (4) относительно собственных функций записывается для конкретного ОПФ;

2) подстановка полиномов (9) в (4) дает выражение для собственных чисел оператора Перрона–Фробениуса;

3) на основе (4) формулируется уравнение относительно производящей функции (четной или нечетной ее частей, если выражения для собственных чисел с четными и нечетными номерами различаются) с использованием найденного на предыдущем этапе вида собственных чисел;

4) в полученные уравнения для производящей функции (ее компонент) подставляются ее факторизованные представления с целью получения функциональных уравнений для вспомогательных функций;

5) функциональное уравнение для вспомогательной функции ( $H(t)$  или  $H_{1,2}(t)$ ) либо решается аналитически, либо используется для нахождения (методом степенных рядов) рекуррентных соотношений для коэффициентов разложения вспомогательных функций в степенные ряды (начальное значение для рекуррентной формулы дает условие нормировки).

Результаты расчетов собственных функций и чисел ОПФ простейших кусочно-линейных отображений сведены в табл. 2. Через  $E_n(x)$  обозначены полиномы Эйлера, имеющие производящую функцию

$$E(x, t) = \frac{2e^{xt}}{e^t + 1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi.$$

Осуществление описанной последовательности действий позволяет получить решение спектральной задачи для разнообразных кусочно-линейных отображений как с произвольным числом линейных ветвей, так и с произвольным чередованием ветвей с равным по модулю угловым коэффициентом. Для всех кусочно-линейных отображений с полными ветвями собственная функция, которой отвечает собственное число, равное единице, есть  $\psi_0(x) = 1 \cdot \Theta_{0,1}(x)$  – плотность равномерного распределения на интервале  $(0,1)$  ( $\Theta_{0,1}(x)$  – характеристическая функция единичного

Таблица 2

Собственные функции и собственные числа оператора Перрона–Фробениуса простейших кусочно-линейных отображений

Отображение	Собственные числа ОПФ	Собственные функции ОПФ
Сдвиг Бернулли общего вида	$\lambda_k = 1/N^k$	$\psi_k(x) = B_k(x)$
Инверсный сдвиг Бернулли общего вида	$\lambda_n = (-1)^n/N^n$	$\psi_k(x) = B_k(x)$
Пирамидальное отображение	$\lambda_{2n} = 1/2^{2n}$	$\psi_{2n}(x) = B_{2n}(x/2)$
Инверсное пирамидальное отображение	$\lambda_{2n} = 1/2^{2n}$	$\psi_{2n}(x) = B_{2n}((1-x)/2) = B_{2n}((1+x)/2)$ ;
$N$ -образное отображение	$\lambda_{2n} = 1/3^{2n}$ , $\lambda_{2n+1} = 1/3^{2n+2}$	$\psi_{2n}(x) = B_{2n}(x)$ , $\psi_{2n+1}(x) = E_{2n+1}(x)$
Инверсное $N$ -образное отображение	$\lambda_{2n} = 1/3^{2n}$ , $\lambda_{2n+1} = -1/3^{2n+2}$	$\psi_{2n}(x) = B_{2n}(x)$ , $\psi_{2n+1}(x) = E_{2n+1}(x)$



интервала). Что касается линейной собственной функции, то когда она существует, то равна  $\psi_1(x) = (x - 1/2) \cdot \Theta_{0,1}(x)$ ; в ряде случаев линейная функция входит в ядро оператора.

Ход расчета собственных функций и собственных чисел ОПФ пилообразного отображения (3) с произвольным числом ветвей отражает табл. 3. При исследовании (3) целесообразно отдельно рассматривать случаи четного (см. рис. 1, а) и нечетного (см. рис. 1, б) числа ветвей: в «четном» случае возможно возникновение полиномиального нуль-пространства (ядра) для ОПФ (действие ОПФ на функцию ядра дает нуль,  $P\psi_n(x) = 0$ ), а в «нечетном» случае – появление кратных собственных чисел (одному собственному значению соответствуют две собственные функции).

Случай кусочно-линейного отображения с произвольным чередованием ветвей с положительным и отрицательным угловым коэффициентом требует расчета коэффициентов полиномиальных вспомогательных функций. Это возможно на основе получаемых рекуррентных формул [17]. Собственные же числа имеют простое представление

$$\lambda_n = \frac{N_p + (-1)^n N_n}{N^{n+1}}, \quad N = N_p + N_n,$$

где  $N_p$  и  $N_n$  – соответственно число ветвей с положительным и отрицательным угловым коэффициентом.

Таблица 3

Решение спектральной задачи для пилообразного отображения (3)

Характеристика	$N = 2k$	$N = 2k + 1$
Собственные числа	$\lambda_n = \frac{1}{N^n}$	Кратные: $\lambda_n = 1/N^n, n = 2k,$ $\lambda_n = 1/N^{n+1}, n = 2k + 1$
Функциональные уравнения для вспомогательных функций	$H_1(t) = \frac{1}{N} (H_1(Nt) \frac{e^{gt} - 1}{e^{2t} - 1} + H_1(-Nt) e^{-2t} \frac{e^{-gt} - 1}{e^{-2t} - 1})$	$H_1(t) = \frac{1}{N(e^{2t} - 1)} \times (H_1(Nt)(e^{(N+1)t} - 1) - H_1(-Nt)(e^{-(N-1)t} - 1))$
Решение функциональных уравнений для вспомогательных функций	$H_1(t) = 2t/(e^{2t} - 1)$	$H_1(t) = t/(e^t - 1),$ $H_2(t) = 2/(e^t + 1)$
Производящая функция для собственных функций	$\Psi_e(x, t) = B_e(x, t) - \frac{t}{2} E_o(x, t)$	$B_e(x, t), E_o(x, t)$
Собственные функции ОПФ	$\psi_n(x) = B_n(x) - \frac{n}{2} E_{n-1}(x), n = 0, 2, 4 \dots$	$\psi_n(x) = aB_{2n}(x) + bE_{2n-1}(x), n = 0, 1, 2, \dots$ ( $a$ и $b$ – любые константы)
Производящая функций для функций ядра ОПФ	$B_o(x, t), E_o(x, t)$	
Функции ядра ОПФ	$B_{2n+1}(x), E_{2n+1}(x)$	

Отметим, что решение спектральной задачи для ОПФ некоторых «базовых» отображений автоматически позволяет записать выражения для собственных функций и собственных чисел операторов *топологически сопряженных* отображений, связанных с «базовыми» обратимой нелинейной (или в простейшем случае линейной) заменой переменной. Собственные числа при таких преобразованиях являются инвариантами, а собственная функция ОПФ нового отображения образуется путем умножения инвариантной плотности сопряженного отображения на собственную функцию ОПФ базового отображения с аргументом в форме обратной функции от сопрягающего преобразования. К примеру, собственные функции логистического отображения  $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ ,  $x_n \in (0, 1)$ , связанного с пирамидальным отображением  $\tilde{x}_{n+1} = 1 - |2\tilde{x}_n - 1|$  заменой переменных  $x_n = h(\tilde{x}_n) = \sin^2(\pi\tilde{x}_n/2)$ , имеют представление в виде

$$\psi_m^{(c)}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} B_{2m}(h^{-1}(x)) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} B_{2m}\left(\frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{x}\right).$$

### 3. Что дает знание собственных функций и собственных чисел оператора Перрона–Фробениуса?

При изучении как стохастических («истинно» случайных), так и хаотических процессов принципиальную (иногда даже говорят, «критическую») роль в радиофизике, а также в статистической физике играет анализ корреляционных функций процесса, оценка скорости убывания или «расщепления» корреляций, оценка динамики релаксационных процессов, установления равновесного состояния. Автокорреляционная функция преобразованием Фурье связана, как известно, с энергетическим спектром (Винера–Хинчина), который является характеристикой, нашедшей широкое применение в прикладных задачах. Общий вид корреляционной функции для процессов  $U, V$ , ассоциированных с реализацией дискретного хаотического процесса  $X$ :

$$R(n) = \langle U(x)V(g^n(x, \lambda)) \rangle - \langle U(x) \rangle \langle V(g^n(x, \lambda)) \rangle, \quad (15)$$

где усреднение в стационарном (асимптотическом) случае ведется по инвариантной плотности. Поскольку траектории отображения определяются многократным итерированием, то есть  $x_n = g^n(x_0, \lambda) = g^{n-1}(g(x_0, \lambda))$ , соотношение (15) можно представить в виде

$$R(n) = \langle U(x)\tilde{P}^n V(\varphi(x)) \rangle - \langle U(x) \rangle \langle V(x) \rangle, \quad (16)$$

где  $\tilde{P}f(x) = P(\tilde{\rho}(x)f(x))/\tilde{\rho}(x)$  – модифицированный оператор Перрона–Фробениуса,  $\tilde{\rho}(x)$  – инвариантная плотность рассматриваемого отображения.

Собственные числа оператора Перрона–Фробениуса по мере Лебега (2) и модифицированного оператора Перрона–Фробениуса совпадают, а собственные функции отличаются множителем  $\tilde{\rho}(x)$ . Отсюда становится ясным, что ключевым моментом при расчете асимптотических и корреляционных свойств одномерных хаотических отображений является нахождение решения спектральной задачи для оператора

Перрона–Фробениуса исследуемого отображения. Особый интерес в этой связи вызывают те отображения и ассоциированные с ними линейные операторы, для которых данная задача может быть решена *аналитически*. Соответственно аналитически может быть решена и задача расчета скорости релаксационных процессов (установления инвариантного распределения) и спада корреляций. Именно такой класс операторов (и «порождающих» их отображений) представлен в настоящей статье.

Формула (16) упрощается при вычислении автокорреляционных функций орбит хаотических отображений. Так, для определенных на единичном интервале хаотических отображений с равномерным инвариантным распределением расчеты в (16) сводятся к определению многократного действия ОПФ на независимую переменную, которая для осуществления этих расчетов заменяется на линейную собственную функцию оператора  $\psi_1(x)$  (в случае ее наличия)

$$R(n) = \int_0^1 x P^n x dx - \frac{1}{4} = \int_0^1 x P^n \left( \psi_1(x) + \frac{1}{2} \right) dx - \frac{1}{4}. \quad (17)$$

Характер изменения автокорреляционной функции с ростом аргумента  $n$  зависит от знака и абсолютного значения собственного числа, отвечающего линейной собственной функции  $\psi_1(x)$ . Так, для сдвигов Бернулли общего вида автокорреляционная функция демонстрирует экспоненциальный спад

$$R(n) = \frac{1}{12} \frac{1}{N^n} = \frac{\lambda_1^n}{12} = \frac{1}{12} e^{-n\Lambda}, \quad n \geq 0, \quad (18)$$

где  $\lambda_1 = N^{-1}$  – первое собственное число оператора Перрона–Фробениуса для сдвигов Бернулли,  $\Lambda = -\ln \lambda_1 = \ln N$  – показатель Ляпунова этого отображения.

В то же время для инверсных сдвигов Бернулли затухание автокорреляционной функции носит осциллирующий характер ( $\lambda_1 = -N^{-1}$ )

$$R(n) = \frac{(-1)^n |\lambda_1|^n}{12} = \frac{(-1)^n}{12} e^{-n\Lambda}, \quad \Lambda = -\ln |\lambda_1|, \quad n \geq 0. \quad (19)$$

Третий тип поведения автокорреляционной функции орбит хаотических отображений характерен для пилообразных отображений с *четным* числом ветвей. В этом случае  $P_{(N=2k)} x = 1/2$ , и отображения генерируют «дискретный белый шум» с автокорреляционной функцией

$$R(n) = \frac{1}{12} \delta(n) = \begin{cases} 1/12, & n = 0, \\ 0, & n \geq 1. \end{cases} \quad (20)$$

Хотя в показатель экспоненты в (18) и (19) мы ввели значение показателя Ляпунова, скорость убывания автокорреляционной функции в соответствующих случаях точнее сравнивать со скоростью убывания *показательной функции* с основанием  $|\lambda_1| < 1$ . В самом деле, для пилообразного отображения с *нечетным* числом ветвей для  $R(n)$  получается выражение, аналогичное (18), но с иным значением  $\lambda_1$

$$R(n) = \frac{1}{12} \frac{1}{N^{2n}} = \frac{\lambda_1^n}{12} = \frac{1}{12} e^{-2n\Lambda}, \quad \Lambda = \ln N, \quad \lambda_1 = \frac{1}{N^2}, \quad n \geq 0. \quad (21)$$

Для инверсного пилообразного отображения с нечетным числом, полученного инвертированием всех ветвей исходного отображения, автокорреляционная функция с ростом  $n$  демонстрирует «колебательное» затухающее поведение

$$R(n) = \frac{(-1)^n}{12} |\lambda_1|^n = \frac{(-1)^n}{12} e^{-2n\Lambda}, \quad \Lambda = \ln N, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{N^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Связь собственного числа  $\lambda_1$  с показателем Ляпунова еще более «затушевывается» при рассмотрении отображения с произвольным чередованием ветвей с различными угловыми коэффициентами. Автокорреляционная функция орбит удовлетворяет универсальному виду, но со «своим» значением собственного числа  $\lambda_1$

$$R(n) = \frac{1}{12} \lambda_1^n, \quad \lambda_1 = \frac{N_p - N_n}{N^2}, \quad n \geq 0. \quad (23)$$

Характер изменения (23) зависит от соотношения числа ветвей  $N_p$  с положительным угловым коэффициентом и числа ветвей  $N_n$  с отрицательным значением углового коэффициента.

Таким образом, для всех рассмотренных кусочно-линейных отображений автокорреляционная функция орбит изменяется по закону  $R(n) = 1/12 \lambda_1^n$ , где значение собственного числа  $\lambda_1$  зависит от вида отображения.

Красивый результат для автокорреляционной функции орбит получается для отображений, сопряженных рассмотренным выше кусочно-линейным отображениям. Если между отображениями установлена связь, выражаемая обратимой зависимостью  $x = h(\tilde{x})$ , то автокорреляционная функция нового отображения может быть вычислена через оператор Перрона–Фробениуса «старого» (!) отображения

$$R(n) = \int_0^1 h(x) P^n h(x) dx - \left( \int_0^1 h(x) dx \right)^2, \quad (24)$$

что, например, для логистического отображения приводит к выражению

$$R(n) = \begin{cases} 1/8, & n = 0, \\ 0, & n \geq 1. \end{cases}$$

Отметим, что в случае отображения Реньи  $x_{n+1} = \Phi x_n \bmod 1$ ,  $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ , в расчетах автокорреляционной функции орбит отображения участвуют две (!) линейные собственные функции ОПФ [18]. В общем же случае точный расчет (24) основан на представлении функции  $h(x)$  линейной комбинацией собственных функций ОПФ.

### Заключение

При операторном описании одномерных отображений их *нелинейные* свойства изучаются посредством *линейного* оператора Перрона–Фробениуса. Основная задача исследования оператора – задача определения его собственных функций и собственных чисел – успешно решается методом, основанным на введении и факторизации

производящей функции для собственных функций ОПФ и методе степенных рядов, что в комплексе позволяет найти собственные функции либо в явном виде, либо через рекуррентные соотношения для коэффициентов полиномов, определяющих структуру собственных функций. С оператором Перрона–Фробениуса для отображений с регулярным чередованием ветвей соотносятся производящие функции в виде линейных комбинаций производящих функций для полиномов Бернулли и Эйлера.

Прогресс в аналитических расчетах корреляционных функций, характеризующих процессы эволюции в дискретных динамических системах, связан с заменой операнда ОПФ алгебраическим выражением, содержащим линейные комбинации собственных функций оператора. Характер убывания корреляционных функций (по показательному закону, осциллирующий, дельта-коррелированный) определяется видом отображения и значениями собственных чисел оператора, отвечающих собственным функциям, участвующим в представлении операнда для ОПФ.

### Библиографический список

1. Пригожин И.Р., Стенгерс И. Время, хаос, квант. К решению парадокса времени. М.: Прогресс, 1994.
2. Лифшиц Е.М., Халатников И.М., Синай Я.Г. и др. О стохастических свойствах релятивистских космологических моделей вблизи особой точки // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38. С. 79.
3. Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
4. Iosifescu M., Kraaikamp C. Metrical theory of continued fractions. Boston: Kluwer, Inc., 2002.
5. Бланк Л.М. Устойчивость и локализация в хаотической динамике. М.: МЦНМО, 2001.
6. Lasota A., Mackey M.C. Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
7. Бабенко К.И., Юрьев С.П. Об одной задаче Гаусса. Препринт Института прикладной математики АН СССР, № 63. Москва, 1977.
8. Кузьмин Р.О. Об одной задаче Гаусса // ДАН СССР. 1928. Серия А. С. 375.
9. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. Получисленные алгоритмы. М.: Мир, 1977. С. 391.
10. Кнут Д. Э. Искусство программирования. Т. 2. Получисленные алгоритмы. 3-е изд. М.: Вильямс, 2000. С. 407.
11. Аникин В.М. Отображение Гаусса: эволюционные и вероятностные свойства. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2007.
12. Dörfle M. Spectrum and eigenfunctions of the Frobenius-Perron operator of the tent map // J. Stat. Phys. 1985. Vol. 40, № 1/2. P. 93.
13. Gaspard P.  $r$ -adic One-dimensional maps and the Euler summation formula // J. Phys. A: Math. Gen. 1992. Vol. 25. L. 483.

14. *Antoniou I., Tasaki S.* Generalized spectral decomposition of mixing dynamical systems // *Int. J. Quantum Chemistry*. 1993. Vol. 46. P. 425.
15. *Driebe D.J., Ordóñez G.O.* Using symmetries of the Perron-Frobenius operator to determine spectral decompositions // *Phys. Let.* 1996. Vol. A 211. P. 204.
16. *Antoniou I., Dmitrieva L., Kuperin Yu., Melnikov Yu.* Resonances and extension of dynamics to rigged Hilbert space // *Computers Math. Applic.* 1997. Vol. 34, № 5/6. P. 399.
17. *Аникин В.М., Ремизов А.С., Аркадакский С.С.* Собственные функции и числа оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2007. Т. 15, № 2. С. 62.
18. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М.* Инвариантные функциональные подпространства линейных эволюционных операторов хаотических отображений // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2005. Т. 13, № 1–2. С. 3.

*Поступила в редакцию 07.07.2009*

## SPECTRAL PROBLEMS FOR THE PERRON–FROBENIUS OPERATOR

*V.M. Anikin*

A method of solving the spectral problem for the Perron–Frobenius operator of one-dimensional piece-wise linear chaotic maps is demonstrated. The method is based on introducing generating functions for the eigenfunctions of the operator. It is shown that the behavior of autocorrelation functions for chaotic maps depends on eigenvalues of the Perron–Frobenius operator.

*Keywords:* Linear non-selfadjoned operator, eigenfunctions, eigenvalues.



*Аникин Валерий Михайлович* – родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил физический факультет СГУ (1970). Доктор физико-математических наук, профессор физического факультета и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – хаотическая динамика, математическое моделирование стохастических и хаотических процессов. Автор 180 печатных работ, в том числе монографии «Аналитические модели детерминированного хаоса», М: ФИЗМАТЛИТ, 2007 (в соавторстве с А.Ф. Голубенцевым). Ученый секретарь совета по защите кандидатских и докторских диссертаций при СГУ по специальностям радиофизика, физическая электроника, оптика, твердотельная электроника. Эксперт Министерства образования и науки РФ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru; ivesc@sgu.ru