

О ПРИБЛИЖЕННОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРЫ

А.А. Фунтов

Доказана возможность аналитического решения уравнения Лотки–Вольтерры модели «хищник–жерва» и усложненных моделей.

Ключевые слова: Уравнения Лотки–Вольтерры, модель хищник–жертва, аналитическое решение.

Исходные уравнения модели «хищник–жертва» имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = e_1 N_1 - y_2 N_1 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = -e_2 N_1 + y_1 N_1 N_2, \end{cases} \quad (1)$$

где N_1 – число жертв; N_2 – число хищников; $e_{1,2}$, $y_{1,2}$ – положительные постоянные.

Цель данной работы – найти аналитическое решение уравнений (1) и доказать возможность его использования путем сравнения с хорошо известными численными решениями, которые можно найти, например, в [1].

Представим функцию $N(t)$ в виде

$$N_i(t) = N_{i0} + \tilde{N}, \quad (2)$$

где $i = 1, 2$, $N_{10} = e_2/y_1$ и $N_{20} = e_1/y_2$ – равновесные значения численности популяций, а $\tilde{N}_i(t)$ – отличие от равновесных значений. Используем (2) в системе уравнений (1), тогда

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{N}_1}{dt} = \frac{-y_2 e_2}{y_1} \tilde{N}_2 - y_2 \tilde{N}_1 \tilde{N}_2, \\ \frac{d\tilde{N}_2}{dt} = \frac{y_1 e_1}{y_2} \tilde{N}_1 + y_1 \tilde{N}_1 \tilde{N}_2. \end{cases} \quad (3)$$

Введем величину ε в систему (3) и, считая, что $\varepsilon = \text{const} \ll 1$, получим

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{N}_1}{d\tau} = -\tilde{N}_2 - \varepsilon\tilde{N}_1\tilde{N}_2, \\ \frac{d\tilde{N}_2}{d\tau} = \tilde{N}_1 + \varepsilon\tilde{N}_1\tilde{N}_2. \end{cases} \quad (4)$$

При выводе (4) были приняты следующие допущения и введены следующие обозначения:

$$y_1 = y_2, \quad e_1 = e_2, \quad \frac{e_2 y_2}{y_1} dt = \frac{e_1 y_1}{y_2} dt = d\tau \quad \text{и} \quad \frac{y_1}{e_2} \approx \frac{y_2}{e_1} = \varepsilon \ll 1.$$

Будем искать решение (4) в виде разложения по ε

$$\begin{cases} \tilde{N}_1(\tau) = n_1 + \varepsilon n_2 + \varepsilon^2 n_3, \\ \tilde{N}_2(\tau) = m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon^2 m_3. \end{cases} \quad (5)$$

Выражения (5) подставим в систему (4), что приводит к уравнениям

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{d\tau} + \varepsilon \frac{dn_2}{d\tau} + \varepsilon^2 \frac{dn_3}{d\tau} = \\ \quad = -(m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon^2 m_3) - \varepsilon(m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon^2 m_3)(n_1 + \varepsilon n_2 + \varepsilon^2 n_3), \\ \frac{dm_1}{d\tau} + \varepsilon \frac{dm_2}{d\tau} + \varepsilon^2 \frac{dm_3}{d\tau} = \\ \quad = n_1 + \varepsilon n_2 + \varepsilon^2 n_3 + \varepsilon(m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon^2 m_3)(n_1 + \varepsilon n_2 + \varepsilon^2 n_3). \end{cases} \quad (6)$$

Выделяя в (6) слагаемые с ε^0 , ε , ε^2 , получим

$$\varepsilon^0 \begin{cases} \frac{dn_1}{d\tau} = -m_1, \\ \frac{dm_1}{d\tau} = n_1, \end{cases} \quad (7)$$

$$\varepsilon \begin{cases} \frac{dn_2}{d\tau} = -m_2 - n_1 m_1, \\ \frac{dm_2}{d\tau} = n_2 + n_1 m_1, \end{cases} \quad (8)$$

$$\varepsilon^2 \begin{cases} \frac{dn_3}{d\tau} = -m_3 - n_2 m_1 - n_1 m_2, \\ \frac{dm_3}{d\tau} = n_3 + n_2 m_1 + n_1 m_2. \end{cases} \quad (9)$$

Найдем решения систем уравнений (7–9) и подставим их в (5). Полученные значения \tilde{N}_1 и \tilde{N}_2 подставим в (2), что дает окончательно следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(t) = \frac{e_2}{y_1} + a \cos \left[\frac{y_2 e_2}{y_1} t + \varphi \right] + \\ \quad + \varepsilon \left[\frac{-a^2}{2} \left(\sin 2 \left[\frac{y_2 e_2}{y_1} t + \varphi \right] - \sin 2\varphi \right) + \frac{a^2}{4} \left(\cos 2 \left[\frac{y_2 e_2}{y_1} t + \varphi \right] - \cos 2\varphi \right) \right], \\ N_2(t) = \frac{e_1}{y_2} + a \sin \left[\frac{y_1 e_1}{y_2} t + \varphi \right] + \\ \quad + \varepsilon \left[a^2 \left(\sin 2 \left[\frac{y_1 e_1}{y_2} t + \varphi \right] - \sin 2\varphi \right) - a^2 \cos 2 \left[\frac{y_1 e_1}{y_2} t + \varphi \right] \right], \end{array} \right. \quad (10)$$

где первые слагаемые есть равновесные значения численности, а вторые и третьи слагаемые есть отличие от равновесных значений. Полученные выражения (10) являются приближённым аналитическим решением уравнений Лотки–Вольтерры.

Следует заметить, что постоянная a и разность фаз φ определяются из начальных условий. Если предположить, что $N_1(0) = x_0$ и $N_2(0) = y_0$, то получим (пренебрегая третьими слагаемыми [2]):

$$\varphi = \arctg \left(\frac{y_0 - \frac{e_1}{y_2}}{x_0 - \frac{e_2}{y_1}} \right) \quad \text{и} \quad a = \frac{x_0 - \frac{e_2}{y_1}}{\cos \varphi}. \quad (11)$$

Нетрудно видеть (рис. 1), что решения, полученные автором аналитически, $N_1(t)$ и $N_2(t)$ хорошо совпадают с решениями $N_{11}(t)$ и $N_{22}(t)$, полученными численными методами [1], с точностью до коэффициентов.

Пользуясь аналогичными рассуждениями, найдем решения для усложненных моделей, а именно для случаев симбиоза и конкуренции популяций. Исходные уравнения для симбиоза имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU_1}{dt} = U_1 (r_1 + a_{11}U_1 + a_{12}U_2), \\ \frac{dU_2}{dt} = U_2 (r_2 + a_{21}U_1 + a_{22}U_2), \end{array} \right. \quad (12)$$

где U_1 – численность жертв, U_2 – численность хищников, $r_{1,2}$, $a_{11,12,21,22}$ – положительные постоянные. Исходные уравнения для конкуренции популяций

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} \right) - a N_1 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} \right) - b N_1 N_2, \end{array} \right. \quad (13)$$

где N_1 – численность жертв, N_2 – численность хищников, $r_{1,2}$, a , b , K_1 , K_2 – положительные постоянные. Как видно из рис. 2, решения верно изображают характер осцилляций.

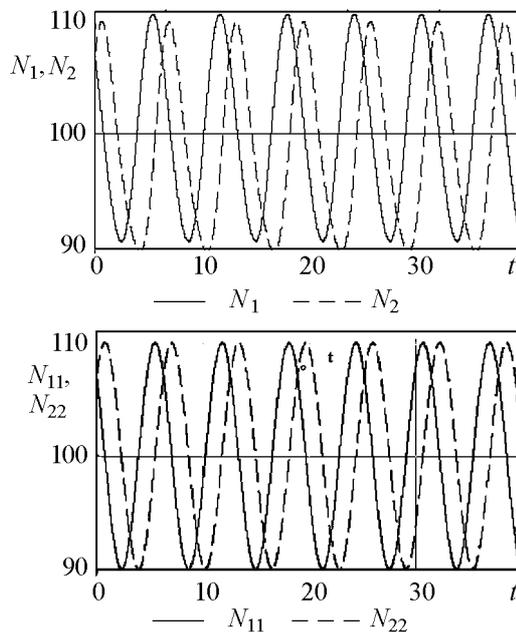


Рис. 1. Графики для модели «хищник–жертва», где $N_1(t)$ и $N_2(t)$ – решения, полученные аналитически, $N_{11}(t)$ и $N_{22}(t)$ – решения, полученные численными методами. Значения коэффициентов, используемых в обоих решениях: $e_1 = e_2 = 1$, $y_1 = y_2 = 0.01$, $\varepsilon = 0.01$, $a = 10$, $\varphi = \pi/4$

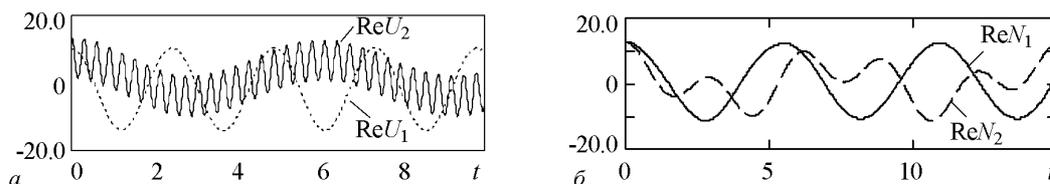


Рис. 2. Графики для усложненных моделей: *a* – симбиоз (значения коэффициентов изображенных на графике решений: $r_1 = 12$, $r_2 = 14$, $a_{11} = 13.2$, $a_{12} = 8.7$, $a_{21} = 13$, $a_{22} = 7$); *b* – конкуренция ($r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $K_1 = 2$, $a = 2$, $K_2 = 3$, $b = 3$, $\varepsilon = 0.001$)

В заключение сформулируем основные результаты работы.

- Получены приближённые аналитические решения для модели «хищник–жертва», довольно хорошо совпадающие с решениями, полученными численными методами.
- Получены аналитические решения для усложненных моделей «хищник–жертва», а именно для случаев симбиоза и конкуренции популяций.

Библиографический список

1. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
2. *Кузнецов А. П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания: Учебное пособие для вузов. М.: Физматлит, 2002.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 24.01.2011

ABOUT APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF LOTKA–VOLTERRA EQUATIONS

A.A. Funtov

The possibility of analytical decision of Lotka–Volterra equation is demonstrated for «predator–prey» model, and for complicated models.

Keywords: Lotka–Volterra equation, model a predator-prey, analytical solution.



Фунтов Александр Андреевич – родился в 1992 году. Окончил среднюю школу № 20 города Балаково (2009). В настоящее время студент 2 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Участвовал в научной конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых–2010».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alexfuntov@mail.ru