



ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ В СИСТЕМЕ РЕАКЦИЯ–ДИФфуЗИЯ В ПОЛЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

С.Е. Курушина, А.А. Иванов

Исследовано влияние мультипликативных флуктуаций параметров системы на образование диссипативных структур при возникновении неустойчивости типа мягкой моды в системах реакция–диффузия на примере модели Гирера–Майнхардта. Получена система уравнений, описывающих взаимодействие незатухающих мод (параметров порядка). Показано, что флуктуации параметров приводят к изменению собственных значений неустойчивых мод, увеличению их числа и параметрическому возбуждению системы. Проведено численное моделирование эволюции рассматриваемой системы. Исследовано изменение уровня флуктуаций динамических переменных в процессе формирования диссипативных структур при различных интенсивностях шума.

Ключевые слова: Система реакция–диффузия, диссипативные структуры, мультипликативные флуктуации, неустойчивые моды, параметрическое возбуждение.

Введение

Изучению системы типа реакция–диффузия

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} = f_k(x_k, t) + D_{x_k} \Delta x_k, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (1)$$

традиционно посвящается большое количество работ в силу широты области ее приложений в активных физических, химических, экологических и экономических системах. Одним из важнейших направлений исследований систем типа (1) является изучение условий возникновения и протекания автоволновых процессов в таких системах и, в частности, диссипативных структур (ДС). Особенности формирования ДС в автономных системах типа (1) изучены аналитически и численно достаточно подробно [1–8].

Известно много работ, посвященных изучению влияния шумов на системы типа (1). Внешние шумы могут вызывать параметрическую неустойчивость [1,3,9–12],

бистабильность систем [9], способствовать неограниченному росту высших моментов динамических переменных [10,13], вызывать фазовые переходы [9,14], кинетические переходы типа «заселения среды» [15–17] и т.д. Однако строгая теория флуктуаций в активных распределенных средах еще далека от завершения.

Существует ограниченное число работ, посвященных исследованию влияния внешних шумов на процесс формирования ДС. Образование ДС в поле флуктуаций исследовалось как аналитически [18], так и численно [19–22].

В работе [18] аналитическими методами проведен корреляционный анализ кинетических флуктуаций, возникающих в системе с аддитивными δ -коррелированными шумами вблизи однородного состояния и при переходе к точке бифуркации в линейном приближении. Было показано, что амплитуды флуктуаций динамических переменных и их радиусы корреляций сильно возрастают при приближении к точке бифуркации Тьюринга, а последние в самой точке бифуркации стремятся к бесконечности. Однако линейное приближение неприемлемо вблизи порога самоорганизации. Поэтому в [18] вблизи порога неустойчивости исследуется стохастическое уравнение для одной критической моды в тьюринговой системе на основе ее двухъящичной модели. Получено соответствующее уравнение Фоккера–Планка и стационарное распределение вероятности для данной моды.

Численные исследования линеаризованной модели из [18] проведены в работе [19]. Было обнаружено, что в области бифуркации Тьюринга флуктуации динамических переменных, вызванные шумом параметров, велики и что существует область параметров, в которой на отрезке конечной длины существует несколько ДС различных периодов. Было установлено, что в области контрастных ДС варибельность заметно меньше и даже при наличии флуктуаций образуются четко выраженные и устойчивые контрастные ДС.

В работе [20] методом Монте-Карло осуществлено моделирование переходов частиц в дискретном одномерном реакторе по схеме, являющейся аналогом дискретной формы записи уравнений распределенного брасселятора. Показано, что флуктуации значительно ускоряют начальную стадию развития ДС, выбирая наиболее быстро растущие моды. В работе также изучался уровень флуктуаций в зависимости от близости к точке бифуркации Тьюринга.

Однако в [18–20] не проводилось аналитическое исследование влияния флуктуаций на условия возникновения ДС, а в [19] не учитывался нелинейный характер автокаталитических реакций.

В работах [21,22] исследовано влияние аддитивного однородного изотропного поля гауссовых флуктуаций динамических переменных на образование ДС при мягком режиме их возбуждения. Показано, что вдали от бифуркации Тьюринга флуктуации увеличивают скорость образования ДС, что согласуется с результатами работы [20], и изменяют порядок расположения отдельных пиков. Аналитически показано, что действительная часть собственных чисел неустойчивых мод пропорциональна интенсивности флуктуаций и некоторой степени радиуса корреляции, зависящей от размерности реакционно-диффузионного пространства. Показано, что наличие шума приводит к увеличению числа неустойчивых мод.

Тем не менее весьма широкий класс задач требует анализа поведения динамических систем в присутствии мультипликативных флуктуаций. Такие ситуации имеют место при изучении влияния «естественных» (внутренних) шумов, роль которых существенно возрастает в системах с малым числом взаимодействующих объектов или в системах, близких к своим точкам бифуркаций и т.д. [1]. Кроме того, когда

между неравновесной системой и окружающей ее средой нет обратной связи и среда не претерпевает систематических изменений во времени, флуктуации среды (внешние шумы) приводят к случайному поведению параметров системы [9]. Это, в свою очередь, приводит к появлению в уравнениях, описывающих эволюцию системы, слагаемых, содержащих шумы, величины которых пропорциональны динамическим переменным.

В связи с вышеизложенным в работе исследовано влияние мультипликативных флуктуаций параметров системы, обусловленных случайным изменением внешней среды и описываемых случайным однородным изотропным гауссовым полем, на образование диссипативных структур при возникновении неустойчивости типа мягкой моды в системах (1).

1. Математическая модель

Процесс образования диссипативных структур в поле двумерных мультипликативных флуктуаций рассмотрен на примере широко известной модели морфогенеза Гирера–Майнхардта [6,23–26]. Скорости изменения концентраций автокаталитической и демпфирующей переменных (активатора a и ингибитора h , соответственно) описываются системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial t} &= \rho + k \frac{a^2}{h} - \mu a + D_a \Delta a, \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= ca^2 - \nu h + D_h \Delta h.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь ρ – скорость образования автокаталитической переменной, μ – ее постоянная распада, D_a – коэффициент диффузии активатора; ν – постоянная скорости распада демпфирующей переменной, член ca^2 задает скорость образования ингибитора, D_h – коэффициент диффузии ингибитора; Δ – оператор Лапласа. Слагаемое ka^2/h учитывает, что увеличение концентрации ингибитора снижает скорость автокаталитического процесса.

Введем безразмерные величины $\mathbf{r}' = \mathbf{r} \sqrt{\nu/D_a}$; $t' = \nu t$; $a' = ca/k$; $h' = \nu h/k^2$; $D = D_h/D_a$. Учитывая влияние внешней флуктуирующей среды, зададим параметры $\rho c/\nu k$ и μ/ν , зависящие от коэффициентов задачи (2): $\rho c/\nu k = (\rho' c'/\nu' k') \times (1 + f_2(\mathbf{r}', t'))$ и $\mu/\nu = (\mu'/\nu')(1 + f_1(\mathbf{r}', t'))$, где ρ' , c' , ν' , k' , μ' – пространственно-временные средние соответствующих коэффициентов. Перепишем уравнения (2) следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial a'}{\partial t'} &= \frac{\rho' c'}{\nu' k'} (1 + f_2(\mathbf{r}', t')) + \frac{a'^2}{h'} - \frac{\mu'}{\nu'} (1 + f_1(\mathbf{r}', t')) a' + \Delta' a'; \\ \frac{\partial h'}{\partial t'} &= a'^2 - h' + D \Delta' h'.\end{aligned}\quad (3)$$

Таким образом, учитываются случайные изменения отношений параметров системы (2). Случайные поля $f_i(\mathbf{r}', t')$ определяют пространственно-временные гауссовы флуктуации этих параметров с корреляционным тензором $\langle f_i(\mathbf{r}', t') f_j(\mathbf{r}'', \tau) \rangle = F_i(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|) \delta(t' - \tau) \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) и нулевыми средними значениями. $F_i(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|)$

определяет пространственную зависимость корреляций однородного и изотропного случайного поля [27,28]; δ -коррелированность во времени фактически означает, что время корреляции случайного поля гораздо меньше всех характерных времен задачи. Далее везде штрихи у безразмерных переменных опущены.

2. Уравнения для параметров порядка

Для дальнейшего анализа перепишем уравнения (3) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - K(\Delta) \right) \mathbf{q} = \mathbf{g} + \mathbf{F}, \quad (4)$$

$$\text{где } K(\Delta) = \begin{pmatrix} \mu_0 \left(\frac{2}{\rho_0 + 1} - 1 \right) + \Delta & \frac{-\mu_0^2}{(\rho_0 + 1)^2} \\ \frac{2}{\mu_0} (\rho_0 + 1) & -1 + D\Delta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad q_1 = a - a_0 \text{ и}$$

$q_2 = h - h_0$ описывают отклонения концентраций относительно стационарных состояний $a_0 = (\rho_0 + 1)/\mu_0$ и $h_0 = (\rho_0 + 1)^2/\mu_0^2$; $\rho_0 = \rho'c'/\nu'k'$, $\mu_0 = \mu'/\nu'$. Вектор \mathbf{g} содержит квадратичные и кубические слагаемые, полученные разложением в ряд детерминированных слагаемых в правой части уравнения (3)

$$\mathbf{g} = \left((q_1^2/h_0 - (q_1^2 q_2 + 2a_0 q_1 q_2)/h_0^2 + (2a_0 q_1 q_2^2 + a_0^2 q_2^2)/h_0^3 - a_0^2 q_2^3/h_0^4), q_1^2 \right).$$

Вектор \mathbf{F} содержит случайные компоненты: $\mathbf{F} = ((\rho_0 f_2(\mathbf{r}, t) - \mu_0 f_1(\mathbf{r}, t))(q_1 + a_0), 0)$.

Представим вектор \mathbf{q} в виде суперпозиции

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, j} \mathbf{O}^{(j)} \xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (5)$$

где $\mathbf{O}^{(j)}$ – собственные векторы линейного оператора $K(\Delta)$ задачи (4) ($j = 1, 2$). Тогда, после преобразований, описанных в [2], из (4)–(5) следует система уравнений для амплитуд $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}$:

$$\begin{aligned} & \frac{d\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}}{dt} - \lambda_j(k) \xi_{\mathbf{k}}^{(j)} = \\ & = \frac{O_1^{*(j)}(k)}{h_0} \left\{ \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k}) [\Xi_{1\mathbf{k}'} \Xi_{1\mathbf{k}''} - \frac{2a_0}{h_0} \Xi_{1\mathbf{k}'} \Xi_{2\mathbf{k}''} + \frac{a_0^2}{h_0^2} \Xi_{2\mathbf{k}'} \Xi_{2\mathbf{k}''}] - \right. \\ & - \left. \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' - \mathbf{k}) [\Xi_{1\mathbf{k}'} \Xi_{1\mathbf{k}''} \Xi_{2\mathbf{k}'''} + \frac{2a_0}{h_0^2} \Xi_{2\mathbf{k}'} \Xi_{2\mathbf{k}''} \Xi_{1\mathbf{k}'''} - \frac{a_0^2}{h_0^3} \Xi_{2\mathbf{k}'} \Xi_{2\mathbf{k}''} \Xi_{2\mathbf{k}'''}] \right\} + \\ & + O_2^{*(j)}(k) \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k}) \Xi_{1\mathbf{k}'} \Xi_{1\mathbf{k}''} + \\ & + O_1^{*(j)}(k) \left\{ \rho_0 z_{2,\mathbf{k}}(t) - \mu_0 a_0 z_{1,\mathbf{k}}(t) - \mu_0 \sum_{\mathbf{k}'} \Xi_{1\mathbf{k}'} z_{1,(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} (t) \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Xi_{pq} = O_p^{(1)}(q) \xi_q^{(1)} + O_p^{(2)}(q) \xi_q^{(2)}$; $O_l^{*(j)}(k)$ – компоненты собственных векторов оператора, сопряженного к $K(\Delta)$. Выражения для $\lambda_j(k)$ и компонент векторов $\mathbf{O}^{(j)}$ и $\mathbf{O}^{*(j)}$ имеют вид:

$$\mathbf{O}^{(j)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2(\rho_0 + 1)}{\mu_0(1 + Dk^2 + \lambda_j)} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{O}^{*(j)} = \begin{pmatrix} (-1)^j \frac{1 + Dk^2 + \lambda_j}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ (-1)^j \frac{\mu_0(1 + Dk^2 + \lambda_1)(1 + Dk^2 + \lambda_2)}{2(\rho_0 + 1)(\lambda_1 - \lambda_2)} \end{pmatrix};$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha(k)}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2(k)}{4} - \beta(k)}; \quad \alpha(k) = -(D + 1)k^2 + \frac{2\mu_0}{\rho_0 + 1} - \mu_0 - 1;$$

$$\beta(k) = (k^2 + \mu_0)(Dk^2 + 1) - \frac{2\mu_0 Dk^2}{\rho_0 + 1}.$$

Входящие в (6) величины $z_{j,\mathbf{k}}(t) = \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} f_j(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$ – компоненты случайного векторного поля $\mathbf{z}_q(t)$, имеющие нулевые средние, j и \mathbf{k} – индексные аргументы этого поля. Корреляционные функции для компонент поля $\mathbf{z}(t)$ имеют вид [27, 28]: $\langle z_{j,\mathbf{k}}(t) z_{l,\mathbf{k}'}(\tau) \rangle = g_{jl}(|\mathbf{k}|) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(t - \tau) \delta_{jl}$. Положим далее для определенности $F_j(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \theta_j \exp(-k_{fj} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. Здесь k_{fj} – величины, обратные радиусам корреляций. Тогда для двумерной среды $g_{jj} = 2\pi\theta_j k_{fj} / (k^2 + k_{fj}^2)^{3/2}$.

Чтобы выделить из системы (6) уравнения для амплитуд неустойчивых мод $\xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}(t)$, проведем процедуру адиабатического исключения устойчивых мод. В результате с точностью до кубических слагаемых включительно получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}}{\partial t} - \lambda_1(k_u) \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} &= \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''u} \omega_1(k_u, k'_u, k''_u) \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_u) + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''u} \left(\omega_2(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u) - \omega_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u, k'''_u) \right) \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''u}^{(1)} \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u - \mathbf{k}_u) + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}'u} \alpha(k_u, k'_u, \hat{k}_s, \mathbf{z}_q(t)) \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} + \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''u} \beta(k_u, k'_u, k''_u, \hat{k}_s, \mathbf{z}_q(t)) \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} + f(\mathbf{z}_q(t)), \end{aligned} \quad (7)$$

где функции $\omega_1(k_u, k'_u, k''_u)$, $\omega_2(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u)$, $\omega_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u, k'''_u)$, $\alpha(k_u, k'_u, \hat{k}_s, \mathbf{z}_q(t))$, $\beta(k_u, k'_u, k''_u, \hat{k}_s, \mathbf{z}_q(t))$ и $f[\mathbf{z}_q(t)]$ определены в Приложении. Индексы u и s обозначают неустойчивые и устойчивые моды, соответственно. Функции $\delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_u)$, $\delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u - \mathbf{k}_u)$, $\delta(\mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u)$ и $\delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \hat{\mathbf{k}}_s)$ дают «правила отбора» для взаимодействующих мод. При $\theta_j = 0$ из (7) получается система уравнений для параметров порядка, приведенная в [2].

Усредним уравнения системы (7) по ансамблю реализаций. В результате, принимая во внимание ее формальные решения и раскрывая корреляторы $\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{j,\mathbf{k}_1}(t) \rangle$, $\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} z_{1,\mathbf{k}_1}(t) \rangle$, $\langle \xi_{\mathbf{k}'u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''u}^{(1)} z_{1,\mathbf{k}_1}(t) \rangle$ с помощью многомерного обобщения формулы Фурутцу–Новикова [10], окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \xi_{\mathbf{k}\mathbf{u}}^{(1)} \rangle}{\partial t} = & \widehat{L}_0(k_{\mathbf{u}}) + \widehat{L}_1(k_{\mathbf{u}}, k'_{\mathbf{u}}, k''_{\mathbf{u}}, \hat{k}_{\mathbf{s}}) \langle \xi_{\mathbf{k}'\mathbf{u}}^{(1)} \rangle + \widehat{L}_2(k_{\mathbf{u}}, k'_{\mathbf{u}}, k''_{\mathbf{u}}, k'''_{\mathbf{u}}, \hat{k}_{\mathbf{s}}) \langle \xi_{\mathbf{k}''\mathbf{u}}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''\mathbf{u}}^{(1)} \rangle + \\ & + \widehat{L}_3(k_{\mathbf{u}}, k'_{\mathbf{u}}, k''_{\mathbf{u}}, k'''_{\mathbf{u}}, k^{IV}_{\mathbf{u}}, \hat{k}_{\mathbf{s}}, \hat{k}'_{\mathbf{s}}) \langle \xi_{\mathbf{k}'''\mathbf{u}}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}^{IV}\mathbf{u}}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''\mathbf{u}}^{(1)} \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Операторы \widehat{L}_j ($j = 0, 1, 2, 3$) определены в Приложении.

Отметим здесь, что процедура раскрытия описанных выше корреляторов будет приводить к появлению аналогичных корреляторов для других взаимодействующих мод. Поэтому процедуру нужно проводить до тех пор, пока не будут учтены все слагаемые, содержащие необходимую степень интенсивности флуктуаций. Остальными корреляторами можно пренебречь ввиду их малости, так как после их раскрытия получатся слагаемые, пропорциональные более высокой степени интенсивности шума. В данной работе учтены члены, квадратичные по θ_j .

Отметим следующие особенности уравнения (8).

Во-первых, после усреднения системы (7) в (8) возникают дополнительные детерминированные слагаемые (см. оператор $\widehat{L}_0(k_{\mathbf{u}})$ в Приложении), не зависящие от $\langle \xi_{\mathbf{k}\mathbf{u}}^{(1)}(t) \rangle$, как если бы каждая мода $\langle \xi_{\mathbf{k}\mathbf{u}}^{(1)}(t) \rangle$ находилась в поле постоянной силы, зависящей от параметров задачи, вида корреляционной функции g_{jj} , интенсивности флуктуаций и волнового числа данной моды. Наличие таких слагаемых в уравнениях типа (8) обычно приводит к смещению стационарного состояния соответствующих переменных.

Во-вторых, в системе (8) возникают дополнительные слагаемые, пропорциональные $\langle \xi_{\mathbf{k}\mathbf{u}}^{(1)}(t) \rangle$, что приводит к изменению собственных чисел каждой моды и, как следствие, к изменению области неустойчивости (см. оператор $\widehat{L}_1(k_{\mathbf{u}}, k'_{\mathbf{u}}, k''_{\mathbf{u}}, \hat{k}_{\mathbf{s}})$ в Приложении). Пусть значения θ_j настолько малы, что в (8) можно ограничиться только членами, линейными по интенсивности шума. Выделим из $\widehat{L}_1(k_{\mathbf{u}}, k'_{\mathbf{u}}, k''_{\mathbf{u}}, \hat{k}_{\mathbf{s}})$ слагаемые, дающие вклад в собственное значение данной моды. В результате получим

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_1(k_{\mathbf{u}}) + \theta_1 \pi \left\{ \frac{\mu_0^2 (O_1^{*(1)}(k_{\mathbf{u}}))^2 (O_1^{(1)}(k_{\mathbf{u}}))^2}{k_{f1}^2} - \frac{2\mu_0^2 a_0 O_1^{*(1)}(k_{\mathbf{u}}) O_1^{(1)}(k_{\mathbf{u}}) \sigma_1(k_{\mathbf{u}}, 0, k_{\mathbf{u}})}{k_{f1}^2} + \right. \\ \left. + \frac{\mu_0^2 a_0^2 \sigma_1^2(k_{\mathbf{u}}, 0, k_{\mathbf{u}})}{k_{f1}^2} - \mu_0^2 \left[\frac{\sigma_2(k_{\mathbf{u}}, k_{\mathbf{u}}, k_{\mathbf{u}})}{k_{f1}^2} + \frac{k_{f1} \sigma_2(k_{\mathbf{u}}, 0, k_{\mathbf{u}})}{(k_{\mathbf{u}}^2 + k_{f1}^2)^{3/2}} \right] - \right. \\ \left. - k_{f1} \mu_0^2 a_0 O_1^{*(1)}(k_{\mathbf{u}}) \frac{2\sigma_4(0, k_{\mathbf{u}}, k_{\mathbf{u}}, k_{\mathbf{u}}) + \sigma_3(k_{\mathbf{u}}, 0, k_{\mathbf{u}}, k_{\mathbf{u}}) + \sigma_3(k_{\mathbf{u}}, 2k_{\mathbf{u}}, k_{\mathbf{u}}, 0)}{(k_{\mathbf{u}}^2 + k_{f1}^2)^{3/2}} \right\} + \\ \left. + \frac{\theta_2 \pi \sigma_1^2(k_{\mathbf{u}}, 0, k_{\mathbf{u}}) \rho_0}{k_{f2}^2}. \right. \end{aligned} \quad (9)$$

При выводе выражения (9) учтено, что $\xi_{-\mathbf{k}}^{(j)} = \xi_{\mathbf{k}}^{*(j)} = \xi_{\mathbf{k}}^{(j)}$, так как решения уравнений (7) должны быть действительными. Из выражения (9) для собственных значений λ неустойчивых мод видно, что их действительная часть пропорциональна интенсивностям флуктуаций θ_j и зависит от радиусов корреляции $r_{fj} = 1/k_{fj}$.

Наконец, обратим внимание на то, что при малой интенсивности флуктуаций параметров, в процессе образования ДС данная неустойчивая мода с волновым числом k_u , кроме мод с волновыми числами $k'_u + k''_u = k_u$ и $k'_u + k''_u + k'''_u = k_u$, с которыми реализуется ее взаимодействие в отсутствие флуктуаций, взаимодействует с двумя другими неустойчивыми модами, для которых выполняется условие $2k'_u - k''_u = k_u$. При увеличении интенсивности шума в подобное взаимодействие включается все большее число мод.

3. Численный анализ и моделирование эволюции системы

Вначале проведем численный анализ соотношения (9).

В работе [2] показано, что в отсутствие шума в системе (2) неустойчивость типа мягкой моды наступает при $\rho_0 \leq \rho_{0C}$, где $\rho_{0C} = 2\sqrt{\mu_0 D} / (2 + \sqrt{\mu_0 D} + 1/\sqrt{\mu_0 D}) - 1$. В соответствии с этим, сначала численно исследуем зависимости действительной части собственных значений λ от волнового числа k и величины области неустойчивых мод Δk (рис. 1, а) от интенсивности шума θ_1 при разных радиусах корреляции r_{f1} в закритической области $\rho_0 \leq \rho_{0C}$. Величина θ_2 полагается равной нулю, так как $f_2(\mathbf{r}, t)$ представляет собой аддитивный вклад в флуктуации, а влияние аддитивного шума на систему (3) описано в [21,22].

В работе рассматриваются флуктуации параметров, вызванные случайными изменениями внешней среды. Поэтому разумно предположить, что интенсивность этих флуктуаций должна определяться по отношению к пространственно-временным средним параметров и выражаться в процентах. Берется отношение среднеквадратичного отклонения шума, равного корню из дисперсии (интенсивности), к пространственно-временному среднему соответствующего параметра. Диапазон изменения интенсивности мультипликативного шума, рассматриваемого в работе, достаточно велик: $0 \leq \theta_1 \leq 0.2$, то есть приблизительно от 0 до 45% при $\mu_0 = 1$.

Результаты численных расчетов для двумерной среды приведены на рис. 1.

Из рис. 1, б видно, что при увеличении интенсивности флуктуаций θ_1 область неустойчивых мод, для которых $\text{Re}\lambda > 0$, увеличивается, причем тем быстрее, чем больше радиус корреляции. Кроме того, $\text{Re}\lambda \gg \text{Re}\lambda_1(k_u)$ (см. рис. 1, а), то есть при наличии мультипликативного шума амплитуды неустойчивых мод нарастают значительно быстрее, чем в его отсутствии, что ускоряет процесс разрушения однородного состояния и образования ДС. Аналогичные результаты получены численно в [20].

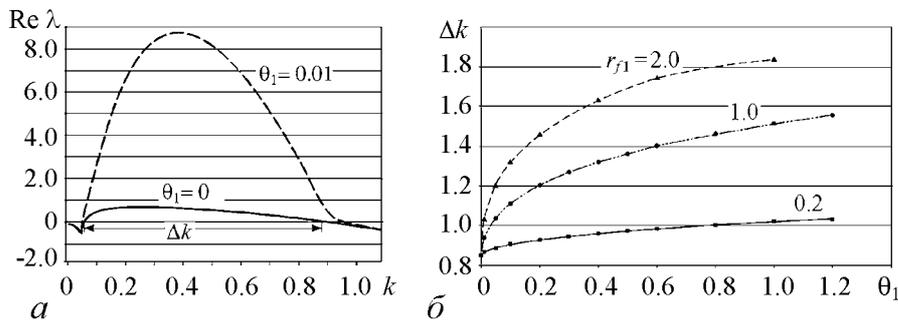


Рис. 1. а – Характерная зависимость собственного значения λ от волнового числа k в закритической области вдали от точки бифуркации Тьюринга. Для сравнения значений λ на рисунке приведена кривая при $\theta_1 = 0$. б – Зависимость величины области неустойчивых мод Δk от интенсивности шума θ_1 при разных радиусах корреляции r_{f1} . Параметры модели: $\rho_0 = 0.1$; $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $\theta_2 = 0$. ($\rho_{0C} = 0.814$)

На рис. 2 приведены зависимости действительной части собственных значений от волнового числа в докритической области $\rho_0 \geq \rho_{0C}$ при различных интенсивностях шума θ_1 и разных радиусах корреляции r_{f1} . Параметр $\rho_0 = 1$.

Сплошной линией показана соответствующая зависимость при отсутствии флуктуаций. Видно, что $\text{Re}\lambda(k) < 0$. Неустойчивость не возникает. Для маргинального состояния, когда неустойчивой становится только одна мода при наличии шума, зависимость $\text{Re}\lambda(k)$ показана линией из коротких штрихов. Из приведенных на рис. 2 зависимостей видно, что в области $\rho_0 > \rho_{0C}$ для каждого ρ_0 существует такая критическая интенсивность флуктуаций θ_C , начиная с которой возникает неустойчивость. Причем, чем ближе к точке бифуркации, тем меньше величина θ_C . В окрестности ρ_{0C} критическая интенсивность флуктуаций становится очень малой величиной, что свидетельствует о важности малых флуктуаций вблизи точки бифуркации. Таким образом, шум индуцирует параметрическую неустойчивость в области

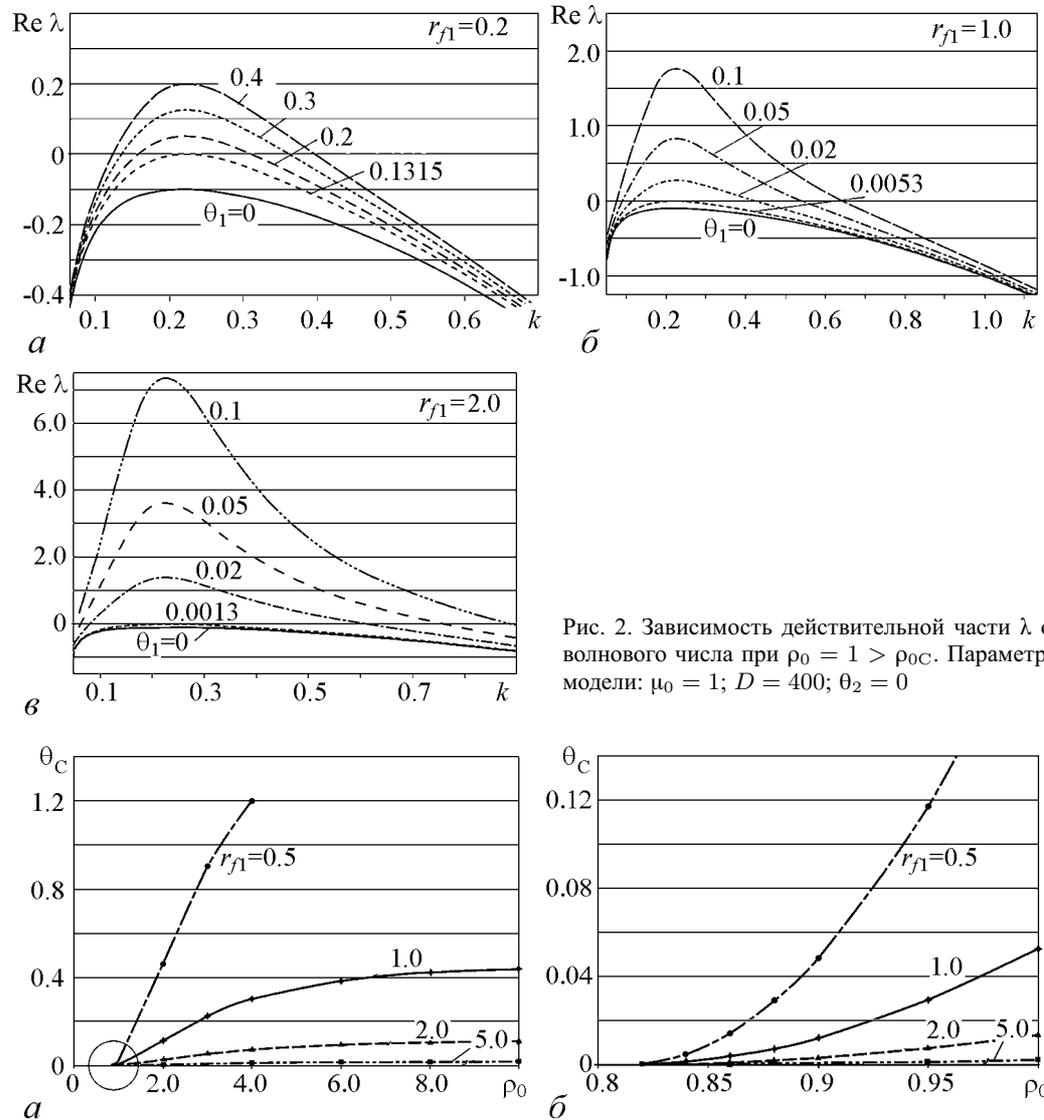


Рис. 2. Зависимость действительной части λ от волнового числа при $\rho_0 = 1 > \rho_{0C}$. Параметры модели: $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $\theta_2 = 0$

Рис. 3. *a* – Зависимости критической интенсивности флуктуаций θ_C от ρ_0 . *б* – Подробное изображение области, обведенной окружностью на рис. 3, *a*. Параметры модели: $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $\theta_2 = 0$

$\rho_0 > \rho_{0C}$. Графики зависимости θ_C от ρ_0 при различных радиусах корреляции r_{f1} приведены на рис. 3. Чтобы подчеркнуть роль малых флуктуаций вблизи точки бифуркации, область $\rho_0 \in [\rho_{0C}, 1]$ на рис. 3, б изображена в крупном масштабе.

Для описания нелинейной стадии образования ДС было проведено численное моделирование эволюции двумерной системы (3) с граничными условиями вида:

$$\left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=0,y} = \left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=l_1,y} = \left. \frac{\partial a}{\partial y} \right|_{x,y=0} = \left. \frac{\partial a}{\partial y} \right|_{x,y=l_2} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0,y} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=l_1,y} = \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{x,y=0} = \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{x,y=l_2} = 0.$$

Формирование контрастных ДС автокаталитической переменной в закритической области представлено на рис. 4, 5. Кроме обычной картины распределения концентрации активатора по поверхности слоя на этих рисунках добавлен соответ-

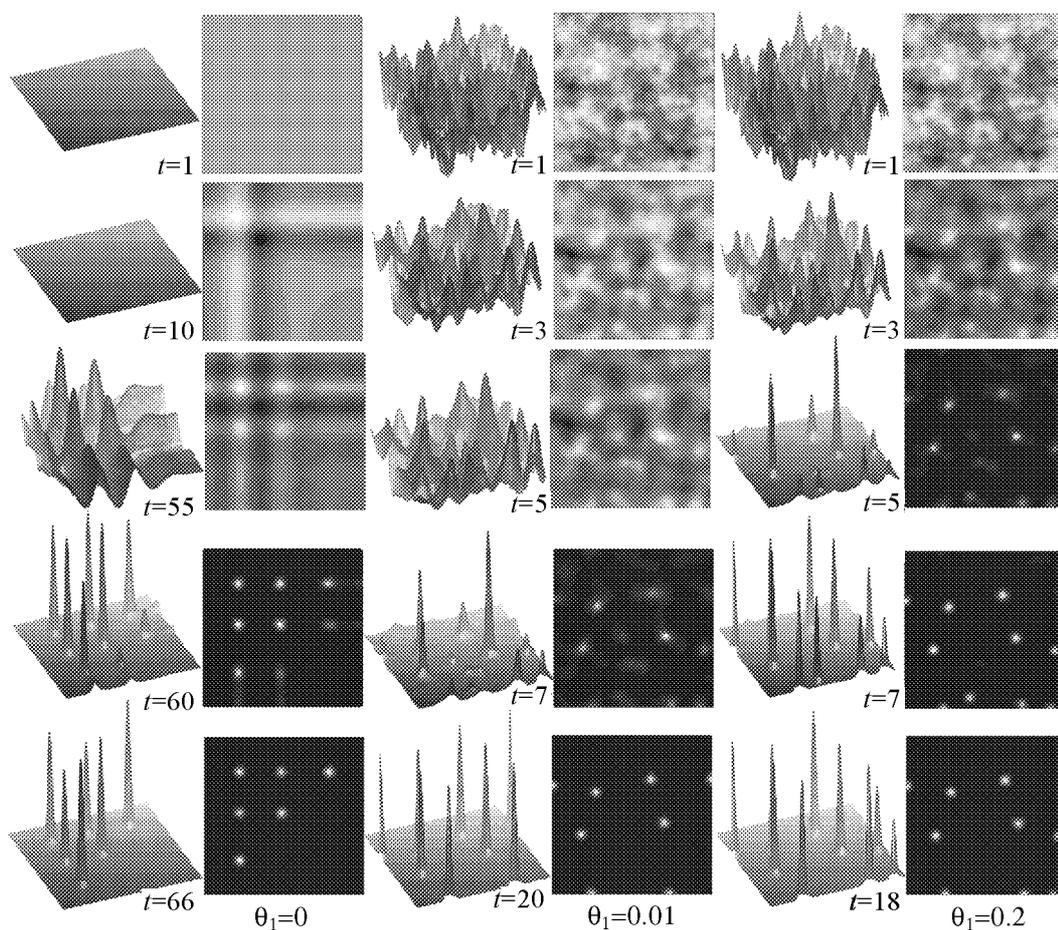


Рис. 4. Формирование контрастных ДС автокаталитической переменной. Слой 100×100 единиц. В середине указаны моменты модельного времени. Нижняя строка соответствует моментам установления статистически стационарного состояния. Изменение θ_1 указано снизу. Параметры модели: $\rho_0 = 0.1$; $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $k_{f1} = k_{f2} = 1$, $\theta_2 = 0$

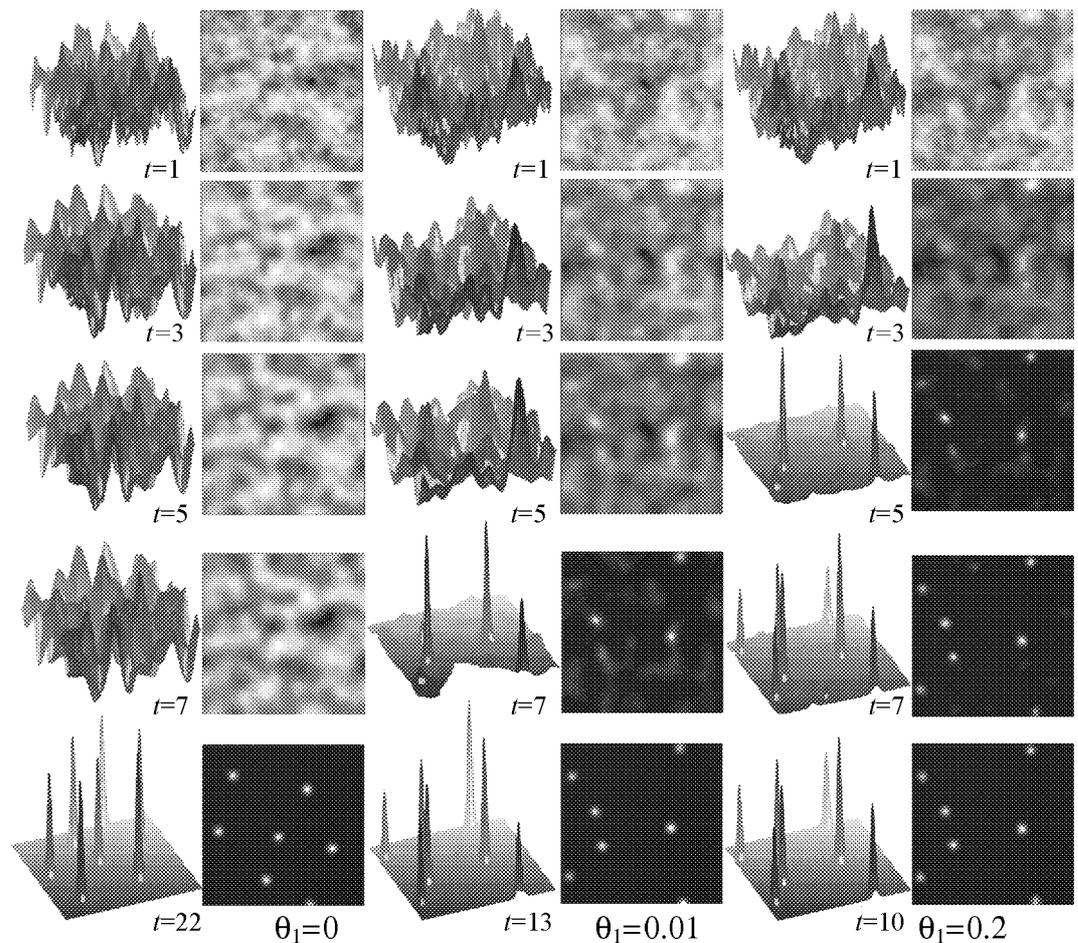


Рис. 5. Формирование контрастных ДС автокаталитической переменной. Слой 100×100 единиц. Параметры модели: $\rho_0 = 0.1$; $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $k_{f1} = k_{f2} = 1$, $\theta_2 = 0.01$. См. описание к рис. 4

ствующий вид сверху, дающий более наглядное представление о конфигурации ДС. Для изображения сверху градиент цвета от черного к белому визуализирует изменение значений переменной от минимального до максимального, соответственно. Из рис. 4, 5 видно, что при увеличении θ_1 и θ_2 процесс разрушения однородного состояния и формирования статистически стационарной ДС происходит быстрее, что качественно соответствует теоретическим выводам, сделанным выше. Из сравнения рис. 4 и 5 можно заметить, что наличие аддитивной компоненты внешнего шума еще больше ускоряет указанные процессы. Видеофайлы эволюции системы (3) в полях мультипликативных и аддитивных флуктуаций приведены на сайте <http://sites.google.com/site/morfogenez/>.

Кроме того, численно исследовался вопрос об изменении уровня флуктуаций динамических переменных при переходе системы от однородного состояния к ДС. На рис. 6 приведены усредненные по поверхности слоя флуктуации динамических переменных $\sigma = \left\langle \sqrt{\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2} \right\rangle_S$ в зависимости от времени. Эти графики иллюстрируют тот факт, что в области перехода флуктуации концентраций реагентов в системе возрастают до макроскопических масштабов. На рис. 6 также видны моменты начала и конца переходного режима.

На рис. 7 представлена эволюция поля концентраций активатора и ингибитора для моментов времени $t = 1, 390, 403, 430$ в докритической области. Для моделирования были выбраны параметры: $\rho_0 = 1; \mu_0 = 1; D = 400; \theta_1 = 0.2, k_{f1} = 0.2; \theta_2 = 0.1, k_{f2} = 1$. Соответствующие графики зависимостей действительной и мнимой частей собственных значений неустойчивых мод от волнового числа, полученные на основании выражения (9), а также усредненных по поверхности слоя флуктуаций концентраций реагентов, представлены на рис. 8, *a* и 9. На рис. 8, *б* изображены зависимости действительной и мнимой частей собственных значений задачи (4) в отсутствие флуктуаций при тех же параметрах модели ρ_0, μ_0, D . Как видно из рисунка, при данных параметрах модели в отсутствие шума действительная часть всех собственных значений отрицательна, а мнимая равна нулю, то есть неустойчивость отсутствует. Устойчивым решением является однородное распределение концентраций по поверхности слоя. При наличии внешнего шума

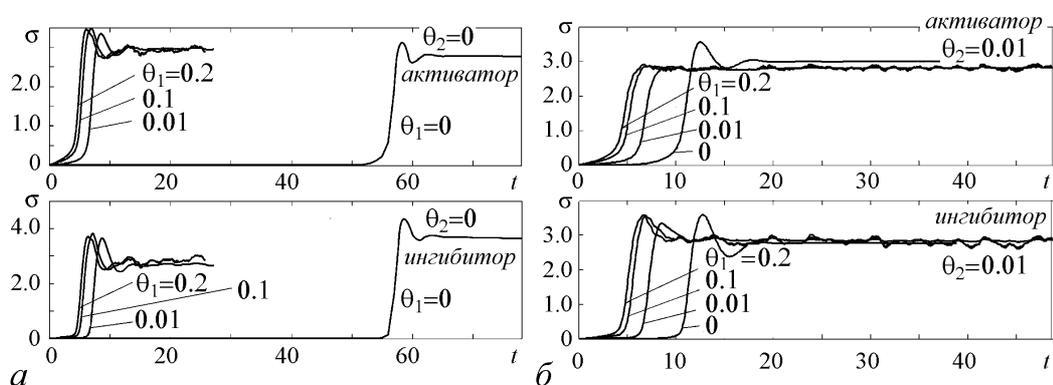


Рис. 6. Усредненные по поверхности слоя флуктуации динамических переменных при различных интенсивностях мультипликативного шума. Параметры модели: $\rho_0 = 0.1; \mu_0 = 1; D = 400; k_{f1} = k_{f2} = 1; \theta_2 = 0$ (*a*), 0.01 (*б*)

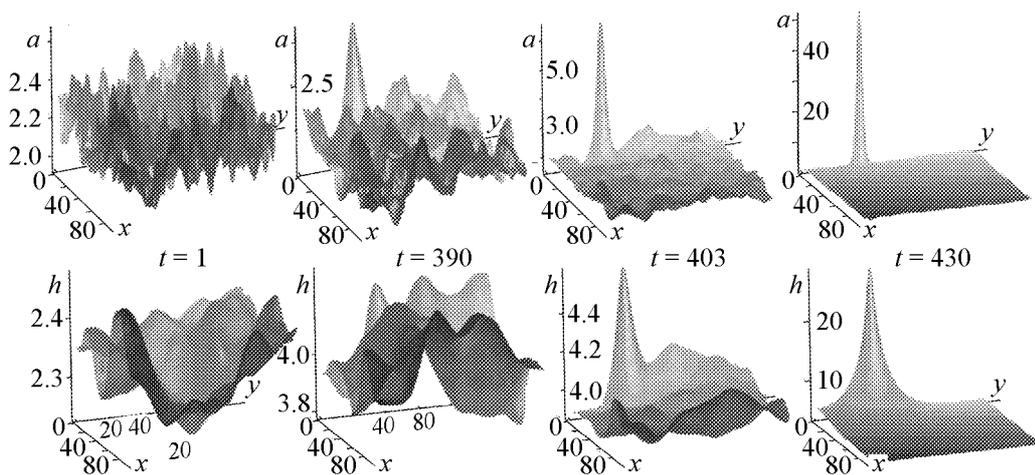


Рис. 7. Формирование ДС при параметрическом возбуждении в докритической области. Верхний ряд – концентрация активатора, нижний – концентрация ингибитора. Параметры модели: $\rho_0 = 1; \mu_0 = 1; D = 400; \theta_1 = 0.2, k_{f1} = 0.2; \theta_2 = 0.1, k_{f2} = 1$

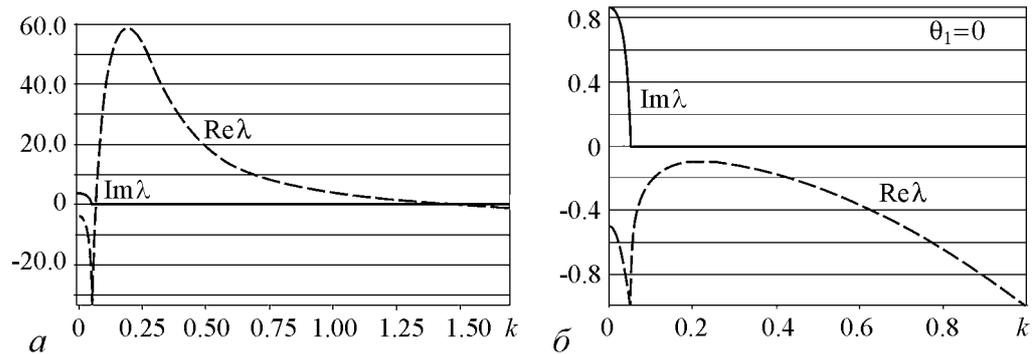


Рис. 8. Зависимости действительной и мнимой частей λ от волнового числа k при $\rho_0 > \rho_{0c}$. Параметры модели: $\rho_0 = 1$; $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $a - \theta_1 = 0.2$, $k_{f1} = 0.2$; $\theta_2 = 0.1$, $k_{f2} = 1$. $\bar{\sigma} - \theta_1 = \theta_2 = 0$

(см. рис. 8, *a*) некоторые моды приобретают положительный инкремент, при этом мнимая часть их собственных значений остается равной нулю. Таким образом, при выбранных параметрах моделирования, согласно выражению (9), возникает неустойчивость типа мягкой моды, вызванная флуктуациями параметров – параметрическая неустойчивость. Так как подобная неустойчивость возникает только при интенсивности внешнего шума больше некоторой критической, интенсивность внешнего шума при этом наряду с ρ_0 является бифуркационным параметром системы (3). Как и при жестком возбуждении структур в докритической области, связанным с некоторым начальным возбуждением критической амплитуды, возникающая при параметрической неустойчивости ДС имеет солитоноподобный вид (см. рис. 7, $t = 430$). Однако физическая причина его происхождения иная.

Из графиков зависимостей средних по поверхности слоя флуктуаций (см. рис. 9) видно, что в случае параметрической неустойчивости в процессе образования уединенной ДС флуктуации возрастают до макроскопического уровня. Однако уровень флуктуаций при установившейся статистически стационарной структуре (см. значения σ после $t = 410$ на рис. 9) значительно меньше, чем соответствующий уровень в закритической области (см. рис. 6).

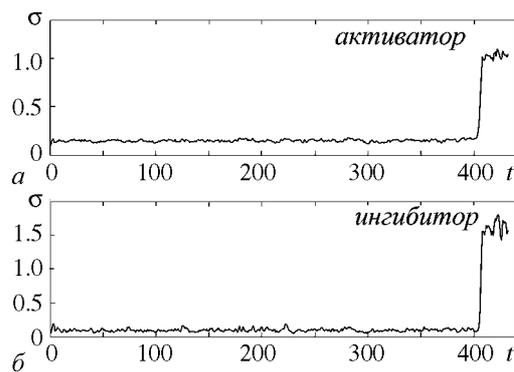


Рис. 9. Усредненные по поверхности слоя флуктуации динамических переменных при параметрическом возбуждении. Параметры модели: $\rho_0 = 1$; $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $\theta_1 = 0.2$, $k_{f1} = 0.2$; $\theta_2 = 0.1$, $k_{f2} = 1$

Из рис. 9 также видно, что длительность процесса разрушения однородного состояния в докритической области значительно превосходит аналогичную длительность при $\rho_0 < \rho_{0c}$. Это явление можно объяснить критическим замедлением всех процессов вблизи точки бифуркации. Распределения концентраций активатора и ингибитора в процессе разрушения однородного состояния показаны на рис. 7 ($t = 1$ и $t = 390$).

Переходному режиму соответствует момент $t = 403$ на рис. 7 и временной промежуток приблизительно 390...410 единиц модельного времени на

рис. 9. Длительность переходного режима много меньше времени существования статистически стационарных состояний.

Интересным является вопрос о сравнении процессов формирования ДС в поле аддитивных и мультипликативных флуктуаций. Данные о процессе формирования ДС в поле аддитивных флуктуаций взяты из работы [21]. Сравнение проводилось на основании исследований усредненных по поверхности слоя флуктуаций и норм матриц разности распределений концентрации динамических переменных от времени.

Метод анализа на основе норм матриц разности распределений концентрации предложен в [22]. Здесь приведем краткое его описание. Пусть $U^k \in R^{n \times n}$ – распределение концентрации реагента в момент времени k , а $U_{i,j}^k \in R$, $i, j = 1, \dots, n$ – его концентрация в точке с координатой (i, j) в момент времени k . Введем норму $C^k = \|U^{k+1} - U^k\|_\infty$. Здесь для любой матрицы A максимальная строковая матричная норма определена соотношением $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$. C^k показывает близость соседних состояний друг к другу.

Для сравнения выбраны следующие параметры: $\rho_0 = 0.1$; $\mu_0 = 1$; $D = 400$; $k_{f1} = k_{f2} = 1$; мультипликативный шум: $\theta_1 = 0.01$, $\theta_2 = 0$; аддитивный шум: $\theta_1 = \theta_2 = 0.01$, то есть величины интенсивности флуктуаций малы. Из приведенных на рис. 10 зависимостей видно, что:

1) разрушение однородного состояния в поле мультипликативных флуктуаций происходит быстрее;

2) время переходного режима в поле аддитивных флуктуаций в среднем больше ($\Delta\tau_2 > \Delta\tau_1$ на рис. 10, б);

3) в статистически стационарном состоянии при наличии мультипликативных флуктуаций состояния системы в двух близких временных точках различаются значительно больше (на рис. 10, б после момента $t = 20$ C^k испытывает значительные скачки (см. черную кривую)). Это прослеживается на видеоизображении как своеобразное «мерцание» пичков – изменение диаметра их основания и амплитуды.

4) Уровень флуктуаций, а также статистические средние значения амплитуды ДС примерно одинаковы в случайных полях обоих типов.

Сравнение процессов формирования ДС во внешних случайных полях с большой интенсивностью флуктуаций затруднено, так как при мультипликативном шуме возникают значительные по величине флуктуации параметров, приводящие к разрушению одних пичков и формированию других, то есть происходит чередование режимов с различными конфигурациями ДС.

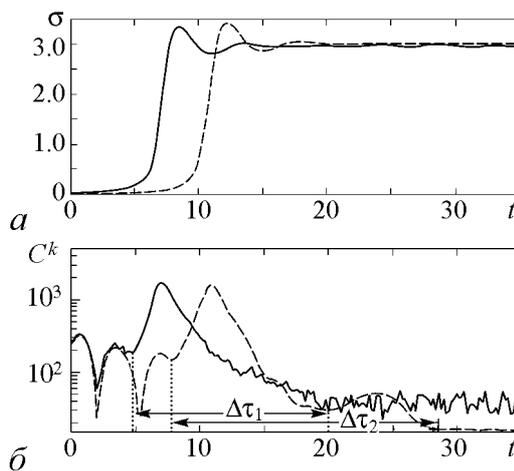


Рис. 10. Сравнение процессов формирования ДС в поле мультипликативных (черная линия) и аддитивных (серая штриховая линия) флуктуаций. а – Усредненные по поверхности слоя флуктуации активатора. б – Норма матрицы разности распределений концентрации активатора

Заключение

Исследовано влияние мультипликативных флуктуаций параметров системы, описываемых случайным однородным изотропным гауссовым полем, на образование диссипативных структур при возникновении неустойчивости типа мягкой моды в системах реакция–диффузия на примере модели Гирера–Майнхардта. С точностью до слагаемых, квадратичных по интенсивности флуктуаций и кубических по амплитуде неустойчивых мод, получена система уравнений, описывающих взаимодействие этих мод (параметров порядка). Показано, что мультипликативные флуктуации параметров системы приводят к смещению стационарного состояния каждой моды, изменению собственных значений задачи, а также увеличению области неустойчивых мод и параметрическому возбуждению системы. Из полученной системы уравнений для параметров порядка также следует, что при малой интенсивности шума процесс формирования диссипативных структур определяется взаимодействием трех и четырех мод, а при увеличении интенсивности этот процесс определяется многомодовым взаимодействием. Исследованы зависимости величины области неустойчивых мод от интенсивности флуктуаций в закритической области и критической интенсивности флуктуаций от постоянной компоненты скорости образования автокаталитической переменной при различных радиусах корреляции при параметрическом возбуждении. Проведено численное моделирование эволюции рассматриваемой системы. Исследовано изменение уровня флуктуаций динамических переменных в процессе формирования диссипативных структур при различных интенсивностях мультипликативного шума. Проведено сравнение процессов формирования диссипативных структур в поле аддитивных и мультипликативных флуктуаций для случая малых интенсивностей шума.

Приложение

Функции уравнения (7) $\omega_1(k_u, k'_u, k''_u)$, $\omega_2(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u)$, $\omega_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u, k'''_u)$, $\alpha(k_u, k'_u, \hat{k}_s, \mathbf{z}_q(t))$, $\beta(k_u, k'_u, k''_u, \hat{k}_s, \mathbf{z}_q(t))$ и $f[\mathbf{z}_q(t)]$:

$$\begin{aligned} \omega_1(k_u, k'_u, k''_u) &= \\ &= \frac{O_1^{*(1)}(k_u)}{h_0} \left(O_1^{(1)}(k'_u) O_1^{(1)}(k''_u) + \frac{a_0^2}{h_0^2} O_2^{(1)}(k'_u) O_2^{(1)}(k''_u) - \frac{2a_0}{h_0} O_1^{(1)}(k'_u) O_2^{(1)}(k''_u) \right) + \\ &\quad + O_2^{*(1)}(k_u) O_1^{(1)}(k'_u) O_1^{(1)}(k''_u), \\ \omega_2(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u) &= O_1^{*(1)}(k) \left(\frac{2a_0}{h_0^3} O_1^{(1)}(k') O_2^{(1)}(k'') O_2^{(1)}(k''') - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h_0^2} O_1^{(1)}(k') O_1^{(1)}(k'') O_2^{(1)}(k''') - \frac{a_0^2}{h_0^4} O_2^{(1)}(k') O_2^{(1)}(k'') O_2^{(1)}(k''') \right), \\ \omega_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u, k'''_u) &= \frac{\varepsilon_1(k'_u, \hat{k}_s, k_u) \delta_1(\hat{k}_s, k''_u, k'''_u)}{\lambda_1(\hat{k}_s)} + \frac{\varepsilon_2(k'_u, \hat{k}_s, k_u) \delta_2(\hat{k}_s, k''_u, k'''_u)}{\lambda_2(\hat{k}_s)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(k_u, k'_u, \hat{k}_s, \mathbf{z}_q(t)) &= -\mu_0 O_1^{*(1)}(k_u) O_1^{(1)}(k'_u) z_{1,(\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u)}(t) - \\ &\quad - \sum_{\hat{\mathbf{k}}, s} \sigma_1(k'_u, \hat{k}_s, k_u) \delta(\mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u) \left(\rho_0 z_{2, \hat{\mathbf{k}}_s}(t) - \mu_0 a_0 z_{1, \hat{\mathbf{k}}_s}(t) \right) - \\ &\quad - \mu_0^2 \sum_{\hat{\mathbf{k}}, s} \sigma_2(k_u, \hat{k}_s, k'_u) z_{1,(\mathbf{k}_u - \hat{\mathbf{k}}_s)}(t) z_{1,(\hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}'_u)}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta(k_u, k'_u, k''_u, \hat{k}_s, \mathbf{z}_q(t)) &= \mu_0 \sum_{\hat{\mathbf{k}}, s} \sigma_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u) \delta(\mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u) z_{1,(\hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}''_u)}(t) + \\ &\quad + \mu_0 \sum_{\hat{\mathbf{k}}, s} \sigma_4(\hat{k}_s, k'_u, k''_u, k_u) \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \hat{\mathbf{k}}_s) z_{1,(\mathbf{k}_u - \hat{\mathbf{k}}_s)}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f[\mathbf{z}_q(t)] &= O_1^{*(1)}(k_u) (\rho_0 z_{2, \mathbf{k}_u}(t) + \mu_0 a_0 z_{1, \mathbf{k}_u}(t)) + \\ &\quad + \mu_0 \sum_{\hat{\mathbf{k}}, s} \beta_1(k_u, \hat{k}_s) z_{1,(\mathbf{k}_u - \hat{\mathbf{k}}_s)}(t) \left(\rho_0 z_{2, \hat{\mathbf{k}}_s}(t) - \mu_0 a_0 z_{1, \hat{\mathbf{k}}_s}(t) \right). \end{aligned}$$

Здесь

$$\beta_1(k_u, \hat{k}_s) = O_1^{*(1)}(k_u) \left(\frac{O_1^{(1)}(\hat{k}_s) O_1^{*(1)}(\hat{k}_s)}{\lambda_1(\hat{k}_s)} + \frac{O_1^{(2)}(\hat{k}_s) O_1^{*(2)}(\hat{k}_s)}{\lambda_2(\hat{k}_s)} \right),$$

$$\beta_2(k'_u, k''_u, \hat{k}'_s) = O_1^{(1)}(k''_u) \beta_1(k'_u, \hat{k}'_s) = \sigma_2(k'_u, \hat{k}'_s, k''_u),$$

$$\sigma_1(k''_u, \hat{k}'_s, k'_u) = \frac{\varepsilon_1(k''_u, \hat{k}'_s, k'_u)}{\lambda_1(\hat{k}'_s)} + \frac{\varepsilon_2(k''_u, \hat{k}'_s, k'_u)}{\lambda_2(\hat{k}'_s)},$$

$$\sigma_3(k''_u, \hat{k}'_s, k'_u, k'''_u) = O_1^{(1)}(k'''_u) \sigma_1(k''_u, \hat{k}'_s, k'_u),$$

$$\sigma_4(\hat{k}'_s, k''_u, k'''_u, k'_u) = \left(\frac{\delta_1(\hat{k}'_s, k''_u, k'''_u) O_1^{(1)}(\hat{k}'_s)}{\lambda_1(\hat{k}'_s)} + \frac{\delta_2(\hat{k}'_s, k''_u, k'''_u) O_1^{(2)}(\hat{k}'_s)}{\lambda_2(\hat{k}'_s)} \right) O_1^{*(1)}(k'_u),$$

$$\delta_j(\hat{k}_s, k''_u, k'''_u) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{O_1^{*(j)}(\hat{k}_s)}{h_0} \left(O_1^{(1)}(k''_u) O_1^{(1)}(k'''_u) + \frac{a_0^2}{h_0^2} O_2^{(1)}(k''_u) O_2^{(1)}(k'''_u) - \frac{2a_0}{h_0} O_1^{(1)}(k''_u) O_2^{(1)}(k'''_u) \right) + \\ &\quad + O_2^{*(j)}(\hat{k}_s) O_1^{(1)}(k''_u) O_1^{(1)}(k'''_u), \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_j(k'_u, \hat{k}_s, k_u) &= \frac{2O_1^{*(1)}(k_u)}{h_0} \left(O_1^{(1)}(k'_u) O_1^{(j)}(\hat{k}_s) + \frac{a_0^2}{h_0^2} O_2^{(1)}(k'_u) O_2^{(j)}(\hat{k}_s) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2a_0}{h_0} (O_1^{(1)}(k'_u) O_2^{(j)}(\hat{k}_s) + O_1^{(j)}(\hat{k}_s) O_2^{(1)}(k'_u)) \right) + \\ &\quad + 2O_2^{*(1)}(k_u) O_1^{(1)}(k'_u) O_1^{(j)}(\hat{k}_s), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Операторные функции уравнения (8):

$$\begin{aligned}
\widehat{L}_0(k_u) &= -\mu_0^2 a_0 g_{11}(k_u/2) \beta_1(k_u, k_u/2) + \\
&+ \frac{\mu_0^2 a_0}{2} O_1^{*(1)}(k_u) O_1^{(1)}(k_u/2) O_{1k}^{*(1)}(k_u/2) g_{11}(k_u/2) - \\
&- \frac{\sigma_1(k_u/2, k_u/2, k_u)}{2} O_1^{*(1)}(k_u/2) (\rho_0^2 g_{22}(k_u/2) + \mu_0^2 a_0^2 g_{11}(k_u/2)) + \\
&+ \frac{\mu_0}{4} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}', \text{uuss}} \sigma_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u) g_{11}(|\hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}''_u|) \beta_1(k'_u, \hat{k}'_s) O_1^{*(1)}(k''_u) (\rho_0^2 \mu_0 g_{22}(\hat{k}'_s) + \\
&\quad + \mu_0^2 a_0^2 g_{11}(\hat{k}'_s)) \delta(\mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u) \delta(\mathbf{k}'_u - \hat{\mathbf{k}}'_s - \hat{\mathbf{k}}_s + \mathbf{k}''_u) \delta(\mathbf{k}''_u - \hat{\mathbf{k}}'_s) + \dots \\
\widehat{L}_1(k_u, k'_u, k''_u, \hat{k}_s) &= -\lambda_1(k_u) \delta_{\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u} \delta_{\mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u} + \\
&+ \frac{\mu_0^2}{2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}'', \text{uu}} O_1^{*(1)}(k_u) O_1^{(1)}(k'_u) O_1^{*(1)}(k'_u) O_1^{(1)}(k''_u) g_{11}(|\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u|) \delta(2\mathbf{k}'_u - \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_u) - \\
&- \frac{\mu_0^2 a_0}{2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\hat{\mathbf{k}}, \text{uus}} O_1^{*(1)}(k_u) O_1^{(1)}(k'_u) g_{11}(|\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u|) \sigma_1(k''_u, \hat{k}_s, k'_u) \delta(\mathbf{k}''_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}'_u) \times \\
&\quad \times \delta(\hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u + \mathbf{k}'_u) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\hat{\mathbf{k}}, \text{uus}} \sigma_1(k'_u, \hat{k}_s, k_u) \sigma_1(k''_u, \hat{k}_s, k'_u) \delta(\mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u) \times \\
&\quad \times \delta(\mathbf{k}''_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}'_u) (\rho_0^2 g_{22}(\hat{k}_s) + \mu_0^2 a_0^2 g_{11}(\hat{k}_s)) - \\
&- \frac{\mu_0^2 a_0}{2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\hat{\mathbf{k}}, \text{uus}} O_1^{*(1)}(k'_u) O_1^{(1)}(k''_u) g_{11}(\hat{k}_s) \sigma_1(k'_u, \hat{k}_s, k_u) \times \\
&\quad \times \delta(\mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u) \delta(\mathbf{k}'_u - \mathbf{k}''_u - \hat{\mathbf{k}}_s) - \\
&- \frac{\mu_0^2}{2} \sum_{\mathbf{k}'\hat{\mathbf{k}}, \text{us}} \sigma_2(k_u, \hat{k}_s, k'_u) g_{11}(|\mathbf{k}_u - \hat{\mathbf{k}}_s|) \delta(2\hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}'_u - \mathbf{k}_u) \delta_{\mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u} - \\
&- \frac{\mu_0^2 a_0}{2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\hat{\mathbf{k}}, \text{uus}} \sigma_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u) g_{11}(|\hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}''_u|) \delta(\mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u) \times \\
&\quad \times [O_1^{*(1)}(k'_u) \delta(\mathbf{k}'_u - \hat{\mathbf{k}}_s + \mathbf{k}''_u) + O_1^{*(1)}(k''_u) \delta(2\mathbf{k}''_u - \hat{\mathbf{k}}_s) \delta_{\mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u}] - \\
&- \frac{\mu_0^2 a_0}{2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\hat{\mathbf{k}}, \text{uus}} \sigma_4(\hat{k}_s, k'_u, k''_u, k_u) g_{11}(|\mathbf{k}_u - \hat{\mathbf{k}}_s|) \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \hat{\mathbf{k}}_s) \times \\
&\quad \times [O_1^{*(1)}(k'_u) \delta(\mathbf{k}'_u - \mathbf{k}_u + \hat{\mathbf{k}}_s) + O_1^{*(1)}(k''_u) \delta(\mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_u + \hat{\mathbf{k}}_s) \delta_{\mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u}] + \\
&+ \frac{\mu_0^4}{4} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}', \text{uuss}} \sigma_2(k_u, \hat{k}_s, k'_u) \beta_2(k'_u, k''_u, \hat{k}'_s) g_{11}(|\mathbf{k}_u - \hat{\mathbf{k}}_s|) g_{11}(|\hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}'_u|) \times \\
&\quad \times \delta(\hat{\mathbf{k}}'_s - \mathbf{k}''_u - \hat{\mathbf{k}}_s + \mathbf{k}'_u) \delta(\mathbf{k}'_u - \hat{\mathbf{k}}'_s - \mathbf{k}_u + \hat{\mathbf{k}}_s) + \dots \\
\widehat{L}_2(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u, \hat{k}_s) &= \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}'', \text{uu}} \omega_1(k_u, k'_u, k''_u) \delta_{\mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u} \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_u) - \\
&- \frac{\mu_0^2}{2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''\hat{\mathbf{k}}', \text{uuus}} O_1^{*(1)}(k_u) O_1^{(1)}(k'_u) \sigma_3(k''_u, \hat{k}'_s, k'_u, k'''_u) g_{11}(|\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u|) \times \\
&\quad \times \delta(\mathbf{k}''_u - \mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s) \delta(\hat{\mathbf{k}}'_s - \mathbf{k}'''_u - \mathbf{k}_u + \mathbf{k}'_u) + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \widehat{L}_3 \left(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u, k_u^{IV}, \hat{k}_s, \hat{k}'_s \right) = \\ & = \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}''',\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}} \left(\omega_2(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u) - \omega_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u, k'''_u) \right) \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u - \mathbf{k}_u) \times \\ & \times \delta_{\mathbf{k}'_u, \mathbf{k}^{IV}_u} + \frac{\mu_0^2}{2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''\mathbf{k}^{IV}\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}',\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{s}\mathbf{s}} \sigma_3(k'_u, \hat{k}_s, k_u, k''_u) \sigma_3(k_u^{IV}, \hat{k}'_s, k'_u, k'''_u) \times \\ & \times g_{11}(|\hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}''_u|) \delta(\mathbf{k}'_u + \hat{\mathbf{k}}_s - \mathbf{k}_u) \delta(\hat{\mathbf{k}}'_s - \mathbf{k}'''_u - \hat{\mathbf{k}}_s + \mathbf{k}''_u) \delta(\mathbf{k}_u^{IV} + \hat{\mathbf{k}}'_s - \mathbf{k}'_u) + \dots \end{aligned}$$

Система (8) здесь полностью не приводится в силу ее крайней громоздкости. Полностью она доступна на сайте <http://sites.google.com/site/morfogenez/>.

Библиографический список

1. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.
2. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.
3. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 320 с.
4. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике (Введение в теоретическую биофизику). Москва; Ижевск: ИКИ, 2004.
5. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. Введение в теорию диссипативных структур. Москва; Ижевск: ИКИ НИЦ РХД, 2004.
6. Белинцев Б.Н. Диссипативные структуры и проблема биологического формообразования // УФН. 1983. Т. 141. Вып. 1. С. 55.
7. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
8. Meinhardt H. The Algorithmic Beauty of Sea Shells. Berlin, Heidelberg, New York. Springer-Verlag, 1999.
9. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: теория и применение. М.: Мир, 1987.
10. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения глазами физика. М.: Физматлит, 2001.
11. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио. 1961.
12. Стратонович Р.Л., Романовский Ю.М. //Науч. докл. Высшей шк. 1958. № 4. С. 221.
13. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1978. С. 352
14. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит. 1997. 496 с.
15. Михайлов А.С., Упоров И.В. Критические явления в средах с размножением, распадом и диффузией // УФН. 1984. Т. 144, вып. 1. С. 79.
16. Полак Л.С., Михайлов А.С. Процессы самоорганизации в физико-химических системах. М.: Наука. 1983.

17. *Курушина С.Е., Максимов В.В.* Шумоиндуцированные фазовые переходы в процессах конкуренции во флуктуирующих средах // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 1. С. 88.
18. *Белинцев Б.Н.* Динамические коллективные свойства развивающихся систем. Дисс. . . канд. физ.-мат. наук. М.: МФТИ, 1979.
19. *Соляник Г.И., Чернавский Д.С.* Математические модели морфогенеза. Препринт ФИАН, 1980, № 8.
20. *Асташкина Е.В., Романовский Ю.М.* Флуктуации в процессе самоорганизации // Математические модели в экологии. Горький: Изд-во Горьковского ун-та. 1980. С. 74.
21. *Курушина С.Е.* Аналитическое исследование и численное моделирование контрастных диссипативных структур в поле флуктуаций динамических переменных // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 6. С. 125.
22. *Громова Л.И., Иванов А.А., Курушина С.Е.* Зависимость времени образования контрастных диссипативных структур от интенсивности и радиуса корреляции поля флуктуаций динамических переменных // Материалы XVI Международной конференции ВМСППС'2009 25–31 мая 2009 г. Алушта, Крым. М.: МАИ-Принт. 2009. С. 245.
23. *Meinhardt H., Gierer A.* Generation and regeneration of sequences of structures during morphogenesis // J. Theor. Biol. 1980. Vol. 85. P. 429.
24. *Gierer A., Meinhardt H.* Biological pattern formation involving lateral inhibition // Lectures on Mathematics in the Life Sciences. 1974. Vol. 7. P. 163.
25. *Meinhardt H., Gierer A.* Applications of a theory of biological pattern formation based on lateral inhibition // Journ. Cell. Sci. 1974. Vol. 15. P. 321.
26. *Белинцев Б.Н.* Физические основы биологического формообразования. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.
27. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. С. 640.
28. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966.

*Самарский государственный
аэрокосмический университет*

*Поступила в редакцию 7.09.2009
После доработки 3.12.2009*

DISSIPATIVE STRUCTURES OF REACTION–DIFFUSION SYSTEM SIMULATION IN MULTIPLICATIVE FLUCTUATION PHONE

S.E. Kurushina, A.A. Ivanov

The influence of multiplicative fluctuations of parameters of reaction-diffusion system on example of Gierer–Meinhardt model to formation of dissipative structures in soft mode instability regime was investigated. The system described interaction of

non-decreased modes (order parameters) was received. It was shown that fluctuations of parameters are lead to changing of number of unstable modes, shifting of their eigenvalues and parametrical excitation of the system. The numerical simulation of described model evolution was received. The dependences of the dynamical variables fluctuation intensity in process of dissipative structures formation from the noise intensity were founded.

Keywords: Reaction–diffusion system, dissipative structures, multiplicative fluctuations, unstable modes, parametrical excitation.



Курушина Светлана Евгеньевна – родилась в Куйбышеве (1971), окончила Самарский государственный университет (1994). После окончания СГУ работает в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГАУ (2002) по специальности 01.04.05 – Оптика. Опубликовала 30 научных работ. Область научных интересов: теория колебаний, волн, структур; динамика нелинейных стохастических систем; теория самоорганизации; прикладная математика; стохастические уравнения.

443086 Самара, Московское шоссе, 34
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева
E-mail: kurushina72@mail.ru



Иванов Андрей Александрович – родился в Куйбышеве (1988). В настоящее время является студентом пятого курса Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева. Область научных интересов – математическое моделирование, прикладная математика, решение СЛАУ больших размерностей. Опубликовал 5 научных работ по направлениям, указанным выше.

443086 Самара, Московское шоссе, 34
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева
E-mail: SsauIvanov@gmail.com