



## ИНДУЦИРОВАННАЯ ШУМОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ОСЦИЛЛЯТОРЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ ТРЕНИЕМ

*А.А. Кочанов, Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко*

В работе рассматривается возникновение неустойчивости состояния равновесия осциллятора при модуляции собственной частоты шумовым сигналом. Исследуется порог неустойчивости при различных характеристиках шума и свойства возникающих выше порога стохастических колебаний в случае нелинейной диссипации.

*Ключевые слова:* Параметрическая неустойчивость, параметрический шум, стохастическая бифуркация, стохастические колебания.

### Введение

Случайные воздействия во многих случаях играют весьма существенную роль в поведении динамических систем [1–8]. Часто такие воздействия носят характер параметрического шума, то есть представляют собой флуктуации управляющих параметров системы. Параметрический (по-другому, мультипликативный) шум может оказывать более сильное влияние на динамический режим, чем аддитивный шум, добавляемый в систему в форме случайного слагаемого с постоянной интенсивностью. Параметрический шум наиболее существенным образом может влиять на происходящие при вариации параметров бифуркации, сдвигая бифуркационные значения параметров в ту или иную сторону, а в некоторых случаях приводя к новым бифуркационным переходам, не наблюдавшимся в детерминированной системе [3, 7, 9–13]. Простейшим примером может служить диссипативный осциллятор. В отсутствие воздействий он находится в состоянии равновесия, однако, случайная модуляция частоты благодаря непрерывной подкачке энергии при достаточной интенсивности шума приводит к возникновению незатухающих случайных колебаний [11, 13–18]. Возникновение колебаний связано с бифуркацией состояния равновесия в начале координат, которое при определенном уровне шума становится неустойчивым. Согласно [7], данная бифуркация представляет собой стохастическую бифуркацию D-типа. Возможна и обратная ситуация, когда параметрический шум стабилизирует точку

равновесия. Примером может служить маятник Капицы [17, 19]. С физической точки зрения, случайное изменение частоты во времени приводит к непрерывной подкачке энергии в систему и, следовательно, эффект шумовой параметрической неустойчивости аналогичен параметрической неустойчивости, возникающей при периодической модуляции частоты. Таким образом, можно выделить в отдельный класс нелинейные диссипативные системы, в которых параметрический шум вызывает и поддерживает незатухающие стохастические колебания. Если же воздействие отсутствует, то система находится в состоянии устойчивого равновесия. По аналогии с детерминированными параметрическими системами будем называть их стохастическими параметрическими осцилляторами, а возникающие в них колебания – стохастическими параметрическими колебаниями.

Индукцированная шумом параметрическая неустойчивость достаточно хорошо известна, однако некоторые имеющиеся в литературе выводы противоречат друг другу. Так, в [14] отмечается, что действие низкочастотной накачки как бы увеличивает собственные потери осциллятора и таким образом стабилизирует систему, в то время как высокочастотная накачка ее дестабилизирует. Там же делается вывод, что белый шум вообще не влияет на устойчивость состояния равновесия, поскольку влияние высокочастотных и низкочастотных компонент сигнала взаимно уравнивается. Последний вывод противоречит некоторым другим имеющимся в литературе результатам, например, приведенным в [11, 13]. На наш взгляд, в литературе отсутствует достаточно последовательное сравнение эффекта параметрической неустойчивости, наблюдаемого для различных по своим характеристикам источников шума. Недостаточно исследован вопрос о характере стохастических параметрических колебаний в нелинейном осцилляторе и об изменении свойств колебаний при фиксированном виде нелинейности и вариации шумового воздействия. Кроме того, вопрос о том, являются ли индуцированные параметрическим шумом колебания действительно особым типом параметрических колебаний или, возможно, обладают определенными свойствами автоколебательного режима, хотя и поднимался в литературе [11, 13], но все еще остается не до конца решенным.

В настоящей работе рассматриваются параметрические колебания при шумовой накачке частоты нелинейного осциллятора. Анализируется влияние статистических характеристик шума на порог возникновения колебаний. Исследуются свойства параметрических стохастических колебаний в нелинейном осцилляторе при выбранном виде нелинейности и различных типах сигнала шумовой модуляции. Показано принципиальное отличие индуцированных параметрическим шумом колебаний от автоколебательного режима.

## 1. Исследуемый осциллятор и модели шума

Нами исследован осциллятор с нелинейным трением, аналогичный рассмотренному в [13],

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \dot{x}^3 + \omega_0^2 [1 + K\xi(t)]x = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) записано для безразмерной переменной  $x$  и безразмерного времени  $t$ . Случайный сигнал  $\xi(t)$  модулирует параметр, управляющий собственной частотой

системы,  $\omega_0$  – невозмущенная собственная частота (в проведенных исследованиях полагалось, что  $\omega_0 = 1.0$ ),  $K$  задает глубину модуляции (интенсивность шумовой накачки), параметр  $\gamma$  определяет линейную диссипацию. В проведенных численных экспериментах фиксировались значения параметра диссипации  $\gamma = 0.01$  и собственной частоты  $\omega_0 = 1.0$ . Параметр  $K$  и характеристики шума менялись.

При слабом шуме и сильной диссипации в системе (1) на плоскости переменных  $(x, y = \dot{x})$  существует устойчивая неподвижная точка в начале координат  $(0, 0)$  и стохастические колебания отсутствуют. С ростом интенсивности шумовой накачки состояние равновесия становится неустойчивым и возникают стохастические колебания. Для определения порога неустойчивости можно ограничиться рассмотрением линейного уравнения для малого возмущения  $u(t)$  переменной  $x$  в окрестности нуля

$$\ddot{u} + \gamma\dot{u} + \omega_0^2[1 + K\xi(t)]u = 0. \quad (2)$$

Будем определять порог параметрической неустойчивости на основании линеаризованной системы (2), используя характеристики экспоненциальной неустойчивости траекторий в (2). Строго говоря, мы определяем устойчивость состояния равновесия в (1), рассчитывая старший показатель Ляпунова для некоторой достаточно длинной траектории линеаризованной системы (2). Таким образом, мы связываем порог параметрической неустойчивости со стохастической бифуркацией состояния равновесия D-типа [7].

Порог параметрической неустойчивости не зависит от конкретного вида нелинейности осциллятора (главное – наличие неподвижной точки в нуле координат), но может существенным образом зависеть от характера случайного сигнала  $\xi(t)$ . Что же касается свойств возникающих в результате шумовой параметрической накачки стохастических колебаний, то они определяются как характером шума, так и нелинейными свойствами осциллятора.

Нами использовались три модели случайного сигнала  $\xi(t)$ : белый гауссов шум; одномерный процесс Орнштейна–Уленбека; двумерный процесс Орнштейна–Уленбека.

В случае белого шума полагалось  $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$ , где  $n(t)$  – нормированный гауссов белый шум ( $\langle n(t) \rangle \equiv 0$ ;  $\langle n(t)n(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$  – функция Дирака),  $D$  – константа, определяющая интенсивность шума  $\xi(t)$ .

Одномерный процесс Орнштейна–Уленбека задается уравнением

$$\dot{\xi}(t) + \alpha\xi(t) = \sqrt{2D}n(t), \quad (3)$$

где  $n(t)$  – нормированный гауссов белый шум,  $D = \text{const}$  – интенсивность шума,  $\alpha$  – коэффициент диссипации. Он представляет собой гауссов экспоненциально-коррелированный процесс со спектральной плотностью мощности в форме лоренциана

$$G_{\xi}(\omega) = \frac{4\sigma_{\xi}^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \omega > 0.$$

Максимум спектральной плотности мощности располагается на нулевой частоте. Ширина спектра на уровне половинной мощности есть  $\alpha$  (с учетом только неотрицательных частот), а дисперсия определяется как  $\sigma_{\xi}^2 = D/\alpha$ .

Двумерный процесс Орнштейна–Уленбека задается как

$$\ddot{\xi}(t) + \alpha \dot{\xi}(t) + \omega_1^2 \xi(t) = \sqrt{2D}n(t). \quad (4)$$

Здесь также  $n(t)$  – нормированный гауссов белый шум,  $D = \text{const}$  – интенсивность шума,  $\alpha$  – коэффициент диссипации. Кроме того, имеется собственная частота  $\omega_1$ , определяющая положение спектрального максимума. При малых потерях ( $\alpha \ll 1$ ) процесс  $\xi(t)$  представляет собой гармонический гауссов шум с экспоненциально спадающей огибающей автокорреляционной функции и спектром, имеющим форму лоренциана с максимумом на частоте  $\omega_1$

$$G_{\xi}(\omega) = \frac{\sigma_{\xi}^2 \alpha}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_1)^2}, \quad \omega > 0.$$

Ширина спектра на уровне половинной мощности есть  $\alpha$ , а дисперсия задается выражением  $\sigma_{\xi}^2 = D/(\alpha\omega_1^2)$ .

## 2. Накачка белым шумом

Рассмотрим случай  $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$ ,  $K = 1.0$ , где  $n(t)$  – нормированный гауссов белый шум. При фиксированном параметре  $\gamma$  с ростом интенсивности шума  $D$  происходит бифуркация, в результате которой равновесие в начале координат ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ) теряет устойчивость и возникают стохастические колебания. Уравнения (1) и линеаризованное уравнение для возмущения интегрировались численно с учетом параметрического белого шума. Численно рассчитывался старший показатель Ляпунова  $\lambda_1$ . На рис. 1 представлены зависимости показателя  $\lambda_1$  от интенсивности шума  $D$ . Сплошной линией изображена зависимость показателя некоторой произвольно выбранной стохастической траектории (в силу эргодичности процесса выбор траектории не имеет существенного значения), а штриховая линия соответствует показателю точки равновесия в нуле, который определялся с помощью решения уравнения (2). Что же касается  $\lambda_1$  для произвольной траектории, то он в пределах точности вычислений совпадает с показателем точки равновесия до тех пор, пока та устойчива (поскольку любая траектория спустя некоторое время попадает в эту точку). Затем для (1) показатель произвольной траектории становится отрицательным.

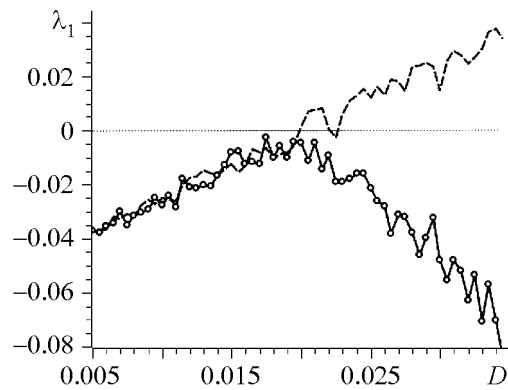


Рис. 1. Зависимости старшего показателя Ляпунова  $\lambda_1$  от интенсивности гауссова белого шума  $D$  в осцилляторе (1) при  $K = 1.0$ . Сплошная линия соответствует показателю траектории, стартующей из некоторой произвольно выбранной начальной точки, отличной от начала координат, штриховая – показателю  $\lambda_1$  точки равновесия  $(0, 0)$

При другом виде нелинейности показатель  $\lambda_1$  произвольной траектории может оказаться положительным и стохастические траектории, соответственно, экспоненциально неустойчивыми (как, например, в одноявном осцилляторе Дуффинга [20]).

Бифуркационное значение  $D$  может быть оценено теоретически с помощью укороченных уравнений для амплитуды и фазы осциллятора. В случае гауссова белого шума для линеаризованного осциллятора (2) стандартными методами усреднения и преобразования шума [1, 14] можно получить следующие стохастические дифференциальные уравнения для мгновенной амплитуды и флуктуационной компоненты фазы колебаний:

$$\dot{a} = \frac{a}{2} \left( -\gamma + \frac{D}{2} + \sqrt{D}n_1(t) \right), \quad \dot{\phi} = \frac{\sqrt{D}}{2}n_2(t), \quad (5)$$

где преобразованные источники шума  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  можно, в некотором приближении, считать независимыми белыми гауссовыми источниками ( $\langle n_{1,2} \rangle \equiv 0$ ,  $\langle n_1(t)n_2(t+\tau) \rangle = \delta_{1,2}\delta(\tau)$ ,  $\delta(\tau)$  – функция Дирака,  $\delta_{1,2}$  – символ Кронеккера). Из уравнения для амплитуды легко видеть, что решение  $a = 0$  устойчиво при  $D < 2\gamma$  и неустойчиво при  $D > 2\gamma$ . Значение  $D = 2\gamma$  является бифуркационным. Для  $\gamma = 0.01$ , при котором проводились численные расчеты, бифуркационное значение есть  $D = 0.02$ , что хорошо соответствует результатам численных расчетов.

Примеры фазового портрета и спектра параметрических стохастических колебаний в осцилляторе (1) при накачке белым шумом приведены на рис. 2. Фазовые траектории заполняют область фазовой плоскости в окрестности нуля координат, хотя возможны и значительные отклонения от нуля, так как стохастические колебания при воздействии гауссова шума неограниченны (рис. 2, *a*). Спектр колебаний стохастического параметрического осциллятора (рис. 2, *б*) имеет максимум на частоте  $\omega_0$ . Он является сравнительно узким и по форме близок к лоренциану.

На множестве стохастических траекторий задана стационарная плотность вероятности  $p(x, y)$ . Аналитическое выражение для плотности вероятности можно найти, используя укороченные уравнения (5). Учитывая статистическую независимость амплитуды и фазы и определяя коэффициенты сноса и диффузии на основании вида стохастических уравнений, можно записать отдельно уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова для амплитуды и для фазы [1, 2, 14]. Найдя их стационарное решение

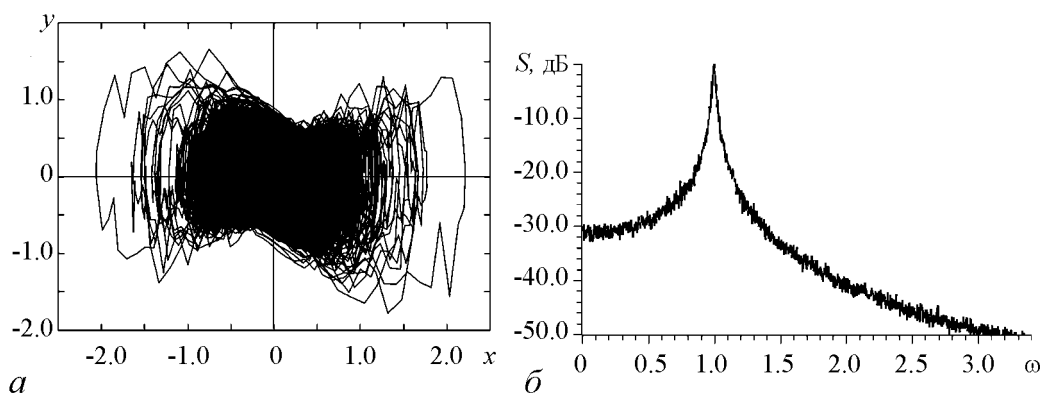


Рис. 2. Характеристики параметрических стохастических колебаний в осцилляторе (1) при накачке белым шумом: *a* – фазовый портрет; *б* – нормированный спектр мощности колебаний  $x(t)$ . Интенсивность шума  $D = 0.03$  ( $K = 1.0$ ). Нормированный спектр  $S(\omega)$  вводится следующим образом:  $S(\omega) = 10 \lg (G(\omega)/G_{\max})$ , где  $G_{\max}$  – максимальное значение спектральной плотности мощности

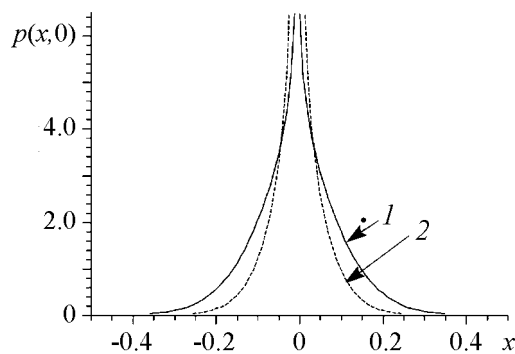


Рис. 3. Графики плотности вероятности  $p(x, 0)$ , рассчитанной по формуле (6) при  $y = 0$  для  $D = 0.03$  (кривая 1) и  $D = 0.05$  (кривая 2)

Поверхность, задаваемая выражением (6), обладает симметрией относительно поворота на произвольный угол. Это является следствием квазигармонического приближения. Реально, при больших отклонениях от начала координат симметрия может нарушаться. В силу достаточной сложности расчетов совместной плотности вероятности  $p(x, y)$  двух переменных, в численных экспериментах рассчитывались плотности вероятности  $p(x)$  и  $p(y)$ . Качественно их вид аналогичен графикам  $p(x, 0)$ , приведенным на рис. 3. Таким образом, и аналитические и численные результаты показывают, что плотность вероятности бесконечно возрастает с приближением к началу координат.

Множество стохастических траекторий с заданным стационарным распределением вероятности можно понимать как стохастический аттрактор, хотя существуют и другие подходы к определению аттрактора динамической системы с шумом [7, 20, 21].

### 3. Накачка низкочастотным шумом

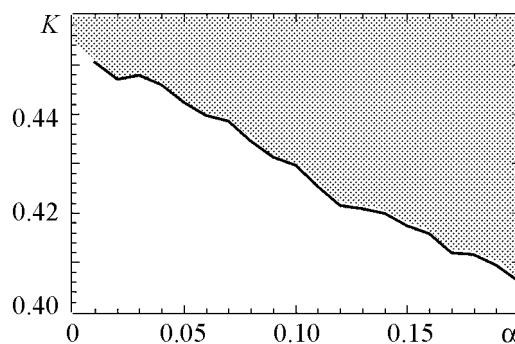


Рис. 4. Граница параметрической неустойчивости осциллятора с низкочастотной шумовой накачкой (3) для фиксированного значения дисперсии шума  $\xi(t) = 1.0$ . Затонированная область соответствует стохастическим колебаниям, белая область — устойчивой точке равновесия

и перейдя в декартову систему координат, получаем следующее выражение для стационарной плотности вероятности:

$$p(x, y) = C(x^2 + y^2)^{-\frac{2\gamma}{D}} e^{-\frac{3(x^2 + y^2)}{2D}}, \quad (6)$$

где константа  $C$  определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = 1.$$

Графики плотности вероятности для двух значений  $D$  представлены на рис. 3 (значения плотности вероятности на рисунке ограничены значением 6.5).

Проведенные нами исследования показали, что накачка белым шумом приводит к возникновению параметрической неустойчивости и стохастических колебаний. Исследуем теперь случай накачки низкочастотным шумом, используя модель (3). Будем рассматривать шумовой сигнал  $\xi(t)$  с единичной дисперсией (полагая  $D = \alpha$ ) и менять параметр модуляции  $K$  и ширину спектра воздействия, определяемую параметром  $\alpha$ . На рис. 4 приведена граница параметрической неустойчивости на плоскости параметров  $K, \alpha$ , полученная с помощью вычисления старшего показателя Ляпунова точки равновесия. В затонированной области осцилля-

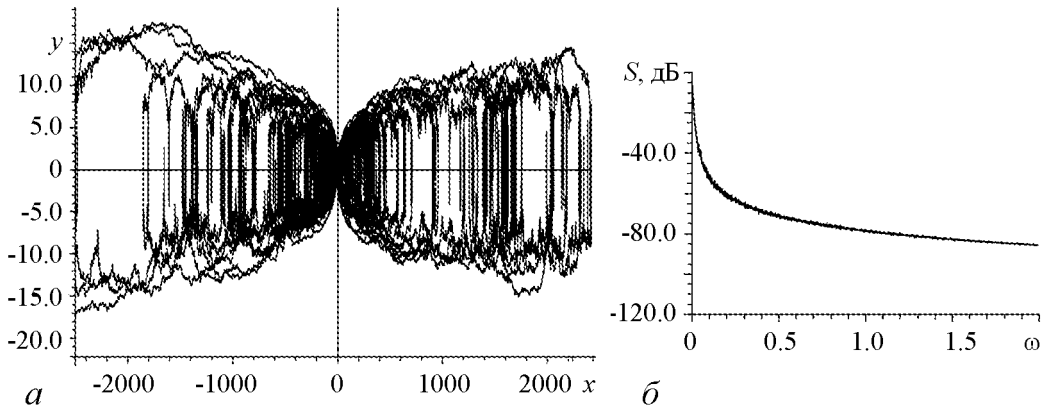


Рис. 5. Характеристики параметрических стохастических колебаний в осцилляторе (1) при накачке низкочастотным шумом (3):  $a$  – фазовый портрет;  $b$  – нормированный спектр мощности колебаний  $x(t)$ . Параметры шума:  $\alpha = D = 0.01$ ,  $K = 1.0$

тор совершает стохастические колебания. Ниже имеет место устойчивая точка равновесия. Можно отметить, что пороговое значение  $K$  относительно слабо меняется в пределах исследованного интервала значений  $\alpha$ , слегка убывая с увеличением ширины спектра шума.

Рассмотрим основные характеристики стохастических колебаний нелинейного осциллятора (1), вызванных низкочастотной шумовой накачкой (3). Расчет старшего показателя Ляпунова для произвольной стохастической траектории, так же как и в случае белого шума, показывает устойчивость стохастических траекторий по Ляпунову во всей исследованной области стохастических колебаний. Типичный вид фазового портрета и спектра колебаний приведен на рис. 5. Характерной чертой колебаний в случае малых значений  $\alpha$  (узкополосный шум) являются сравнительно частые значительные отклонения фазовой траектории от точки равновесия  $(0, 0)$  вдоль координатной оси  $0x$ . Это хорошо заметно на фазовом портрете (рис. 5,  $a$ ). Спектр колебаний  $x(t)$  сосредоточен в низкочастотной области (рис. 5,  $b$ ) и практически повторяет спектр шумовой накачки. Спектральный максимум на собственной частоте осциллятора  $\omega_0 = 1.0$  отсутствует. Таким образом, колебания скорее носят характер вынужденных, чем параметрических колебаний.

#### 4. Накачка гармоническим шумом

Случайный процесс (4) при условии  $\alpha \ll \omega_1$  является узкополосным и может служить моделью гармонического гауссова шума. Как уже отмечалось, спектр шума имеет максимум на частоте  $\omega_1$ , а ширина спектральной линии на уровне половинной мощности равна параметру  $\alpha$ . Гармонический шум по своим спектральным характеристикам близок к детерминированному гармоническому сигналу, поэтому эффект параметрической неустойчивости при соответствующем выборе характерной частоты шумового сигнала  $\omega_1$  может быть особенно заметен.

С помощью вычисления старшего показателя Ляпунова точки равновесия была рассчитана граница параметрической неустойчивости на плоскости параметров  $K$ ,  $\omega_1$  при фиксированном значении ширины спектральной линии ( $\alpha = 0.01$ ) и дисперсии шума  $\sigma_\xi^2 = 1$  (соответственно,  $D = \alpha\omega_1^2$ ). Результат представлен на рис.6.

Можно выделить два участка границы неустойчивости, имеющих форму языков (клювы Матфе), при накачке на второй гармонике ( $\omega_1 = 2\omega_0 = 2.0$ ) и на основной частоте ( $\omega_1 = \omega_0 = 1.0$ ). Порог неустойчивости будет наименьшим при выпол-

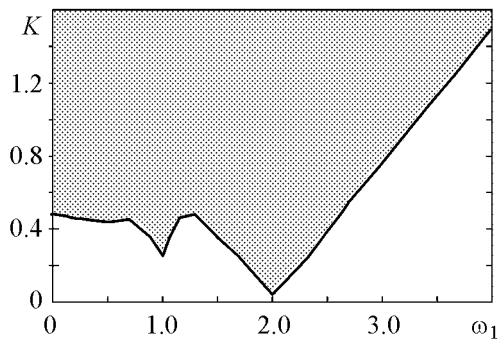


Рис. 6. Граница параметрической неустойчивости осциллятора при накачке гармоническим шумом (4) с шириной спектра  $\alpha = 0.01$  и единичной дисперсией. Затонированная область соответствует стохастическим колебаниям, белая область – устойчивой точке равновесия

В области низких частот воздействия ( $\omega_1 < 0.1$ ) процесс (4) уже нельзя считать гармоническим шумом, так как ширина спектра становится сравнимой с характерной частотой  $\omega_1$  или даже превосходит ее. При малых  $\omega_1$  граница параметрической неустойчивости, отмеченная на рис. 6, близка к значениям, полученным для низкочастотного шума (3).

Рассмотрим, что собой представляют стохастические колебания нелинейного осциллятора (1), возникающие при накачке шумом (4) с различной характерной частотой  $\omega_1$ . На рис. 6 приведены фазовые портреты и реализации колебаний  $x(t)$ ,

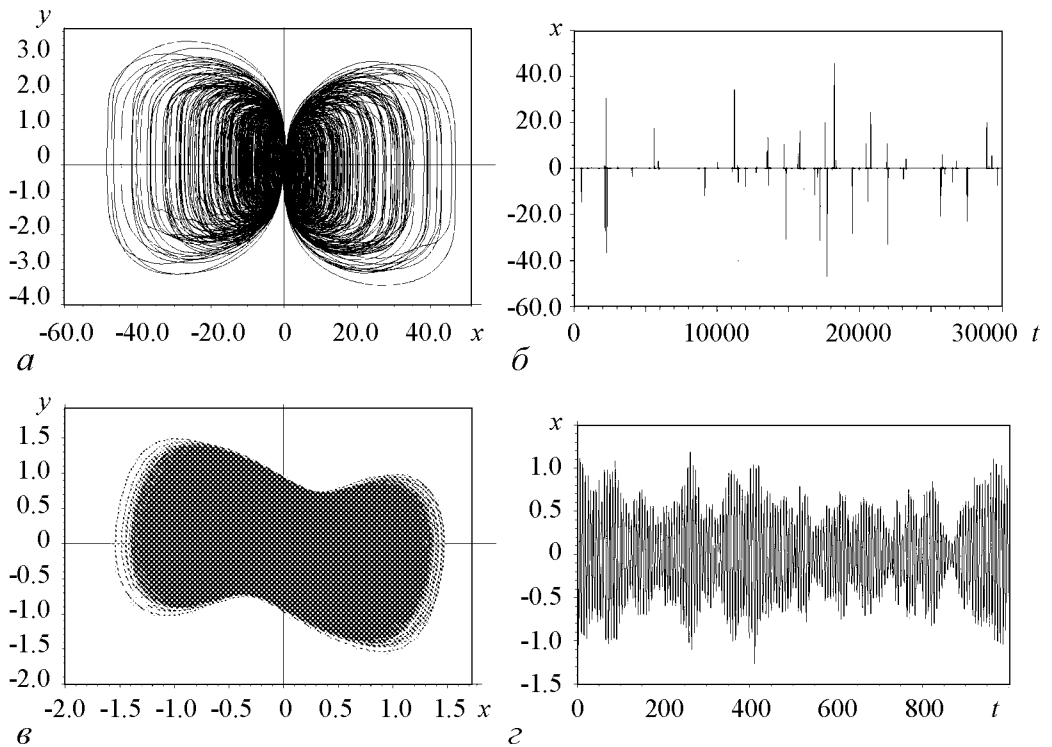


Рис. 7. Характеристики параметрических стохастических колебаний в осцилляторе (1) при накачке низкочастотным шумом (4): фазовый портрет и форма колебаний  $x(t)$  при характерной частоте шума  $\omega_1 = 0.1$  (а, б) и при  $\omega_1 = 2.0$  (в, з). Другие параметры шума:  $\alpha = 0.05$ ;  $\sigma_\xi^2 = 1.0$ ;  $K = 1.0$



типичные при воздействии шума на сравнительно низкой частоте  $\omega_1 = 0.1$  и на второй гармонике собственной частоты  $\omega_1 = 2.0$ . При низкой характерной частоте шума (4), когда  $\omega_1 \ll \omega_0$ , поведение фазовых траекторий (и вид колебаний) качественно подобно наблюдаемому при воздействии шума (3). Траектория уходит далеко от точки равновесия (рис. 6, а), а реализация  $x(t)$ , кроме малых осцилляций (они не заметны в масштабе рис. 6, б), демонстрирует резкие всплески. При  $\omega_1 = 2.0$  уходы траектории на далекое расстояние от точки  $(0, 0)$  маловероятны и в численном эксперименте не наблюдаются (рис. 6, в), а реализация колебаний выглядит как реализация гармонического шума (рис. 6, з). Для всех исследованных случаев накачки шумом (4) траектории стохастических колебаний в нелинейном осцилляторе (1) экспоненциально устойчивы.

Вид спектра стохастических колебаний в нелинейном осцилляторе (1) качественным образом зависит от характерной частоты шума  $\omega_1$ . Примеры спектров, полученных при различных  $\omega_1$ , даны на рис. 8. При накачке гармоническим шумом на первой и второй гармониках собственной частоты в спектре можно видеть пики на частоте  $\omega_0$  и ее нечетных гармониках (например, кривая 2 на рисунке). Для субгармоник собственной частоты этот пик также может быть заметен, однако с уменьшением  $\omega_1$  он исчезает и спектр становится подобен спектру колебаний при накачке низкочастотным шумом (3) (кривая 1). При накачке на гармониках собственной частоты вид спектра усложняется. Кроме пика на частоте  $\omega_0$  и ее гармониках появляются и другие спектральные максимумы (кривая 3).

Численные расчеты показывают, что вероятностные распределения в случае стохастических колебаний, вызванных низкочастотным шумом (3) и цветным шумом (4) с низкой характерной частотой  $\omega_1$ , сходны между собой и имеют тот же характер, что и распределение (6), полученное для белого шума. Распределение, соответствующее воздействию гармонического шума с частотой  $\omega_1 = 1.0$  или  $\omega_1 = 2.0$ , имеет другой характер. Оно значительно шире, и в нуле координат плотность вероятности конечна. В качестве примера на рис. 9 приведены соответствующие графики распределений  $p(x)$ , построенные численно для случаев воздействия низкочастотным шумом (3) (кривая 1) и гармоническим шумом (4) с  $\omega_1 = 1.0$  (кривая 2).

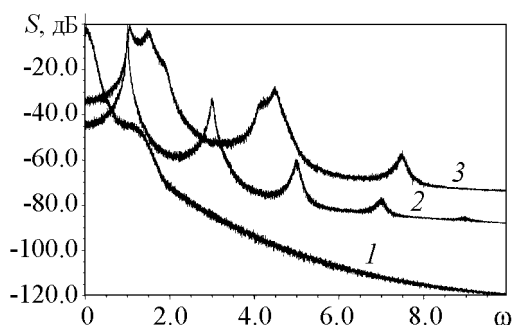


Рис. 8. Нормированные спектры колебаний  $x(t)$  в нелинейном осцилляторе (1) при накачке шумом (4) с различными значениями характерной частоты  $\omega_1$ : 0.1 (кривая 1); 2.0 (кривая 2); 3.0 (кривая 3). Другие параметры шума:  $\alpha = 0.05$ ;  $\sigma_\xi^2 = 1.0$ ;  $K = 1.0$

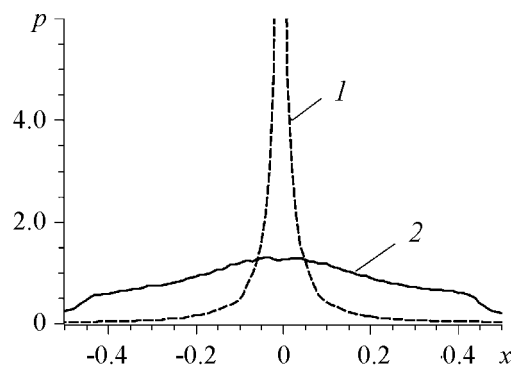


Рис. 9. Графики плотности вероятности  $p(x)$ , рассчитанные численно для случаев воздействия низкочастотным шумом (3) (кривая 1) и гармоническим шумом (4) при  $\omega_1 = \omega_0$  (кривая 2). В обоих случаях дисперсия шума равна единице,  $\alpha = 0.01$ ,  $K = 1.0$

## 5. Внешнее гармоническое воздействие на параметрический стохастический осциллятор

Детерминированные параметрические колебания не являются автоколебательным режимом и не могут быть синхронизованы внешним воздействием. В случае стохастических колебаний, вызванных параметрическим шумом, аналогичное утверждение не является очевидным. Так, в [13] было сделано предположение, что нелинейные осцилляторы с шумовой параметрической накачкой за порогом неустойчивости могут рассматриваться как некий класс стохастических генераторов. Генераторы (автоколебательные системы) должны обладать свойством частичной (эффективной, согласно Р.Л. Стратоновичу [1]) синхронизуемости. Если нелинейные осцилляторы, возбуждаемые параметрическим шумом, таким свойством не обладают, то говорить о них как о генераторах было бы неправильно. В [20] для осциллятора Дуффинга с одноямым потенциалом было показано отсутствие какого-либо эффекта захвата характерной частоты стохастических колебаний при гармоническом внешнем воздействии. Определим, как ведет себя в этом отношении нелинейный осциллятор (1).

Рассмотрим аддитивное воздействие на стохастический осциллятор (1) внешнего гармонического сигнала. Для этого добавим в правую часть соответствующего уравнения слагаемое  $C \sin(\omega_2 t)$ , где  $C$  и  $\omega_2$  – амплитуда и частота внешнего воздействия, соответственно. Выберем такой режим стохастической накачки

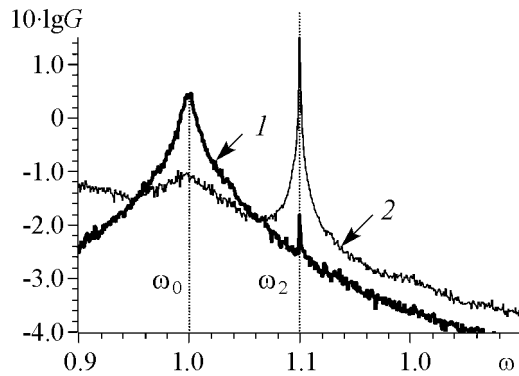


Рис. 10. Спектры мощности колебаний  $x(t)$  стохастического осциллятора (1) при аддитивном гармоническом воздействии на частоте  $\omega_2$ . Кривая 1 соответствует амплитуде воздействия  $C = 0.001$ , а кривая 2 – амплитуде  $C = 0.05$ . Накачка осуществляется гармоническим шумом (4) на второй гармонике собственной частоты осцилляторов. Дисперсия шума равна единице, параметр  $\alpha$  равен 0.05. Для удобства сравнения спектральная плотность мощности колебаний  $G(\omega)$  здесь не нормировалась на максимальное значение

осцилляторов, который соответствует достаточно четкому спектральному пику на собственной частоте осциллятора  $\omega_0$ . Для осциллятора (1) такой пик наблюдается, например, при накачке гармоническим шумом (4) на второй гармонике собственной частоты. Частоту гармонического воздействия  $\omega_2$  выберем близкой к собственной частоте  $\omega_0$ . Численные эксперименты в выбранном режиме накачки, а также и для других сигналов накачки (например, при накачке осциллятора (1) белым шумом) показали, что эффект захвата частоты стохастических колебаний отсутствует. При увеличении амплитуды воздействия не наблюдается смещение спектрального максимума, соответствующего основной частоте стохастических колебаний. Полученные результаты проиллюстрированы спектрами мощности колебаний  $x(t)$ , представленными на рис. 10.

## Выводы

Проведенные исследования показывают, что различные по своим характеристикам случайные сигналы, модулирующие собственную частоту осциллятора, при определенной амплитуде модуляции приводят к неустойчивости состояния равновесия и возникновению стохастических колебаний. Порог неустойчивости связан со стохастической D-бифуркацией точки равновесия и может быть определен на основе линейного приближения. Вызванные параметрическим шумом стохастические колебания могут рассматриваться как особый класс стохастических колебаний – параметрические стохастические колебания. Характеристики параметрических стохастических колебаний существенным образом зависят от характеристик случайного модулирующего сигнала. Прежде всего, можно указать на различия в спектрах стохастических колебаний. В случае модуляции белым шумом в спектре колебаний выделяется линия с максимумом на собственной частоте осциллятора. При модуляции цветным шумом, с базовой частотой, равной собственной частоте осциллятора или ее второй гармонике, в спектре колебаний также наблюдается достаточно узкая линия на собственной частоте и, кроме того, линии на гармониках. При низкочастотном воздействии спектр колебаний также сосредоточен в области низких частот, а максимум на собственной частоте отсутствует. Высокочастотное воздействие приводит к более сложной форме спектра. Максимум на собственной частоте имеется, но становится менее выраженным. Различаются также и форма колебаний, поведение фазовых траекторий и вид вероятностного распределения.

Стохастическим параметрическим колебаниям присущи некоторые свойства «обычных» параметрических колебаний. Так, при модуляции гармоническим шумом на плоскости параметров можно наблюдать характерные области неустойчивости, подобные областям Матье. Наименьший порог неустойчивости соответствует накачке шумом, имеющим спектральный максимум на второй гармонике собственной частоты осциллятора. Тот факт, что возникающие при шумовой накачке стохастические колебания носят характер параметрических колебаний и не могут рассматриваться как особый случай стохастической автогенерации, подтверждается отсутствием эффекта частотного захвата при воздействии на стохастический осциллятор внешней гармонической силы.

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (гос. контракт №14.740.11.0074).*

## Библиографический список

1. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
2. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
3. Хорстнемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
4. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.

5. *Risken Z.* The Fokker-Planck Equation. Berlin, Springer, 1989.
6. *Ван Кампен Н.Г.* Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990.
7. *Arnold L.* Random dynamical systems. Berlin, Spriger, 2003.
8. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва;Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
9. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56. P. 1631.
10. *Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F.* Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // *Phys. Rev. F.* 1987. Vol. 36. P. 834.
11. *Landa P.S., Zaikin A.A.* Noise-induced phase transitions in a pendulum with a randomly vibrating suspension axis // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 4. P. 3535.
12. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances // *Chaos, Solitons, and Fractals.* 2009. Vol. 39. P. 7.
13. *Ланда П.С.* Возбуждение хаотических и стохастических колебаний в различных системах // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2009. Т. 18, № 1. С. 1.
14. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.
15. *Bobryk R.V., Chrzyszczuk A.* Colored noise induced parametric resonance // *Physica A.* 2002. Vol. 316. P. 225.
16. *Gitterman M.* The noisy oscillator: the first hundred years, from Einstein until now. Singapore: World Scientific, 2005.
17. *Aumaitre S., Mallick K., Francois P.* Noise-induced bifurcations, multiscaling and on-off intermittency // *J. of Stat. Mech.* 2007, № 7. P07016.
18. *Сироткин О.Л.* Особенности моментных функций осциллятора с параметрической нестабильностью, обусловленной дихотомическим шумом с эрланговскими функциями распределения // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2009. Т. 52, № 11. С. 921.
19. *Катица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* 1951. Т. 21, № 5. С. 588.
20. *Anishchenko V., Vadivasova T., Strelkova G.* Stochastic self-sustained oscillations of non-autonomous system // *The European Physical Journal.* 2010. Special Topics 187. P. 109. Springer-Verlag, 2010.
21. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Автоколебания динамических и стохастических систем и их математический образ – аттрактор// *Нелинейная динамика.* 2010. Т. 6, № 2. С. 1.

*Саратовский государственный  
университет им. Н.Г. Чернышевского  
ОАО «НИИ-Тантал», Саратов*

*Поступила в редакцию 2.12.2010*

## NOISE INDUCED PARAMETRIC INSTABILITY AND STOCHASTIC OSCILLATIONS IN THE OSCILLATOR WITH NONLINEAR DISSIPATION

*A.A. Kochanov, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko*

The appearance of the instability of oscillator equilibrium state in a case of noisy modulation of the natural frequency is considered in the work. The threshold of instability and the properties of stochastic oscillations arising over the threshold are studied for the different noise characteristics.

*Keywords:* Parametric instability, parametric noise, stochastic bifurcation, stochastic oscillations.



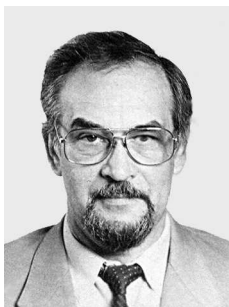
*Кочанов Александр Александрович* – родился 25 августа 1988 года в Саратове. В 2010 году окончил физический факультет Саратовского государственного университета (кафедра радиофизики и нелинейной динамики). В настоящее время работает инженером-технологом ОАО «НИИ-Тантал». Область научных интересов – нелинейная динамика, исследование влияния шума на динамические системы.

410040 Саратов, просп. 50 лет Октября, 110а  
ОАО «НИИ-Тантал»  
E-mail: kochanovaleksandr@mail.ru



*Вадивасова Татьяна Евгеньевна* – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: vadivasovate@yandex.ru



*Анищенко Вадим Семенович* – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАЕН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: wadim@info.sgu.ru