



РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ВДОЛЬ ДИФFUЗНОЙ ГРАНИЦЫ НЕЛИНЕЙНОГО МЕТАМАТЕРИАЛА

А. Б. Маненков

Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН

Исследованы характеристики поверхностных ТМ мод, направляемых диффузной границей раздела двух нелинейных сред (метаматериала и обычного диэлектрика). Рассчитаны распределения полей и зависимости постоянных распространения от параметров переходного слоя. Изучены эффекты, возникающие из-за нелинейностей сред.

Ключевые слова: Поверхностные электромагнитные моды, нелинейные метаматериалы, диффузные границы раздела сред.

Введение

Поверхностные электромагнитные моды (ПЭМ)¹ достаточно давно являются объектом многочисленных исследований [1, 2]. Эти моды представляют собой мощный инструмент для различных физических экспериментов, например, при изучении свойств поверхностей материалов на СВЧ и в оптическом диапазоне [3–5]. В последние годы интерес к ПЭМ существенно возрос в связи с предложениями использовать их в устройствах интегральной оптики, в системах ближнепольной микроскопии, при изучении различных нелинейных эффектов, а также свойств искусственных сред (метаматериалов).

В данной работе рассмотрены характеристики ПЭМ, которые могут распространяться вдоль плоской нерезкой границы, которая разделяет среду из метаматериала и обычную среду. Исследован общий случай, когда среды могут быть нелинейными. К настоящему времени опубликовано несколько работ, посвященных изучению свойств ПЭМ, распространяющихся вдоль структуры со скачком параметров на границе раздела сред (см., например, [6, 7]). Представляет интерес рассмотрение альтернативной модели, когда граница раздела является «размытой». В такой геометрии проницаемости непрерывно изменяются в тонком слое, который расположен между двумя однородными полубесконечными средами (структура с диффузной границей).

¹Такие моды называют также поверхностными поляритами, а в случае, когда одна из сред является металлом, – поверхностными плазмон-поляритами.

Важно отметить, что в такой системе проницаемости могут быть близки к нулю, и это свойство может сильно изменять структуру полей. Кроме чисто теоретического интереса, изучение таких структур представляет также практический интерес, в первую очередь потому, что многие реальные структуры могут быть ближе именно к этой модели. Отметим, что, строго говоря, подобную систему следует рассматривать как слоистый волновод. Однако в случае, когда толщина переходного слоя намного меньше длины волны, в первом приближении моду, распространяющуюся вдоль такой структуры, можно считать поверхностной, а не объемной.

В указанных выше системах может быть существенна роль эффектов, вызванных нелинейностями сред из-за сильного локального увеличения полей (см. ниже). Этот эффект близок к эффекту, возникающему в известной задаче о наклонном падении волн на плазменные слои [8].

Заметим, что нелинейности в метаматериалах могут быть существенно разнообразнее, чем в обычных средах. В последние годы наметился чрезвычайно быстрый прогресс в технологии создания различных композитов, особенно в диапазоне СВЧ. В частности, недавно созданы нелинейные метаматериалы, в которых в диэлектрическую среду внедрены микрочастицы (мета-атомы) с нелинейными характеристиками [9], а именно, частицы, нагруженные микродиодами. Нелинейные свойства таких сред можно достаточно легко менять за счет внешних воздействий. Подобные нелинейные материалы могут представлять интерес при создании различных устройств на основе структур с ПЭМ [10].

1. Линейная задача

Рассмотрим сначала систему с линейными средами. Как известно, нелинейности обычно невелики, поэтому анализ линейной задачи, как правило, может служить отправной точкой для исследования нелинейной задачи. Геометрия изучаемой структуры схематично показана на рис. 1. Предполагаем, что метаматериал расположен в нижней части системы, а обычная среда – в верхней. Действительные части проницаемостей метаматериала отрицательны, а обычных сред – положительны. Предполагаем, что в области $|y| < d$ расположен промежуточный (переходный) слой, в котором проницаемости $\epsilon(y)$ и $\mu(y)$ зависят от поперечной координаты y . Ниже основное внимание уделено случаям, когда проницаемости – всюду непрерывные функции y . Вне переходного слоя проницаемости постоянны; при $y < -d$

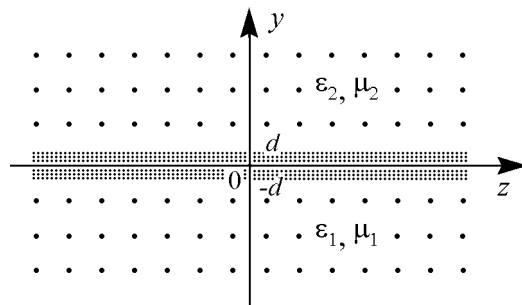


Рис. 1. Геометрия задачи и система координат

диэлектрическую и магнитную проницаемости обозначим через ϵ_1 и μ_1 , а при $y > d$ – через ϵ_2 и μ_2 .

В работе рассматриваем двумерную задачу, причем исследуем характеристики ТМ мод. Для мод этого типа магнитное поле имеет только одну компоненту H_x . Предполагаем, что процесс монохроматический; поля изучаемых мод зависят от координат y и z , а также от времени t . Как указывалось

выше, граничный слой предполагаем тонким, то есть $kd \ll 1$. Считаем, что все среды имеют малые диэлектрические и магнитные потери, то есть во всех точках пространства $\text{Im } \varepsilon > 0$ и $\text{Im } \mu > 0$, причем почти везде $|\text{Im } \varepsilon/\varepsilon| \ll 1$ и $|\text{Im } \mu/\mu| \ll 1$; эти условия будут уточнены ниже. Наличие диссипации в средах в ряде случаев является необходимым условием для существования решения рассматриваемой задачи. Метод расчета ПЭМ в данной структуре во многом повторяет методику, описанную в [11], поэтому опишем его кратко, останавливаясь только на основных моментах.

Поля ПЭМ имеют вид волн, бегущих вдоль оси z ; все компоненты полей пропорциональны множителю² $\exp[i(\beta z - \omega t)]$, где β – комплексная константа распространения, ω – частота. Такое представление решений возможно, поскольку в уравнениях Максвелла для линейных сред переменные разделяются.

Для решения уравнений Максвелла

$$\nabla \times \vec{E} = ik\mu\vec{H}, \quad \nabla \times \vec{H} = -ik\varepsilon\vec{E} \quad (1)$$

($k = \omega/c$ – волновое число, c – скорость света в вакууме) удобно ввести две вспомогательные функции

$$U(y) = H_x, \quad V(y) = iE_z, \quad (2)$$

которые удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$U' = k\varepsilon V, \quad V' = [\beta^2/(k\varepsilon) - k\mu]U. \quad (3)$$

Здесь и далее штрихами обозначены производные по координате y . Поперечная компонента электрического поля выражается через магнитное поле по формуле

$$E_y = -H_x\beta/(k\varepsilon). \quad (4)$$

При анализе ПЭМ уравнения (3) должны быть дополнены стандартными условиями спада поля при $y \rightarrow \pm\infty$.

Дисперсионное уравнение (ДУ) для рассматриваемой моды получали по следующей схеме. С учетом условия на бесконечности магнитное поле вне промежуточного слоя $|y| > d$ можно представить в виде

$$H_x = U = \begin{cases} B_1 \exp[p_1(y + d)], & y \leq -d, \\ B_2 \exp[-p_2(y - d)], & y \geq d, \end{cases} \quad (5)$$

где p_1 и p_2 – внешние поперечные волновые числа (в общем случае – комплексные), B_1 и B_2 – амплитуды поля на границах переходного слоя. Все волновые числа связаны соотношениями

$$\beta^2 = k^2\varepsilon_1\mu_1 + p_1^2 = k^2\varepsilon_2\mu_2 + p_2^2. \quad (6)$$

Для вывода ДУ интегрируем³ систему (3) от точки $y = -d$ до точки $y = d$, используя начальные значения, которые следуют из (5),

$$U(-d) = B_1, \quad V(-d) = U'(-d)/(k\varepsilon_1), \quad (7)$$

²Как правило, указанный множитель опускаем.

³При численном решении (3) следует учесть, что эта система может быть жесткой.

где $U'(-d) = -p_1 B_1$. В конечной точке $y = d$ полученные значения функций $U(d)$ и $V(d)$ приравняли к тем значениям, которые следуют из (5). В результате приходим к ДУ

$$k\varepsilon_2 V(d) + p_2 U(d) = 0. \quad (8)$$

Напомним, что для ПЭМ поперечные волновые числа должны удовлетворять следующим условиям: $\text{Re } p_1 > 0$ и $\text{Re } p_2 > 0$ [12].

Опишем очень кратко свойства ПЭМ для системы с резкой границей ($d = 0$); детальный анализ этого случая можно найти в [6, 7]. В такой системе ДУ имеет вид

$$p_1/\varepsilon_1 = -p_2/\varepsilon_2. \quad (9)$$

Для простоты дополнительно предположим, что среды не диссипативные. Из формул (6) и (9) нетрудно получить явные выражения для решений ДУ. В частности, выражения для поперечных волновых чисел имеют вид

$$\begin{aligned} p_1^2 &= k^2 \Delta_{21} / [1 - (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2], \\ p_2 &= -p_1 (\varepsilon_2/\varepsilon_1), \quad \Delta_{21} = \varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Для рассматриваемого случая, когда среды бездиссипативные и граница раздела резкая, ПЭМ существуют, если выполнены условия

$$\Delta_{21} < 0, \quad \varepsilon_2 > |\varepsilon_1|, \quad (11)$$

$$\Delta_{21} > 0, \quad \varepsilon_2 < |\varepsilon_1|. \quad (12)$$

При выполнении условий (11) мода будет обратной [1, 13], а при выполнении (12) – прямой⁴.

Рассмотрим теперь случай, когда граница раздела двух сред размыта (то есть $d > 0$), причем функции $\varepsilon(y)$ и $\mu(y)$ – непрерывные. В такой системе в поперечной плоскости действительные части проницаемостей изменяются от отрицательных значений в подложке до положительных значений в покрытии, поэтому в одной или нескольких точках (например, в точке $y = y_0$) функции $\text{Re } \varepsilon(y)$ и $\text{Re } \mu(y)$ должны обращаться в нуль. Диэлектрическая проницаемость входит в знаменатель коэффициента в правой части второго уравнения (3), поэтому, если потери в средах отсутствуют, при $y = y_0$ этот коэффициент обращается в бесконечность, и тогда уравнения (3) могут иметь сингулярные решения [14].

Если среды имеют потери, то поля уже не будут сингулярными. Для простоты предположим, что обе функции $\text{Re } \varepsilon(y)$ и $\text{Re } \mu(y)$, которые меняют знаки на интервале $(-d, d)$, обращаются в нуль в одной и той же точке; для определенности считаем, что координата этой точки $y_0 = 0$. В малой окрестности точки y_0 можно считать, что функции $\text{Re } \varepsilon(y)$ и $\text{Re } \mu(y)$ изменяются линейно. В этом случае приближенное решение уравнений (3) в окрестности y_0 можно записать в виде [8, 11]

$$\begin{aligned} H_x &\approx c_0 + y^2 [c_1 + (c_0 \beta^2 / 2) \ln(y)], \\ E_y(y) &\sim -(\beta/k) H_x(0) / [y(\text{Re } \varepsilon)' + i \text{Im } \varepsilon], \end{aligned} \quad (13)$$

⁴Напомним, что для прямых мод фазовые и групповые скорости направлены в одну сторону, а для обратных – в противоположные.

где c_0 и c_1 – некоторые константы. Из (13) следует, что магнитное поле в окрестности y_0 конечно. В системе с потерями параметр $\text{Im } \varepsilon \neq 0$, а значит, электрическое поле будет также конечно. Следует учесть, что при малом поглощении в среде амплитуда электрического поля в точке $y = 0$ будет велика и при увеличении $|y|$ она будет быстро убывать.

2. Результаты расчетов

Исследуем характеристики ПЭМ, распространяющихся вдоль рассматриваемых структур. Прежде всего опишем структуру полей в системе с резкой границей (при $d = 0$); соответствующий профиль $\text{Re } \varepsilon(y)$ приведен на рис. 2 (сплошная кривая 1). На этом рисунке вертикальные штриховые линии показывают границы переходного слоя и его середину. Приведенные на рисунке для сравнения кривые 2 и 3 получены для структур с нерезкими границами (см. ниже).

На рис. 3 представлены распределения модулей полей $|E_y(y)|$ (кривая 1) и $|H_x(y)|$ (кривая 2) для системы с резкой границей. Поля нормированы так, что $H_x(0) = 1$. Параметры волновода: $\varepsilon_1 = -6.48 + i10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 11.664 + i10^{-2}$, $\mu_1 = -2 + i10^{-2}$, $\mu_2 = 1 + i10^{-2}$ и $d/\lambda = 0$ (λ – длина волны в вакууме). В данном примере, как и в рассмотренных ниже, предполагали, что среды диссипативные. Поля ПЭМ экспоненциально убывают при удалении от границы раздела сред, а на границе ($y = 0$) они имеют изломы.

Заметим, что на рис. 3 и на других рисунках данные расчетов представлены в безразмерной форме; кроме того, параметры материалов в рассматриваемых структурах были подобраны так, чтобы полученные результаты можно было легко использовать для оценки характеристик ПЭМ как в оптическом диапазоне, так и в диапазоне СВЧ. В частности, проникаемость покрытия была близка к проникаемости арсенида галлия на оптических частотах, а также к проникаемости керамик на основе окиси алюминия в микроволновом диапазоне. Отметим, что проникаемости подложки, изготовленной из метаматериала, могут изменяться в достаточно широких пределах за счет изменения плотности мета-атомов (внедренных частиц) или их геометрии. Для

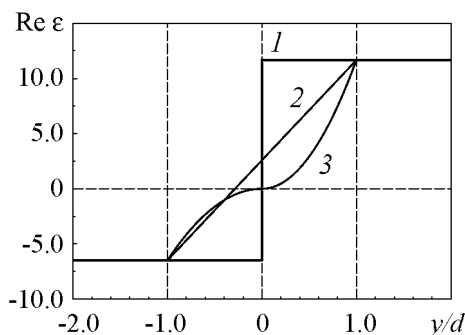


Рис. 2. Распределения $\text{Re } \varepsilon(y)$ вблизи границ раздела сред. Вертикальные линии показывают границы слоя

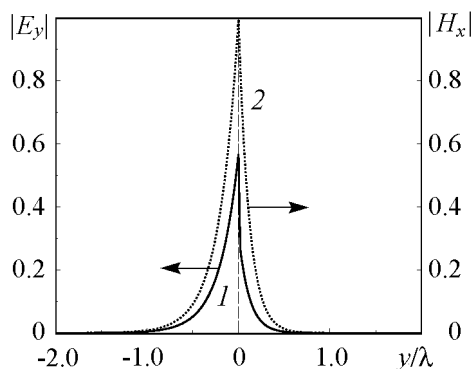


Рис. 3. Распределения электрического (кривая 1) и магнитного (кривая 2) полей ПЭМ в структуре с кусочно-постоянными профилями проникаемостей. Вертикальная штриховая линия показывает границу раздела сред

определенности в работе рассмотрены случаи, когда модули показателей преломления подложки и покрытия имели близкие значения. Пока остается не ясным вопрос о том, как на практике реализовать плавные профили проницаемостей. По-видимому, в области низких частот эту проблему решить не очень сложно, но в общем случае вопрос требует специального изучения.

Рассмотрим теперь структуру с переходным слоем (при $d > 0$). Предполагаем, что внутри слоя при $-d < y < d$ функции $\varepsilon(y)$ и $\mu(y)$ изменяются линейно, а на концах интервала их значения совпадают со значениями в нижней и верхней средах, соответственно. Для такой структуры при $|y| < d$ действительная часть $\varepsilon(y)$ имеет вид

$$\operatorname{Re} \varepsilon(y) = \xi_0 + \xi_1(y/d), \quad (14)$$

где обозначили $\xi_0 = \operatorname{Re}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$, $\xi_1 = \operatorname{Re}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/2$. На рис. 2 показано распределение $\operatorname{Re} \varepsilon(y)$ (кривая 2) для рассматриваемой структуры. Аналогичные соотношения верны для $\mu(y)$. Для простоты предполагали, что мнимые части проницаемостей постоянны на всем бесконечном интервале изменения координаты y . Нули функций $\operatorname{Re} \varepsilon(y)$ и $\operatorname{Re} \mu(y)$ лежат на интервале $(-d, d)$, но они могут быть смещены относительно друг друга. На рис. 4 приведено распределение электрического поля $|E_y(y)|$ (кривая 1) для структуры с размытой границей и линейными профилями вида (14). На этом рисунке вертикальные штриховые линии показывают границы переходного слоя и его середину. Систему (3) и уравнение (8) решали численно [11]. При расчетах использована следующая нормировка поля: $H_x(-d) = 1$. Параметры подложки и покрытия были такими же, как и в предыдущей задаче, а толщина тонкого переходного слоя составляла $d/\lambda = 0.0002$.

Во всех представленных примерах потери намеренно взяты не очень малыми⁵ для того, чтобы яснее продемонстрировать структуру полей. Видно, что распределение электрического поля $|E_y|$ имеет очень узкий и высокий пик в окрестности точки y_0 , где $\operatorname{Re} \varepsilon(y)$ равно нулю. Высота этого пика приблизительно равна $|\beta H_x(0)|/(k \operatorname{Im} \varepsilon)$, а полная ширина $\Delta y_p \approx 2d \operatorname{Im} \varepsilon / |\xi_1|$. Вне интервала $(-d, d)$ поле $|E_y(y)|$ спадает по экспоненциальному закону. В этой области функция $|E_y(y)|$ мала по сравнению

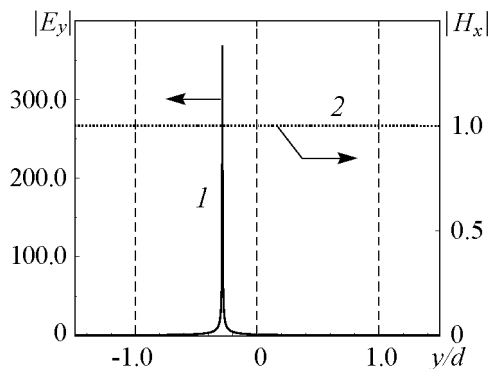


Рис. 4. Распределения электрического и магнитного полей ПЭМ для структуры с линейными профилями проницаемостей в области переходного слоя. Вертикальные линии показывают границы слоя

с ее максимальным значением, поэтому при выбранном нами масштабе кривая 1 на рис. 4 идет практически вдоль оси абсцисс.

Пунктирная кривая 2 на рис. 4 показывает распределение магнитного поля $|H_x(y)|$ в переходной области. Видно, что на интервале $(-d, d)$ модуль магнитного поля почти постоянен. Вне переходной области поле $|H_x(y)|$ очень близко к полю в системе с резким изменением проницаемости (см. рис. 3); при $|y| > d$ оно спадает экспоненциально в соответствии с формулами (5). Таким

⁵ Отметим, что многие метаматериалы имеют достаточно большой тангенс угла потерь.

образом, наличие переходной области мало изменяет магнитное поле; сглаживание профиля $\varepsilon(y)$ приводит лишь к сглаживанию излома в распределении $|H_x(y)|$.

В рассматриваемой системе формируется своеобразная мода, у которой доминирует электрическое поле. Заметим, что в обычных диэлектрических волноводах, как правило, амплитуды полей E и H одного порядка. В данной системе электрическое поле втягивается в область, где диэлектрическая проницаемость мала, за счет чего и происходит его заметный рост. Отметим, что за счет диэлектрических потерь рассматриваемая мода может приобретать некоторые черты волны Ценнека [1].

При варьировании толщины переходного слоя изменяются дисперсионные характеристики исследуемой структуры. На рис. 5 показаны зависимости действительных и мнимых частей безразмерного продольного волнового числа β/k от безразмерной толщины переходного слоя $2d/\lambda$. Параметры подложки и покрытия: $\varepsilon_1 = -6.48 + i10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 11.664 + i10^{-2}$, $\mu_1 = -2 + i10^{-2}$, $\mu_2 = 1 + i10^{-2}$. В переходном слое проницаемости изменялись линейно в соответствии с формулой (14). В рассматриваемой области изменения толщины слоя исследуемая ПЭМ является обратной, поэтому значения $\text{Re } \beta < 0$.

При $d \rightarrow 0$ постоянная распространения β моды в структуре с диффузной границей стремится к значению для структуры с резкой границей. Тем не менее предельный переход при $d \rightarrow 0$ имеет ряд особенностей, которые отличают структуры, содержащие метаматериалы, от систем из обычных диэлектриков. Предположим, что внутри тонкого переходного слоя проницаемости изменяются линейно в соответствии с (14), и при этом толщина слоя стремится к нулю ($d \rightarrow 0$). В такой системе амплитуда пика электрического поля слабо зависит от размера слоя; как указывалось ранее, величина максимума имеет порядок $\max |E_y| \sim |\beta H_x(0)| / (k \text{Im } \varepsilon)$. При уменьшении толщины слоя ширина указанного пика Δy_p уменьшается (см. выше); она пропорциональна $2d$. Таким образом, при $d \rightarrow 0$ пик распределения сужается, оставаясь почти постоянным по высоте. Описанный предельный переход напоминает процесс сходимости рядов Фурье разрывных функций (явление Гиббса) [15].

3. Нелинейная задача

Как показано выше, в линейной задаче при плавном изменении проницаемостей возможно очень сильное возрастание электрического поля, которое, в свою очередь, может привести к заметным нелинейным эффектам. Рассмотрим такие эффекты, предполагая, что нелинейность керровская [16], то есть диэлектрическая проницаемость ε определяется соотношением

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon^{(0)}(y) + \alpha_e(y) |\vec{E}(y, z)|^2, \quad (15)$$

где $\varepsilon^{(0)}$ – линейная часть. Коэффициент нелинейности α_e может зависеть от y .

Для линейных задач переменные в уравнениях Максвелла разделяются, поэтому выше их решения искали в виде функций, которые пропорциональны $\exp[i(\beta z - \omega t)]$. В общем же случае, когда присутствуют одновременно и потери и нелинейности сред, переменные не разделяются и решение становится более сложным [17]. В такой системе за счет потерь амплитуды полей ПЭМ будут убывать

при увеличении z , а следовательно, проницаемость ϵ будет зависеть не только от поперечной координаты y , но и от z (за счет зависящего от z второго слагаемого в формуле (15)). Если потери малы, то есть $\text{Im } \beta \ll k$, то изменение проницаемостей с ростом z будет небольшим и, самое главное, медленным; в этом случае в первом приближении все характеристики моды можно считать медленно меняющимися функциями осевой координаты z [17]. Процесс распространения мод в такой системе будет напоминать процесс распространения мод в волноводе с линейными средами, у которого медленно меняются его параметры (см., например, [18, 19]).

Учитывая сказанное, решение рассматриваемой нелинейной задачи можно искать приближенно в виде бегущих волн с медленно меняющимися вдоль оси z амплитудой, фазовой скоростью и распределением полей. В каждом сечении волновода в первом приближении функции U и V удовлетворяют той же системе уравнений (3); единственное отличие заключается в том, что диэлектрическая проницаемость удовлетворяет соотношению (15), в котором координата z играет роль параметра. Для расчетов, как и выше, удобно в формуле (15) заменить компоненты электрического поля на функции U и V

$$\epsilon(y, z) = \epsilon^{(0)}(y) + \alpha_e(y) [|\beta(z)U(y, z)/(k\epsilon(y, z))|^2 + |V(y, z)|^2], \quad (16)$$

где координата z является параметром.

Как следует из приведенной формулы, зависимость ϵ от введенных выше функций $|U|$ и $|V|$ оказывается неявной, поскольку проницаемость входит в знаменатель второго члена в правой части формулы (16). Следует, однако, учесть, что, как правило, представление диэлектрической проницаемости в таком виде является приближенным. В исходной формуле (15) отброшены малые члены, содержащие $|\vec{E}(y)|^4$ и члены с более высокими степенями. Поэтому, оставаясь в рамках малоамплитудного приближения, можно упростить расчеты, подставляя в правую часть (в знаменатель) линейное значение $\epsilon(y, z) = \epsilon^{(0)}(y)$.

При расчетах считали, что среда нелинейна только в некотором слое ограниченного размера, а именно при $|y| < d_{nl}$. Это ограничение не является слишком жестким при анализе ПЭМ, если считать, что $d_{nl} > d$, так как в рассматриваемой структуре электрическое поле этой моды локализовано преимущественно в переходном слое, а вне его экспоненциально спадает (см. выше). Далее предполагаем, что коэффициент нелинейности при $|y| < d_{nl}$ определяется соотношением

$$\alpha_e(y) = \alpha_0 [1 - (y/d_{nl})^2], \quad (17)$$

где α_0 – значение коэффициента нелинейности на оси.

Исследуем теперь дисперсионные характеристики ПЭМ для нелинейной задачи. Предполагаем, что коэффициент нелинейности очень мал, в том числе даже там, где мала проницаемость ϵ . В этом случае для расчета β можно использовать метод возмущений. Все величины, относящиеся к линейной задаче, отмечаем верхним индексом (0), а величины для нелинейной задачи оставляем без дополнительного индекса. Используя лемму Лоренца, можно получить выражение для сдвига посто-

янной распространения ($\beta - \beta^{(0)}$):

$$(\beta - \beta^{(0)})/k = \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon - \varepsilon^{(0)}) [E_y E_y^{(0)} - E_z E_z^{(0)}] dy / P_c, \quad (18)$$

где

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty} [E_y H_x^{(0)} + E_y^{(0)} H_x] dy. \quad (19)$$

Формула (18) является точной, если в нее подставлять точные значения всех величин. Приближенное выражение для сдвига ($\beta - \beta^{(0)}$) получается, если в эту формулу подставить вместо решения нелинейной задачи соответствующее решение линейной [19] и при этом считать, что $(\varepsilon - \varepsilon^{(0)}) \approx \alpha_e |\vec{E}^{(0)}|^2$. При вычислениях удобно выразить все компоненты полей через функции $U^{(0)}$ и $V^{(0)}$. Считая толщину промежуточного слоя малой, после некоторых преобразований получаем явное выражение для сдвига постоянной распространения за счет нелинейности среды

$$\frac{\beta - \beta^{(0)}}{\beta^{(0)}} \approx -\frac{\pi |\beta^{(0)}|^2 (d/\xi_1)}{4k^2 (\text{Im } \varepsilon)^3} \left[\frac{1}{p_2^{(0)} \varepsilon_2} - \frac{1}{p_1^{(0)} \varepsilon_1} - i \frac{2\pi d}{\xi_1} \right]^{-1} \alpha_0 |H_x^{(0)}(0)|^2, \quad (20)$$

предполагая, что $d_{\text{nl}} \gtrsim 2d$. Поскольку магнитное поле в переходном слое меняется очень мало, то для упрощения записи часто будем подставлять вместо $H_x^{(0)}(y_0)$ величину $H_x^{(0)}(0)$.

Из полученного соотношения видно, что для применимости метода возмущений необходимо, чтобы было выполнено условие

$$|\alpha_0| |H_x^{(0)}(y_0^{(0)})|^2 = o(1) (\text{Im } \varepsilon)^3 / |\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu_1 \mu_2 p_1 p_2 d^2|^{1/2}, \quad (21)$$

где $y_0^{(0)}$ – координата точки, в которой $\text{Re } \varepsilon^{(0)} = 0$. Здесь, как обычно, через $o(1)$ обозначили бесконечно малую величину. В рассматриваемой системе за счет нелинейности сред изменение коэффициента распространения ПЭМ мало. Оценим это смещение для структуры, у которой параметры среды были те же самые, что и для примера, данные которого показаны на рис. 5. При $2d/\lambda = 0.01$ модуль относительной величины сдвига постоянной распространения будет порядка $2.4 \cdot 10^5 |\alpha_0| |H_x^{(0)}(0)|^2$, причем для линейной задачи $\beta^{(0)} \approx (-3.4 + 0.3i)k$.

В рассматриваемой системе за счет нелинейности может происходить несколько интересных явлений, например, смещение максимума электрического поля. Величину эффекта смещения при увеличении передаваемой мощности ПЭМ можно оценить аналитически.

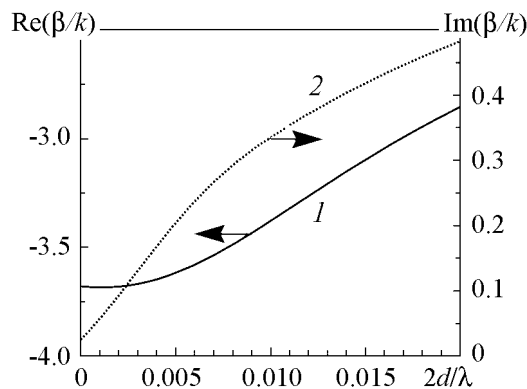


Рис. 5. Зависимости действительных и мнимых частей безразмерных волновых чисел от нормированной толщины переходного слоя для линейных профилей ε и μ

Нетрудно показать, что координата максимума поля с высокой степенью точности совпадает со значением корня уравнения $\text{Re } \epsilon(\tilde{y}_0) = 0$, где ϵ – нелинейная проницаемость. Учитывая (16), получаем, что за счет нелинейности смещенное значение координаты y_0 максимума поля равно

$$\begin{aligned} (y_0 - y_0^{(0)})/d &\approx F_1 \alpha_0 |H_x^{(0)}(0)|^2, \\ F_1 &= -|\beta|^2 / [\xi_1 (k \text{Im } \epsilon)^2], \end{aligned} \quad (22)$$

где $y_0^{(0)}$ – значение корня уравнения $\text{Re } \epsilon^{(0)} = 0$ в линейном случае (когда $\alpha_0 = 0$ и $\epsilon = \epsilon^{(0)}$), а y_0 – в нелинейном; параметр ξ_1 определен в (14).

При указанных условиях сдвиг пика существенно меньше его ширины: $|y_0 - y_0^{(0)}| \ll \Delta y_p$. При рассматриваемом здесь линейном профиле $\epsilon(y)$ и при условиях (21) смещение максимума поля при увеличении передаваемой мощности очень мало. Например, для системы с параметрами, которые были использованы при построении рис. 5, и при значении $|\alpha_0 H_x(0)|^2 = 10^{-7}$ величина смещения имеет порядок $10^{-3}d$. Следует, однако, заметить, что для других профилей $\epsilon(y)$ смещение может быть намного больше (см. ниже).

4. Слой с малой проницаемостью

Выше исследована структура, у которой в переходном слое функция $\text{Re } \epsilon(y)$ была линейной и имела простой нуль. Рассмотрим кратко структуру с другой формой профилей, а именно, когда профили уплощенные⁶ в области малых $\text{Re } \epsilon$. Начнем анализ опять с линейной задачи. Предположим, что действительная часть проницаемости $\text{Re } \epsilon$ имеет вид

$$\text{Re } \epsilon(y) = \begin{cases} (y/d)^2 \text{Re } \epsilon_1, & -d < y < 0, \\ (y/d)^2 \text{Re } \epsilon_2, & 0 < y < d. \end{cases} \quad (23)$$

Профиль действительной части диэлектрической проницаемости для такой структуры показан на рис. 2 (кривая 3). Для этого случая функция $\text{Re } \epsilon(y)$ в точке $y_0 = 0$ обращается в нуль вместе со своей первой производной, но следующая производная не равна нулю. Заметим, что разрыв второй производной функции $\epsilon(y)$ при $y = 0$ не оказывает значимого влияния на полученные результаты. Магнитная проницаемость подчиняется сходным соотношениям (с заменой в уравнении вида (23) величины $\text{Re } \epsilon_1$ на $\text{Re } \mu_1$ и т.д.). Как и выше, при расчетах предполагали, что величины $\text{Im } \epsilon$ и $\text{Im } \mu$ малы и постоянны. Считали также, что промежуточный слой тонкий, то есть $kd \ll 1$.

На рис. 6 (кривая 1) приведено распределение электрического поля в переходном слое и его окрестности для данного примера. Параметры подложки и покрытия были следующие: $\epsilon_1 = -6.48 + i10^{-2}$, $\epsilon_2 = 11.664 + i10^{-2}$, $\mu_1 = -2 + i10^{-2}$, $\mu_2 = 1 + i10^{-2}$. В промежуточном слое, толщина которого составляла $2d/\lambda = 0.0002$, проницаемости изменялись непрерывно в соответствии с формулой (23). В отличие

⁶В последние годы было предложено несколько необычных волноводных структур, в которых применяются диэлектрические слои с малой проницаемостью («zero index metamaterials») [20].

от системы, рассмотренной ранее (см. рис. 4), в данном примере пик распределения $|E_y(y)|$ оказывается достаточно широким. На этом же рисунке показано распределение магнитного поля $|H_x(y)|$ внутри промежуточного слоя (пунктирная кривая 2). Распределение магнитного поля в данной структуре напоминает поле ПЭМ в предыдущем примере (см. раздел 2).

На рис. 7 показаны зависимости безразмерных действительных и мнимых частей продольного волнового числа β/k от безразмерной толщины переходного слоя $2d/\lambda$. Горизонтальная штриховая линия показывает нулевое значение $\text{Im } \beta/k$. Рисунок построен для структуры с описанными выше распределениями проницаемостей (23). Параметры сред были такие же, как и при расчете полей (см. рис. 6). Отметим, что при малых kd рассматриваемая мода является обратной. Дисперсионные зависимости для рассматриваемой структуры отличаются от тех, которые были получены для системы с линейными профилями проницаемостей. В частности, оказывается, что при увеличении толщины слоя $2d$ очень быстро мода из поверхностной (собственной, направляемой) становится вытекающей (квазисобственной) [12, 21]; для вытекающей моды значения $\text{Re } p_1 < 0$ и ее поля растут на бесконечности. Темным треугольником на рис. 7 показана точка, которая определяет границу, правее которой мода становится вытекающей. Заметим также, что при изменении знака $\text{Im } \beta$ мода из обратной становится прямой.

Исследуем характеристики мод в данной структуре при наличии нелинейностей сред. Как и выше, предполагаем, что нелинейность керровская, то есть справедливо соотношение (15). В этой структуре, как и в рассмотренной ранее, за счет нелинейности происходит изменение формы дисперсионных кривых и смещение пика в распределении поля $|E_y|$. Рассмотрим второй эффект. Из (16) следует, что при росте амплитуды полей положение смещенного максимума поля определяется формулой

$$(y_0 - y_0^{(0)})/d \approx F_2 \sqrt{\alpha_0 |H_x^{(0)}(0)|^2}, \quad F_2 = -|\beta/(k\sqrt{|\epsilon_1|} \text{Im } \epsilon)|. \quad (24)$$

При выводе последней формулы считали, что $\alpha_0 > 0$.

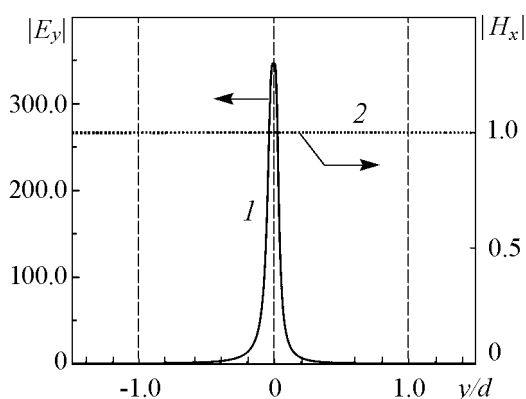


Рис. 6. Распределения электрического и магнитного полей ПЭМ для структуры с параболическими профилями проницаемостей в области переходного слоя. Вертикальные линии показывают границы слоя

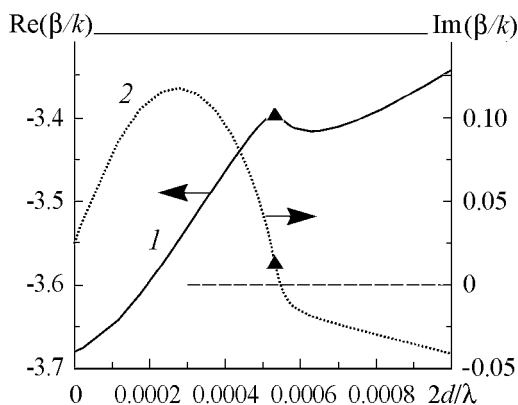


Рис. 7. Зависимости действительных и мнимых частей безразмерных волновых чисел от нормированной толщины переходного слоя для параболических профилей ϵ и μ

Сравнение соотношений (22) и (24) показывает, что сдвиг максимума поля в системе с уплощенным профилем $\text{Re } \varepsilon$ больше, чем в случае, когда профиль $\text{Re } \varepsilon$ линейный; для первого примера сдвиг пропорционален $|\alpha_0 H_x^2(0)|$, тогда как для второго – $\sqrt{|\alpha_0 H_x^2(0)|}$. Нетрудно показать, что сдвиг увеличится, если профиль сделать еще более уплощенным, например, если в распределении (23) вместо показателя степени «2» взять показатель «4».

Обратим внимание на еще одно свойство рассматриваемой системы, у которой в некоторой точке обращаются в нуль как сама функция $\text{Re } \varepsilon(y)$, так и ее производная. Как отмечалось выше, при увеличении толщины переходного слоя мода из направляемой может превратиться в вытекающую. За счет нелинейности точка перехода (см. рис. 7) может смещаться, если увеличивать мощность моды. Анализ влияния нелинейностей на характеристики вытекающих мод сложнее, чем для собственных мод; некоторые вопросы этого анализа до сих пор строго не решены. Укажем на одну из проблем. Напомним, что при изучении ПЭМ параметр d_{nl} можно устремить к бесконечности, то есть считать, что нелинейность присутствует во всем пространстве. Поля же вытекающих мод растут на бесконечности (при $|y| \rightarrow \infty$), поэтому, если размер d_{nl} достаточно велик, то методы возмущений перестают работать. Учет эффектов насыщения нелинейности не спасает положение. Заметим, что слабывтекающие моды в весьма грубом приближении можно исследовать, пренебрегая радиационными эффектами. Однако такой способ не дает полную картину нелинейных явлений. Для строго анализа, по-видимому, следует решать проблему возбуждения открытого нелинейного волновода, то есть рассчитывать совместное распространение вытекающей моды и мод непрерывного спектра. К сожалению, на этом пути возникает много дополнительных проблем. В частности, характеристики решения задачи возбуждения, а значит, и результаты расчетов нелинейных эффектов могут достаточно сильно зависеть от выбора спектра радиационных мод. Поэтому возникает задача оптимального выбора этого спектра, когда можно было бы в основном получить характеристики вытекающей моды.

Заключение

В работе исследованы волноводные характеристики полубесконечного слоя метаматериала с нерезкой границей. Показано, что в такой структуре электрическое поле ПЭМ типа ТМ локализовано в очень тонком слое и, как правило, принимает гигантские значения. Это свойство может представлять интерес для практических приложений (например, при создании различных микроволновых и оптических датчиков). Локализация поля в таких системах обычно существенно выше, чем в структуре с резкой границей раздела сред.

При наличии нелинейностей распределение электрического поля в переходном слое зависит от передаваемой мощности, что также может быть использовано на практике. В частности, при изменении передаваемой мощности может происходить смещение максимума электрического поля. Отметим, что нелинейные эффекты зависят от формы распределения линейной части диэлектрической проницаемости.

В работе рассмотрены достаточно простые структуры, в частности, предполагали, что мнимые части проницаемостей не зависят от поперечной координаты.

Однако, если профили проницаемостей формируются за счет изменения концентрации одинаковых мета-атомов, то переменным будет также профиль $\text{Im } \epsilon$, что, в свою очередь, может заметно изменить линейные и нелинейные характеристики мод. Также при анализе предполагали, что нелинейны только действительные части диэлектрических проницаемостей, то есть коэффициент α_e в формуле (15) действительный. Дополнительные возможности возникают, если он является комплексным; в этом случае из-за нелинейности может изменяться поглощение в средах. В подобных структурах при изменении передаваемой мощности могут варьироваться характерные параметры распределения полей (например, ширина пика и его высота), а также соотношение между электрическим и магнитным полями. Отметим также, что нелинейности часто приводят к анизотропии проницаемостей [16]; эти эффекты также могут найти практические применения. Оценки указанных эффектов можно сделать методами, подобными тем, что были использованы выше.

Автор признателен А.Г. Рожневу и А.А. Башарину за обсуждение ряда вопросов, связанных с данной работой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 13-02-00732 и 14-02-00976).

Библиографический список

1. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1982.
2. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции и метод факторизации. М.: Радио и связь, 1966.
3. Поверхностные поляритоны / Ред. В.М. Агранович, Д.Л. Миллс. М.: Наука, 1985.
4. *Либенсон М.Н.* Поверхностные электромагнитные волны оптического диапазона // Соросовский образоват. журнал. 1996. № 10. С. 92.
5. *Князев Б.А., Кузьмин А.В.* Поверхностные электромагнитные волны: От видимого диапазона до микроволн // Вестник НГУ. Серия: Физика. 2007. Т. 2, № 1. С. 108.
6. *Ruppin R.* Surface polaritons of a left-handed medium // Phys. Lett. A. 2000. Vol. 277, № 1. P. 61.
7. *Shadrivov I.V., Sukhorukov A.A., Kivshar Yu.S., et al.* Nonlinear surface waves in left-handed materials // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 69, № 1. P. 016617.
8. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
9. *Kapitanova P.V., Slobozhanyuk A.P., Shadrivov I.V., et al.* Competing nonlinearities with metamaterials // Appl. Physics Lett. 2012. Vol. 101. P. 231904.
10. *Lapine M., Shadrivov I.V., Kivshar Yu.S.* Colloquium: Nonlinear metamaterials // Reviews Modern Physics. 2014. Vol. 86, № 3. P. 1093.
11. *Маненков А.Б.* Дисперсионные характеристики мод волновода из метаматериала // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57, № 9. С. 983.
12. *Вайнштейн Л.А., Маненков А.Б.* // Сб. Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1986. Кн. 1. С. 141.
13. *Шевченко В.В.* Прямые и обратные волны: Три определения, их взаимосвязь и условия применимости // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177, № 3. С. 301.

14. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
15. *Арнольд В.И.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Фазис, 1979.
16. *Ogusu K.* TM waves guided by nonlinear planar waveguides // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1989. Vol. 37, № 6. P. 941.
17. *Маненков А.Б.* Характеристики волновода из нелинейного метаматериала // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 6. С. 93.
18. *Маненков А.Б.* Распространение волн в открытых волноводах с анизотропным диэлектриком // Изв. вузов. Радиофизика. 1981 Т. 24, № 1. С. 84.
19. *Никольский В.В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967.
20. *Basharin A.A., Mavidis C., Kafesaki M. et al.* Epsilon near zero based phenomena in metamaterials // Phys. Rev. B. 2013. V. 87, № 15. P. 155130.
21. *Маненков А.Б.* Условия ортогональности вытекающих мод // Изв. вузов. Радиофизика. 2005. Т. 48. № 5. С. 388.

Поступила в редакцию 10.11.2014
После доработки 15.12.2014

PROPAGATION OF WAVES ALONG DIFFUSE BOUNDARY OF NONLINEAR METAMATERIALS

A. B. Manenkov

P. Kapitza Institute for Physical Problems RAS

The characteristics of surface TM modes, guided by diffuse interface between two nonlinear media (metamaterial and conventional dielectric), are investigated. The field distributions and dependencies of propagation constants on parameters of the transition layer are calculated. Effects, caused by media nonlinearity, are studied.

Keywords: Surface electromagnetic modes, nonlinear metamaterials, diffuse boundaries of media interfaces.



Маненков Александр Бензионович – родился в Москве (1943). Окончил Московский физико-технический институт (1965), к.ф.-м.н. (1973), д.ф.-м.н. (1996). С 1965 года работает в Институте физических проблем РАН. В физической лаборатории ИФП под руководством П.Л. Капицы экспериментально и теоретически занимался разработкой микроволновой аппаратуры для плазменных исследований. Совместно с Л.А. Вайнштейном построил общую теорию возбуждения открытых волноводов. Провел (совместно с В.Н. Мелехиным) пионерские исследования открытых волноводов брегговского типа. В настоящее время – ведущий научный сотрудник ИФП РАН. Область научных интересов – исследование задач возбуждения, распространения и дифракции волн в открытых электродинамических структурах, численный анализ различных задач радиофизики (включая оптику) и электроники.

119334, Москва, ул. Косыгина, 2
Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН
E-mail: manenkov@kapitza.ras.ru