

БИФУРКАЦИИ В ЗАДАЧЕ ТЕПЛОЙ КОНВЕКЦИИ УПРУГОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПОДОГРЕВАЕМОЙ СНИЗУ ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Д.В. Любимов, К.В. Ковалевская, Т.П. Любимова

Работа посвящена исследованию бифуркаций в задаче тепловой конвекции упруговязкой жидкости в подогреваемой снизу квадратной области со свободными границами. Для описания реологических свойств жидкости используется обобщенная модель Олдройда. Аналитически, методами слабонелинейного анализа, получено выражение для границы, разделяющей пространство реологических параметров на области с разным типом вилочной бифуркации.

Ключевые слова: Упруговязкая жидкость, конвекция, замкнутая полость, слабонелинейный анализ, вилочные бифуркации.

Введение

Введение. Изучение задачи об устойчивости механического равновесия жидкости при подогреве снизу началось еще в начале прошлого столетия в работах Релея. Позднее анализ этой задачи был расширен на вязкоупругие и упруговязкие жидкости. В отличие от ньютоновских жидкостей, благодаря особым упругим свойствам среды, после потери механического равновесия при подогреве снизу в вязкоупругих и упруговязких жидкостях конвекция может развиваться не только монотонным образом, но также существует колебательная мода, что было показано, например, в работах [1] для максвелловской жидкости и в [2] для жидкости Олдройда, где изучалась линейная устойчивость равновесия подогреваемого снизу плоского горизонтального слоя. Показано, что при малых временах релаксации напряжений неустойчивость равновесия связана с развитием монотонных возмущений; граница монотонной неустойчивости не зависит от упругих свойств среды; соответствующее критическое число Релея совпадает со значением, получающимся в случае ньютоновской жидкости. При временах релаксации, превышающих некоторое значение,

неустойчивость наступает в результате развития колебательных возмущений. Критическое число Релея, определяющее порог колебательной неустойчивости, уменьшается с усилением упругих свойств среды. Наличие запаздывания деформаций оказывает стабилизирующее действие. В [3] с помощью слабонелинейного анализа для слоя со свободными границами, подогреваемого снизу, показано, что в зависимости от реологических параметров в такого рода жидкостях обнаруживаются два типа вилочной бифуркации: прямая, как в ньютоновских жидкостях, и обратная.

Работы, рассматривающие конвекцию вязкоупругих и упруговязких жидкостей в замкнутых областях, в литературе практически отсутствуют. Исключение составляют работы [4–6]. В [4–5] проведен слабонелинейный анализ поведения решений вблизи точки бифуркации в подогреваемых снизу прямоугольных полостях с твердыми границами. Устойчивость механического равновесия исследована в рамках обобщенной модели, переходящей в различных предельных случаях в модели Максвелла, Олдройда и Джеффриса. Для монотонной неустойчивости равновесия численно определены границы, разделяющие области с разным типом вилочной бифуркации. Показано, что при увеличении времени релаксации напряжений или при уменьшении отношения времени запаздывания деформаций ко времени релаксации напряжений происходит переход от прямой к обратной вилочной бифуркации. В [6] рассмотрена жидкость Олдройда в подогреваемой снизу квадратной полости с твердыми границами. Изучены возникновение и нелинейные режимы конвекции. Однако в этой работе исследование проведено лишь для одного значения реологического параметра, определяющего тип ассоциированной производной, и обратная вилочная бифуркация не была обнаружена.

Настоящая работа посвящена изучению типа вилочной бифуркации в задаче конвекции упруговязкой жидкости в подогреваемой снизу квадратной полости со свободными границами. Принятые граничные условия (свободные границы) позволяют провести слабонелинейный анализ поведения решений аналитически.

Постановка задачи

Рассмотрим конвективное движение упруговязкой жидкости в горизонтальном цилиндре квадратного сечения со стороной h . Цилиндр предполагается достаточно длинным, так чтобы можно было ограничиться рассмотрением двумерных движений. Пусть ось x направлена по горизонтали, ось y – по вертикали, начало координат находится в левом нижнем углу полости. Границы полости свободные. Горизонтальные границы поддерживаются при постоянных разных температурах: на верхней границе $T = 0$, на нижней $T = \theta$. Вертикальные границы теплоизолированы. Полость находится в однородном поле силы тяжести.

Для описания реологических свойств жидкости, как и в [4], будем использовать обобщенную модель Олдройда [7]

$$\bar{\sigma} + \tau^* [D \bar{\sigma} - 1/2 a (\bar{\sigma}\dot{\gamma} + \dot{\gamma}\bar{\sigma})] = \mu_0 [\dot{\gamma} + \tau_r^* (D \dot{\gamma} - a \dot{\gamma}\dot{\gamma})]. \quad (1)$$

Здесь $\bar{\sigma}$ – тензор избыточных напряжений (далее для краткости – тензор напряжений); $\dot{\gamma} = \partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i$ – тензор скоростей деформации; τ^* – время релакса-

ции напряжений; τ_r^* – время запаздывания деформаций; μ_0 – динамическая вязкость; a – параметр, определяющий тип ассоциированной производной (он может принимать значения от 1 до -1). Знаком D обозначена яманновская производная, действие которой на тензор определяется следующим образом:

$$D\gamma_{ij} \equiv \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x_k} - \frac{1}{2}(\omega_{ik}\gamma_{jk} + \omega_{jk}\gamma_{ik}),$$

где $\omega_{ik} = \partial v_i / \partial x_k - \partial v_k / \partial x_i$ – элементы тензора завихренности.

Введем функцию тока ψ и завихренность φ , связанные с компонентами скорости соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varphi = \text{rot}_z \mathbf{v}.$$

Запишем уравнения тепловой конвекции в терминах функции тока и завихренности в безразмерной форме, используя величины v/h , h^2/v , θ в качестве единиц измерения скорости, времени и температуры, соответственно, где ν – кинематическая вязкость. Имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + J(\varphi, \psi) - \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial x} + (\Delta \sigma_{xy} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x \partial y}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + J(T, \psi) - \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 T + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\varphi = -\nabla^2 \psi. \quad (4)$$

Здесь $\nabla^2 \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$, $\Delta \equiv \partial^2 / \partial y^2 - \partial^2 / \partial x^2$, $J(\varphi, \psi) \equiv (\partial \varphi / \partial x)(\partial \psi / \partial y) - (\partial \varphi / \partial y)(\partial \psi / \partial x)$. T – отклонение температуры от теплопроводного распределения, нижние индексы означают компоненты тензора.

Реологическое уравнение (1) в безразмерной форме принимает вид:

$$\bar{\sigma} + \tau [D \bar{\sigma} - 1/2 a (\bar{\sigma} \dot{\gamma} + \dot{\gamma} \bar{\sigma})] = [\dot{\gamma} + \varepsilon \tau (D \dot{\gamma} - a \dot{\gamma} \dot{\gamma})] \quad (5)$$

где $\varepsilon = \tau_r^* / \tau^*$, в качестве единицы измерения $\bar{\sigma}$ принято $\mu_0 \nu / h^2$.

Уравнения (2)–(5) содержат следующие безразмерные параметры: число Грасгофа $\text{Gr} = g\beta\theta h^3 / \nu^2$, число Прандтля $\text{Pr} = \nu / \chi$, число Деборы $\tau = \tau^* \nu / h^2$ и параметры ε и a . Здесь g – ускорение свободного падения, χ – коэффициент температуропроводности.

Удобно разбить тензор напряжений на две части $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2$, где $\bar{\sigma}_2 = \varepsilon \dot{\gamma}$ – ньютоновская часть. Тогда реологическое уравнение (5) и уравнение движения (2) принимают вид

$$\bar{\sigma}_1 + \tau [D \bar{\sigma}_1 - 1/2 a (\bar{\sigma}_1 \dot{\gamma} + \dot{\gamma} \bar{\sigma}_1)] = (1 - \varepsilon) \dot{\gamma}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + J(\varphi, \psi) - \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial x} + (\Delta \sigma_{1,xy} + \frac{\partial^2 \sigma_{1,xx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \sigma_{1,yy}}{\partial x \partial y}) - \varepsilon \nabla^2 \varphi = 0. \quad (7)$$

Проектируя уравнение (6) на оси x, y , имеем

$$\sigma_{1,xx} + \tau \left(\frac{\partial \sigma_{1,xx}}{\partial t} + J(\sigma_{1,xx}, \psi) - \nabla^2 \psi \sigma_{1,xy} - 2a \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \sigma_{1,xx} - a \Delta \psi \sigma_{1,xy} \right) = 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} (1 - \varepsilon), \quad (8)$$

$$\sigma_{1,yy} + \tau \left(\frac{\partial \sigma_{1,yy}}{\partial t} + J(\sigma_{1,yy}, \psi) + \nabla^2 \psi \sigma_{1,xy} + 2a \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \sigma_{1,yy} - a \Delta \psi \sigma_{1,xy} \right) = -2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} (1 - \varepsilon), \quad (9)$$

$$\sigma_{1,xy} + \tau \left(\frac{\partial \sigma_{1,xy}}{\partial t} + J(\sigma_{1,xy}, \psi) + \frac{1}{2} (\nabla^2 \psi (\sigma_{1,xx} - \sigma_{1,yy}) - a \Delta \psi (\sigma_{1,xx} + \sigma_{1,yy})) \right) = \Delta \psi (1 - \varepsilon). \quad (10)$$

Далее для простоты обозначений нижний индекс 1 у переменной $\bar{\sigma}_1$ опускается.

Гидродинамические и тепловые граничные условия для отклонения от состояния равновесия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x = 0, 1 : \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \\ y = 0, 1 : \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad T = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Известно, что при τ , меньших некоторого критического значения, потеря устойчивости равновесия подогреваемой снизу вязкоупругой (упруговязкой) жидкости происходит монотонным образом, при тех же значениях числа Грасгофа Gr_* , что и в случае ньютоновской жидкости. При достижении τ критического значения наиболее опасными становятся колебательные возмущения. Благодаря особым реологическим свойствам среды, конвективное движение упруговязкой жидкости при подогреве снизу, в зависимости от значений реологических параметров, может возбуждаться либо мягким, либо жестким образом. Интерес представляет нахождение границ, разделяющих области с разным типом бифуркации, в пространстве реологических параметров. В настоящей работе исследуется поведение решений вблизи границы монотонной неустойчивости.

Метод решения

Для принятых граничных условий линейная задача устойчивости равновесия эквивалентна аналогичной задаче для бесконечного горизонтального слоя при волновом числе, равном π . Такая задача для случая свободных границ решалась в [3], где показано, что потеря устойчивости равновесия относительно монотонных возмущений имеет место при достижении числом Грасгофа критического значения, определяемого выражением

$$Gr_* = \frac{8\pi^4}{Pr}. \quad (12)$$

Критическое движение, как и в ньютоновской жидкости, представляет собой в данном случае одновихревую конвективную ячейку. В силу очевидного равноправия двух знаков закрутки монотонная потеря устойчивости должна сопровождаться вилочной бифуркацией, то есть двусторонняя бифуркация невозможна. Однако тип вилочной бифуркации (прямая или обратная) не очевиден и может зависеть от параметров. Для определения этого типа следует воспользоваться методами слабонелинейного анализа для получения уравнения разветвления. При этом роль естественного параметра порядка может играть амплитуда критического движения. Уравнение разветвления может быть получено различными способами. В данной задаче проще всего воспользоваться тем, что как в линейном приближении, так и во всех последующих, решение может быть выражено через простые тригонометрические функции.

Представим переменные поля в виде

$$\psi = a_1 \sin \pi x \sin \pi y + a_2 \sin 2\pi x \sin 2\pi y,$$

$$T = c_1 \cos \pi x \sin \pi y + c_2 \sin 2\pi y + c_3 \cos 2\pi x \sin 2\pi y,$$

$$\sigma_{xx} = d_0 + d_1 \cos \pi x \cos \pi y + d_2 \cos 2\pi x \cos 2\pi y + d_3 \cos 2\pi x + d_4 \cos 2\pi y, \quad (13)$$

$$\sigma_{yy} = e_0 + e_1 \cos \pi x \cos \pi y + e_2 \cos 2\pi x \cos 2\pi y + e_3 \cos 2\pi x + e_4 \cos 2\pi y,$$

$$\sigma_{xy} = f_1 \sin \pi x \sin \pi y + f_2 \sin 2\pi x \sin 2\pi y.$$

Подставляя разложения (13) в (3), (7)–(10) и собирая слагаемые в каждом уравнении с одинаковыми множителями, получим систему 17 нелинейных уравнений для $a_1 - f_2$.

$$\text{Gr} \pi c_1 + \pi^2 d_1 - \pi^2 e_1 + 4\pi^4 \varepsilon a_1 = 0, \quad (14)$$

$$\text{Gr} \pi c_3 + 2\pi^2 d_2 - 2\pi^2 e_2 + 32\pi^4 a_2 = 0, \quad (15)$$

$$\pi^2 c_2 a_1 + 2 \frac{\pi^2}{\text{Pr}} c_1 + \pi a_1 = 0, \quad (16)$$

$$-\frac{\pi^2}{2} c_1 a_1 + 4 \frac{\pi^2}{\text{Pr}} c_2 = 0, \quad (17)$$

$$8 \frac{\pi^2}{\text{Pr}} c_3 + 2\pi a_2 = 0, \quad (18)$$

$$d_0 + \tau \left(\frac{\pi^2}{2} a_1 f_1 - a \frac{\pi^2}{2} a_1 d_1 - 2a\pi^2 a_2 d_2 + 2a\pi^2 a_2 f_2 \right) = 0, \quad (19)$$

$$d_1 + \tau \left(\frac{\pi^2}{2} a_1 f_2 + 2\pi^2 a_2 f_1 - \pi^2 d_3 a_1 + \pi^2 d_4 a_1 - 2a\pi^2 d_0 a_1 - \right. \\ \left. - 2a\pi^2 a_2 d_1 - a \frac{\pi^2}{2} a_1 d_2 - a\pi^2 a_1 d_3 - a\pi^2 a_1 d_4 \right) = 2\pi^2 (1 - \varepsilon) a_1, \quad (20)$$

$$d_2 + \tau \left(\frac{\pi^2}{2} a_1 f_1 - 8a\pi^2 d_0 a_2 - a \frac{\pi^2}{2} a_1 d_1 \right) = 8\pi^2 (1 - \varepsilon) a_2, \quad (21)$$

$$d_3 + \tau \left(\frac{\pi^2}{2} a_1 d_1 + 2\pi^2 d_4 a_2 - \frac{\pi^2}{2} a_1 f_1 - a \frac{\pi^2}{2} a_1 d_1 - 4a\pi^2 a_2 d_4 \right) = 0, \quad (22)$$

$$d_4 + \tau \left(-\frac{\pi^2}{2} a_1 d_1 - 2\pi^2 d_3 a_2 - \frac{\pi^2}{2} a_1 f_1 - a \frac{\pi^2}{2} a_1 d_1 - 4a\pi^2 a_2 d_3 \right) = 0, \quad (23)$$

$$e_0 + \tau \left(-\frac{\pi^2}{2} a_1 f_1 + a \frac{\pi^2}{2} a_1 e_1 + 2a\pi^2 a_2 e_2 - 2a\pi^2 a_2 f_2 \right) = 0, \quad (24)$$

$$e_1 + \tau \left(-\frac{\pi^2}{2} a_1 f_2 - 2\pi^2 a_2 f_1 - \pi^2 e_3 a_1 + \pi^2 e_4 a_1 + 2a\pi^2 e_0 a_1 + \right. \\ \left. + 2a\pi^2 a_2 e_1 + a \frac{\pi^2}{2} a_1 e_2 + a\pi^2 a_1 e_3 + a\pi^2 a_1 e_4 \right) = -2\pi^2 (1 - \varepsilon) a_1, \quad (25)$$

$$e_2 + \tau \left(-\frac{\pi^2}{2} a_1 f_1 + 8a\pi^2 e_0 a_2 + a \frac{\pi^2}{2} a_1 e_1 \right) = -8\pi^2 (1 - \varepsilon) a_2, \quad (26)$$

$$e_3 + \tau \left(\frac{\pi^2}{2} a_1 e_1 + 2\pi^2 e_4 a_2 + \frac{\pi^2}{2} a_1 f_1 + a \frac{\pi^2}{2} a_1 e_1 + 4a\pi^2 a_2 e_4 \right) = 0, \quad (27)$$

$$e_4 + \tau \left(-\frac{\pi^2}{2} a_1 e_1 - 2\pi^2 e_3 a_2 + \frac{\pi^2}{2} a_1 f_1 + a \frac{\pi^2}{2} a_1 e_1 + 4a\pi^2 a_2 e_3 \right) = 0, \quad (28)$$

$$f_1 + \tau \left(-\frac{\pi^2}{4} a_1 (d_2 - e_2) - \pi^2 a_2 (d_1 - e_1) - \pi^2 a_1 (d_0 - e_0) + \right. \\ \left. + \frac{\pi^2}{2} a_1 (d_3 - e_3) + \frac{\pi^2}{2} a_1 (d_4 - e_4) \right) = 0, \quad (29)$$

$$f_2 = \tau \left(-\frac{\pi^2}{4} a_1 (d_1 - e_1) - 4\pi^2 a_2 (d_0 - e_0) \right) = 0. \quad (30)$$

Вводя формальный малый параметр μ , представим число Грасгофа и коэффициенты a_1, \dots, f_2 в виде рядов по степеням μ

$$\begin{aligned} \text{Gr} &= \text{Gr}_* + \mu^2 \text{Gr}^{(2)} + \dots, \\ a_1 &= \mu a_1^{(1)} + \mu^2 a_1^{(2)} + \mu^3 a_1^{(3)} + \dots, \quad \dots \quad f_2 = \mu f_2^{(1)} + \mu^2 f_2^{(2)} + \mu^3 f_2^{(3)} + \dots, \end{aligned} \quad (31)$$

В первом порядке решение имеет вид

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= a_1^{(1)} \sin \pi x \sin \pi y, \quad T^{(1)} = c_1^{(1)} \cos \pi x \sin \pi y, \\ \sigma_{xx}^{(1)} &= d_1^{(1)} \cos \pi x \cos \pi y, \quad \sigma_{yy}^{(1)} = e_1^{(1)} \cos \pi x \cos \pi y, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Коэффициенты $c_1^{(1)}$, $d_1^{(1)}$, $e_1^{(1)}$ выражаются через $a_1^{(1)}$

$$c_1^{(1)} = -\frac{\text{Pr} a_1^{(1)}}{2\pi}, \quad d_1^{(1)} = 2\pi^2 (1 - \varepsilon) a_1^{(1)}, \quad e_1^{(1)} = -2\pi^2 (1 - \varepsilon) a_1^{(1)}. \quad (33)$$

Во втором порядке коэффициенты при тригонометрических множителях, не обращающиеся в нуль, даются выражениями

$$\begin{aligned} c_2^{(2)} &= \frac{\text{Pr} c_1^{(1)} a_1^{(1)}}{8}, \quad d_0^{(2)} = a \frac{\tau \pi^2 d_1^{(1)} a_1^{(1)}}{2}, \\ d_2^{(2)} &= a \frac{\tau \pi^2 d_1^{(1)} a_1^{(1)}}{2}, \quad d_3^{(2)} = -\frac{\tau \pi^2 (1 - a) d_1^{(1)} a_1^{(1)}}{2}, \\ d_4^{(2)} &= \frac{\tau \pi^2 (1 + a) d_1^{(1)} a_1^{(1)}}{2}, \quad e_0^{(2)} = -a \frac{\tau \pi^2 e_1^{(1)} a_1^{(1)}}{2}, \\ e_2^{(2)} &= -a \frac{\tau \pi^2 e_1^{(1)} a_1^{(1)}}{2}, \quad e_3^{(2)} = -\frac{\tau \pi^2 (1 + a) e_1^{(1)} a_1^{(1)}}{2}, \\ e_4^{(2)} &= \frac{\tau \pi^2 (1 - a) e_1^{(1)} a_1^{(1)}}{2}, \quad f_2^{(2)} = \frac{\tau \pi^2 (d_1^{(1)} - e_1^{(1)}) a_1^{(1)}}{4}. \end{aligned} \quad (34)$$

Члены, получающиеся из общего решения однородных уравнений для коэффициентов $c_1^{(2)}$, $d_1^{(2)}$, $e_1^{(2)}$, $c_3^{(2)}$, $d_2^{(2)}$, $e_2^{(2)}$ из уравнений (16), (20), (25), (17), (21), (26), соответственно, не приведены, поскольку в дальнейшем при подстановке в уравнения третьего порядка они взаимно уничтожаются.

В третьем порядке выражения для $c_1^{(3)}$, $d_1^{(3)}$, $e_1^{(3)}$ из уравнений (16), (20), (25), соответственно, через решения предыдущих порядков подставляем в уравнение для $a_1^{(3)}$ (14). После взаимного уничтожения линейных членов и сокращения на $a_1^{(1)}$ в (14) получим формулу, связывающую число Грасгофа $\text{Gr}^{(2)}$ и квадрат величины $a_1^{(1)}$ через реологические параметры, то есть уравнение разветвления

$$\text{Gr}^{(2)} \frac{\text{Pr}}{2} = \left(\frac{\text{Pr}^2}{4\pi^4} - \tau^2 (5 - 9a^2) (1 - \varepsilon) \right) \left(a_1^{(1)} \right)^2. \quad (35)$$

Знак величины $Gr^{(2)}$ дает информацию о типе вилочной бифуркации: прямой бифуркации соответствует $Gr^{(2)} > 0$, обратной – $Gr^{(2)} < 0$. Таким образом, граница между областями с разным типом вилочной бифуркации конвекции описывается следующим выражением:

$$\frac{Pr^2}{4\pi^4} = (5 - 9a^2) (1 - \varepsilon) \tau^2. \quad (36)$$

Результаты

На рисунке приведены границы на плоскости параметров ε – τ , разделяющие области с разным типом вилочной бифуркации при монотонной неустойчивости. Заштрихованный участок соответствует области, в которой возмущения развиваются колебательным образом. Штриховая линия является границей колебательной неустойчивости. При значениях реологических параметров ε и τ , соответствующих точкам, расположенным ниже границы для каждого значения параметра a , имеет место прямая вилочная бифуркация, при пересечении границы (то есть при увеличении τ или при уменьшении ε) происходит переход к обратной вилочной бифуркации.

С увеличением параметра a кривая, разделяющая области с разным типом вилочной бифуркации, поднимается вверх как целое. Как видно из (36), смена типа вилочной бифуркации происходит только при $a < 0.745$. При значениях a , больших указанного значения, область параметров, при которых имеет место обратная вилочная бифуркация, отсутствует. При любых значениях реологических параметров ε и τ наблюдается прямая вилочная бифуркация.

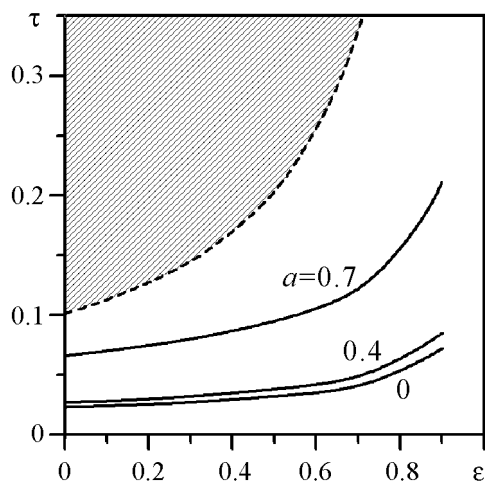


Рис. Границы между областями прямой и обратной вилочной бифуркации для монотонной неустойчивости для разных значений параметра a при $Pr = 1$; заштрихованный участок соответствует области колебательной неустойчивости

Заключение

Исследован характер возбуждения конвекции упруговязкой жидкости в замкнутой полости со свободными границами при подогреве снизу. Рассмотрение ограничено анализом поведения решений вблизи границы монотонной неустойчивости. Получено аналитическое выражение, определяющее границы между областями с разным типом вилочной бифуркации в пространстве реологических параметров. Найдено, что для значений реологического параметра a , определяющего вид ассоци-

ированной производной, больших 0.745, при любых значениях параметра упругости τ и отношения времени запаздывания деформаций к времени релаксации напряжений ε имеет место прямая вилочная бифуркация. В случае $a < 0.745$, для малых τ при любых ε наблюдается прямая вилочная бифуркация; при увеличении τ происходит переход от прямой вилочной бифуркации к обратной. Отметим, что в случае твердых границ, как показано в [5], обратная вилочная бифуркация отсутствует лишь в очень узком интервале значений a , близких к 1.0.

Библиографический список

1. *Vest C.V., Arpaci V.S.* Overstability of a viscoelastic fluid layer heated from below // *J. Fluid Mech.* 1969. Vol. 36. Part 3. P. 613.
2. *Takashima M.* Thermal instability in viscoelastic fluid layer. I // *Journal of the Physical Society of Japan.* 1972. Vol. 33, № 2. P. 511.
3. *Rosenblat S.* Thermal convection in a viscoelastic liquid // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 1986. Vol. 21. P. 201.
4. *Park H.M., Lee H.S.* Nonlinear hydrodynamic stability of viscoelastic fluids heated from below // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 1995. Vol. 60. I. 1. P. 1.
5. *Ковалевская К.В., Любимова Т.П.* Возникновение и нелинейные режимы конвекции упруговязкой жидкости в замкнутой полости при подогреве снизу // *Изв. РАН. МЖГ.* 2012 (принято в печать).
6. *Крапивина Е.Н., Любимова Т.П.* Нелинейные режимы конвекции упруго-вязкой жидкости в замкнутой полости, подогреваемой снизу // *Изв. РАН. МЖГ.* 2000. № 4. С. 5.
7. *Астарита Дж., Маруччи Дж.* Основы гидродинамики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978.

*Пермский госуниверситет
Институт механики
сплошных сред УрО РАН*

*Поступила в редакцию 24.01.2011
После доработки 14.04.2011*

BIFURCATIONS IN THE PROBLEM OF THERMAL CONVECTION OF VISCOELASTIC FLUID IN A CLOSED CAVITY WITH FREE BOUNDARIES HEATED FROM BELOW

D.V. Lyubimov, K.V. Kovalevskaya, T.P. Lyubimova

Bifurcations in the problem of thermal convection of viscoelastic fluid in a square cavity with free boundaries heated from below are studied. General Odroyd model is used for the description of rheological behaviour of the fluid. In the frame of weakly-nonlinear analysis explicit formula is obtained for the boundary separating the rheological parameter space into domains with different type of bifurcations (super- and subcritical).

Keywords: Viscoelastic fluid, convection, closed cavity, weakly-nonlinear analysis, supercritical bifurcation, subcritical bifurcation.

Любимов Дмитрий Викторович – родился в Перми (1949), окончил Пермский государственный университет (1971). После окончания аспирантуры работает в ПГУ. Заведующий кафедрой теоретической физики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИПМ АН СССР (1980) и доктора физико-математических наук в Пермском государственном университете (1995) в области теории конвекции, конвективной и гидродинамической устойчивости. Автор монографий «Thermal Vibrational Convection» (в соавторстве с Г.З.Гершуни) и «Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях» (в соавторстве с Т.П. Любимовой и А.А. Черепановым). Опубликовал 106 статей в реферируемых научных журналах по направлениям, указанным выше. Заслуженный деятель науки РФ. Член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике. Член редакционной коллегии журнала «Вычислительная механика сплошных сред».



614990 Пермь, ул. Букирева, 15
Пермский государственный университет
E-mail: lyubimov@psu.ru



Ковалевская Ксения Викторовна – родилась в Перми (1985), окончила Пермский государственный университет (2008). В настоящее время является аспиранткой Лаборатории вычислительной гидродинамики Института механики сплошных сред УрО РАН.

614013 Пермь, ул. Ак. Королева, 1
Институт механики сплошных сред УрО РАН
E-mail: k_kovalevskaya@mail.ru

Любимова Татьяна Петровна – родилась в Удмуртской АССР (1949), окончила Пермский государственный университет (1971). Работает в Институте механики сплошных сред УрО РАН заведующей Лабораторией вычислительной гидродинамики. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Томском государственном университете (1980) и доктора физико-математических наук в Пермском государственном университете (1995) в области теории конвекции, конвективной и гидродинамической устойчивости. Автор монографии «Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях» (в соавторстве с Д.В. Любимовым и А.А. Черепановым). Опубликовала 107 статей в реферируемых научных журналах по направлениям, указанным выше. Член редакционных коллегий журналов «Вычислительная механика сплошных сред» и «Вестник Пермского университета. Информационные системы и технологии».



614013 Пермь, ул. Ак. Королева, 1
Институт механики сплошных сред УрО РАН
E-mail: lubimova@psu.ru