



## ШУМОИНДУЦИРОВАННЫЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ПРОЦЕССАХ КОНКУРЕНЦИИ ВО ВНЕШНИХ ФЛУКТУИРУЮЩИХ СРЕДАХ

*С.Е. Курушина, В.В. Максимов*

Исследовано влияние внешнего аддитивного однородного изотропного поля гауссовых флуктуаций на эволюцию процессов конкуренции. В качестве конкретной модели выбрана система, описываемая уравнениями типа Лотки–Вольтерры, учитывающими подвижность особей слабого вида и флуктуации ресурса в пространстве и во времени. В результате численного моделирования показано, что такая система допускает три различных типа стационарных решений: классическое решение, соответствующее исчезновению слабого вида; решение, соответствующее явлению кинетического перехода типа «заселения среды»; новый тип решений, соответствующий установлению стационарного состояния, при котором средняя по объему и асимптотическая по времени плотность численности слабого вида больше средней по объему и асимптотической по времени плотности численности сильного вида. Построены параметрические диаграммы, определяющие границы областей различных типов решений. Исследованы зависимости асимптотических по времени и средних по объему плотностей численности слабого и сильного видов от параметров модели.

*Ключевые слова:* Шумоиндуцированные фазовые переходы, процессы конкуренции, численное моделирование, параметрические диаграммы.

### Введение

Вопросы, относящиеся к влиянию шумов на эволюцию неравновесных систем, неоднократно обсуждались в литературе [1–10]. Исследования, проведенные за последние годы, показали, что поведение нелинейных систем во внешних флуктуирующих полях, как правило, противоречит интуитивным представлениям о возможных итогах их эволюции. Для широкого класса явлений случайный характер среды способен индуцировать гораздо более богатое разнообразие режимов, чем те, которые возможны при соответствующих детерминированных условиях [1]. Во-первых, шумы вызывают флуктуации параметров систем, что, в частности, приводит к формированию турбулентных коэффициентов переноса и дисперсии, значения которых могут заметно превышать значения коэффициентов переноса [2–5]. Во-вторых, в случайно

неоднородных системах могут возникать корреляционные неустойчивости, при которых моменты первого порядка устойчивы, а высшие моменты могут нарастать во времени и пространстве [2,6]. Наконец, шумы способны приводить к качественному изменению режимов поведения распределенных систем: появлению и исчезновению новых стационарных состояний [1,7], возникновению незатухающих осцилляций, изменению размерности аттракторов [8,9] и т.д.

В настоящей работе исследуется влияние внешнего аддитивного однородного изотропного поля гауссовых флуктуаций на процессы конкуренции в системах различной природы. Актуальность поставленной задачи обусловлена тем, что процессы конкуренции и отбора являются важными факторами, определяющими поведение сильнонеравновесных открытых систем (конкуренция между модами в лазере, химические модели эволюции, конкурентный отбор в экологии). Фактически сам процесс самоорганизации можно рассматривать как результат конкуренции между большим числом неустойчивых мод, приводящей к установлению макроскопической амплитуды одной из таких мод и подавлению остальных [7,10].

Здесь рассматривается система, описывающая конкуренцию двух потребителей (биологических видов), ориентированных на один ресурс. К этой модели сводится большое количество физических, экономических, социальных и экологических задач. Далее для определенности будем оперировать экологической терминологией.

Простейшей моделью этого типа является модель Лотки–Вольтерры [11], в которую добавим слагаемые, учитывающие подвижность особей слабого вида, а также пространственные и временные флуктуации скорости прироста ресурса [7].

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} &= (BM - A)N, \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= (bM - a)n + D\Delta n, \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= Q - GM - CN - cn + f(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $N$ ,  $n$  – плотности численности сильного и слабого вида;  $M$  – плотность ресурса;  $A$ ,  $a$  ( $B$ ,  $b$ ) – коэффициенты естественного изменения численности видов;  $Q$  – скорость прироста ресурса;  $C$ ,  $c$  – коэффициенты его потребления;  $G$  – коэффициент естественной убыли ресурса. Слагаемое  $D\Delta n$  учитывает подвижность особей слабого вида. Случайное поле  $f(\mathbf{r}, t)$  задает пространственные и временные флуктуации плотности ресурса. Все коэффициенты в (1) положительны.

Источник флуктуаций вводится только в третье уравнение системы (1), так как в данной задаче предполагается, что внешние факторы оказывают наиболее значительное влияние на компоненту системы, описывающую изменение плотности пищевого ресурса, от которого в наибольшей степени зависит численность видов. Случайные изменения плотности численности конкурирующих видов, связанные с внешним вмешательством в процессы их размножения и вымирания, не учитываются. Так как источник флуктуаций внешний, его можно смоделировать как аддитивное случайное поле.

В работах [1,12] рассматриваются двухкомпонентные точечные системы хищник–жертва с различными трофическими функциями. В этих работах предполагается, что случайные изменения среды приводят к случайному изменению параметров системы (внутренним флуктуациям). Случайная компонента моделируется как мультипликативный белый шум. В [12] показано, что в такой системе за счет флуктуаций параметров может происходить статистическая параметрическая раскочка положения равновесия. В работе [1] показано, что шум сдвигает точку детерминированного фазового перехода. Это приводит к бистабильности системы.

В данной работе предполагается, что шумом параметров системы можно пренебречь, чтобы при малых коэффициентах диффузии вышеописанные эффекты не влияли на кинетические переходы, то есть интенсивность внутренних флуктуаций значительно меньше интенсивности флуктуаций внешнего источника.

В работе [1] приводится обоснование того факта, что для большинства реальных систем, имеющих немарковское поведение, хорошим приближением для моделирования флуктуирующей окружающей среды является так называемый цветной шум. В этом случае будущая эволюция системы зависит лишь от ее состояния и состояния среды в данный момент времени, которое является марковским (при этом предполагается, что начальное состояние системы не зависит от шума). Это означает, что любое предсказание будущей стохастической эволюции многомерного процесса, описываемого переменными системы и случайным внешним источником, основанное на информации о состоянии в данный момент, является наилучшим из всех возможных.

Как отмечено в [1], флуктуации окружения представляют собой суммарный эффект действия многих слабосвязанных факторов окружающей среды. Тогда из центральной предельной теоремы следует, что флуктуации внешнего источника распределены по Гауссу. Свойства эргодичности, марковости и гауссовости флуктуирующего окружения ограничивают выбор случайных процессов для моделирования флуктуаций окружающей среды стационарным однородным изотропным гауссовым полем с экспоненциальной функцией корреляции

$$\langle f(\mathbf{r}, t)f(\mathbf{r}', t') \rangle = 2G^2 \theta \exp(-k_f |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \exp(-k_t |t - t'|). \quad (2)$$

Здесь  $r_f = k_f^{-1}$  определяет характерный пространственный масштаб флуктуаций,  $r_t = k_t^{-1}$  – характерный временной масштаб флуктуаций,  $\theta$  – их интенсивность. Время корреляции считается значительно меньше всех характерных времен задачи. При  $r_t \rightarrow 0$  поле становится  $\delta$ -коррелированным во времени. Дополнительно предполагается, что выполнены условия  $A/B < a/b$ ,  $Q > GA/B$ .

Единственное устойчивое решение системы (1) при  $\theta = 0$  и  $D = 0$  имеет вид

$$n_s = 0, \quad M_s = \frac{A}{B}, \quad N_s = \frac{Q - GM_s}{C}. \quad (3)$$

Таким образом, в отсутствие флуктуаций невозможно сосуществование видов – выполняется теорема Гаузе [13].

В [7] было показано, что ситуация становится отличной от классической, если скорость изменения плотности ресурса флуктуирует в пространстве и во времени.

Начиная с некоторой критической интенсивности шума

$$\theta_c = p_1 D k_f^2 / b, \quad (4)$$

где  $p_1 = (a/b - A/B)$  – нехватка ресурса в стационарном состоянии для размножения особей слабого вида, становится возможным стационарное статистическое сосуществование двух соревнующихся видов («заселение среды»). Средняя по объему и асимптотическая по времени плотность численности слабого вида становится равной

$$\langle n \rangle_{Vs} = \begin{cases} 0, & \theta < \theta_c, \\ \frac{b p_1}{R} \left( \frac{1}{\theta_c} - \frac{1}{\theta} \right), & \theta > \theta_c. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $R = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{b^3 c}{G \omega_0^2 (D k_f^2)^{3/2}}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{B(Q - GA/B)}$ .

При этом показано, что в отсутствие диффузии флуктуации скорости прироста ресурса не предотвращают асимптотического вымирания слабого вида [14], поэтому такой кинетический переход принципиально связан с наличием диффузии. В условиях флуктуирующего окружения простая подвижность оказывается фактором, обеспечивающим эволюционное преимущество.

Авторами работы [7] по аналогии с теорией равновесных переходов второго рода получено уравнение типа Гинзбурга–Ландау для медленной составляющей параметра порядка, которое справедливо в малой окрестности области перехода к режиму с ненулевой средней по объему плотностью численности слабого вида  $\langle n \rangle_V \neq 0$ . При этом учитывалась сложная иерархия микроскопических масштабов уравнений с размерностью обратного времени, и анализ проводился при условии малости отклонений концентраций  $n$  и  $N$  от стационарных значений и при определенных ограничениях на интенсивность шума. Кроме того, при анализе использовался целый ряд дополнительных ограничений, серьезно сужающих область применимости полученных результатов.

В настоящей работе система (1) анализировалась в отсутствие указанных выше ограничений.

### Результаты численного моделирования

Сложность и ограниченная применимость аналитических методов делает актуальным построение численной модели для исследования системы (1). Трудности, возникающие при численном моделировании, в свою очередь, связаны с высокой вычислительной сложностью модели. Для наблюдения предсказываемых теорией эффектов необходимо разбиение пространства на большое число точек и значительное число отсчетов в модельном времени до наступления стационарного режима. Кроме этого, эффект «заселения среды» наблюдается в узких областях срезов параметрического пространства модели, границы которых можно указать лишь приблизительно.

Это требует разработки специальных инструментальных методик проведения вычислительных экспериментов, которые подробно описаны в [15], где предложен новый подход для качественного исследования процесса конкуренции на основе численного моделирования с использованием кластерных вычислительных систем с централизованным управлением вычислительным процессом.

Будем считать, что взаимодействие популяций происходит в конечной области пространства. Рассмотрим одномерную задачу. Тогда систему уравнений (1) с учетом нормировки на стационарные состояния можно переписать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \tau} &= (\tilde{M} - 1)\tilde{N}, \\ \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tau} &= \left(\frac{b}{B}\tilde{M} - \frac{a}{A}\right)\tilde{n} + \frac{D}{A} \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \tau} &= \frac{QB}{A^2} - \frac{G}{A}\tilde{M} - \frac{B}{A^2} \left(Q - G\frac{A}{B}\right)\tilde{N} - \frac{c}{C} \frac{B}{A^2} \left(Q - G\frac{A}{B}\right)\tilde{n} + \frac{B}{A^2} f(x, \tau), \end{aligned} \right\} (6)$$

где  $\tau = At$ ,  $\tilde{N} = N/N_s$ ,  $\tilde{M} = M/M_s$ ,  $\tilde{n} = n/N_s$ . Предполагается непроницаемость неподвижных границ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \Big|_{x=0;L} &= 0, & \frac{\partial \tilde{n}}{\partial x} \Big|_{x=0;L} &= 0, & \frac{\partial \tilde{M}}{\partial x} \Big|_{x=0;L} &= 0, \end{aligned} \right\} (7)$$

где  $L$  – характерный размер области взаимодействия видов.

В настоящее время существует достаточно большое количество работ, посвященных решению задач, которые сводятся к уравнениям вида [16]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \xi(z) = a(\xi, z) + b(\xi, z)\varepsilon(z), \quad \xi(z_0) = \xi_0. \quad (8)$$

В системе уравнений (8) шум  $\varepsilon(z)$  является  $\delta$ -коррелированным.

В этих работах делается попытка «подогнать» методы решения стохастических дифференциальных уравнений (ДУ) под методы, которые разработаны для обыкновенных ДУ. Для этого сначала из эвристических соображений предполагается определенная вычислительная схема, а затем выполняется проверка – в каком статистическом смысле выполняется численное интегрирование: в смысле Ито или Стратоновича. Одним из способов такой проверки является проверка вычислительной схемы на простейших примерах. Этот способ служит скорее эвристическим, чем строгим доказательством, однако он нашел широкое применение в целом ряде серьезных исследований, например [17].

Схема численного моделирования, использованная здесь, записана также из эвристических предположений. Ее обоснованием могут служить следующие рассуждения. Запишем формально решение системы (6) в его эквивалентной интегральной форме

$$\begin{aligned}
\tilde{N} &= \tilde{N}_0 + \int_{t_0}^t (\tilde{M} - 1) \tilde{N} d\tau, \\
\tilde{n} &= \tilde{n}_0 + \int_{t_0}^t \left[ \left( \frac{b}{B} \tilde{M} - \frac{a}{A} \right) \tilde{n} + \frac{D}{A} \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial x^2} \right] d\tau, \\
\tilde{M} &= \tilde{M}_0 + \int_{t_0}^t \left[ \frac{QB}{A^2} - \frac{G}{A} \tilde{M} - \frac{B}{A^2} \left( Q - G \frac{A}{B} \right) \tilde{N} - \frac{c}{C} \frac{B}{A^2} \left( Q - G \frac{A}{B} \right) \tilde{n} \right] d\tau + \\
&\quad + \frac{B}{A^2} \int_{t_0}^t f(x, \tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{9}$$

Реальный шум, в отличие от белого, имеет почти наверное непрерывные реализации, поэтому решению стохастических ДУ (9), благодаря сглаживающему эффекту интегрирования, будет соответствовать процесс с почти наверное дифференцируемыми реализациями. Поэтому (9) можно интерпретировать как систему обыкновенных ДУ для реализаций, а  $\int_{t_0}^t f(x, \tau) d\tau$  можно понимать в смысле обычного интеграла Римана.

Все вышеизложенное позволяет для стохастических ДУ (9) использовать обычную двухслойную конечно-разностную схему [18], в которой  $f(x, \tau)$  можно интерпретировать как часть нелинейной функции. Тогда получим

$$\begin{aligned}
N_i^j &= \tau (M_i^{j-1} - 1) N_i^{j-1} + N_i^{j-1}, \\
n_{i-1}^j - n_i^j \left( 2 + \frac{Ah^2}{D\tau\sigma} \right) + n_{i+1}^j &= -\frac{(1-\sigma)}{\sigma} \left( n_{i+1}^{j-1} - 2n_i^{j-1} + n_{i-1}^{j-1} \right) - \\
&\quad - \frac{Ah^2}{D\tau\sigma} n_i^{j-1} - \frac{Ah^2}{D\tau\sigma} n_i^{j-1} \left( \frac{b}{B} M_i^{j-1} - \frac{a}{A} \right), \\
M_i^j &= \tau \left( \frac{QB}{A^2} - \frac{G}{A} M_i^{j-1} - \frac{B}{A^2} \left( Q - G \frac{A}{B} \right) N_i^{j-1} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{c}{C} \frac{B}{A^2} \left( Q - G \frac{A}{B} \right) n_i^{j-1} + \frac{B}{A^2} f_i^{j-1} \right) + M_i^{j-1}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь  $f_i^j$  – реализации случайного гауссова поля с соответствующей функцией корреляции. Реализации поля  $f_i^j$  получены из следующих соображений. Предположим, что временную зависимость поля можно считать практически одинаковой во всех точках пространства. Тогда можно записать  $f(x, \tau) = u(x)v(\tau)$  [19]. Для такого поля корреляционная функция принимает вид  $B(x, \tau) = B_F(x)B_f(\tau)$ , что соответствует виду (2). Далее реализуются процессы  $u_i^j$  и  $v^j$  по схеме [20]

$$u_i^j = [\theta_1(1 - \exp(-2k_f|x_i - x_{i-1}|))]^{1/2} e_i + u_{i-1}^j \exp(-k_f|x_i - x_{i-1}|),$$

$$v^j = [\theta_2(1 - \exp(-2k_t|t^j - t^{j-1}|))]^{1/2} e^j + v^{j-1} \exp(-k_t|t^j - t^{j-1}|); \quad \theta_1\theta_2 = 2G^2\theta,$$

$u_0^j$  – случайное гауссово число с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\theta_1$ ;  $v^0$  – случайное гауссово число с нулевым математическим ожиданием и диспер-

сией  $\theta_2$ ;  $e_i$  и  $e^j$  – случайные гауссовы числа с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Тогда  $f_i^j = u_i^j v^j$ . При этом время корреляции  $r_t$  выбирается малым, много меньше характерных времен задачи.

Разностные граничные условия определяются выражениями

$$\begin{aligned} n_{-1}^j &= n_1^j; & n_{\max i+1}^j &= n_{\max i-1}^j, \\ N_{-1}^j &= N_1^j; & N_{\max i+1}^j &= N_{\max i-1}^j, \\ M_{-1}^j &= M_1^j; & M_{\max i+1}^j &= M_{\max i-1}^j. \end{aligned} \quad (11)$$

Система (10) с граничными условиями (11) решается стандартным методом прогонки. Итерационный процесс останавливается, когда среднее по объему значение плотности численности слабого вида стабилизируется на постоянном уровне.

Анализ показал, что в зависимости от значений параметров  $D$ ,  $p_1$  и  $\theta$  система (6)–(7) допускает три различных типа решений (рис. 1).

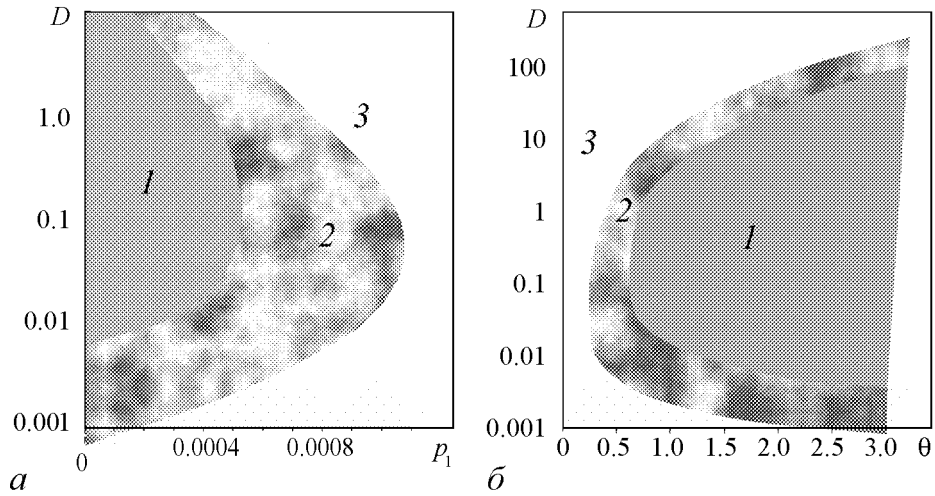


Рис. 1. Параметрические диаграммы для системы (6)–(7):  $a$  – на плоскости  $(D, p_1)$ ;  $b$  – на плоскости  $(D, \theta)$ . 1 – область режима «инверсии»; 2 – область режима «заселения среды»; 3 – область классических решений

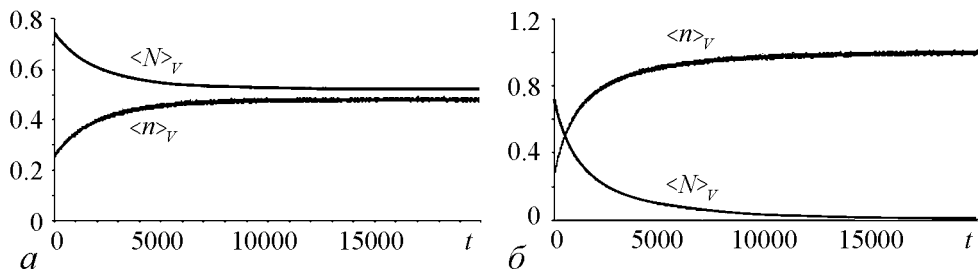


Рис. 2. Динамика изменения во времени средних по объему плотностей численности слабого  $\langle n \rangle_V$  и сильного  $\langle N \rangle_V$  видов. Параметры модели:  $A = B = 1$ ,  $a = 4.755278$ ,  $b = 4.751796$ ,  $C = c = 1$ ,  $Q = 9.25$ ,  $G = 3.68$ ,  $\theta = 0.7$ ,  $k_f = 5.4$ .  $a$  – режим «заселения среды» ( $D = 0.01$ );  $b$  – режим «инверсии» ( $D = 0.5$ )

Классическое решение типа (3) (область 3 на рис. 1), описанное в [2,13], соответствует исчезновению слабого вида.

Решение типа (5) – заселение среды особями слабого вида (область 2 на рис. 1), полученное в [7] и соответствующее установлению статистического стационарного состояния, при котором средние по объему и асимптотические по времени плотности численности видов удовлетворяют условию  $\langle n \rangle_{V_s} < \langle N \rangle_{V_s}$ . Зависимости  $\langle n(t) \rangle_V$  и  $\langle N(t) \rangle_V$  в области 2 приведены на рис. 2, а.

Новый тип решений [21] (область 1 на рис. 1) соответствует установлению стационарного состояния, при котором  $\langle n \rangle_{V_s} > \langle N \rangle_{V_s}$ . В этой области параметров происходит «инверсия» явления «заселения среды» слабым видом, при которой последний становится сильным! Зависимости  $\langle n(t) \rangle_V$  и  $\langle N(t) \rangle_V$  в области 1 приведены на рис. 2, б.

На рис. 3, а представлена одна из реализаций плотности численности слабого вида  $n$  в выбранной точке пространства. По оси абсцисс отложен счетчик отсчетов времени  $j$ . Шаг по времени равен 0.01. Из рисунка видно, что при увеличении интенсивности флуктуаций внешнего источника и неизменных остальных параметров системы происходят изменения статистических стационарных состояний системы.

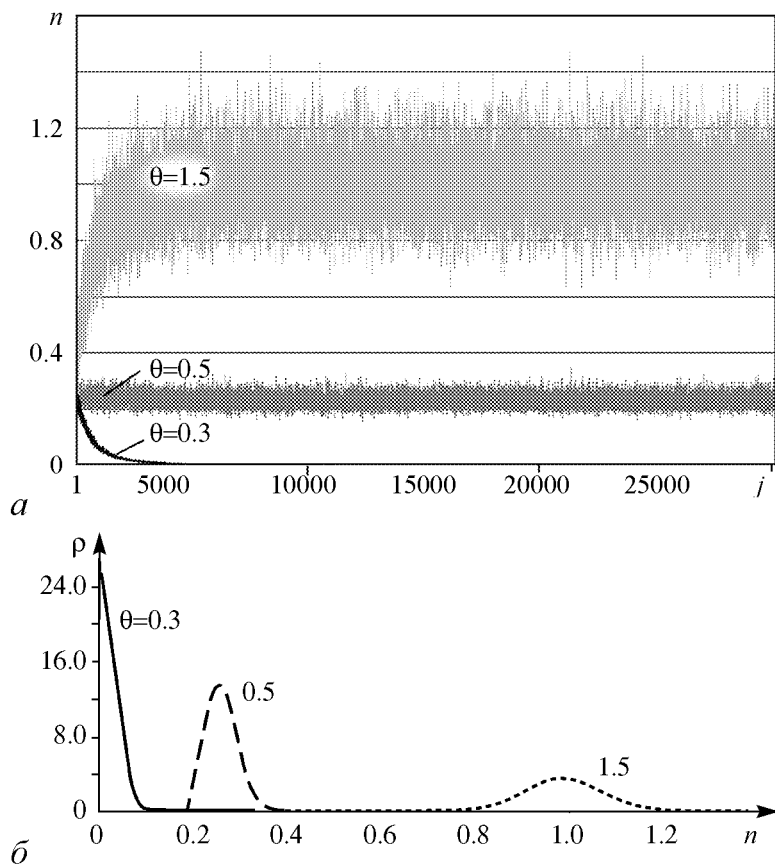


Рис. 3. Распределение плотности численности слабого вида в некоторой точке пространства: а – некоторая реализация; б – соответствующая плотность вероятности



На рис. 3, б показаны соответствующие плотности вероятности для статистических стационарных распределений  $n$  в этой же точке. Здесь принято, что статистическое стационарное состояние начинается с момента  $t = 82$ . Плотность вероятности получена с помощью автоматизированной системы аппроксимативного анализа законов распределения [22]. Из приведенных графиков видно, что кинетическим переходам соответствует сдвиг математического ожидания и увеличение дисперсии. Кроме того, можно заметить, что тип распределения при увеличении интенсивности шума стремится к гауссову.

Особенности поведения системы в зависимости от параметров  $D$ ,  $p_1$  весьма прозрачны. В самом деле, явление «заселения среды» происходит жестко по отношению к параметру  $p_1$ , поэтому при увеличении дефицита ресурса, доступного слабому виду, выполняется теорема Гаузе, причем при  $D \rightarrow 0$  и  $p_1 \rightarrow 0$  слабый неподвижный вид исчезает при сколь угодно малом дефиците ресурса. Последний вывод совпадает с результатами работы [7].

Уменьшение дефицита ресурса, доступного слабому виду, приводит к сглаживанию отличий в динамике сильного и слабого видов, а подвижность дает слабому виду дополнительные конкурентные преимущества. В результате, вначале появляется возможность сосуществования видов, а затем, по мере уменьшения  $p_1$ , и «инверсия» режима заселения. Динамика этого процесса в зависимости от  $p_1$  показана на рис. 4.

Отметим здесь, что режим инверсии заселения является пороговым по параметру  $D$ : при  $D \rightarrow D_c(p_1, \theta)$  дополнительные конкурентные преимущества исчезают. Рост коэффициента подвижности в пределе больших  $D$  приводит к тому, что последнее слагаемое во втором уравнении системы (6) становится превалирующим. При большой подвижности особи слабого вида слишком быстро проходят через области с профицитом ресурса и не могут эффективно использовать последний. В асимптотике при  $D \rightarrow \infty$  это уравнение допускает только затухающие решения диффузионного типа вне зависимости от величины дефицита ресурса. Этим, в частности, объясняется подковообразный вид области 2 (см. рис. 1).

Динамика процесса в зависимости от коэффициента диффузии  $D$ , характеризующего подвижность слабого вида, и коэффициента естественной убыли ресурса  $G$  показана на рис. 5.

Разделение режимов на плоскости  $(D, \theta)$  также легко объяснимо. Чем меньше интенсивность флуктуаций, тем меньше доступный исключительно слабому виду случайно возникающий в случайным образом распределенных областях пространства ресурс. При превышении интенсивности флуктуаций  $\theta$  первого критического значения  $\theta_{c1}$  появляется возможность сосуществования видов, при котором  $\langle n \rangle_{Vs} < \langle N \rangle_{Vs}$ . При превышении интенсивности флуктуаций  $\theta$  второго критического значения  $\theta_{c2}$ , слабый вид получает преимущество, поскольку этот тип ресурса непосредственно доступен только ему и появляется возможность сосуществования видов, при котором  $\langle n \rangle_{Vs} > \langle N \rangle_{Vs}$ .

Динамика процесса в зависимости от величины  $\theta$  показана на рис. 6, а.

На рис. 6, б демонстрируется динамика смены режимов в зависимости от масштаба флуктуаций. Наличие крупномасштабных флуктуаций, очевидно, сглажива-

ет конкурентные преимущества подвижного потребителя. При выполнении условия  $r_f \gg \max \left\{ l; (D/a)^{1/2} \right\}$ , где  $l = (D/(p_1 b))^{1/2}$  – среднее диффузионное смещение за характерное время вымирания  $(p_1 b)^{-1}$  слабого вида в стационарном состоянии, либо его подвижность слишком мала, для того чтобы концентрация  $n$  в областях размножения превосходила ее уменьшение вне этих областей, либо последний не успевает воспользоваться преимуществом в подвижности.

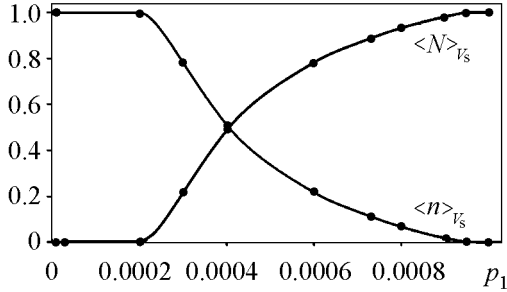


Рис. 4. Зависимость асимптотических по времени и средних по объему плотностей численности слабого  $\langle n \rangle_{Vs}$  и сильного  $\langle N \rangle_{Vs}$  видов от нехватки ресурса в стационарном состоянии для размножения особей слабого вида  $p_1$ . Параметры модели:  $A = B = 1$ ;  $a = 4.755278$ ;  $C = c = 1$ ;  $D = 0.01$ ;  $Q = 9.25$ ;  $G = 3.68$ ;  $\theta = 0.7$ ;  $k_f = 5.4$

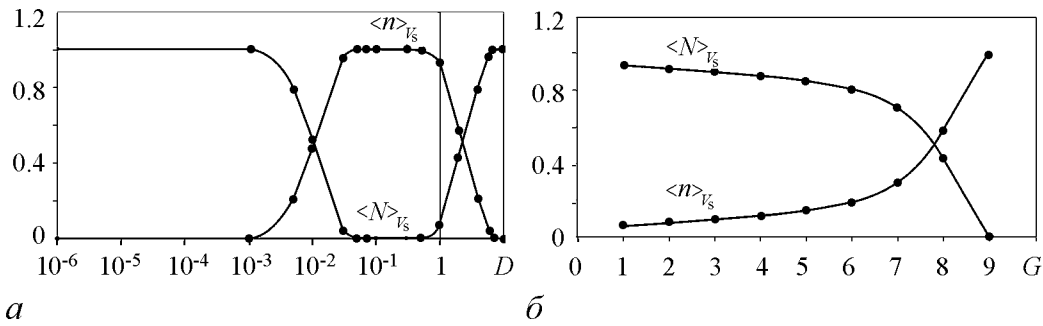


Рис. 5. Зависимости асимптотических по времени и средних по объему плотностей численности слабого  $\langle n \rangle_{Vs}$  и сильного  $\langle N \rangle_{Vs}$  видов:  $a$  – от коэффициента диффузии  $D$  ( $G = 3.68$ );  $b$  – от коэффициента естественной убыли ресурса  $G$  ( $D = 0.01$ ). Параметры модели:  $A = B = 1$ ;  $a = 4.755278$ ;  $b = 4.751796$ ;  $C = c = 1$ ;  $Q = 9.25$ ;  $\theta = 0.7$ ;  $k_f = 5.4$

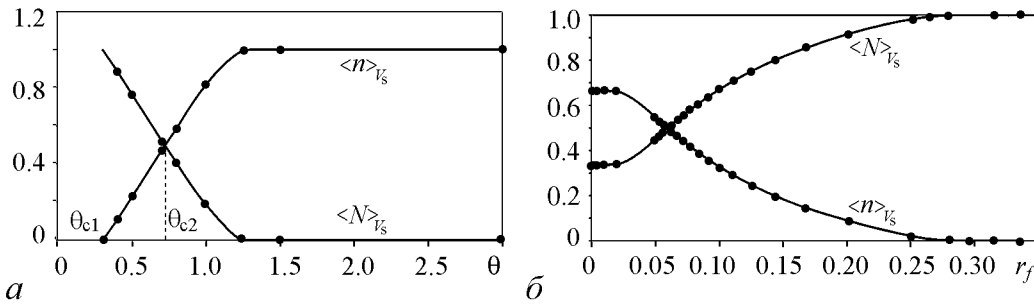


Рис. 6. Зависимости асимптотических по времени и средних по объему плотностей численности слабого  $\langle n \rangle_{Vs}$  и сильного  $\langle N \rangle_{Vs}$  видов:  $a$  – от интенсивности флуктуаций шума  $\theta$  ( $k_f = 5.4$ .);  $b$  – от масштаба флуктуаций  $r_f$  ( $\theta = 0.7$ ). Параметры модели:  $A = B = 1$ ;  $a = 4.755278$ ;  $b = 4.751796$ ;  $C = c = 1$ ;  $D = 0.5$ ;  $Q = 9.25$ ;  $G = 3.68$

## Заключение

Таким образом, в работе показано, что система (1) допускает три различных типа стационарных решений: классическое решение, соответствующее исчезновению слабого вида; решение, соответствующее явлению кинетического перехода типа «заселения среды»; и новый тип решений, соответствующий установлению стационарного состояния, при котором средняя по объему и асимптотическая по времени плотность численности слабого вида больше средней по объему и асимптотической по времени плотности численности сильного вида. Построены параметрические диаграммы на плоскостях  $(D, p_1)$  и  $(D, \theta)$ , определяющие границы областей различных типов решений. Исследованы зависимости асимптотических по времени и средних по объему плотностей численности слабого и сильного видов от параметров модели.

Рассмотренная выше модель и близкие к ней имеют весьма широкую область применения. Они описывают процессы конкуренции в экологических сообществах и эффекты предбиологической химической эволюции [1]. Весьма близкие к рассмотренной модели при отсутствии флуктуаций были предложены в работе [23] – для описания взаимодействия двух категорий, участвующих в производстве – производителей и управленцев с произведенным и накопленным ими продуктом, и в [24] – при описании экономического и демографического развития некоторой области и т.д. Основные отличия этих моделей от рассмотренной заключаются в виде трофических функций. Тем не менее полученные в работе закономерности, касающиеся поведения системы ресурс–потребитель во внешних случайных полях являются весьма общими и следует ожидать их проявления и в данных системах. Конкретная интерпретация результатов при этом зависит от характера рассматриваемой системы.

## Библиографический список

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: теория и применение. М.: Мир, 1987. 399 с.
2. Свирижев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.
3. Бенилов Е.С., Пелиновский Е.Н. К теории распространения волн в нелинейных флуктуирующих средах без дисперсии // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. Вып. 1. С. 175.
4. Моисеев С.С., Сагдеев Р.З., Тур А.В., Яновский В.В. Влияние вихрей на спектр акустической турбулентности // ЖЭТФ. 1978. Т. 87, № 2. С. 105.
5. Завершинский И.П., Коган Е.Я. Ослабление ударных волн в неравновесном газе // ТВТ. 2000. Т. 38, № 2. С. 293.
6. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 2000.
7. Михайлов А.С., Упоров И.В. Критические явления в средах с размножением, распадом и диффузией // УФН. 1984. Т. 14. Вып. 1. С. 79.
8. Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1981.
9. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы. Саратов: Изд-во СГУ, 1999.

10. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
11. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Мир, 1976.
12. *Свирижев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. 352 с.
13. *Гаузе Г.Ф.* Борьба за существование. Москва; Ижевск: Изд-во РХД, 2000. 234 с.
14. *Михайлов А.С., Упоров И.В.* Индуцированный шумом фазовый переход и перколяционная задача для флуктуирующих сред с диффузией // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. Вып. 5(11). С. 1958.
15. *Востокин С.В., Курушина С.Е.* Численное моделирование процесса конкуренции во флуктуирующих средах на кластерных вычислительных системах // Известия Самарского научного центра РАН. 2005. Т. 7, № 1. С. 143.
16. *Яроцук И.О., Гулин О.Э.* Метод статистического моделирования в задачах гидроакустики. Владивосток: Дальнаука, 2002. 352 с.
17. *Иванов М.Ф., Швец В.Ф.* Метод стохастических уравнений для расчета кинетики плазмы со столкновениями // ЖВММФ. 1980. Т. 20, № 3. С. 682.
18. *Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М.* Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991. 368 с.
19. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1981. 640 с.
20. *Бакалов В.П.* Цифровое моделирование случайных процессов. М.: Сайнс-ПРЕСС, 2002. 88 с.
21. *Курушина С.Е., Левченко Л.В., Максимов В.В.* Математическое моделирование процесса конкуренции в системе ресурс-потребитель во флуктуирующей среде // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2006. Т. 13, вып. 4. С. 660.
22. *Прохоров С.А., Лезин И.А. и др.* Автоматизированная система аппроксимативного анализа законов распределения ортогональными полиномами и нейросетевыми функциями. Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2007. 528 с.
23. *Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савельев В.П.* Динамические модели теории управления. М.: Наука, 1985. 378 с.
24. *Гамма Э., Хелм Р., Джонсон Р., Влссидес Дж.* Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования. СПб: Питер, 2003. 368 с.

*Самарский государственный  
аэрокосмический университет*

*Поступила в редакцию 1.12.2008  
После доработки 2.04.2009*

## **NOISE-INDUCED PHASE TRANSITIONS IN COMPETITION PROCESSES IN THE EXTERNAL FLUCTUATED MEDIA**

*S.E. Kurushina, V.V. Maximov*

The influence of external additive homogeneous isotropic field of Gauss fluctuations to evolution of competition processes, which described by Lotka–Volterra equations, where taking into account the mobility of weak population individuals and spatial and temporal fluctuations of resource, has been researched. The numerical simulation of considered

model was performed. It was shown that considered system have three different types of stationary solutions: classical solution, which corresponds to extinction of weak population; solution, which similar to phenomenon of kinetic transition, called «occupation of environment»; and a new type of solutions, which correspond to stationary state, where average in volume and asymptotic in time density of population size of weak species more than corresponding density of population size of strong species. Parametric diagrams for different types of solutions were plotted. Average in volume and asymptotic in time density of population size of weak and strong species dependences from main parameters were investigated.

*Ключевые слова:* Noise-induced phase transitions, competition processes, numerical simulation, parametric diagram.



*Курушина Светлана Евгеньевна* – родилась в Самаре (1971), окончила Самарский государственный университет (1994). После окончания СГУ работает в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГАУ (2002) по специальности 01.04.05 – Оптика. Опубликовала 30 научных работ. Область научных интересов: теория колебаний, волн, структур; динамика нелинейных стохастических систем; теория самоорганизации; прикладная математика; стохастические уравнения.

443086 Самара, Московское шоссе, 34  
Самарский государственный аэрокосмический университет  
им. академика С.П. Королева  
E-mail: kurushina72@mail.ru



*Максимов Валерий Владимирович* – родился в поселке Усть-Омчуг, Магаданской области (1952). Окончил Куйбышевский авиационный институт (1976). После окончания КуАИ работал в ЦСКБ «Прогресс». С 1979 г. работает в КуАИ – СГАУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в КуАИ (1987) по специальности 05.07.05 - Тепловые двигатели летательных аппаратов. Опубликовал 47 научных работ. Имеет 6 авторских свидетельств. Область научных интересов: теория колебаний и волн; динамика нелинейных стохастических систем; теория самоорганизации.

443086 Самара, Московское шоссе, 34  
Самарский государственный аэрокосмический университет  
им. академика С.П. Королева