



КОНЕЧНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В КВАДРАТНОЙ ОБЛАСТИ

Н.В. Петровская

Метод Галеркина в сочетании с методом малого параметра применяется для изучения уравнения типа Рауса динамики двумерных течений идеальной несжимаемой жидкости в прямоугольной области. Полученные в результате конечномерные модели сохраняют с течением времени поле вихря, если в качестве его начального распределения выбрана одна из собственных функций оператора Лапласа. Численно изучается эволюция малых возмущений таких решений. Результаты расчетов сравниваются с аналогичными, полученными непосредственным применением метода Галеркина к уравнению Эйлера.

Ключевые слова: Идеальная несжимаемая жидкость, двумерные вихревые движения, уравнение типа Рауса, метод Галеркина.

Введение

В работах [1, 2] предложен новый, нетрадиционный подход к исследованию динамики вихревых движений идеальной несжимаемой жидкости в односвязной области. Кратко изложим схему этого подхода. Известно, что уравнение Эйлера в лагранжевой форме обладает бесконечным набором интегралов циркуляции скорости. Процедура исключения этих интегралов лагранжевы уравнения гидродинамики приводятся к системе интегро-дифференциальных уравнений, которая вместо интегралов циркуляции имеет бесконечную серию интегралов – якобианов $\det(\partial x/\partial a)$ для каждой жидкой частицы (здесь a , x – «метки» жидкой частицы, $a = (a_1, a_2)$ – начальное положение жидкой частицы при $t = 0$, $x(a, t) = (x_1, x_2)$ – ее положение в момент времени t). Для нашего случая будет интересна рассмотренная в данных работах задача о двумерном течении в односвязной области D , когда уравнение несжимаемости

$$\det(\partial x/\partial a) = 1$$

локально может быть разрешено с помощью одновременной замены независимых переменных a_1, a_2 и функций x_1, x_2

$$a_1 = \alpha_1 + \Phi_{\alpha_2}, \quad a_2 = \alpha_2 - \Phi_{\alpha_1}, \quad x_1 = \alpha_1 - \Phi_{\alpha_2}, \quad x_2 = \alpha_2 + \Phi_{\alpha_1}, \quad \Phi|_{t=0} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha \in D$, $\Phi(\alpha, t)$ – новая неизвестная функция. В силу этой замены уравнение несжимаемости выполняется автоматически для любой гладкой функции $\Phi(\alpha, t)$. При $t = 0$ замена (1) является тождественной. При $t \neq 0$ для ее взаимной однозначности требуется, чтобы якобиан

$$J(\alpha, t) = \det \left(\frac{\partial(a_1, a_2)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2)} \right) = 1 + \Phi_{\alpha_1 \alpha_1} \Phi_{\alpha_2 \alpha_2} - \Phi_{\alpha_1 \alpha_2}^2 \quad (2)$$

был отличен от нуля. Для функции $\Phi(\alpha, t)$ получено замкнутое интегро-дифференциальное уравнение типа Рауса

$$2\Phi_t = - \int_D G(x, y) \omega_0(b) |J(\beta, t)| d\beta \quad (3)$$

с начальным условием

$$\Phi|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Здесь $b = (b_1, b_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ связаны с $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ ($\beta \in D$) соотношениями, аналогичными (1),

$$b_1 = \beta_1 + \Phi_{\beta_2}, \quad b_2 = \beta_2 - \Phi_{\beta_1}, \quad y_1 = \beta_1 - \Phi_{\beta_2}, \quad y_2 = \beta_2 + \Phi_{\beta_1}. \quad (5)$$

Якобиан $J(\beta, t)$ определяется аналогично (2). В двумерном случае вихрь имеет только одну ненулевую компоненту $\omega_3 = \omega$ с начальным распределением $\omega_0(b)$. $G(x, y)$ – функция Грина краевой задачи

$$-\Delta\psi = \omega, \quad \psi|_{\partial D} = 0 \quad (6)$$

для функции тока $\psi(x)$ поля скорости жидкости $v = (v_1, v_2)$.

Автором работ [1, 2] высказано предположение, что уравнение (3) может оказаться эффективным средством численного анализа течений идеальной жидкости. Конечно, требование невырожденности замены (1) является очень сильным ограничением, а именно: решения уравнения (3) имеют смысл лишь в достаточно малой окрестности точки $t = 0$.

В настоящей работе для исследования приближенных решений задачи (3), (4) в квадратной области D используется метод Галеркина в сочетании с методом малого параметра. Полученные конечномерные модели наследуют ряд свойств исходной задачи и, в частности, сохраняют поле вихря, если его начальное распределение является одной из собственных функций задачи

$$-\Delta\psi = \lambda\psi, \quad \psi|_{\partial D} = 0, \quad (7)$$

где λ – соответствующее собственное значение. При помощи численных экспериментов изучается эволюция малых возмущений таких решений. Результаты вычислений сравниваются с аналогичными, полученными непосредственным применением метода Галеркина к уравнению Эйлера.

1. Конечномерные аппроксимации Галеркина

Рассмотрим двумерные движения идеальной несжимаемой жидкости в квадратной области $D: 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$. Функция Грина $G(x, y)$ краевой задачи (6) определяется соотношением

$$G(x, y) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{ij}(x) \varphi_{ij}(y) \frac{1}{i^2 + j^2}, \quad (8)$$

где

$$\varphi_{ij}(x) = \sin(\pi i x_1) \sin(\pi j x_2)$$

собственные функции задачи (7). Подставляя (8) в (3) и переходя к интегрированию по b , приходим к уравнению

$$\Phi_t = -\frac{2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_{ij}(x)}{i^2 + j^2} \int_D \varphi_{ij}(y) \omega_0(b) db.$$

Для его исследования применим метод Галеркина в сочетании с методом малого параметра. Пусть P – некоторое конечное множество пар индексов (m, n) . Приближенное решение разыскивается в виде

$$\Phi(\alpha, t) = \sum_{(m,n) \in P} c_{mn}(t) \varphi_{mn}(\alpha). \quad (9)$$

Используя стандартную процедуру метода Галеркина, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $c_{mn}(t)$

$$\dot{c}_{mn} = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{(i,j) \in P} \frac{1}{i^2 + j^2} K_{ij} A_{ijmn}, \quad (m, n) \in P, \quad (10)$$

где

$$A_{ijmn} = \int_D \varphi_{ij}(x) \varphi_{mn}(\alpha) d\alpha, \quad K_{ij} = \int_D \varphi_{ij}(y) \omega_0(b) db. \quad (11)$$

Уравнения (10) существенно нелинейны, так как аргументы x и y базисных функций φ_{ij} в (11), согласно (1) и (5) зависят от Φ . Для получения более простых конечномерных моделей воспользуемся тем, что уравнение (3) нужно решать при нулевом начальном условии (4). Начальное поле вихря $\omega_0(b)$ возьмем в виде

$$\omega_0(b) = \sum_{(p,q) \in P} w_{pq}^0 \varphi_{pq}(b), \quad w_{pq}^0 = 4 \int_D \omega_0(b) \varphi_{pq}(b) db,$$

тогда

$$K_{ij} \cong \sum_{(p,q) \in P} w_{pq}^0 \int_D \varphi_{ij}(y) \varphi_{pq}(b) db. \quad (12)$$

Решение системы (10) должно удовлетворять нулевым начальным условиям

$$c_{mn}(0) = 0. \quad (13)$$

Так как при $t = 0$ замена (1) является тождественной ($x = \alpha = a$, $y = \beta = b$), то

$$\dot{c}_{mn}(0) = -\frac{w_{mn}^0}{2\pi^2(m^2 + n^2)}.$$

Поскольку, не теряя общности, можно считать, что $\sum_{(p,q) \in P} (w_{pq}^0)^2 = O(1)$, то $c_{mn}(t) = O(\varepsilon)$ на временах порядка ε ($\varepsilon \ll 1$). Поэтому для вычисления правых частей системы (10) как функций коэффициентов Галеркина $c_{mn}(t)$ можно использовать метод малого параметра, аппроксимируя правые части дифференциальных уравнений отрезками ряда Тейлора. Если в простейшем случае ограничиться линейными относительно неизвестных c_{mn} функциями, то получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\dot{c}_{mn} = -\frac{w_{mn}^0}{2\pi^2(m^2 + n^2)} + \sum_{(k,l) \in P} c_{kl} \sum_{(p,q) \in P} w_{pq}^0 E_{pqklmn}, \quad (m, n) \in P, \quad (14)$$

где

$$E_{pqklmn} = \frac{1}{8} \left[\frac{r_{pqklmn} - r_{mnklpq}}{m^2 + n^2} - \frac{r_{pqklmn}}{p^2 + q^2} \right], \quad r_{ijklmn} = kjs_{imk}s_{lnj} - ils_{kmi}s_{jnl},$$

$$s_{lmn} = +1 \text{ при } n = |l - m|, \quad s_{lmn} = -1 \text{ при } n = l + m, \quad s_{lmn} = 0 \text{ при } n \neq |l \pm m|.$$

Отметим, что решение задачи (14), (13), так же как и исходной задачи (3), (4), имеет смысл только при малых t , пока замена (1) остается невырожденной. Чтобы преодолеть это ограничение и исследовать поведение решений на достаточно больших временных промежутках, можно воспользоваться способом, предложенным В.И. Юдовичем [1]. При заданном начальном распределении завихренности $\omega_0(b)$ приближенное решение уравнения (3) ищется на промежутке $t \in [0, h]$ (h – фиксированная константа) посредством решения задачи Коши (14), (13). После этого определяется поле вихря при $t = h$ и делается новая замена типа (1), где за новый начальный момент времени принимается значение $t = h$. При этом на каждом шаге разыскивается решение системы (14) с нулевыми начальными данными $c_{mn}(0) = 0$, но с новым начальным полем вихря. Конечно, константа h должна быть достаточно малой, чтобы исключить обращение в нуль якобиана (2).

Получим формулы для определения поля вихря $\omega(x, t)$ при $t > 0$. Будем разыскивать $\omega(x, t)$ в виде

$$\omega(x, t) = \sum_{(i,j) \in P} w_{ij}(t) \varphi_{ij}(x). \quad (15)$$

Для определения коэффициентов $w_{ij}(t)$ используется выражение для функции тока

$$\psi(x, t) = \int_D G(x, y(b, t)) \omega_0(b) db.$$

Используя (8), (11)–(12) при интегрировании в формуле для $\psi(x, t)$ и учитывая соотношение $\omega = -\Delta\psi$, находим

$$w_{ij}(t) = w_{ij}^0 + \pi^2/2 \sum_{(p,q) \in P} w_{pq}^0 \sum_{(k,l) \in P} c_{kl}(t) r_{ijklpq}. \quad (16)$$

Отметим, что при этом закон сохранения вихря

$$\omega(x(a, t), t) = \omega_0(a) \quad (17)$$

выполняется с точностью до нелинейных относительно переменных c_{kl} слагаемых, отброшенных при выводе уравнений (14). Чтобы определить, насколько сильно это повлияет на свойства приближенных решений, вычисляемых на больших временных промежутках, проведем сравнение приближенных решений задачи, рассчитанных двумя различными способами: на основе линейных уравнений (14), (16) и нелинейных моделей (см. ниже), которые выводятся непосредственным применением метода Галеркина к уравнениям Эйлера движения идеальной несжимаемой жидкости (см., например, [3]). Напомним, что в двумерном случае уравнения Эйлера для функции тока $\psi(x, t)$ приводятся к виду

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x_1}. \quad (18)$$

Разыскивая функцию тока и вихрь в форме

$$\psi(x, t) = - \sum_{(i,j) \in P} \frac{v_{ij}(t)}{\pi^2(i^2 + j^2)} \varphi_{ij}(x), \quad \omega(x, t) = \sum_{(i,j) \in P} v_{ij}(t) \varphi_{ij}(x),$$

подставляя эти выражения в (18) и требуя ортогональности невязки функциям $\varphi_{mn}(x)$, выводим уравнения для определения неизвестных $v_{mn}(t)$

$$\dot{v}_{mn} = -\frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in P} \frac{v_{ij}}{i^2 + j^2} \sum_{k,l} v_{kl} r_{ijklmn}, \quad (m, n) \in P. \quad (19)$$

Уравнения нелинейных моделей (19) нужно решать при начальных условиях $v_{mn}(0) = w_{mn}^0$.

2. Простейшая модель

Исследование аппроксимаций Галеркина (14), (16) естественно начать с самого простого случая. Простейшая нетривиальная модель получается, если положить

$$\Phi = c_{11}\varphi_{11} + c_{12}\varphi_{12} + c_{21}\varphi_{21}, \quad \omega_0 = w_{11}^0\varphi_{11} + w_{12}^0\varphi_{12} + w_{21}^0\varphi_{21}.$$

Уравнения (14), (16) в этом случае можно привести к виду

$$\dot{\mathbf{c}} = -D_0 \mathbf{w}^0 + L(\mathbf{w}^0) \cdot \mathbf{c}, \quad (20)$$

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}^0 + [\mathbf{c}, \mathbf{w}^0], \quad (21)$$

где $\mathbf{c} = (3\pi^2/2)(c_{11}, c_{12}, c_{21})$, $\mathbf{w} = (w_{11}, w_{12}, w_{21})$, $\mathbf{w}^0 = (w_{11}^0, w_{12}^0, w_{21}^0)$, а D_0 и

$L(\mathbf{w}^0)$ – матрицы

$$D_0 = \text{diag}(3/8, 3/20, 3/20),$$

$$L(\mathbf{w}^0) = \begin{pmatrix} 0 & -(3/10)w_{21}^0 & (3/10)w_{12}^0 \\ (3/40)w_{21}^0 & 0 & (3/80)w_{11}^0 \\ -(3/40)w_{12}^0 & -(3/80)w_{11}^0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что след матрицы $\text{Sp } L(\mathbf{w}^0)$ и ее определитель $\det L(\mathbf{w}^0)$ равны нулю для любого начального поля вихря, и система (20) инвариантна относительно вращений $(\mathbf{c}, \mathbf{w}^0) \mapsto (R\mathbf{c}, R\mathbf{w}^0)$, где

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix},$$

γ – произвольный угол. Правые части уравнений (20) – однородные функции коэффициентов w_{ij}^0 , и система инвариантна относительно преобразований $(t, \mathbf{w}^0) \mapsto (kt, k\mathbf{w}^0)$, $k \neq 0$.

Решение задачи Коши с нулевыми начальными данными $\mathbf{c}(0) = \mathbf{0}$ для системы (20) определяется явными формулами. В частности, значениям $\mathbf{w}^0 = k \cdot \mathbf{e}_i$, (\mathbf{e}_i – координатные орты) отвечают решения, линейно зависящие от времени

$$\mathbf{c} = -k \cdot D_0 \mathbf{e}_i \cdot t. \quad (22)$$

Однако решения системы (20) имеют смысл только локально, на достаточно малом промежутке времени $[0, h]$, величина которого ограничена требованием невырожденности замены (1). Условие положительности якобиана (2) приводит к оценке $h < 8/(3\pi^2)$. Таким образом, определено отображение

$$(\mathbf{0}, \mathbf{w}^0) \mapsto (\mathbf{c}(h), \mathbf{w}(h)). \quad (23)$$

Для решений вида (22) вихрь сохраняется: $\mathbf{w}(h) = \mathbf{w}^0$. Более того, ввиду инвариантности простейшей модели (20) относительно вращений, сохраняются все распределения вихря вида

$$\begin{aligned} \omega_0 &= w_{11}^0 \sin(\pi a_1) \sin(\pi a_2), \\ \omega_0 &= w_{12}^0 \sin(\pi a_1) \sin(2\pi a_2) + w_{21}^0 \sin(2\pi a_1) \sin(\pi a_2). \end{aligned} \quad (24)$$

Далее можно следить за итерациями отображения (23), причем достаточно рассмотреть начальные распределения вихря

$$\omega_0 = \sin(\pi a_1) \sin(\pi a_2) + \varepsilon \sin(\pi a_1) \sin(2\pi a_2), \quad \varepsilon > 0. \quad (25)$$

Для любого начального поля вихря (25) и любого достаточно малого h итерации сходятся к одному из полей вида (24); при этом $|w_{11}^0|$ монотонно убывает, а

$(w_{12}^0)^2 + (w_{21}^0)^2$ монотонно растет. Рис. 1 иллюстрирует этот процесс для $\varepsilon = 0.02$: a – начальное распределение, b – финальная фаза движения. Процесс всегда развивается одинаково: сначала единственный вихрь начинает прецессировать вдоль границы области, затем в одном из углов квадрата появляется второй вихрь (с противоположным знаком завихренности), и прецессирует уже пара вихрей. По мере выравнивания интенсивности вихрей их вращение замедляется, и устанавливается одно из стационарных распределений вида (24).

Что касается уравнений (19), то в рассматриваемом простейшем случае они приводятся к виду

$$\mathbf{v}' = [\mathbf{v}, D_0 \mathbf{v}], \quad \mathbf{v} = (v_{11}, v_{12}, v_{21}) \quad (26)$$

и по сути совпадают с уравнениями Эйлера движения свободного твердого тела (причем осесимметричного). Уравнения (26) имеют два независимых первых интеграла: это квадрат нормы вихря $\|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{v}, \mathbf{v})$ и кинетическая энергия $H = 1/2(\mathbf{v}, D_0 \mathbf{v})$. Имеется два семейства равновесий: $\mathbf{v} = (w_{11}^0, 0, 0)$ и $\mathbf{v} = (0, w_{12}^0, w_{21}^0)$; им отвечают поля завихренности (24). Решение задачи Коши с начальными данными (25) определяется формулами

$$v_{11}(t) = 1, \quad v_{12}(t) = \varepsilon \cos \frac{9}{40}t, \quad v_{21}(t) = \varepsilon \sin \frac{9}{40}t,$$

то есть все движения являются либо стационарными, либо периодическими по времени. Эта ситуация качественно отличается от предыдущей, так как для любого решения уравнений (26) величина $v_{11}(t)$ постоянна. Причина такого различия в том, что в формуле (21) сохранены только линейные относительно c_{ij} слагаемые.

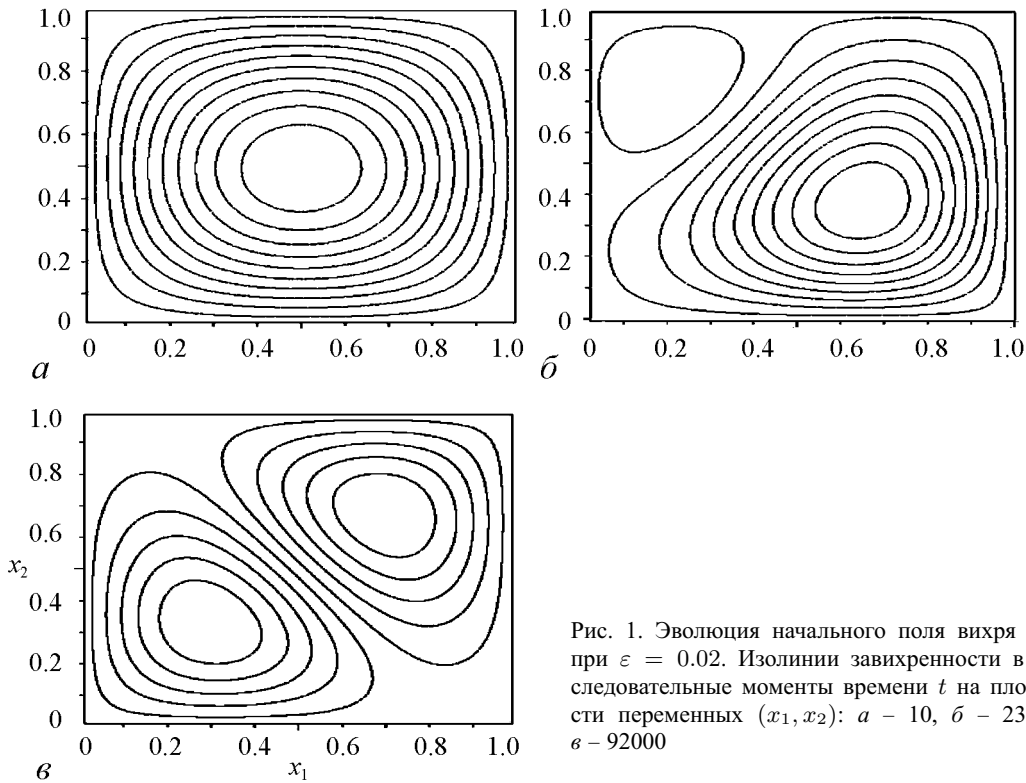


Рис. 1. Эволюция начального поля вихря (25) при $\varepsilon = 0.02$. Изолинии завихренности в последовательные моменты времени t на плоскости переменных (x_1, x_2) : a – 10, b – 23000, c – 92000

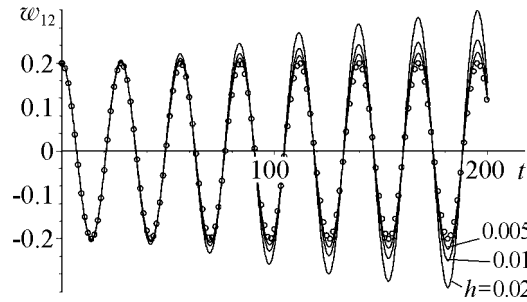


Рис. 2. Зависимости w_{12} (сплошные линии), полученные посредством итерирования отображения (23) при различных значениях шага h . Начальные данные (25) при $\varepsilon = 0.02$. Точки соответствуют значениям функции $v_{12}(t) = \varepsilon \cos(9/40) \cdot t$

положительного всюду в области D , с течением времени возникают области с отрицательными значениями завихренности. Однако на конечном промежутке времени разность $|w_{ij}(t) - v_{ij}(t)|$ с уменьшением h стремится к нулю. Это иллюстрируется таблицей 1, где приведены зависимости $\max_{0 \leq t \leq 200} |w_{12}(t)|$, значения квадрата нормы вихря $\|\mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{w}, \mathbf{w})$ и энергии $H(\mathbf{w}) = 1/2(\mathbf{w}, D_0 \mathbf{w})$ от h . Для сравнения в последнем столбце даны значения этих же величин при $t = 0$ (в начальный момент времени эти величины одинаковы для обеих моделей, и на решениях системы (26) они постоянны, так как являются ее первыми интегралами).

Таблица 1

Зависимость характеристик приближенного решения от значений параметра h . Линейная модель (23), начальные данные (25) при $\varepsilon = 0.02$, $t \in [0, 200]$

h	0.02	0.01	0.005	0.0025	$t = 0$
$\max_{0 \leq t \leq 200} w_{12}(t) $	0.0319	0.0252	0.0224	0.0212	0.0200
$\ \mathbf{w}\ ^2 (t = 200)$	1.000538	1.000452	1.000423	1.000411	1.000400
$2H(\mathbf{w}) (t = 200)$	0.499957	0.500034	0.500060	0.500071	0.500080

3. Компьютерный эксперимент

Уравнения (14), (16) определяют семейство конечномерных моделей, зависящих от выбора множества P . Рассмотрим серию линейных моделей (14), (16), в которых P определяется условием $m + n \leq N$ при $N = 4 \dots 11$ (простейшая модель (20), (21) получается при $N = 3$). Их решения приходится изучать численно. Для контроля точности получаемых решений удобно использовать нелинейную модель (19) при том же фиксированном P , что и линейная. В обоих случаях для получения решения задачи Коши используется одна и та же модификация метода Рунге–Кутты.

При заданном N можно по предыдущей схеме определить векторы \mathbf{c} , \mathbf{w} , \mathbf{w}^0 и записать уравнения (14), (16) в векторной форме

$$\dot{\mathbf{c}} = -D_0 \mathbf{w}^0 + L(\mathbf{w}^0) \cdot \mathbf{c}, \quad (27)$$

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}^0 + M(\mathbf{w}^0) \cdot \mathbf{c}, \quad (28)$$

где D_0 – диагональная матрица с числовыми элементами; $L(\mathbf{w}^0)$ и $M(\mathbf{w}^0)$ – матрицы с элементами, однородно и линейно зависящими от w_{ij}^0 , причем $M(\mathbf{w}^0)$ – кососимметричная матрица для любого вектора \mathbf{w}^0 . Далее определяется отображение вида (23) и изучаются его итерации. Все такие отображения сохраняют начальные распределения вихря

$$\omega_0(a) = w_{ij}^0 \varphi_{ij}(a). \quad (29)$$

Напомним, что для конечномерных моделей (19), так же как для уравнений Эйлера (18) в квадратной области D , это – стационарные решения.

Цель компьютерных экспериментов – исследование эволюции во времени вихревых движений, в начальный момент времени близких к распределению (29). Начальные поля вихря в численных экспериментах выбирались в форме $\omega_0(a) = \varphi_{ij}(a) + \varepsilon \varphi_{pq}(a)$, где параметр ε порядка $10^{-1} - 10^{-3}$. Ниже приведены результаты исследования малых возмущений стационарных движений с полями завихренности $\varphi_{11}(a)$, $\varphi_{12}(a)$ и $\varphi_{21}(a)$.

Найденные приближенные решения сравнивались с решениями задачи Коши с теми же начальными данными для соответствующей нелинейной модели (19). Заметим, что для всех таких моделей квадрат нормы вихря $\|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{i+j \leq N} v_{ij}^2$ и кинетическая энергия $H(\mathbf{v}) = 1/2 \sum_{i+j \leq N} v_{ij}^2 / (i^2 + j^2)$ являются первыми интегралами, и их удобно использовать для контроля точности приближенных решений.

С увеличением N наблюдается улучшение соответствия между приближенными решениями, полученными разными методами, что иллюстрируется рис. 3. Величина

$$\max_{0 \leq t \leq 400} |w_{12}(t) - v_{12}(t)| \approx 2 \cdot 10^{-4},$$

относительной погрешности остается в пределах 1% после 80000 итераций отображения. В таблице 2 приведены значения $\|\mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{w}, \mathbf{w})$ и энергии $H(\mathbf{w}) = 1/2(\mathbf{w}, D_0 \mathbf{w})$ при $t = 200$ в зависимости от N , последний столбец – эти же величины при $t = 0$ (начальные данные (25) при $\varepsilon = 0.02$). Отклонения этих характеристик от начальных значений на фиксированном временном промежутке за-

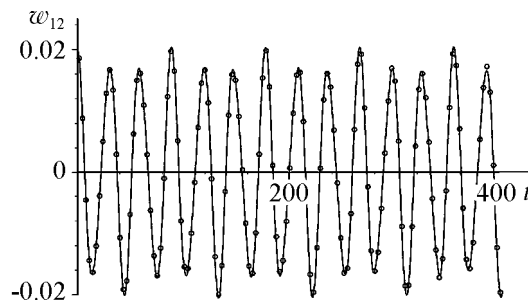


Рис. 3. Зависимость ω_{12} (сплошная линия), полученная посредством итерирования отображения (23) при $h = 0.005$, начальные данные (25) при $\varepsilon = 0.02$. Точки соответствуют значениям функции $v_{12}(t)$ нелинейной модели (19). Для обеих моделей $N = 6$

Таблица 2

Зависимость характеристик приближенного решения от значений параметра N . Линейные модели (27) и (28), начальные данные (25) при $\varepsilon = 0.02$

t	200					0
N	3	5	7	9	11	
$\ \mathbf{w}\ ^2$	1.000423	1.000423	1.000422	1.000422	1.000421	1.000400
$2H(\mathbf{w})$	0.500060	0.500083	0.500071	0.500074	0.500077	0.500080

висят от величины N и h . По-видимому, для $\|\mathbf{w}\|^2$ более существенной является зависимость от h , а для энергии – от N .

Слабо возмущенное распределение $\varphi_{11}(a)$ эволюционирует одним из двух возможных способов в зависимости от выбора возмущения $\varphi_{pq}(a)$; эти сценарии представлены на рис. 4, 5. Характер движения зависит от свойств четности суммы индексов $p + q$. Дело в том, что линейные модели (14), (16) обладают следующим свойством: если $w_{ij}(t) = 0$ при $i + j$ нечетных, то они равны нулю и при всех $t > 0$ (аналогично, для нелинейных моделей (19) подпространство, определяемое условиями $v_{ij} = 0$ при $i + j$ нечетных, является инвариантным).

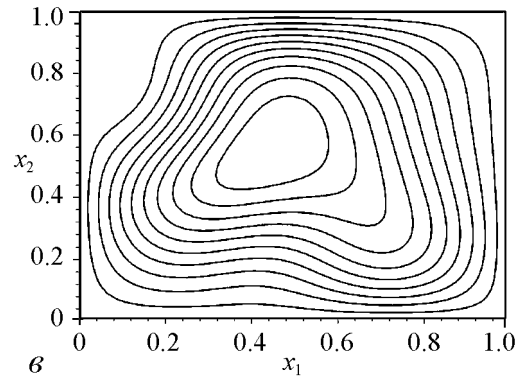
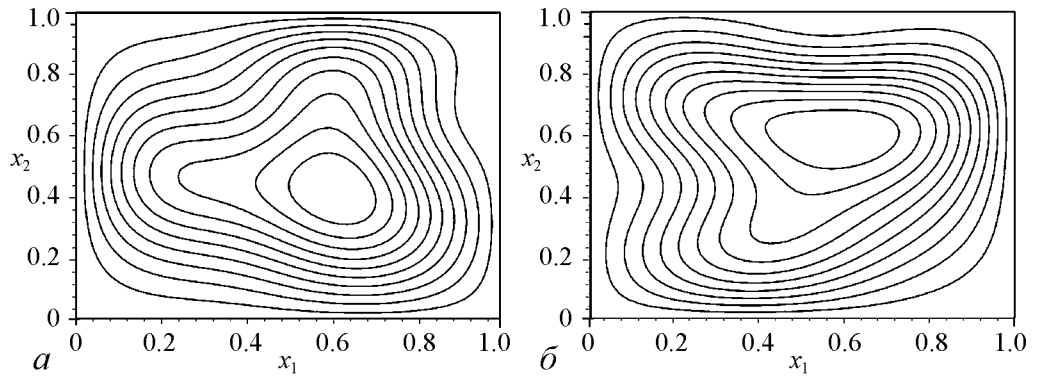


Рис. 4. Эволюция начального поля вихря $\varphi_{11}(a) + \varepsilon\varphi_{pq}(a)$ при нечетных $p + q$. Расчет для $N = 6$, начальное распределение $\omega_0(a) = \varphi_{11}(a) + 0.1 \cdot \varphi_{14}(a)$, $h = 0.005$. Изолинии завихренности после 77000 итераций отображения в последовательные моменты времени t : $a - 386$, $\bar{b} - 390$, $\bar{e} - 394$

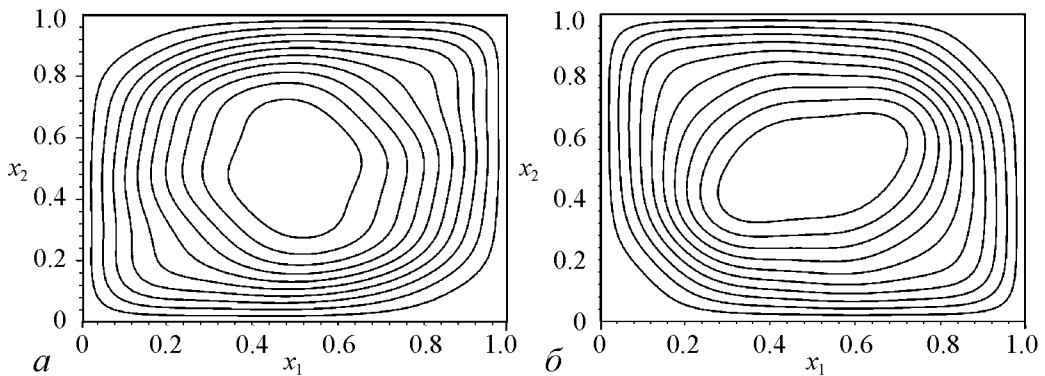


Рис. 5. Эволюция начального поля вихря $\varphi_{11}(a) + \varepsilon\varphi_{pq}(a)$ при четных $p + q$. Расчет для $N = 8$, начальное распределение $\omega_0(a) = \varphi_{11}(a) + 0.1 \cdot \varphi_{13}(a)$, $h = 0.005$. Изолинии завихренности после 15000 итераций отображения в последовательные моменты времени t : $a - 77.17$, $\bar{b} - 82.5$

Если $p + q$ нечетно, то после первой же итерации отображения коэффициенты $w_{12}(t)$ и $w_{21}(t)$ становятся отличными от нуля. Поэтому движение имеет тот же характер, что и для трехмерной модели. Вихрь прецессирует вдоль границы области, и такое движение может продолжаться долго – несколько десятков полных оборотов вихря вдоль границы. На рис. 4 приведены изолинии вихря в последовательные моменты времени. Сильная деформация вихря обусловлена сравнительно большой величиной начального возмущения.

Если же $p + q$ четно, то в процессе движения остаются равными нулю все коэффициенты $w_{ij}(t)$ с нечетными $i + j$ и, в частности, $w_{12}(t)$ и $w_{21}(t)$. Движение имеет качественно иной характер: наблюдаются деформации растяжения-сжатия вихря вдоль диагоналей квадрата (рис. 5). Следует еще раз подчеркнуть, что речь идет о свойствах решений на конечном, хотя и большом промежутке времени.

Для двухвихревых режимов движения $\varphi_{12}(a)$ и $\varphi_{21}(a)$ наиболее интересные эффекты наблюдаются при малых возмущениях вида $\varepsilon\varphi_{pq}(a)$ при p и q нечетных (то есть, при возмущениях с ненулевой средней завихренностью). Наиболее типичный сценарий – почти равномерное вращение пары вихрей вокруг общего центра. Например, на рис. 6 представлены изолинии вихря в последовательные моменты времени, направление вращения пары вихрей – против часовой стрелки.

На рис. 7, *a* приведены графики $w_{12}(t)$ и $w_{21}(t)$ – кривые *A* и *B*, соответственно, это почти гармонические колебания. Кривая *C* – график величины $5W(t)$, $W(t) = w_{11}^2(t) + \sum_{3 < i+j \leq N} w_{ij}^2(t)$ (множитель 5 использован для удобства, в этом режиме движения величина $W(t)$ мала и не превышает 0.02). Отметим, что $W(t)$ достигает минимума при $w_{12}(t)w_{21}(t) = 0$ и максимума при $|w_{12}(t)| = |w_{21}(t)|$.

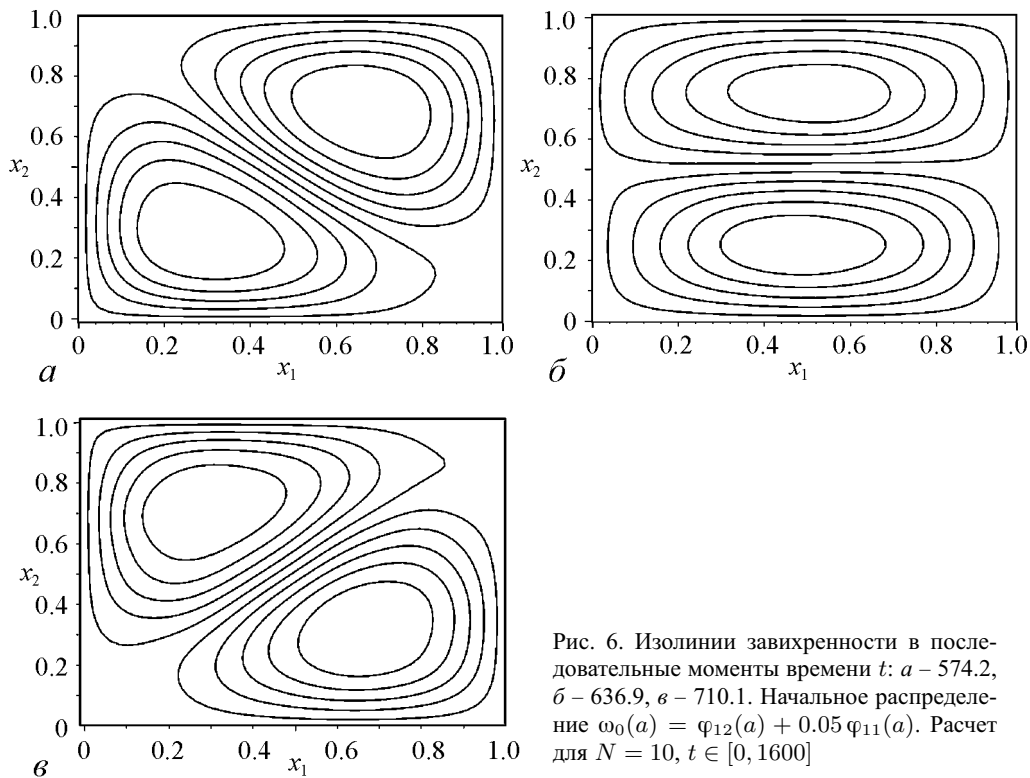


Рис. 6. Изолинии завихренности в последовательные моменты времени t : a – 574.2, \bar{b} – 636.9, $\bar{в}$ – 710.1. Начальное распределение $\omega_0(a) = \varphi_{12}(a) + 0.05\varphi_{11}(a)$. Расчет для $N = 10$, $t \in [0, 1600]$

Другой типичный сценарий – вращательные колебания пары вихрей относительно начального состояния: система переходит из состояния рис. 6, *a* в состояние рис. 6, *б* и обратно. На рис. 7, *б* приведены графики $w_{12}(t)$, $w_{21}(t)$ и $W(t)$ – кривые *A*, *B* и *C*, соответственно. В этом режиме движения величина $W(t)$ существенно больше, чем в предыдущем случае, а $w_{12}(t)$ не меняет знак.

Наблюдаются также движения смешанного типа: перемежаются колебания около одного из стационарных состояний $\pm\varphi_{12}(a)$, $\pm\varphi_{21}(a)$ и режим вращения, описанные выше.

Наиболее любопытными представляются движения, в которых наблюдаются колебания пары вихрей относительно одной из диагоналей квадрата. При этом величина $|w_{12}(t) - w_{21}(t)|$ совершает колебания небольшой амплитуды около нуля, и движение близко к периодическому. На рис. 7, *в* отражены два таких периода движения: при $t \in [10000, 23500]$ колебания происходят в окрестности состояния $w_{12}(t) = w_{21}(t)$, а при $t \in [25000, 37000]$ – в окрестности состояния $w_{12}(t) = -w_{21}(t)$. В ряде расчетов наблюдается «застывание» фазовой точки в области $|w_{12}(t)| \approx |w_{21}(t)|$, то есть, возникает близкий к стационарному режим движения с парой почти симметричных относительно диагонали квадрата вихрей. Вообще, создается впечатление, что состояния с $|w_{12}(t)| = |w_{21}(t)|$ играют особую роль в динамике системы. Это согласуется с результатами работы [4], где изучались вихревые движения слабо вязкой жидкости в квадрате с условиями периодичности на его границе. В описанных компьютерных экспериментах кусочно-постоянное начальное распределение вихря с близким к нулю средним значением эволюционирует к двухвихревому режиму движения, причем вихри стремятся расположиться по диагонали квадрата.

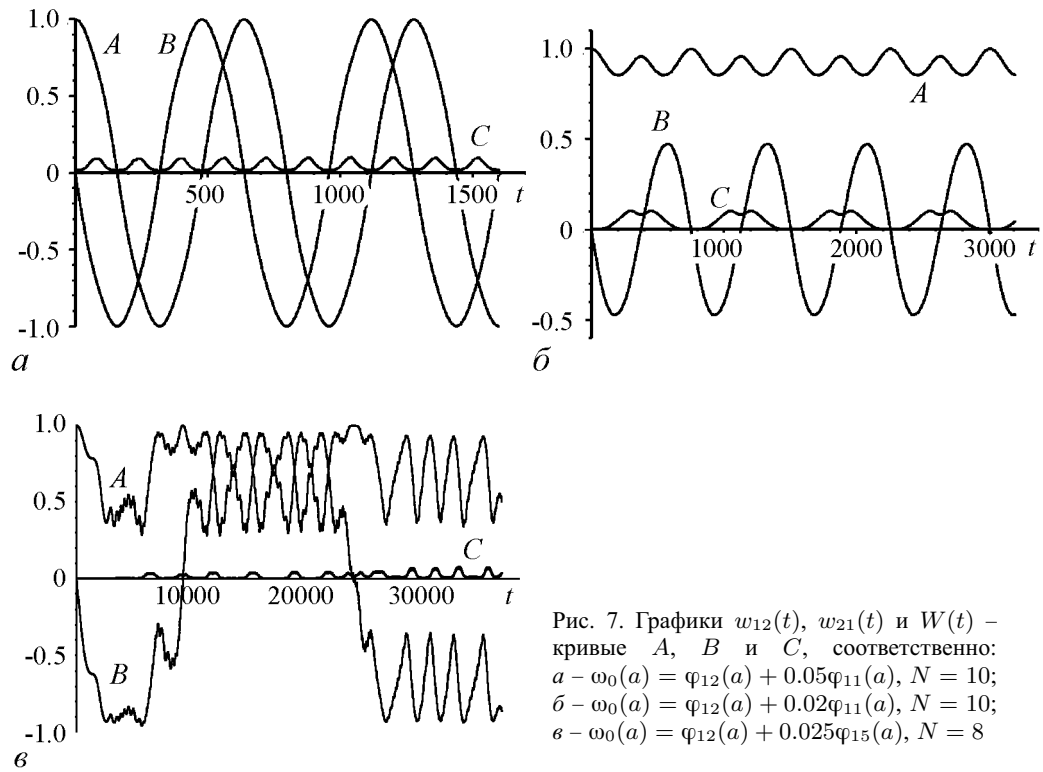


Рис. 7. Графики $w_{12}(t)$, $w_{21}(t)$ и $W(t)$ – кривые *A*, *B* и *C*, соответственно:
a – $\omega_0(a) = \varphi_{12}(a) + 0.05\varphi_{11}(a)$, $N = 10$;
б – $\omega_0(a) = \varphi_{12}(a) + 0.02\varphi_{11}(a)$, $N = 10$;
в – $\omega_0(a) = \varphi_{12}(a) + 0.025\varphi_{15}(a)$, $N = 8$

Заключение

В данной работе представлен новый подход к численному исследованию двумерных вихревых движений идеальной жидкости, основанный на приближенном решении интегро-дифференциального уравнения, полученного в работах В.И. Юдовича 2000–2005 годов. Метод Галеркина в сочетании с методом малого параметра применен для вывода семейства линейных конечномерных моделей. Для контроля точности приближенных решений использованы нелинейные аппроксимации Галеркина уравнений Эйлера движения идеальной жидкости в двумерном случае. Компьютерные эксперименты показали, что с ростом размерности моделей улучшается соответствие между приближенными решениями, полученными двумя различными методами. Поэтому можно предположить, что линейные модели высокой размерности могут оказаться эффективным вычислительным средством (количество слагаемых в правой части уравнений для них растет пропорционально квадрату количества уравнений, а для нелинейных моделей – пропорционально кубу). Конечно, проверка этого предположения – предмет отдельного исследования.

Еще одна цель компьютерных экспериментов – изучение движений с начальным распределением завихренности, близким к одному из стационарных движений уравнений Эйлера. В частности, оказалось, что для решений, в начальный момент времени близких к стационарным движениям, можно провести аналогию с колебаниями и вращениями математического маятника.

Автор благодарит М.Ю. Жукова за постановку задачи и А.Б. Моргулиса за полезные обсуждения.

Работа выполнена в рамках европейского научного объединения «Регулярная и хаотическая гидродинамика» (грант РФФИ 07-01-92213 НЦНИЛ) и аналитической ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (гранты 2.1.1/554 и 2.1.1/6095). Исследование поддержано грантами РФФИ 07-01-00389 и 08-01-00895, а также грантом АФГИР (CRDF) RUM1-2842-RO-06.

Библиографический список

1. *В.И. Юдович.* Косимметрия и консервативные системы II. Ростовский государственный университет. Ростов-на-Дону, 2000. 24 с. Деп. в ВИНТИ 06.09.00, № 2772-B00.
2. *Yudovich V.I.* Topics in an ideal fluid dynamics // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. 2005. Vol. 7, Suppl. 3. P. S299.
3. *Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М.* Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981.
4. *Segre E., Kida S.* Late states of incompressible 2D decaying vorticity fields // Fluid Dynamics Research. 1998. Vol. 23. P. 89.

*Поступила в редакцию 18.09.2008
После доработки 25.06.2009*

LOW-ORDER DYNAMICAL MODELS FOR VORTICAL FLOWS OF INVISCID FLUID IN SQUARE AREA

N.V. Petrovskaya

The Galerkin method together with the method of small parameter is applied for study of Routh-like equations describing the dynamics of two-dimensional inviscid incompressible fluid flows. A set of simple models for some vortical flows of such fluid in rectangular area has been derived and analysed.

Keywords: Inviscid incompressible fluid, 2D vortical flows, Routh-like equations, Galerkin method.



Петровская Наталья Владимировна – родилась в 1949 году в Ростове-на-Дону, окончила Ростовский государственный университет (1971). С 1971 года работает в Ростовском государственном университете (с 2006 года – Южный федеральный университет). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1987) по специальности механика жидкости, газа и плазмы в Московском государственном университете. Область научных интересов: компьютерное моделирование течений жидкости, асимптотическое и численное исследование бифуркаций в гидродинамических моделях. Автор 46 научных публикаций.

344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а

Южный федеральный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук

E-mail: petr@math.rsu.ru