Обзоры актуальных проблем нелинейной динамики

Изв. вузов «ПНД», т. 17, № 5, 2009

УДК 528.854

# МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

*Н.Г. Макаренко, И.С. Князева*

Статья содержит изложение методов микроканонического варианта мультифрактального формализма. На уровне технической строгости обсуждаются его возможности в применении к анализу и реконструкции цифровых изображений.

*Ключевые слова:* Фракталы, мультифрактальный анализ, цифровые изображения.

> Не буду заморачивать тебя подробностями, потому что ты можешь...
> – Могу что?
> – Можешь заморочиться.
>
> *Дуглас Адамс*. Жизнь, Вселенная и Вообще

## Введение

Фракталом называют множество, которое можно представить как композицию или *коллаж* своих уменьшенных копий [1]. Каждая из копий получается применением к исходному компактному множеству конечного набора линейных сжимающих отображений IFS (*iterated function system*), дополненных, возможно, вращениями и трансляциями. По теореме Банаха о неподвижной точке в пространстве компактов, IFS имеет единственную неподвижную «точку» или аттрактор IFS [1–4]. Если образы IFS не пересекаются, то аттрактор может быть несвязным компактным объектом с дробной размерностью, то есть фракталом. Представим себе, что каждая итерация IFS эквивалентна нанесению черной краски (массы меры) на носитель. Тогда предельным образом будет черно-белая геометрическая фигура, такая, например, как ковер Серпиньского. Предположим теперь, что каждое из IFS выбирается с фиксированной вероятностью. В этом случае раскраска аттрактора будет репродуцировать себя в шкале «уровней серого» на различных, все более уменьшающихся масштабах, следуя заданному распределению вероятностей. В результате получится единственная самоподобная инвариантная мера IFS на аттракторе в силу той же самой теоремы Банаха, но уже в пространстве борелевых мер с метрикой Монжа–Канторовича [1, 2, 4]. Такую меру называют *мультифрактальной,* потому что она состоит из фрактальных компонент разной размерности.

Для того чтобы описать локальную изменчивость мультифрактального узора, используют понятие регулярности функции, адаптированное к мере. Эвристическая идея измерения регулярности заключается в том, что мы исследуем локальное изменение функции в зависимости от изменения аргумента. Для «хороших» функций приращения функции и аргумента согласованы так, что их отношение равномерно ограничено $|\Delta y| \,/\, |\Delta x| \leqslant C$ в некоторой малой окрестности $|\Delta x| = |x - x_0| \leqslant \varepsilon$ точки $x_0$ положительной константой. С другой стороны, можно представить себе функцию, для которой небольшое изменение $|\Delta x|$ приводит к огромному значению $|\Delta y|$, так что $|\Delta y| \,/\, |\Delta x| \sim \infty$. Альтернативой может быть непостоянная функция, которая очень слабо реагирует на изменение аргумента, то есть $|\Delta y| \,/\, |\Delta x| \sim 0$. Можно обобщить все эти ситуации с помощью некоторой постоянной $\alpha(x_0)$, такой что в окрестности $x_0$ ограниченным является отношение $|\Delta y| \,/\, |\Delta x|^{\alpha} \leqslant C_{\mathrm{H}}$. Величину $\alpha(x_0)$ называют *гельдеровским показателем регулярности* функции в точке $x_0$, а постоянную $C_{\mathrm{H}}$ иногда называют *гельдеровской производной*. Ее геометрическим образом в $x_0$ является криволинейный «касательный» конус $\Delta y \sim |\Delta x|^{\alpha}$ [5].

Будем рассматривать значения функции в ε-окрестности некоторой точки $x \in R$ как количество массы [2] некоторой меры $\mu\,(\varepsilon)$. Ее универсальной аппроксимацией на $I \subset R$ является степенной закон $\mu\,(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha(x)}$, где $\alpha(x)$ называют *гельдеровским показателем сингулярности меры*. Если масса $M$ распределена «атомарно», со значениями $m_i$ в отдельный точках $x_i$ носителя, то $\alpha = 0$ и $M = \sum_i m_i \delta\,(x - x_i)$. Равномерному распределению массы соответствует значение $\alpha = 1$ и абсолютно непрерывная мера $\mu$ с постоянной плотностью $\rho$, так что $M = \int_I \rho dx$. Для $\alpha < 1$ плотность меры расходится при $\varepsilon \to 0$, и такую меру называют *сингулярной*. Несколько неожиданным покажется то, что случай $\alpha = 2$ тоже объявляют сингулярным в $1D$. Для случая $2D$ мера сингулярна при $\alpha \neq 2$ и т.д. Множество точек носителя, имеющих меру с сингулярностью $\alpha$ в общем случае образуют фрактальное множество с размерностью $f(\alpha)$, а пару $(\alpha, f(\alpha))$ называют *мультифрактальным спектром*. В случае самоподобной меры график спектра является выпуклой вверх кривой. Способы вычисления такого спектра для разных ситуаций являются одной из задач мультифрактального анализа.

Мультифрактальная техника была введена в физику в 1986 г. статьей [6], хотя обобщенные размерности Реньи использовали тремя годами раньше [7] для описания странных аттракторов. Позднее были приведены строгие обоснования метода статистических моментов для оценки спектров самоподобных мер [8, 9]. Этот подход реферируется как *канонический* вариант формализма [10–15]. Можно развить мультифрактальный формализм не только для мер, но и для функций [16]. Оказывается, что почти каждая функция в некоторых пространствах математической физики является мультифрактальной [17]. Грубо говоря, это означает, что гладких кривых намного меньше, чем кривых, которые можно провести не отрывая карандаш от листа бумаги.

Менее известен физикам *микроканонический* вариант мультифрактального формализма [18, 19]. В нем показатели сингулярности и их спектр явным образом получаются из таких фундаментальных понятий, как гельдеровская регулярность радоновых мер. Здесь мультифрактальность перестает быть прерогативой ситуаций, связанных лишь с полностью развитой турбулентностью.

Основной задачей нашей статьи является изложение основ этого формализма на уровне технической строгости. Теоретические основы иллюстрируются на примере цифровых изображений – объектов, для которых этот вариант формализма выглядит настолько естественным, насколько это вообще возможно. Мы описываем мультифрактальное разложение изображения на сингулярные компоненты с использованием емкостей Шоке и приводим способ восстановления оригинала по множествам максимальной сингулярности.

## 1. Мера и размерность Хаусдорфа

Предполагая, что читатель знаком с основными понятиями теории меры, мы приведем здесь лишь некоторые основные сведения (см. [20, 21]). Наиболее известная *мера Лебега* является способом приписать подмножеству из $R^n$ неотрицательное число, имеющее смысл его «размера». Представим себе однородное распределение массы в $R^n$ такое, что любой единичный $n$-мерный куб содержит единичную массу. Тогда лебегова мера $\mu_{\mathrm{L}}(A)$ компактного множества $A \in R^n$ – это просто количество массы, которое в нем содержится. Для интервала $I_n = [a_n, b_n] \in R$ эта мера – длина $\mu_{\mathrm{L}}(I_n) = b_n - a_n$; для прямоугольника $P = [a_1, b_1] \times .... \times [a_n, b_n]$ – это объем $\mu_{\mathrm{L}}(P) = (b_1 - a_1) \times ... (b_n - a_n)$. Для произвольного множества $A \in R^n$ мера Лебега определяется как нижняя граница мер прямоугольников, покрывающих $A$. При этом предполагается выполнение двух свойств:

$$\mu_{\mathrm{L}}(\varnothing) = 0; \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mu(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{1}$$

В общем случае мера на множестве $X$ – это функция, которая приписывает каждому подмножеству $A \subset X$ неотрицательное число $0 \leqslant \mu(A) \leqslant \infty$, так что выполняются условия (1). Если мера $\mu$ уже определена, то множество $A \in X$ называют $\mu$-*измеримым*, если оно аддитивно «расщепляет» любое другое множество $B \in X$, то есть $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$, где $A^c$ дополнение $A$ в $X$. Иными словами, измерить множество, это значит разбить его на части с помощью эталонного множества.

Класс $\mu$-измеримых множеств образует *алгебру*: дополнение к любому измеримому множеству – измеримо; счетное объединение и пересечение измеримых множеств также измеримы. Минимальную алгебру составляют так называемые *борелевы множества*: на $R$ такими множествами являются обычные интервалы. Меру $\mu$ называют борелевской *регулярной* мерой, если для *каждого* множества $A$ существует такое борелево множество $B \supset A$, которое «аппроксимирует» меру $A$: $\mu(B) = \mu(A)$. Если такая регулярная мера конечна для любого компактного множества, ее называют мерой *Радона.* Меры Радона в $R^n$ получают следующим образом. Выберем фиксированный масштаб $r$ и покроем тело $F$ *непересекающимися* кубами или шарами размером $r$. Пусть $N(r)$ – их минимальное число. Тогда мера – длина, площадь или объем – определяется выражением

$$m(F) = N(r)\, r^d, \tag{2}$$

где $d = 1, 2, 3$ называют *емкостью* или *бокс-размерностью* $F$. Формулу (2) можно рассматривать как определение $d$. Действительно, с точностью до нормировки

$$d = -\lim_{r \to 0} \left( \log N(r) / \log r \right) \tag{3}$$

в предположении, что предел существует. Поскольку размерность заранее не известна, будем перебирать все возможные пробные значения $d$, пока не найдется такое из них, для которого $m\,(F)$ в пределе $r \to 0$ равняется *конечному* числу. Пусть, например, $\gamma : [0, 1] \to R^2$ – фрагмент спрямляемой кривой длиной $l$. Необходимое для покрытия фрагмента число $r$ шаров составляет $N\,(r) = l/r$ и мера (2) равна $m\,(\gamma) = lr^{d-1}$. Легко убедиться, что для $d > 1$ мера $m\,(\gamma) \to 0$ при $r \to 0$ и $m\,(\gamma) \to \infty$, если $d < 1$. Между ними существует единственное «правильное» значение $d = 1$, которому и соответствует конечное значение меры $m\,(\gamma) = l$. Мы будем неоднократно использовать ниже этот прием: необходимая для нас величина $\alpha$ должна обладать свойством «точки перехода» – для любого $\beta > \alpha$ некоторая мера равна нулю, а для любого $\beta < \alpha$ она бесконечна. Размерность, которую определяет формула (3), часто называют фрактальной.

Дальнейшее обобщение связано с заменой шаров покрытия на произвольные взаимно пересекающиеся множества [2, 20, 21]. Счетное семейство подмножеств $\mathcal{A} = \{A_i\}$ называют счетным $\varepsilon$-покрытием множества $F$, если $F \subseteq \bigcup_i A_i$ и для всех $A_i$ справедливо неравенство $\mathrm{diam}\ A_i \leqslant \varepsilon$, $\mathrm{diam}\ A = \sup_{x,y \in A} \|x - y\|$. Определим *крупнозернистую* $\alpha$*-мерную меру Хаусдорфа*, как [2, 20, 21]

$$\mu_{\mathrm{H}}^{\alpha}\,(\varepsilon, F) = \inf \sum_{A_i \in \mathcal{A}} \left( \mathrm{diam}\ A_i \right)^{\alpha}, \tag{4}$$

где нижняя грань берется по всем счетным $\varepsilon$-покрытиям. Предел

$$\mu_{\mathrm{H}}^{\alpha}\,(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_{\mathrm{H}}^{\alpha}\,(\varepsilon, F) \tag{5}$$

называют $\alpha$*-мерной мерой Хаусдорфа*. Эта мера обладает приятными свойствами. Так, в метрическом пространстве $R$ для конечного множества $A$ одномерная мера Хаусдорфа совпадает с мерой Лебега: $\mu_{\mathrm{H}}^{1}\,(A) = m\,(A)$. Если $A$ состоит из $n$ точек, то мера $\mu_{\mathrm{H}}^{0}\,(A) = n$. Легко понять, что вычислить меру (5) практически невозможно. Однако ее можно оценить, используя один результат из геометрической теории меры [22]. Пусть мера Радона $\mu\,[B_r\,(x)]$ для шара $B_r\,(x)$, окружающего каждую точку $x \in A$ борелева множества $A \subset R^n$, удовлетворяет условию

$$\lim_{r \to 0} \left( \log \mu\,[B_r\,(x)] \,/\, \log |r^{\alpha}| \right) = 1, \quad 0 < \alpha \leqslant n. \tag{6}$$

Тогда существует постоянная $C = C\,(\alpha, n)$ такая, что

$$\mu\,(A) \geqslant C\lambda\mu_{\mathrm{H}}^{\alpha}\,(A)\,, \quad 0 < \lambda < \infty. \tag{7}$$

Иными словами, $\alpha$-мерную меру Хаусдорфа можно аппроксимировать более доступной для измерения мерой Радона, если последняя удовлетворяет «скейлингу»

$$\mu\,[B_r\,(x)] \sim r^{\alpha}. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь поведение $\mu_{\mathrm{H}}^{\alpha}(F)$ как функции $\alpha$, используя прием, описанный выше. Когда $\alpha$ увеличивается, мера уменьшается. Пусть $F$ – борелево множество и $0 < \alpha < s$. Тогда, если $\mu_{\mathrm{H}}^{\alpha}(F) < \infty$, то $\mu_{\mathrm{H}}^{s}(F) = 0$. Напротив, если $\mu_{\mathrm{H}}^{s}(F) > 0$, то $\mu_{\mathrm{H}}^{\alpha}(F) = \infty$. Можно доказать, что для $F$ существует единственное критическое значение $\alpha_0 \in [0, \infty]$, такое что $\mu_{\mathrm{H}}^{\alpha}(F) = \infty$ для всех $\alpha < \alpha_0$ и $\mu_{\mathrm{H}}^{\alpha}(F) = 0$ для всех $\alpha > \alpha_0$. Эту величину

$$\alpha_0 = \dim_{\mathrm{H}} F = \sup\left\{\alpha \left| \mu_{\mathrm{H}}^{\alpha}(F) = 0\right.\right\} = \inf\left\{\alpha \left| \mu_{\mathrm{H}}^{\alpha}(F) = \infty\right.\right\} \tag{9}$$

и называют *размерностью Хаусдорфа* [2, 3, 20]. Можно показать, что если $A$ и $B$ – борелевы множества, то

$$A \subseteq B \Rightarrow \dim_{\mathrm{H}} A \leqslant \dim_{\mathrm{H}} B; \quad \dim_{\mathrm{H}}(A \cup B) = \max\left\{\dim_{\mathrm{H}} A, \dim_{\mathrm{H}} B\right\}. \tag{10}$$

## 2. Абстрактный мультифрактальный формализм

Пусть $X \subset R$ и $g : X \to [-\infty, +\infty]$ – непрерывная функция. Проведем на графике $(x, g(x))$ горизонтальную прямую $g(x) = \alpha$ и рассмотрим для разных $\alpha$ *множества уровней* $K_{\alpha}^{g} = g^{-1}(\alpha) \cap X$, то есть множества точек носителя, в которых $g(x)$ пересекается с прямой [23] (рис. 1)

$$K_{\alpha}^{g} = \left\{x \in X \left| g(x) = \alpha\right.\right\}. \tag{11}$$

Их называют компонентами *мультифрактального разложения* $X$, так как

$$X = \bigcup_{-\infty \leqslant \alpha \leqslant +\infty} K_{\alpha}^{g}. \tag{12}$$

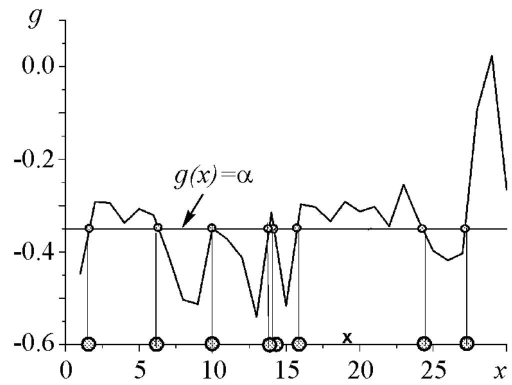


Рис. 1. Компонента мультифрактального разложения для $\alpha = -0.35$ относительно графика $g(x)$ (показана кружками на оси абсцисс)

Термин «мультифрактальный» означает, что каждая из компонент $K_{\alpha}^{g}$ образована конечным числом точек, так что $\dim_{\mathrm{H}}(K_{\alpha}^{g}) \leqslant 1$, как для фрактала. Таким образом, $X$ расслаивается на различные «фрактальные» множества относительно функции $g$. Целочисленную многозначную функцию, равную числу пересечений графика $g(x)$ с нашей прямой

$$\mathcal{N}(\alpha, g, K_{\alpha}^{g}) = \#\left\{x \left| g(x) = \alpha\right.\right\}, \tag{13}$$

называют *индикатрисой Банаха.* Для $X = [a, b]$ она равна $\mu_{\mathrm{H}}^{0}\left(g^{-1}(\alpha) \cap [a, b]\right)$, то есть равна нульмерной мере Хаусдорфа множества точек пересечения.

Для «измерения» каждой компоненты $K_{\alpha}^{g}$ выберем монотонную функцию множества, например, размерность Хаусдорфа, $f_{\mathrm{H}}(\alpha) = \dim_{\mathrm{H}}(K_{\alpha}^{g})$, которая обладает нужным свойством (см.(10)). Пару $(\alpha,\ f_{\mathrm{H}}(\alpha))$ называют *мультифрактальным спектром* относительно $g(x)$.

Наша ближайшая цель – выбор подходящей функции $g(x)$. Мы используем для этого гельдеровский показатель регулярности функции.

## 3. Гельдеровская регулярность функций

Пусть $f : R \to R$ – функция, $n \leqslant \alpha \leqslant n + 1, n \in Z$ и $x_0 \in R$ – некоторая точка. Говорят, что $f \in C^{\alpha}(x_0)$, если существует число $\delta > 0$, полином $P_n$ степени $n$ и постоянная $C$, такие что для любой точки $x$ из $\delta$-окрестности $x_0$ справедливо неравенство [24–27]

$$|f(x) - P_n(x - x_0)| \leqslant C|x - x_0|^{\alpha}. \qquad (14)$$

Случай $n = 0$ в (14) приводит к стандартному определению липшиц-непрерывности для функции. *Поточечным гельдеровским показателем (экспонентой)* $f$ в точке $x_0$ называют величину

$$\alpha_p(x_0) = \sup\{\alpha \,|\, f \in C^{\alpha}(x_0)\} \qquad (15)$$

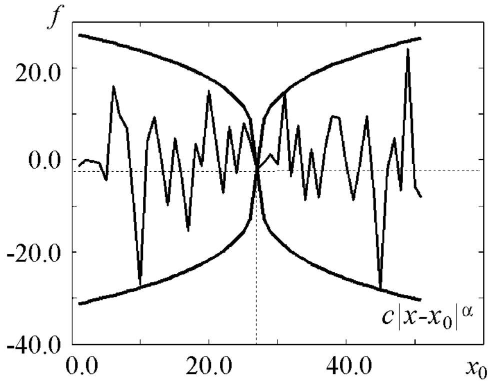



Рис. 2. Гельдеровская регулярность функции

Приведем геометрическую интерпретацию [24] этого показателя (рис. 2). Считаем, что функция $f$ имеет показатель $\alpha$ в $x_0$, если ее график $\{x, f(x)\}$ в окрестности $x_0$ эквивалентен кривой $x \to f(x_0) + c|x - x_0|^{\alpha}$ в следующем смысле. График $f$ для любого $\varepsilon > 0$ ограничен в этой окрестности огибающей, состоящей из пары кривых: $x \to f(x_0) + c|x - x_0|^{\alpha-\varepsilon}$ и $x \to f(x_0) - c|x - x_0|^{\alpha-\varepsilon}$. Указанное свойство нарушается для любых $\varepsilon < 0$.

Можно доказать [27], что полином $P_n$ в (14) состоит из первых $(n+1)$ членов разложения функции $f(x)$ в окрестности точки $x_0$ в ряд Тейлора

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + .... + c_n(x - x_0)^n + C|x - x_0|^{\alpha(x_0)}, \qquad (16)$$

где $c_0 = f(x_0)$, $c_k = (1/k!)\,\partial^k f(x)|_{x_0}$, $k \geqslant 1$ и $\partial^k f(x) \equiv \partial^k f/\partial x^k$. Усеченный до членов $k$-го порядка ряд Тейлора называют *$k$-струей*. Таким образом, анализ регулярности сводится к последовательному вычитанию $k$-струй и оценки остатка.

В общем случае, когда $n \leqslant \alpha \leqslant n + 1$, функция $f(x)$ в точке $x_0$ имеет $n$ производных, но ее $(n + 1)$-я производная не ограничена. Если она ограничена, но разрывна, $n$-я производная не является сингулярной. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geqslant 0. \end{cases} \qquad (17)$$

Ее производная является функцией Хевисайда; она разрывна, но ограничена в точке $x = 0$. Следовательно, $f(x)$ не сингулярна в этой точке. Можно показать, что в этой точке $\alpha = 1$.

## 4. Микроканонический мультифрактальный формализм

*Микроканонический формализм* оценивает локальные масштабные свойства мультифрактальных мер *геометрически,* а не статистически [18, 19, 28–30]. Ниже мы будем иметь дело с цифровыми изображениями, то есть с дискретным полем яркости $I(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}$, заданным на ограниченной области $A$ квадратной решетки. Под точкой $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$, в зависимости от контекста, мы будем понимать либо координаты центра пиксела, либо сам пиксел. Часто удобнее работать с отклонениями от среднего значения $I_0 = \langle I(\mathbf{x}) \rangle$ уровня серого, подсчитанного для всего изображения, то есть с глобальным *полем контрастности*:

$$c(\mathbf{x}) \equiv I(\mathbf{x}) - I_0, \quad \langle c(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbf{x} \in \mathrm{A}} = 0. \tag{18}$$

Теперь нам нужна мера $\mu$ для каждого компактного множества $A$ на изображении. Ее можно определить следующим образом [19, 31]:

$$\mu(A) \equiv \int\limits_{\mathbf{x} \in \mathrm{A}} d\mu(\mathbf{x}), \tag{19}$$

где плотность меры для $c(\mathbf{x})$ в предположении локальной гладкости изображения описывается выражением [19, 27]

$$d\mu(\mathbf{x}) \equiv |\nabla c|(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad |\nabla c|(x_1, x_2) = \Big( |\partial c(\mathbf{x})/\partial x_1|^2 + |\partial c(\mathbf{x})/\partial x_2|^2 \Big)^{1/2} \tag{20}$$

и частные производные понимаются в смысле их аппроксимации разделенными разностями. Заметим, что, вообще говоря, «истинного» изображения $u\left(\mathbf{x}\right)$ не существует. Мы всегда имеем дело с интегралом $\langle u, \phi \rangle = \int_A u\left(\mathbf{x}\right) \phi\left(\mathbf{x}\right) dx_1 dx_2$, где $\phi\left(\mathbf{x}\right)$ – функция с компактным носителем, или сенсор-ячейка CCD-приемника или сетчатки глаза. Таким образом, описание изображений попадает в контекст теории обобщенных функций (распределений) и производные можно понимать в слабом смысле [32]. Условие $\langle u, \phi \rangle \geqslant 0$ эквивалентно непрерывности «обобщенного» изображения или существованию единственной меры Радона на $A$. Выбор меры в форме (19) связан с пространствами Соболева и понятием функций с ограниченной вариацией [31]. Напомним, что полной вариацией функции $f(x) \in C^1$ называют величину [22, 27, 31]

$$\|f\|_V = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| f' \right| dx. \tag{21}$$

Если мы имеем дело с функцией $y = f(x)$ на ограниченном интервале и $\{x_p\}$ – множество особых точек, в которых производная обращается в нуль, то полная вариация определяется суммой

$$\|f\|_V = \sum_p \left| f\left(x_{p+1}\right) - f\left(x_p\right) \right|. \tag{22}$$

Наконец, если функция $f$ не дифференцируема в обычном смысле, то используется аппроксимация

$$\|f\|_V = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{-1} \left| f\left(x+\varepsilon\right) - f\left(x\right) \right| dx. \tag{23}$$

Известная *формула Банаха об индикатрисе* утверждает, что вариация функции совпадает с суммой индикатрис по уровню [22, 27, 31]:

$$\|f\|_V = \int\limits_a^b \left| f' \right| dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{N}(y, f) dy. \tag{24}$$

Выражение (19) – это двухмерный аналог (21) и, следовательно, наша мера измеряет полную вариацию контраста в области. Ее можно оценить, используя теорему об индикатрисе. Рассмотрим, ради простоты, регулярный случай. Пусть $\Omega \in R^2$ и $f\left(x, y\right) \in C^2$ – гладкая поверхность. Тогда множество ее морсовских особых точек $E = \left\{ \left(x, y\right) \mid \nabla f = 0 \right\}$, по теореме Морса–Сарда, не образует связного множества, то есть $\mu_{\mathrm{H}}^1\left(E\right) = 0$. С другой стороны, множество ее уровней $S = f^{-1}\left(t\right) \cap \Omega$ будет одномерным $C^2$-многообразием почти для каждого $t$. Индикатрисы – это множество $\mu_{\mathrm{H}}^1 \left( f^{-1}\left(t\right) \cap \Omega \right)$, образованное длинами изолиний, полученных пересечением графика $\left\{ \left(x, y\right), z = f\left(x, y\right) \right\}$ с плоскостью $z = t$. Вариация $\|f\|_V$ определяется теперь так называемой формулой *ко-площади,* которая справедлива для всех липшицевских функций [21, 22, 31]

$$\|f\|_V = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\mathrm{H}}^1 \left[ f^{-1}\left(t\right) \cap \Omega \right] dt. \tag{25}$$

Пусть $\mu\left[B_r\left(\mathbf{x}\right)\right]$ мера Радона для шара $B_r\left(\mathbf{x}\right)$, окружающего каждую точку $\mathbf{x} \in$ A. Используя выражение (8) мы полагаем, что для достаточно малых окрестностей точки справедлива следующая аппроксимация [19, 29]:

$$\mu\left[B_r\left(\mathbf{x}\right)\right] = a\left(\mathbf{x}\right) r^{h(\mathbf{x})} + o\left(r^{h(\mathbf{x})}\right). \tag{26}$$

Здесь гельдеровские показатели обозначены через $h(\mathbf{x})$, чтобы отличить их от общего случая (14), а $o\left(r^{h(\mathbf{x})}\right)$ обозначают члены более высокого порядка малости, нежели $r^{h(\mathbf{x})}$. Коэффициенты $a\left(\mathbf{x}\right)$ зависят от выбора метрики, использующейся для определения шаров и шкалы масштабов. Напротив, $h(\mathbf{x})$ не зависят от метрики и дают всю информацию об эволюции меры при изменении масштаба. Они могут быть получены с помощью линейной регрессии $\log \mu(B_r\left(\mathbf{x}\right)) = h\left(\mathbf{x}\right) \log r$ [33]. Такой вариант получения оценок показателей реферируют как *микроканонический вариант* мультифрактального формализма [18, 19].

## 5. Емкости Шоке и многообразия максимальной сингулярности

В численных методах из-за большой вариабельности контраста обычно не удается хорошо определить градиент: при уменьшении размера окрестности последовательность оценок не меняется монотонно при уменьшении цифрового радиуса окрестности. Чтобы обойти эту трудность, можно вместо обычной борелевой меры– суммы уровней серого в пикселах – использовать так называемые *емкости Шоке* [34]. Они удовлетворяют слабому условию аддитивности и гарантируют монотонность при изменении масштаба. Точнее, емкостью называют неубывающую функцию $\omega(A)$ множества, которая имеет два свойства. Для возрастающей последовательности вложенных подмножеств $\ldots, \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \ldots$: $\omega(\bigcup_n A_n) = \sup_n \omega(A_n)$. Если $\{A_n\}$ – убывающая последовательность подмножеств $\ldots, \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$, то $\omega(\bigcap_n A_n) = \inf_n \omega(A_n)$.

Не останавливаясь на деталях [30, 34, 35], определим три емкости Шоке $\mu_{\max}$, $\mu_{\min}$ и $\mu_{\text{iso}}$ для области $\Omega$ цифрового изображения следующим образом. Пусть $\Omega^* \subset \Omega$ – подмножество, в котором для любого пиксела $i$ интенсивность или контраст $p(i) \neq 0$. Определим емкость как максимальное или минимальное значение $p(i)$

$$\mu_{\max}(\Omega) = \max_{i \in \Omega} p(i), \quad \mu_{\min}(\Omega) = \min_{i \in \Omega^*} p(i). \tag{27}$$

Третья емкость $\mu_{\text{iso}}$ зависит от дискретизации уровней серого. Будем считать два пиксела $i$ и $j$ эквивалентными $p_\delta(i) \approx p_\delta(j)$, если уровни серого в них не различаются с точностью до заданного фиксированного числа $\delta$, то есть $|p(i) - p(j)| < \delta$. Тогда

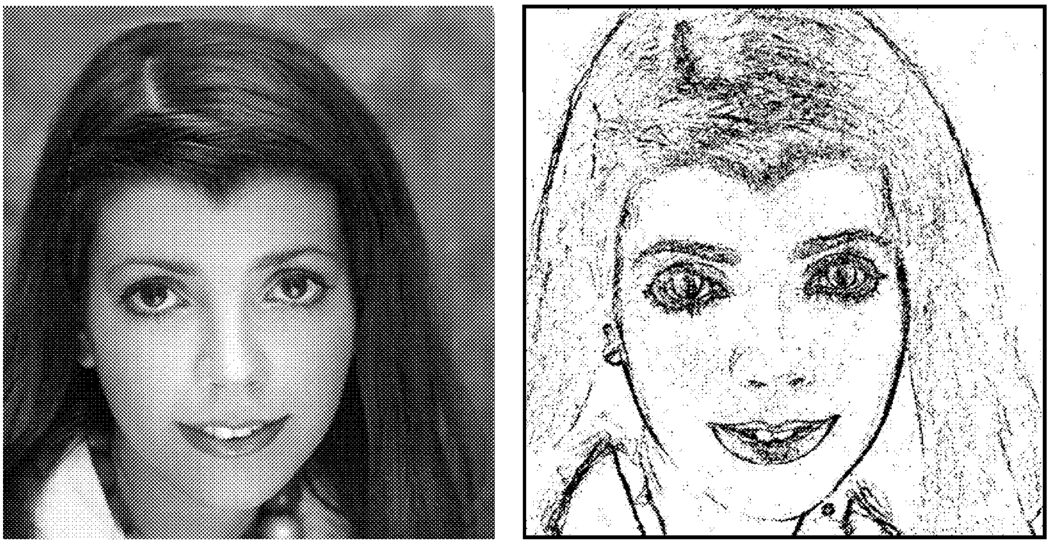
$$\mu_{\text{iso}} = \#\{i \in \Omega : p_\delta(i) = p_\delta(G(\Omega))\}, \tag{28}$$

где $G(\Omega)$ – геометрический центр $\Omega$, а $\#$ – число пикселов. Очевидно, что все три емкости монотонно изменяются с размерами окрестности. Заметим, что $\mu_{\max}(\Omega)$ и $\mu_{\min}(\Omega)$ зависят только от значений уровня серого, в то время как $\mu_{\text{iso}}(\Omega)$ – только от распределения уровней серого. Используя емкости Шоке, мы можем вычислить гельдеровские показатели для цифрового изображения. Затем для каждого из $h$ мы сможем получить компоненту мультифрактального разложения $F_h = \{\mathbf{x} \in \Omega \,|\, h(\mathbf{x}) = h\}$ (см. раздел 2) – так называемое *singular manifold* (SM) [19, 28]. Размерность Хаусдорфа $d_{\text{H}} F_h = D(h)$ можно оценить, используя бокс-размерность см. (3). Для покрытия точек $F_{\text{h}}$ необходимо $N_h(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D(h)}$ боксов размером $\varepsilon$ из общего числа $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-2}$ боксов, покрывающих всю $\Omega$. Следовательно, вероятность наблюдать сингулярность $h$ на масштабе $\varepsilon$ ведет себя в пределе малых $\varepsilon$ как [36]

$$P_\varepsilon(h) \propto N_h(\varepsilon) / N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{2-D(h)}. \tag{29}$$

Таким образом, для оценки мультифрактального спектра $(h, D(h))$в этом варианте формализма можно использовать частотную гистограмму вычисленных показателей [18, 19, 29]. Напомним, что, чем меньше $h$, тем больше сингулярность соответствующей меры. Минимальным значениям показателя соответствуют так называемые *most singular fractal manifolds* (MSM) [28, 37]. Наиболее интересны из них те, для которых $D(h) \approx 1$, то есть $F_h$ представляют собой контуры. Они играют особую роль при распознавании образов – мы можем узнать человека, располагая лишь контурным рисунком – шаржем. На рис. 3 приведен пример MSM для диапазона показателей $0 < h \leqslant 1$.

Самое удивительное заключается в том, что MSM образует такой *скелет изображения*, который позволяет восстановить исходную картину с помощью простого



*а* *б*

Рис. 3. Оригинал (*а*) и MSM для $0 < h \leqslant 1$ (*б*)

*пропагатора* – оператора восстановления. Это дает возможность сохранять исходную информацию в чрезвычайно компактной форме, поскольку MSM описываются матрицами с большим количеством нулей.

Задача восстановления ставится следующим образом [37]: необходимо восстановить изображение $I(\mathbf{x})$, то есть значение интенсивности в каждой точке, по информации об изменении градиента интенсивности в точках MSM, множество которых мы обозначим как $F_\infty$. Для того чтобы построить пропагатор, выбираются следующие условия [30, 37].

• Пропагатор – линейная функция градиента на MSM

$$|\nabla I(\mathbf{x})| = \mathbf{G}\left[|\nabla I|_{F_\infty}\right], \quad \nabla I(\mathbf{x}) = \int\limits_{F_\infty} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla I(\mathbf{y}) dl(\mathbf{y}). \tag{30}$$

• Пропагатор инвариантен относительно сдвигов

$$\nabla I(\mathbf{x}) = \int\limits_{F_\infty} \mathbf{G}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \nabla I(\mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) = \int\limits_{F_\infty} \mathbf{g}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \nabla I(\mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \quad \mathbf{G}_{ij} = \partial_i \mathbf{g}_j(\mathbf{x}). \tag{31}$$

Определим множество градиентов на MSM как $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \nabla I(\mathbf{x}) \delta_{F_\infty}$. Тогда

$$I(\mathbf{x}) = \int\limits_{F_\infty} \mathbf{g}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) = \mathbf{g} \circ \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \tag{32}$$

где $(\circ)$ обозначает свертку. Если в (32) перейти к фурье-представлению $I^*(\mathbf{x})$, добавить условия изотропности и эквивалентности спектров мощности оригинала и его фурье-реконструкции, то простейшая функция $\mathbf{g}(f)$, удовлетворяющая всем этим свойствам, имеет вид [37]

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}) = \|\mathbf{g}(\mathbf{f})\|\mathbf{f}/f, \quad \|\mathbf{g}(\mathbf{f})\| = f^{-1}, \quad \mathbf{g}^*(\mathbf{f}) = i\mathbf{f}/f^2, \quad i = \sqrt{-1}. \tag{33}$$

В результате получается следующее выражение для фурье-реконструкции изображения:

$$I^*(\mathbf{f}) = i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_0^*)f^{-2}. \tag{34}$$

Для иллюстрации на рис. 4 приведены оригинальное изображение второго автора статьи, его гельдеровская карта, MSM и реконструкция с помощью описанного про-

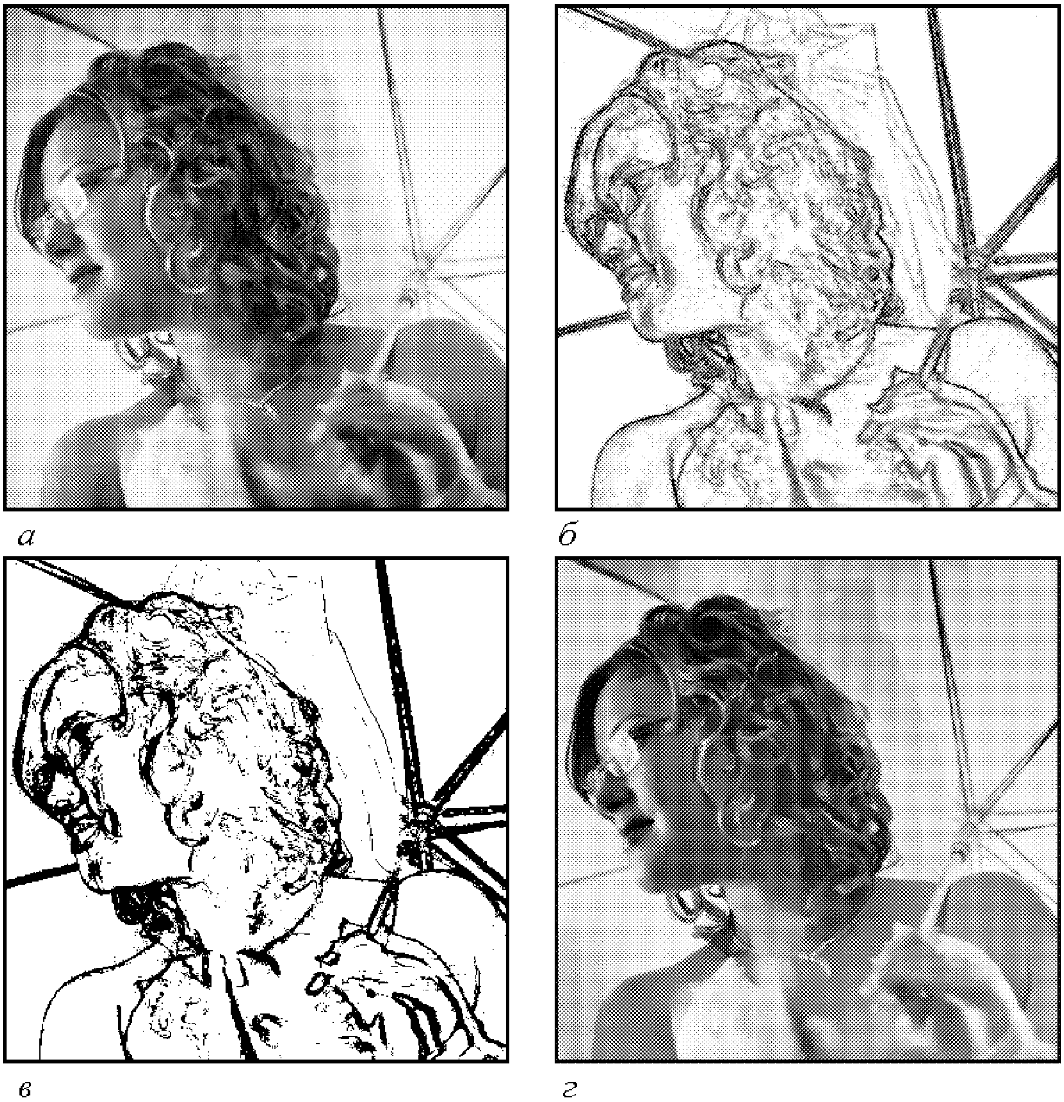



Рис. 4. Реконструкция изображения по сингулярным многообразиям: *а* – оригинал, *б* – карта гельдеровских экспонент; *в* – MSM, $0 < h(\mathbf{x}) \leqslant 2$; *г* – реконструкция

пагатора. Хотя для реконструкции использовалось лишь 38% показателей $h\left(\mathbf{x}\right)$, она визуально мало отличается от оригинала.

В заключение отметим, что описанные методы имеют чрезвычайно широкий круг применений. Действительно, современные экспериментальные данные большей частью являются матричными, то есть они представлены цифровыми изображениями. С ними приходится иметь дело в медицине, геофизике, дистанционном зондировании Земли из Космоса, астрономии и многих других областях знания. Удивительно, но практически все природные изображения с достаточно высоким пространственным разрешением – мультифрактальны, то есть имеют свойство статистической масштабной инвариантности. Как раз оно и обеспечивает эффективность методов, изложенных в статье. Кроме геометрии, изображение имеет еще и топологию (алгебраическую структуру): два фрактала могут иметь одинаковую размерность, но различаться «пористостью» меры. О методах извлечения топологии из изображений мы собираемся рассказать в нашей следующей статье.

**Библиографический список**


1. *Barnsley M.* Fractals Everywhere. N.Y.: Academic Press, 1988. 531 p.
2. *Falconer K*. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. Wiley. 2003.
3. *Falconer K.* Techniques in Fractal Geometry. Wiley & Sons. 1997. 256 p.
4. *Макаренко Н.Г., Каримова Л.М., Мухамеджанова С.А., Князева И.С.* Система итеративных функций и марковский прогноз временных рядов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. т. 14, № 6. С. 3.
5. *Зельдович Я.Б.*, *Соколов Д.Д.* Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика // УФН . 1985. Т. 146. С. 493.
6. *Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Schraiman B.I.* Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets // Phys.Rev. A. 1986. Vol. 33. P. 1141.
7. *Grassberger P., Procaccia I.* On the characterization of strange attractors // Phys.Rev. Lett. 1983. Vol. 50. P. 346.
8. *Falconer K. J.* The multifractal spectrum of statistically self-similar measures // J. Theor. Prob. 1994. Vol. 7. P.681.
9. *Mach J., Mas F., Saguus F.* Two representations in multifractal analysis // J.Phys. A: Math.Gen. 1995. Vol. 28. P.5607.
10. *Павлов А.Н., Анищенко В.С.* Мультифрактальный анализ сложных сигналов // УФН. 2007. Т.177. С.859
11. *Короленко П.В., Маганова М.С., Меснянкин А.В.* Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. Фрактальные и мультифрактальные методы, вейвлет преобразования. М.: НИИЯФ, МГУ, 2004.
12. *Riedi R.H.* Multifractal processes // Long-range dependence: theory and applications / Eds P. Doukhan, G. Oppenheim and M.S. Taqqu. Birkhäuser, 2002. P. 625.
13. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.
14. *Божокин С.В., Паршин Д.А.* Фракталы и мультифракталы. Москва-Ижевск: РХД, 2001. 128 с.

15. *Harte D.* Multifractals: theory and applications. CRC Press, 2001. 247 p.
16. *Jaffard S.* Multifractal formalism for functions. Part I: Results valid for all functions // SIAM J. Math. Anal. 1997. Vol. 28. P. 944.
17. *Fraysse A., Jaffard St.* How smooth is almost every function in a Sobolev space? // Rev. Mat. Iberoamericana. 2006. Vol. 22. P. 663.
18. *Arneodo A., Bacry E., Muzy J.F.* The thermodynamics of fractals revisited with wavelets // Physica A. 1995. Vol. 213. P. 232.
19. *Turiel A., Yahia H., Pérez-Vicente C. J.* Microcanonical multifractal formalism – a geometrical approach to multifractal systems: Part 1. Singularity analysis // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. Vol. 41. 015501.
20. *Edgar G.* Measure, Topology, and Fractal Geometry. Springer. 2008. 268 p.
21. *Morgan F.* Geometric Measure Theory. A Beginner's Guide. Academic Press. 2000.
22. *Ziemer W.P.* Weakly differentiable functions, Graduate Texts in Mathematics. Vol. 120, New York, Springer-Verlag, 1989. 370 p.
23. *Barreira L., Pesin Y., Schmeling J.* On a general concept of multifractality: Multifractal spectra for dimensions, entropies, and Lyapunov exponents. Multifractal rigidity // Chaos. 1997. Vol. 7. P. 27.
24. *Barriere O., Levy Vehel J.* Local Hölder regularity-based modeling of RR intervals // CBMS 2008. 21th IEEE Internat. Symp. on Computer-Based Medical Systems, June 17–19, 2008, Jyvaskyla, Finland, 2008.
25. *Daoudi K, Levy Vehel J., Meyer Y.* Construction of continuous functions with prescribed local regularity // Constructive Approximation. 1998. Vol. 014(03). P. 349.
26. *Mallat St., Hwang W*. Singularity detection and processing with wavelets // IEEE Trans. Info. Theory. 1992. Vol. 38. P. 617.
27. *Mallat St.* A Wavelet Tour of Signal Processing. Academic Press, 1999. 851 p.
28. *Turiel A., Parga N*. The multi-fractal structure of contrast changes in natural images: from sharp edges to textures // Neural Computation. 2000. Vol. 12. P. 763.
29. *Turiel A., Pérez-Vicente C.J., Grazzini J.* Numerical methods for the estimation of multifractal singularity spectra: a comparative study // J. Computat. Phys. 2006. Vol. 216. P. 362.
30. *Макаренко Н. Г.* Геометрия изображений // Лекции по нейроинформатике. М.: МИФИ, 2009. С. 89.
31. *Chan T.F., Shen J.* Image processing and analysis. Variational, PDE, wavelet and stochastic methods. SIAM. 2005. 400 p.
32. *Florack L.M.J.* Mathematical Techniques for Image Analysis. Eindhoven University of Technology. 2008. 100 p.
33. *Pont O., Turiel A., Pérez-Vicente C.J.* Applications of the microcanonical formalism to monofractal systems // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74. P. 061110(1).
34. *Levy Vehel J., Vojak R*. Multifractal analysis of Choquet capacities: Preliminary results //Advances in Applied Mathematics. 1998. Vol.20. P. 1.
35. *Макаренко Н.Г., Круглун О.А., Макаренко И.Н., Каримова Л.М.* Мультифрактальная сегментация данных дистанционного зондирования // Исследование Земли из Космоса. 2008, № 3. С. 18

36. *Riedi R., Scheuring I.* Conditional and relative multifractal spectra // Fractals.1997. Vol. 5. P.153.
37. *Turiel A., del Pozo A.* Reconstructing images from their most singular fractal manifold // IEEE Trans. on Image Processing. 2002. Vol. 11. P. 345.

*Поступила в редакцию 8.07.2009*

**MULTIFRACTAL ANALYSIS OF DIGITAL IMAGES**

*N.G. Makarenko, I.S. Knyazeva*

The article is based on the lecture that was given by the first author at the school StatInfo-2009. In the first part the microcanonical variant of multifractal formalism is reviewed. Possibilities for digital image analysis and reconstruction are discussed at the level of technical strictness.

*Keywords:* Fractals, multifractal analysis, digital images.

*Макаренко Николай Григорьевич* – родился в Троицке (1945). Окончил Уральский государственный университет им. Горького (Свердловск) по специальности «Астрономия». Главный научный сотрудник ГАО РАН, д.ф.-м.н. Главный научный сотрудник, д.т.н. лаборатории Компьютерного Моделирования (Институт математики, Алма-Ата, Казахстан). Область научных интересов: фрактальная геометрия, вычислительная топология, детерминированный хаос, нейронные сети, физика Солнца. Имеет более 80 научных публикаций.

196140 Санкт-Петербург, Пулковское шоссе, 65/1
Главная астрономическая обсерватория РАН
E-mail: ng-makar@mail.ru

*Князева Ирина Сергеевна*, 1983 года рождения, окончила физический факультет Санкт-Петербургского государственного университета (2007), после чего поступила в аспирантуру ГАО РАН. Область научных интересов – фрактальная геометрия, анализ изображений, нейронные сети, прогноз временных рядов.

196140 Санкт-Петербург, Пулковское шоссе, 65/1
Главная астрономическая обсерватория РАН
E-mail: iknyazeva@gmail.com