

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ГЕНЕРАТОРЕ С СУБКРИТИЧЕСКОЙ БИФУРКАЦИЕЙ АНДРОНОВА–ХОПФА

В. В. Семенов, А. С. Листов, Т. Е. Вадивасова

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

В численном и натурном экспериментах исследуется влияние шума на генератор вблизи субкритической бифуркации Андронова–Хопфа. В качестве базовой модели выбран генератор ван дер Поля. Рассмотрено влияние как аддитивного, так и мультипликативного гауссова белого шума. Анализируются закономерности эволюции вероятностного распределения в генераторе с ростом интенсивности шума, характерные для аддитивного и параметрического воздействия. Экспериментально установлено существование бифуркационного интервала для субкритической бифуркации Андронова–Хопфа при аддитивном шуме. Кроме того, показано существование бифуркационного интервала для касательной бифуркации. Подтвержден запаздывающий характер бифуркации Андронова–Хопфа при воздействии мультипликативного (параметрического) шума. Результаты натурного моделирования сопоставляются с численными данными.

Ключевые слова: Субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, аддитивный шум, параметрический шум, стохастическая бифуркация, бифуркационный интервал.

Введение

Одним из важных вопросов, связанных с влиянием шума на нелинейные системы, является исследование стохастических бифуркаций, то есть бифуркаций, происходящих в присутствии шума [1, 2]. В [2] описаны два типа стохастических бифуркаций: феноменологические бифуркации (Р-бифуркации), состоящие в качественном изменении формы стационарного вероятностного распределения, и динамические бифуркации (D-бифуркации), связанные с изменением устойчивости траекторий по отношению к малым возмущениям. Для систем с аддитивными источниками шума наиболее характерны бифуркации Р-типа. Стохастические бифуркации исследовались теоретически и экспериментально во многих работах, при этом особое внимание уделялось бифуркации Андронова–Хопфа (АХ), как одной из важнейших бифуркаций в автоколебательных системах. В этой связи можно отметить работы [3–12]. В них исследуется влияние шума на возникновение автоколебаний в системах с суперкритической (мягкой) бифуркацией АХ и показаны достаточно общие стохастические эффекты, такие как возникновение бифуркационного интервала и смещение

бифуркационного значения параметра. Существование бифуркационного интервала для суперкритической бифуркации АХ при аддитивном шуме было подтверждено натурными экспериментами на радиотехнических моделях [11,12]. В случае параметрического цветного шума возможность возникновения бифуркационного интервала показана в [4, 8], а также, на примере брюсселятора – в экспериментальной работе [5]. Там же отмечается запаздывающий характер суперкритической бифуркации при цветном параметрическом шуме. Теоретическое исследование гармонического осциллятора Хопфа, проведенное в [10, 13], подтвердило запаздывающий характер бифуркации при параметрическом шумовом воздействии, но не выявило наличия бифуркационного интервала, что можно объяснить гармоническим характером колебаний данной системы.

В меньшей степени изученной остается субкритическая (жесткая) стохастическая бифуркация АХ. Анализ субкритической стохастической бифуркации АХ в модифицированном осцилляторе Хопфа, осуществленный в [13], показал результаты, аналогичные случаю суперкритической бифуркации [10, 13]: шум не приводит к возникновению бифуркационного интервала. При этом в осцилляторе с жесткой бифуркацией параметрический шум вызывает запаздывание как бифуркации АХ, так и седло-узловой бифуркации циклов. Однако осциллятор Хопфа представляет собой особый случай строго гармонической системы, как правило не реализующийся на практике. Другие модели генераторов с жесткой бифуркацией АХ исследовались в работах [14–19]. Однако в указанных работах использовался приближенный теоретический анализ режимов колебаний, основанный на квазигармонической аппроксимации и методе усреднения, который не позволяет получить достаточно точно форму вероятностного распределения динамических переменных и диагностировать существование бифуркационного интервала.

С учетом того обстоятельства, что теоретические методы в большинстве случаев являются приближенными, а алгоритмы численного интегрирования стохастических уравнений вблизи бифуркационных значений параметров также могут приводить к существенным статистическим ошибкам, важное значение имеют натурные эксперименты. Однако до настоящего времени целенаправленного полномасштабного экспериментального исследования стохастической субкритической бифуркации АХ не проводилось. Осуществление такого исследования является целью настоящей работы. В работе изучаются стохастические бифуркационные явления в модифицированном генераторе ван дер Поля, реализованном в виде аналоговой радиотехнической цепи. Экспериментально диагностируются бифуркации Р-типа, связанные с качественными перестройками формы совместного вероятностного распределения динамических переменных. Методами компьютерного моделирования и натурального эксперимента строятся бифуркационные диаграммы исследуемой системы. Их сопоставление позволяет делать достаточно обоснованные выводы о характере стохастических бифуркаций.

1. Генератор с аддитивным шумом

Исследуемый генератор с субкритической бифуркацией Андронова–Хопфа представляет собой простую модификацию генератора ван дер Поля, которая широко

используется в книгах по теории колебаний, например, в [20, 21]. Стохастические уравнения системы с аддитивным шумом имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\varepsilon + \gamma x^2 - x^4)y - x + \sqrt{2D}n(t), \\ \gamma &> 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь переменные x , y и время t являются безразмерными величинами. Параметры ε и γ управляют режимом генерации. Во второе уравнение добавлен аддитивный белый гауссов шум: $n(t)$ – нормированный гауссов источник белого шума ($\langle n(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n(t)n(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$, $\delta()$ – функция Дирака), D – интенсивность шума. Аналогичная модель (в ненормированных переменных) рассматривалась в [14], где применялись методы квазигармонического анализа. В отсутствие шума в системе (1) при $\varepsilon = 0$ имеет место субкритическая («жесткая») бифуркация Андронова–Хопфа, состоящая в слиянии неустойчивого предельного цикла с устойчивым фокусом. Рождение устойчивого предельного цикла в этом случае происходит в результате седло-узловой бифуркации циклов и предшествует бифуркации АХ.

Замена переменных в (1)

$$x(t) = a(t) \cos(t + \varphi(t)), \quad y(t) = -a(t) \sin(t + \varphi(t))$$

и переход к укороченным уравнениям для амплитуды и фазы в квазигармоническом приближении позволяют получить следующее выражение для стационарного распределения амплитуды [14]:

$$p(a) = Na \exp \left\{ -\frac{1}{48D} a^2 (a^4 - 3\gamma a^2 - 24\varepsilon) \right\}, \quad N = \text{const.}$$

Пренебрегая взаимной зависимостью фазы φ и амплитуды и полагая распределение фазы в ограниченном интервале $[-\pi; +\pi]$ равномерным, можно получить следующее приближенное выражение для стационарного распределения динамических переменных x и y :

$$p(x, y) = C \exp \left\{ -\frac{1}{48D} (x^2 + y^2) ((x^2 + y^2)^2 - 3\gamma(x^2 + y^2) - 24\varepsilon) \right\}, \quad (2)$$

где C – нормировочная константа. Распределение (2) демонстрирует две стохастические бифуркации, не зависящие от интенсивности шума. При $\varepsilon < -\gamma^2/8$ функция $p(x, y)$ имеет единственный максимум в начале координат (рис. 1, а). При $\varepsilon = -\gamma^2/8$ происходит стохастическая бифуркация, соответствующая седло-узловой бифуркации циклов в детерминированной системе. Она состоит в образовании кратера и «канавки», которые располагаются строго в точках соответствующих предельных циклов $x^2 + y^2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 8\varepsilon}$ (рис. 1, б). Субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа имеет место при $\varepsilon = 0$: радиус «канавок» обращается в нуль, и в начале координат вместо максимума образуется гладкий минимум. Таким образом, при $\varepsilon > 0$ вероятностное распределение приобретает форму аксиально-симметричного кратера с гладким минимумом в центре (рис. 1, в). Приближенное выражение (2) не дает возможности наблюдать бифуркационные интервалы и зависимость бифуркаций от уровня шума.

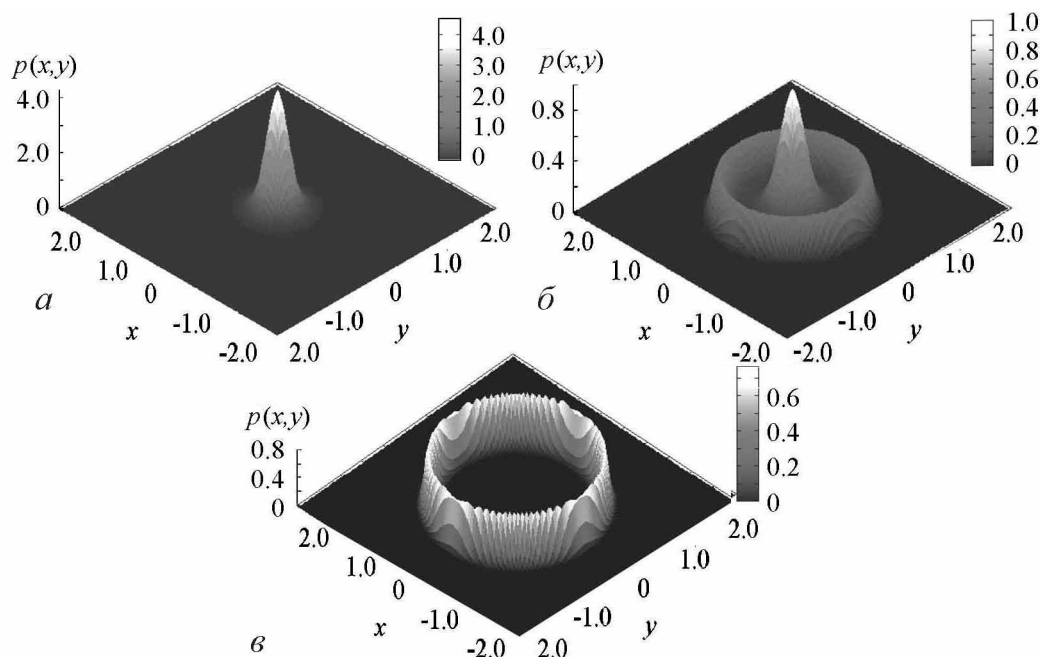


Рис. 1. Вероятностные распределения, рассчитанные по формуле (2) при $\gamma = 1$, $D = 0.01$ и различных значениях параметра ε : -0.13 (а), -0.1 (б), 0.01 (в)

Нами были проделаны расчеты, основанные на численном интегрировании стохастических уравнений (1) и построении совместного вероятностного распределения динамических переменных $p(x, y)$ путем статистической обработки полученных данных. Стохастические уравнения интегрировались методом Гюна с шагом Δt от 0.0005 до 0.0025 на интервале не менее 2000000 единиц безразмерного времени. Большое время интегрирования объясняется целью получить стационарные вероятностные распределения. Для более точной диагностики бифуркационных переходов помимо плотности вероятности $p(x, y)$ строились сечения вероятностного распределения плоскостями $x = y$ и $x = -y$. Данные сечения являются характерными для рассматриваемых в работе моделей автоколебательной системы, так как проходят через стенки кратера распределения в точках их наименьшей и наибольшей высоты, соответственно (рис. 2).

На рис. 3 приведены численно построенные вероятностные распределения $p(x, y)$, типичные для системы (1), и соответствующие сечения поверхностей $p(x, y)$ плоскостями $x = y$ и $x = -y$. Форма распределений $p(x, y)$ близка к результатам расчета по формуле (2) (рис. 1), однако высота стенок кратера, возникающего в области устойчивого предельного цикла, не постоянна, как на рис. 1, а зависит от угла поворота в плоскости x, y . Этот эффект хорошо виден при сравнении сечений распределения плоскостями $x = y$ и $x = -y$ (рис. 3, б, г, е).

Численное моделирование эволюции вероятностного распределения на плоскости параметров ε, D при фиксированном значении параметра $\gamma = 1.0$ позволило построить диаграмму режимов, представленную на рис. 4. На диаграмме выделены пять областей (рис. 4, а), которым соответствует качественно различная форма распределения $p(x, y)$, проиллюстрированная кривыми в сечениях $x = y$ и $x = -y$ (рис. 4, б–е). Границы областей нанесены жирными линиями, толщина которых при-

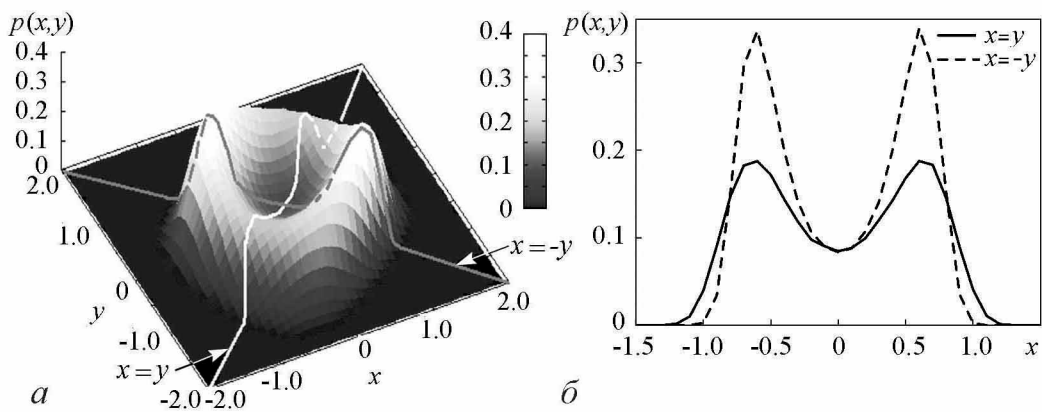


Рис. 2. Вид вероятностного распределения $p(x, y)$ в режиме развитой генерации (а) и кривые в характерных сечениях $x = y$ и $x = -y$ (б)

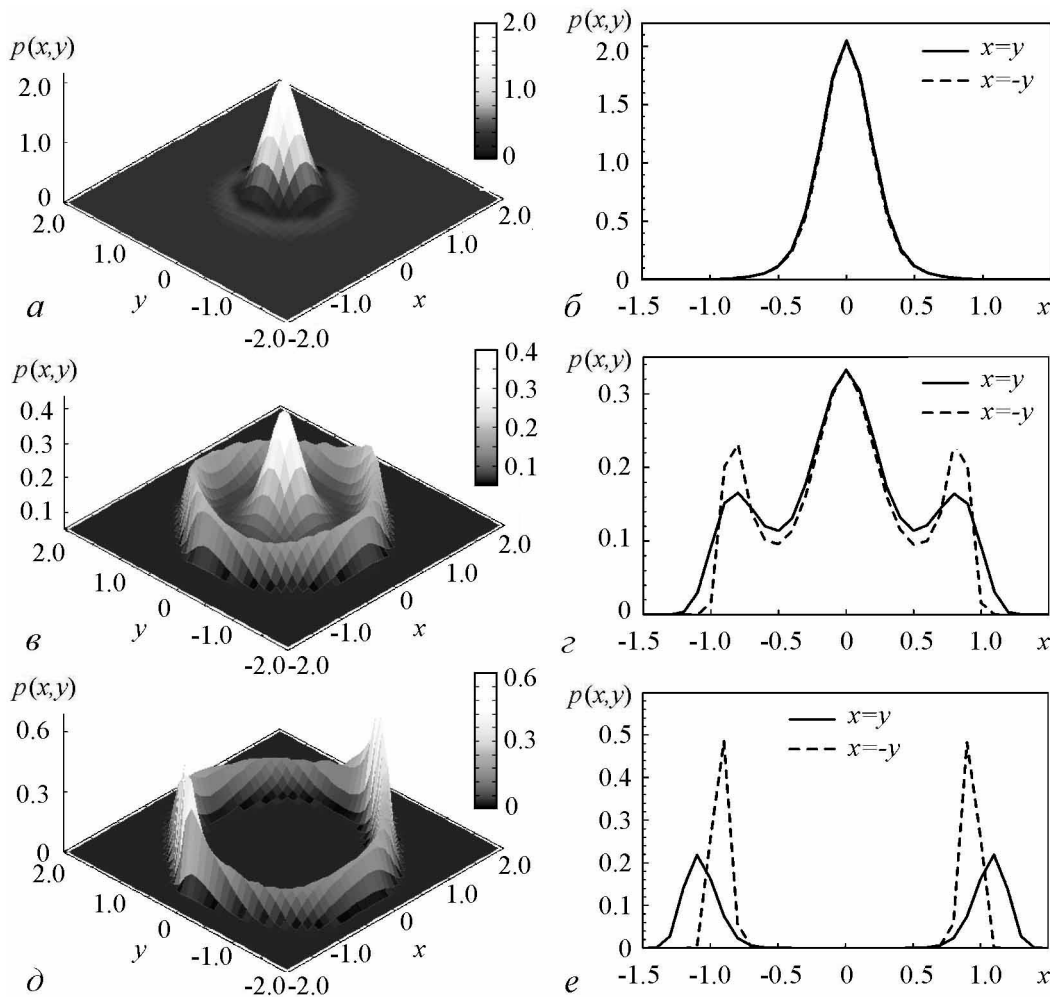


Рис. 3. Вероятностные распределения системы (1) и соответствующие сечения $x = y$ (сплошная линия) и $x = -y$ (пунктир) при $\gamma = 1.0$, $D = 0.01$ и $\varepsilon = -0.17$ (а, б), -0.1 (в, г), 0.01 (д, е)

мерно соответствует точности определения бифуркационных значений. Эта точность ограничивается конечным шагом по параметру, статистическими погрешностями расчета плотности вероятности и ошибками при построении сечений поверхности $p(x, y)$. Аналогичный способ изображения границ различных областей будет применяться нами и при построении других диаграмм режимов, которые будут рассмотрены в данной статье. Интенсивность шума на приведенной на рис. 4, *a* диаграмме ограничена снизу значением $D \approx 0.01$. Это значение нельзя считать малым, однако при меньшем шуме в области $\varepsilon < 0$ получение стационарного распределения при численном моделировании практически не достижимо из-за очень длительного времени установления.

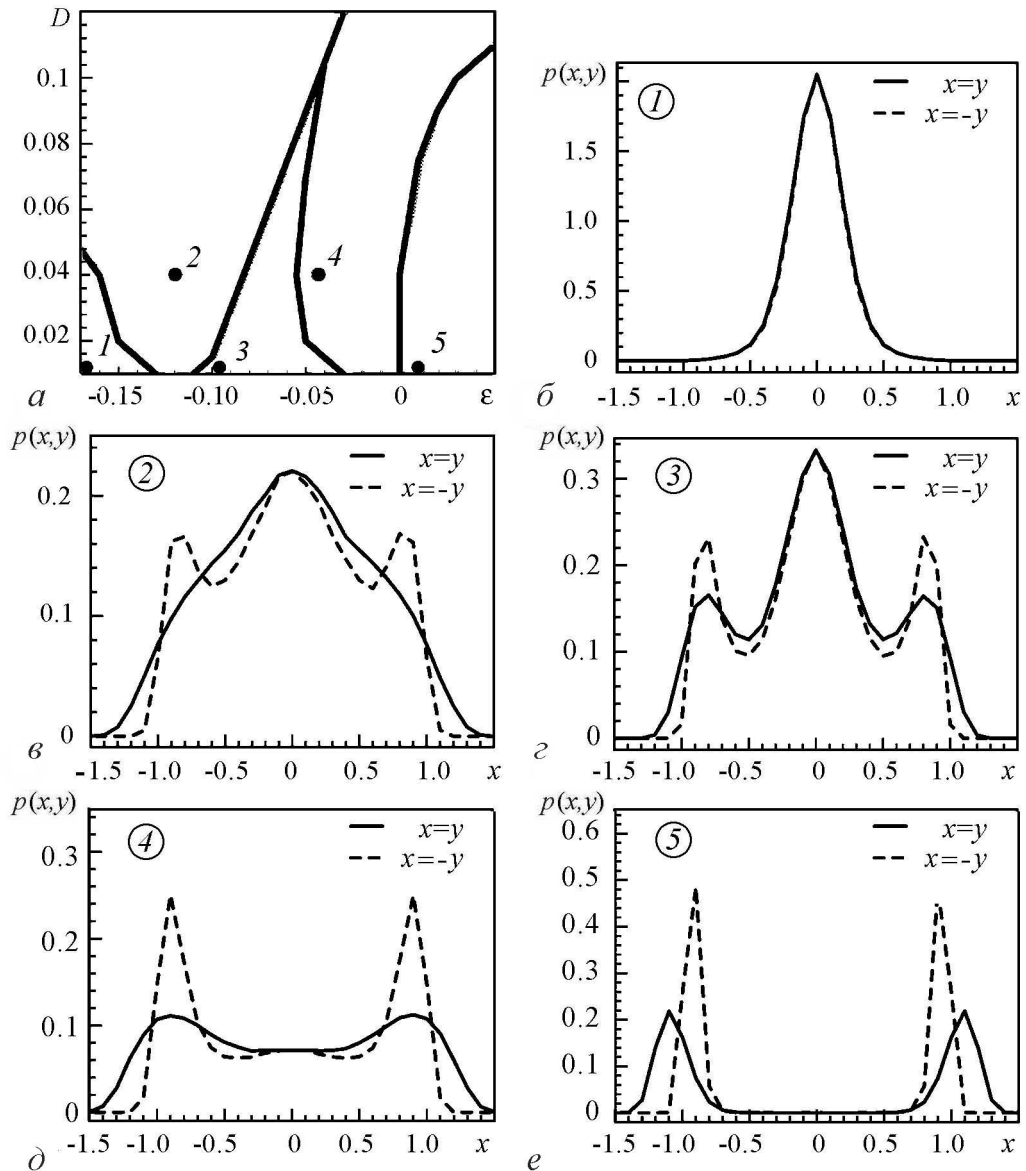


Рис. 4. Диаграмма режимов системы (1), полученная при численном моделировании, (а) и сечения поверхности $p(x, y)$ плоскостями $x = y$ и $x = -y$ в точках 1–5, отмеченных на диаграмме, (б–е)

Из диаграммы, представленной на рис. 4, становятся ясными сценарии стохастических бифуркаций в системе (1) – как субкритической бифуркации Андронова–Хопфа, так и седло-узловой бифуркации циклов. Обеим этим бифуркациям, как и в случае стохастической суперкритической бифуркации АХ [3, 11, 12], соответствует не одна точка при изменении параметра ε , а некоторый бифуркационный интервал, в пределах которого происходит соответствующая перестройка формы распределения. Стохастическая субкритическая бифуркация АХ при увеличении параметра ε происходит следующим образом. До бифуркации распределение имеет форму замкнутого кратера с пиком посередине и в обоих характерных сечениях поверхности $p(x, y)$ можно видеть центральный максимум, два минимума и два максимума по бокам (рис. 4, *з*). На левой границе бифуркационного интервала в сечении $x = y$ центральный максимум и два минимума сливаются и исчезают. В пределах бифуркационного интервала сечения плотности вероятности выглядят в соответствии с рис. 4, *д*, то есть в этой области существует замкнутый кратер, но не существует замкнутой «канавки» внутри кратера, а в начале координат поверхность $p(x, y)$ имеет форму гиперболического параболоида. Правая граница бифуркационного интервала соответствует слиянию и исчезновению центрального максимума и боковых минимумов в сечении $x = -y$, после чего распределение принимает форму кратера с минимумом в начале координат (рис. 4, *е*).

Стохастическая бифуркация, соответствующая седло-узловой бифуркации циклов, также характеризуется бифуркационным интервалом. До бифуркации плотность вероятности имеет единственный максимум в нуле, который можно видеть в обоих характерных сечениях (рис. 4, *б*). Левая граница бифуркационного интервала соответствует возникновению в сечении $x = -y$ двух пар максимумов и минимумов с двух сторон от центрального максимума (рис. 4, *в*). То есть в пределах бифуркационного интервала существует максимум распределения в нуле и еще два максимума, располагающиеся на прямой $x = -y$. На правой границе интервала боковые максимумы и минимумы возникают в сечении $x = y$ (рис. 4, *д*), что соответствует образованию замкнутого кратера и «канавки». Наличие бифуркационных интервалов существенно усложняет бифуркационную диаграмму системы при сильном аддитивном шуме. Области 2 и 4, соответствующие бифуркационным интервалам касательной бифуркации и бифуркации АХ, расширяются с ростом интенсивности шума. Их границы сходятся, и при сильном шуме область 3 уже не наблюдается. При увеличении параметра ε происходит переход из области 2 сразу в область 4. На границе этих областей в сечении $x = y$ из максимума в нуле сразу рождается минимум и два максимума.

В ходе данной работы были проведены натурные эксперименты, направленные на исследование влияния аддитивного шума на бифуркации в системе (1). В этих целях была создана установка, которая является аналоговой моделью исследуемой системы. Схема установки приведена на рис. 5. Уравнения схемы в физических переменных имеют вид

$$\begin{aligned} R_0 C \dot{x} &= y, \\ R_0 C \dot{y} &= (U_1 + U_2 x^2 - x^4)y - x + \xi(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь x, y – напряжения, снимаемые с соответствующих выходов установки, $U_{1,2}$ – напряжения, которые задают значения параметров ε и γ ($\varepsilon = U_1$ и $\gamma = U_2$).

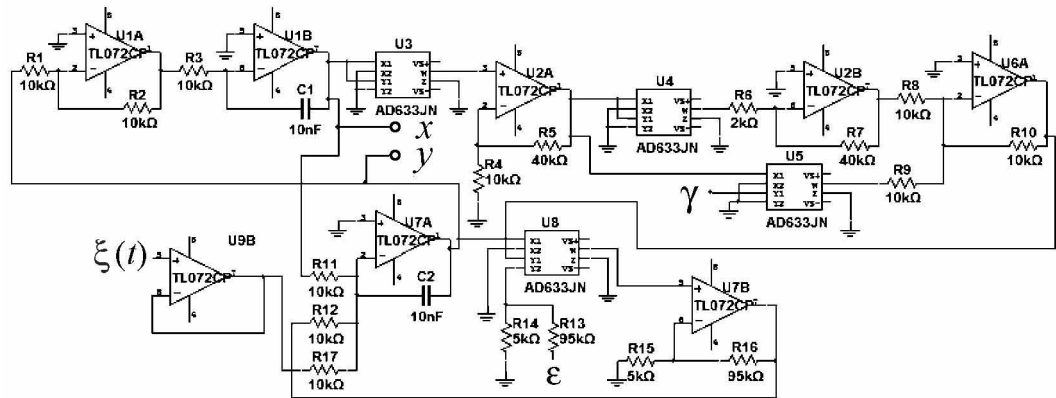


Рис. 5. Принципиальная схема экспериментальной установки (аналоговая модель системы (1) с аддитивным шумом)

Параметры схемы подбирались таким образом, чтобы имело место количественное совпадение безразмерных переменных x и $y = \dot{x}$ в (1) и соответствующих величин в (3). Таким образом, уравнения (1) и (3) различаются только масштабом времени, который в (3) задается параметрами $R_0 = 10$ кОм и $C = 10$ нФ. Все члены в уравнениях (3), независимо от степени, представляют собой напряжения, снимаемые с различных точек схемы и измеряемые в вольтах. В (3) также входит случайное слагаемое $\xi(t)$, которое описывает напряжение, создаваемое генератором шума. В экспериментах использовался широкополосный генератор гауссова шума Г2-59, спектральная плотность которого практически постоянна в полосе частот 0...100 кГц. В этом частотном диапазоне можно считать, что $\xi(t) = \sqrt{2\tilde{D}}n(t)$, где $n(t)$ – нормированный источник с единичной спектральной плотностью мощности. Величина $2\tilde{D}$ есть спектральная плотность мощности шумового сигнала, подаваемого на схему, которую можно регулировать в эксперименте. Для удобства сравнения результатов находилась нормированная интенсивность шума D , соответствующая модели (1). С учетом масштаба времени имеем $D = \tilde{D}/(R_0C)$. При проведении натуральных экспериментов снимались реализации переменных $x(t)$ и $y(t)$, которые оцифровывались с помощью АЦП (NI PCI-6133) и обрабатывались на компьютере, что позволяло получить плотность вероятности $p(x, y)$ и проследить, как она меняется при изменении параметров ε и D .

Полученная в результате натуральных экспериментов диаграмма режимов генератора с жестким возбуждением приведена на рис. 6. Она находится в качественном соответствии с результатами компьютерного моделирования. По тем же причинам, что и при численном моделировании, диаграмма приводится для $D > 0.02$. Экспериментально наблюдаются те же бифуркационные сценарии, которые были получены при численном моделировании и проиллюстрированы на рис. 4. Можно отметить, что левая граница бифуркационного интервала субкритической бифуркации АХ имеет сложную форму с изломом, отличающуюся от соответствующей границы, построенной численно (см. рис. 4, а). Эти различия можно объяснить только тем, что реальные нелинейности в аналоговой модели несколько отличаются от нелинейностей в (3).

Таким образом, натурные эксперименты подтверждают наличие бифуркационного интервала у субкритической бифуркации Андронова–Хопфа и у стохастиче-

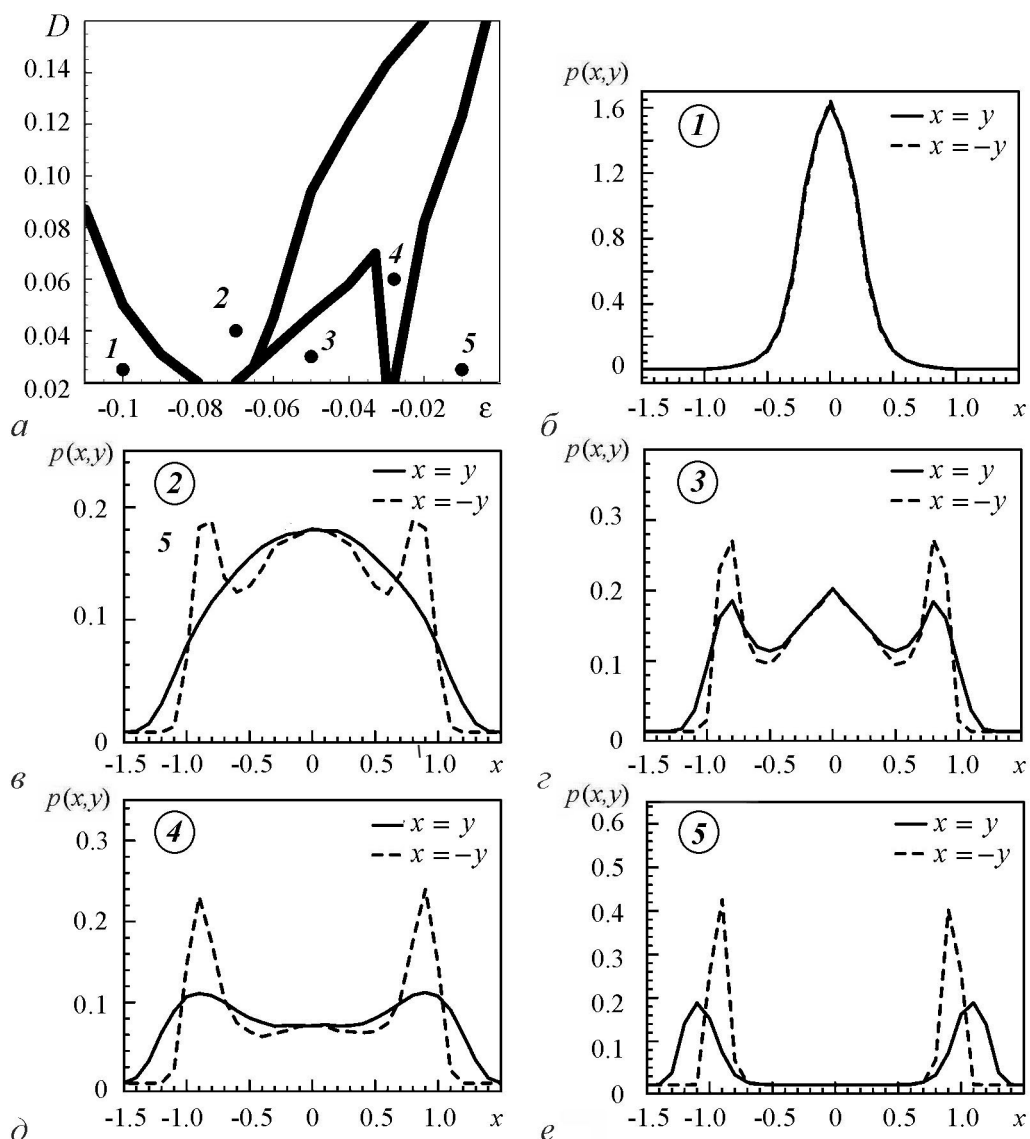


Рис. 6. Диаграмма режимов модели (3), полученная в натурном эксперименте, (а) и экспериментально полученные сечения поверхности $p(x,y)$ плоскостями $x = y$ и $x = -y$ в отмеченных на диаграмме точках (б-е)

ского аналога седло-узловой бифуркации циклов. Существование бифуркационных интервалов представляется характерной особенностью стохастических бифуркаций в системе с аддитивным белым шумом, обладающей свойствами ангармоничности.

2. Генератор с мультипликативным шумом

Рассмотрим теперь автогенератор с субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа, находящийся под действием мультипликативного шума. Предположим, что параметр возбуждения ϵ промодулирован гауссовым белым шумом. В рассматриваемом случае параметрическое шумовое воздействие соответствует мультипликативному шуму, интенсивность воздействия которого на систему оказывается пропор-

циональной переменной \dot{x} . В этом случае стохастические уравнения исследуемого генератора принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\varepsilon + \sqrt{2D_2}n_2(t) + \gamma x^2 - x^4)y - x + \sqrt{2D_1}n_1(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь D_1 и D_2 – интенсивности аддитивного и мультипликативного источников, соответственно.

Используя метод усреднения и укороченные стохастические уравнения можно получить следующее выражение для стационарного распределения амплитуды:

$$p(a) = Na(D_2a^2 + 4D_1)^{\nu} \exp \left\{ -\frac{a^2}{8D_2} \left(a^2 - 4\gamma - \frac{8D_1}{D_2} \right) \right\}, \quad N = \text{const}, \quad (5)$$

где $\nu = 2\varepsilon/D_2 - 2D_1/D_2 - 4D_1^2/D_2^3$. Считая распределение фазы в интервале $[-\pi; +\pi]$ равномерным, приходим к следующему приближенному выражению для стационарного распределения x и y [19]:

$$p(x, y) = C (D_2(x^2 + y^2) + 4D_1)^{\nu} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{8D_2} \left[x^2 + y^2 - 4\gamma - \frac{8D_1}{D_2} \right] \right\}, \quad (6)$$

где C – нормировочная константа. В присутствии аддитивного шума (пусть даже и очень слабого) из выражения (6) следуют две стохастические бифуркации, не зависящие от интенсивности мультипликативного шума D_2 . Это седло-узловая бифуркация циклов при $\varepsilon = -\gamma/8$ и субкритическая бифуркация АХ при $\varepsilon = 0$. Стохастическая седло-узловая бифуркация циклов приводит к рождению замкнутых кратера и «канавки» вокруг центрального максимума в распределении $p(x, y)$, а стохастическая субкритическая бифуркация АХ, как и при одном аддитивном шуме, соответствует слиянию «канавки» с центральным максимумом. Однако численные и натурные эксперименты дают более сложную картину перестроек $p(x, y)$ при вариации параметров ε и D_2 (см. рис. 7 и рис. 8).

Диаграмма режимов на плоскости параметров ε , D_2 , полученная численно для системы (4) при $\gamma = 1.0$, $D_1 = 0.0001$, приведена на рис. 7, а. На ней отмечены четыре области с различным видом распределения $p(x, y)$. Характерные сечения поверхности $p(x, y)$ в этих областях приведены на рис. 7, б–д. Для параметрического шума характерно существование в некоторых областях диаграммы очень сильно выраженного максимума плотности вероятности в начале координат (точки 1–3 диаграммы). По этой причине в соответствующих сечениях на рис. 7, б–г максимальное значение плотности вероятности в нуле выходит за пределы графика, так чтобы выбранный масштаб графиков позволял различить другие экстремумы.

Схема экспериментальной установки для исследования влияния мультипликативного шума на генератор с субкритической бифуркацией Андронова–Хопфа аналогична приведенной на рис. 5 с заменой аддитивного источника внешнего шума на шумовую модуляцию напряжения U_0 , задающего параметр ε . Уравнения аналоговой модели, соответствующей (4), имеют вид

$$\begin{aligned} R_0C\dot{x} &= y, \\ R_0C\dot{y} &= (U_0 + \xi(t) + U_1x^2 - x^4)y - x, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\varepsilon = U_0$ и $\gamma = U_2 = 1$. Источник аддитивного внешнего шума в схеме не предусмотрен, однако в реальной установке аддитивный шум присутствовал в силу естественных причин.

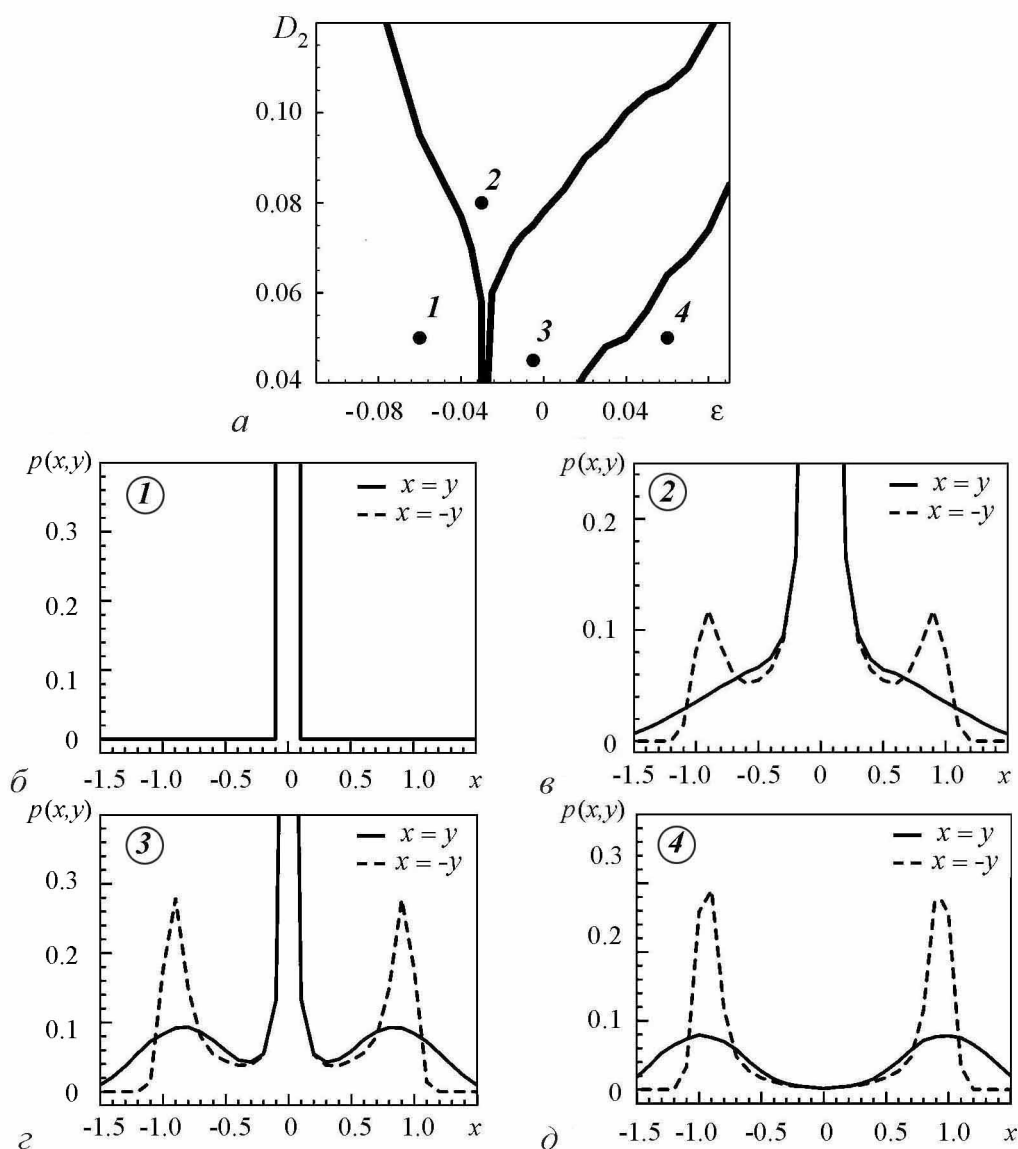


Рис. 7. Диаграмма режимов системы (4) (а) и сечения поверхности $p(x, y)$ плоскостями $x = y$ и $x = -y$ в отмеченных на диаграмме точках (б–д) (численное моделирование при $\gamma = 1.0$, $D_1 = 0.0001$)

Диаграмма режимов на плоскости параметров ϵ , D_2 , полученная в результате натуральных экспериментов, и сечения плотности вероятности, характерные для различных областей, приведены на рис. 8. На экспериментальной диаграмме можно видеть те же четыре области, которые были установлены при численном моделировании (см. рис. 7). Изломы границ области 3, вероятно, являются результатом неучтенных погрешностей в измерениях.

Диаграммы режимов, как в численном эксперименте (см. рис. 7), так и в натурном эксперименте (см. рис. 8) удалось построить только в области достаточно сильной интенсивности параметрического шума, поскольку при малом шуме не удавалось получить стационарного распределения. Можно отметить хорошее качественное соответствие численных и натуральных результатов. В обоих случаях стохастическая субкритическая бифуркация АХ, проявляющаяся в исчезновении центрального

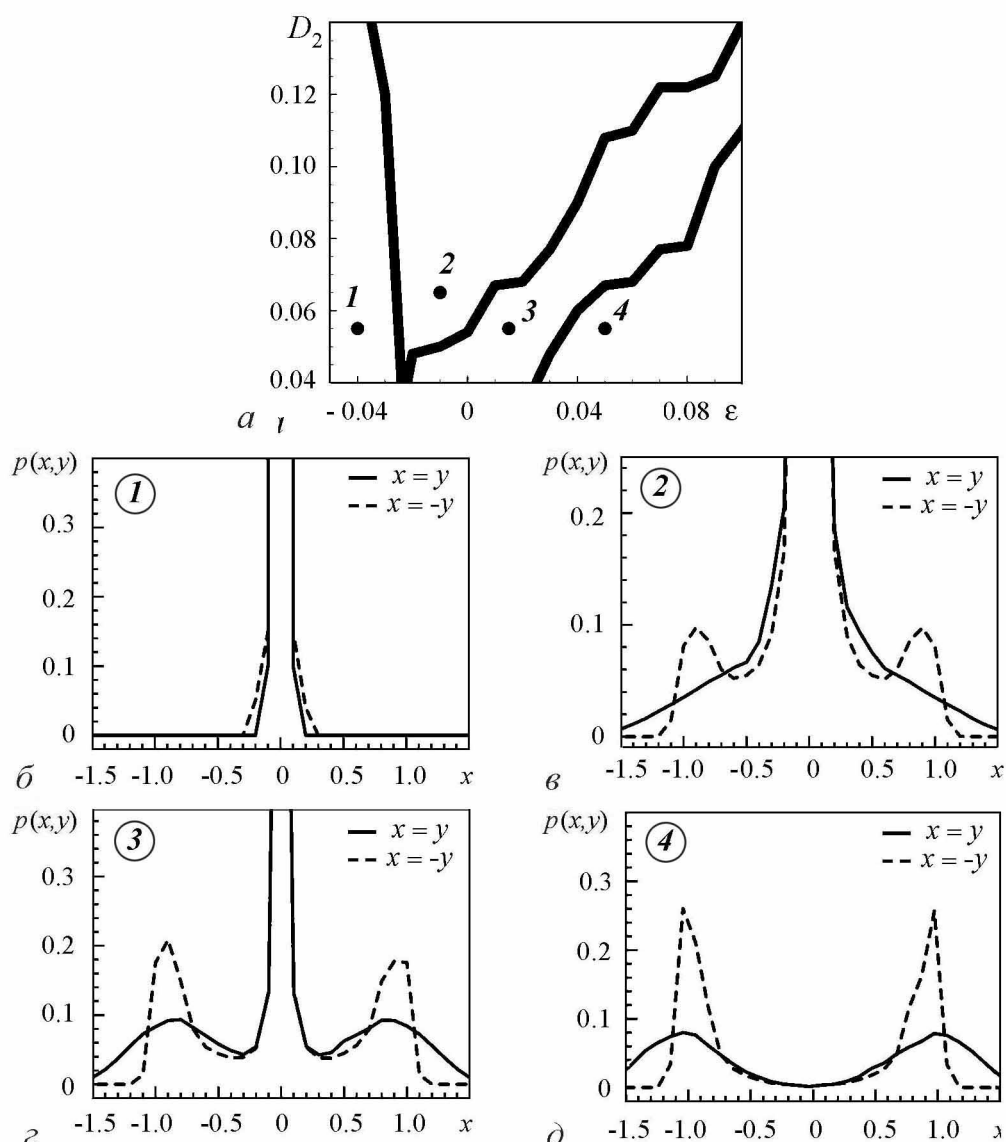


Рис. 8. Диаграмма режимов для модели (7) (а) и экспериментально полученные сечения поверхности $p(x, y)$ плоскостями $x = y$ и $x = -y$ в отмеченных на диаграмме точках (\bar{b} – \bar{d}) (натурный эксперимент)

максимума распределения, носит запаздывающий характер. Кроме того, полученные результаты показывают наличие бифуркационного интервала у седло-узловой бифуркации. В то же время, в случае параметрического шума не было обнаружено бифуркационного интервала для субкритической бифуркации Андронова–Хопфа.

Выводы

Проведенное экспериментальное исследование стохастических бифуркаций в генераторе с субкритической бифуркацией Андронова–Хопфа показало, что ангармоничность, присущая системе и проявляющаяся при действии шума, значительно усложняет характер стохастических бифуркаций по сравнению с квазигармониче-

ской теорией. Экспериментально было установлено существование бифуркационного интервала в случае субкритической бифуркации Андронова–Хопфа при аддитивном шуме и показан характер эволюции вероятностного распределения при пересечении границ бифуркационного интервала. Ранее существование бифуркационного интервала было показано для суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа [3–7, 11].

Проведенные исследования также свидетельствуют, что бифуркационный интервал возникает и у седло-узловой бифуркации циклов, имеющей место в генераторе с жестким возбуждением. Установленный в проведенных экспериментах запаздывающий характер бифуркации Андронова–Хопфа при действии мультипликативного шума находится в соответствии с теоретическими данными [4, 8] и экспериментальными результатами [5], полученными для суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа в случае цветного мультипликативного шума, а также с результатами исследования осциллятора Хопфа [10, 13] при белом мультипликативном шуме. Из всего выше изложенного можно сделать вывод об общем характере эффекта «запаздывания» стохастических бифуркаций в системах с мультипликативным шумом.

Работа частично поддержана грантом РФФИ (№ 15-02-02288) и Министерством образования и науки РФ в рамках гос. задания (код проекта 1008).

Библиографический список

1. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
Horsthemke W., Lefever R. Noise induced transitions. Theory and applications in physics, chemistry and biology. Springer, Berlin, 1984.
2. *Arnold L.* Random Dynamical System. Berlin: Springer, 2003.
3. *Ebeling W., Herzel H., Richert W., Schimansky-Geier L.* Influence of noise on Duffing–van der Pol oscillators // *Zeitschrift angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*. 1986. Vol. 66. P. 141.
4. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56. P. 1631.
5. *Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F.* Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // *Phys. Rev. F*. 1987. Vol. 36. P. 834.
6. *Sri Namachchivaya N.* Stochastic bifurcation // *Appl. Math. And. Computation*. 1990. Vol. 38. P. 101.
7. *Arnold L., Sri Namachchivaya N., Schenk-Yoppé K.R.* Toward an understanding of stochastic Hopf bifurcation: A base study // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1996. Vol. 6. P. 1947.
8. *Olarrea J., de la Rubia F.J.* Stochastic Hopf bifurcation: The effect of colored noise on the bifurcation interval // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 53(1). P. 268.
9. *Schenk-Yoppé K.R.* Bifurcation scenarios of the noisy Duffing–van der Pol oscillator // *Nonlinear Dynamics*. 1996. Vol. 11. P. 255.
10. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances // *Chaos, Solitons, and Fractals*. 2009. Vol. 39. P. 7.
11. *Semenov V.V., Vadivasova T.E., Anishchenko V.S.* Experimental investigation of pro-

bability distribution in self-sustained oscillators with additive noise// Techn. Physics Letters. 2013. Vol. 39, № 7. P. 632.

12. Семенов В.В., Загорецкий К.В., Вадивасова Т.Е. Экспериментальное исследование стохастической бифуркации Андронова–Хопфа в автогенераторах с аддитивным и параметрическим шумом // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 3. С. 1.
13. Башкирцева И.А., Первалова Т.В., Ряшко Л.Б. Анализ индуцированных шумом бифуркаций в системе Хопфа // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 1. С. 37.
14. Стратонович Р.Л. Случайные процессы в динамических системах. Москва; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2009.
15. Ushakov O.V., Wünsche H.-J., Henneberger F., Khovanov I.A., Schimansky-Geier L., Zaks M.A. Coherence resonance near a Hopf bifurcation // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 123903(4).
16. Вадивасова Т.Е., Захарова А.С., Анищенко В.С. Индуцированные шумом бифуркации в бистабильном генераторе // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 2. С. 114.
17. Zakharova A., Vadivasova T., Anishchenko V., Koseska A., Kurths J. Stochastic bifurcations and coherencelike resonance in a self-sustained bistable noisy oscillator // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81(1). P. 011106(1–6).
18. Xu Y., Gu R., Zhang H., Xu W., Duan J. Stochastic bifurcations in a bistable Duffing-Van der Pol oscillator with colored noise // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 83(1). P. 056215(1–7).
19. Вадивасова Т.Е., Маляев В.С. Бифуркации в генераторе ван дер Поля с жестким возбуждением в присутствии параметрического шума. Квазигармонический анализ и численный эксперимент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21, № 2. С. 113.
20. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
21. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002.

Поступила в редакцию 2.09.2014
После доработки 19.11.2014

EXPERIMENTAL STUDY OF STOCHASTIC PHENOMENA IN A SELF-SUSTAINED OSCILLATOR WITH SUBCRITICAL ANDRONOV–HOPF BIFURCATION

V. V. Semenov, A. S. Listov, T. E. Vadivasova

Saratov State University

The effect of noise on the self-sustained oscillator near subcritical Andronov–Hopf bifurcation is studied in numerical and full-scale experiments. Van der Pol oscillator is chosen as base model for investigation. The influence of both additive and multiplicative

Gaussian white noise is considered. The regularities of evolution of the probability distribution in the self-sustained oscillator are analyzed with increase of the noise intensity for the cases of additive and parametric noise. The existence of a bifurcation interval is established experimentally for subcritical Andronov–Hopf bifurcation in the presence of additive noise. Besides of this, the existence of a bifurcation interval is shown for the tangent bifurcation. The postponed character of the Andronov–Hopf bifurcation is confirmed for a multiplicative (parametric) noise excitation. The results of the full-scale modeling are compared with the numerical data.

Keywords: Subcritical Andronov–Hopf bifurcation, additive noise, parametric noise, stochastic bifurcation, bifurcational interval.



Семенов Владимир Викторович – родился в Саратове (1990). Студент пятого курса физического факультета СГУ кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов – применение методов нелинейной динамики к задаче о скрытой передаче информации, исследование различных явлений в натурном радиофизическом эксперименте. Автор нескольких научных публикаций.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: vsemenov90@mail.ru



Листов Александр Серафимович – родился в Саратове (1941). Окончил физический факультет СГУ (1963), кандидат физико-математических наук. В настоящее время – доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: методы анализа автоколебательных систем.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: aleksandrlistov@rambler.ru



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: vadivasovate@yandex.ru