



МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОЙ ПРОВЕРКИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ АТТРАКТОРОВ ДЛЯ РЕДУЦИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

В. П. Круглов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал

Метод проверки гиперболической природы хаотических аттракторов, основанный на анализе статистики распределения углов между подпространствами устойчивых и неустойчивых направлений, применяется к редуцированным конечномерным моделям нескольких распределенных систем, сконструированных на основе модификации уравнений Свифта–Хохенберга и модели брюсселятора, а также к задаче о параметрическом возбуждении стоячих волн модулированным сигналом накачки.

Ключевые слова: Однородно гиперболический аттрактор, структурная устойчивость, показатель Ляпунова.

Введение. Описание метода

Аттракторы, состоящие только из седловых траекторий, устойчивые и неустойчивые многообразия которых могут пересекаться лишь трансверсально, называют однородно гиперболическими [1–5]. Из трансверсальности многообразий следует свойство структурной устойчивости: устройство их фазового пространства и характер динамики нечувствительны к изменению параметров и функций, входящих в уравнения. Примеры физически реализуемых систем с однородно гиперболическими аттракторами были предложены недавно в работах С.П. Кузнецова и соавторов [6–12], причем некоторые из них относятся к категории распределенных систем и описываются уравнениями в частных производных. Существует необходимость проверки гиперболичности аттракторов этих систем на базе математически обоснованных методик.

Известный критерий конусов [1–5, 7, 13] позволяет подтвердить гиперболичность аттрактора с высокой достоверностью, но его использование требует значительных вычислительных ресурсов и, что наиболее существенно, затруднительным представляется его распространение на случай систем высокой размерности фазового пространстве, в том числе на распределенные системы.

Альтернативный метод состоит в анализе распределений углов между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями на аттракторе [2, 14].

Предположим, что необходимо проверить гиперболичность аттрактора некоторого отображения $M : x_{n+1} = M(x_n)$, имеющего размерность фазового пространства k . Если аттрактор гиперболический, то в любой его точке пространство векторов малых возмущений представляется как прямая сумма двух инвариантных подпространств, являющихся касательными к устойчивому и неустойчивому многообразиям [5].

Пусть неустойчивое подпространство одномерным (во всех рассмотренных ниже примерах это так), тогда устойчивое подпространство имеет размерность $k - 1$.

Неустойчивый вектор в точках произвольной траектории на аттракторе можно получить, выполняя многократные итерации отображения M совместно с линеаризованным отображением $DM : \delta x_{n+1} = DM(x_n)\delta x_n$. С другой стороны, для той же траектории в обратном времени можно провести многократные итерации набора из $k - 1$ линеаризованных отображений DM , подвергая полученные на каждой итерации векторы процедуре ортогонализации и нормировки. Таким образом, для каждой точки траектории находим касательный вектор к неустойчивому многообразию и ортонормированный базис гиперповерхности, касательной к устойчивому многообразию. Это позволяет определить угол между устойчивым и неустойчивым подпространствами. Отсутствие углов, близких к нулю, свидетельствует о гиперболической природе аттрактора. С другой стороны, обнаружение близких к нулю углов говорит о нарушении гиперболичности.

Хотя описанный тест не может претендовать на строгое обоснование гиперболичности аттрактора, он позволяет на практике различать гиперболические и негиперболические аттракторы. В описанной выше форме, однако, использование этого метода вызывает трудности для систем высокой размерности, поскольку требует выполнения решения большого числа уравнений в вариациях. Благодаря недавно открытым алгоритмам вычисления ковариантных ляпуновских векторов [15] появилась возможность модифицировать этот метод [16]. Как и в исходной версии метода, для определения вектора, принадлежащего неустойчивому подпространству, в прямом времени осуществляются итерации линеаризованного отображения DM . Для итераций в обратном времени вдоль той же траектории вводится сопряженное линеаризованное отображение DM^T . Для него матрица Якоби, отвечающая линеаризованному отображению DM , транспонируется и берется с обратным знаком. В результате в коде итераций в каждой точке траектории получается вектор, ортогональный гиперповерхности, касательной к устойчивому многообразию.

Опишем алгоритм более детально, имея в виду его применение к аттракторам в сечении Пуанкаре систем обыкновенных дифференциальных уравнений. На первом этапе решаем численно систему уравнений $\dot{x} = F(x, t)$ совместно с уравнениями в вариациях $\delta\dot{x} = F'(x, t)\delta x$, нормируя вектор возмущения на каждом шаге, пока не установится режим, соответствующий хаотическому аттрактору, а вектор возмущения будет принадлежать неустойчивому подпространству. На втором этапе, продолжая вычисления, на каждой итерации отображения Пуанкаре записываем в файл значения динамических переменных $x = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ и компонент вектора возмущения $\delta x = \{\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_k\}$. Этот участок траектории должен быть достаточно длинным. На третьем этапе продолжаем решать уравнения и записы-

вать в файл значения динамических переменных на каждой итерации отображения Пуанкаре. На четвертом этапе движемся вдоль записанной в файл опорной траектории в обратном времени и численно решаем сопряженные уравнения в вариациях $\delta \dot{\mathbf{u}} = -[\mathbf{F}'(\mathbf{x}, t)]^T \delta \mathbf{u}$. Когда процедура доходит до участка траектории, где записывался вектор возмущения в прямом времени, начинаем записывать вектор возмущения сопряженной системы на каждой итерации отображения Пуанкаре. В результате для точек на длинном отрезке траектории получаем набор векторов $\{\delta \mathbf{x}_n\}$, касательных к неустойчивому многообразию, и набор векторов $\{\delta \mathbf{u}_n\}$, ортогональных к устойчивому многообразию. В каждой точке можно найти угол $\beta_n \in [0, \pi/2]$ между векторами $\delta \mathbf{x}_n$ и $\delta \mathbf{u}_n$ по теореме косинусов. Соответственно, угол между устойчивым и неустойчивым подпространствами в этой точке $\alpha_n = \pi/2 - \beta_n$.

Если система дифференциальных уравнений автономная, на каждом шаге итераций из векторов возмущения необходимо исключить составляющую, отвечающую одномерному нейтральному подпространству. Для этого из вектора возмущения вычитается вектор \mathbf{F} , направленный вдоль траектории, компоненты которого отвечают функциям в правых частях уравнений, с выбранным надлежащим образом коэффициентом (скалярное произведение вектора возмущения и нормированного на единицу вектора \mathbf{F}).

В данной работе описанная методика проверки гиперболичности применяется к редуцированным конечномерным моделям распределенных систем, которые предположительно имеют хаотические аттракторы типа Смейла–Вильямса.

1. Исследуемые системы и их конечномерные модели

1.1. Автономная система на основе уравнения Свифта–Хохенберга. В статье [8] предложен пример автономной распределенной системы на основе модификации уравнения Свифта–Хохенберга [13], описывающей возникновение и затухание в одномерной среде структур, пространственная фаза которых на определенном характерном периоде претерпевает удвоение (с обратным знаком). Модель описывается системой уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \partial_t u + (1 + \partial_x^2)^2 u &= (\mu + u^2 - v^2/5)u + \varepsilon v \cos 3x, \\ \partial_t v &= (u^2 - 1)v + u^2, \end{aligned} \quad (1)$$

с периодическими граничными условиями

$$u(x, t) = u(x + L, t), \quad v(x, t) = v(x + L, t). \quad (2)$$

Первое уравнение системы (1) представляет собой модифицированное уравнение Свифта–Хохенберга. Функция $\varepsilon \cos 3x$ в последнем слагаемом правой части описывает пространственную неоднородность среды. Второе уравнение – вспомогательное и не содержит производных по координате.

В соответствии с граничными условиями (2) функция, описывающая паттерн в фиксированный момент времени, периодическая по координате x , поэтому переменные u и v можно разложить в ряд Фурье.

Качественно функционирование системы можно описать следующим образом. Когда величина $\mu + u^2 - v^2/5$, входящая в первое уравнение системы (2), стано-

вится больше нуля, переменная u нарастает, при этом основной вклад в ее величину вносит первая пространственная гармоника с фазой φ : $u \approx |U_1| \cos(x + \varphi)$. Когда величина $u^2 - 1$, входящая во второе уравнение, становится больше нуля, нарастает переменная v , при этом возбуждаются нулевая и вторая пространственные гармоники, и за счет присутствия слагаемого u^2 , второй гармонике передается удвоенная фаза: $|V_2| \cos(2x + 2\varphi)$. Произведение второй гармоники переменной v и функции, описывающей пространственную неоднородность среды, обеспечивает передачу первой гармонике переменной u удвоенной фазы с обратным знаком: $\cos(2x + 2\varphi) \cos 3x = \cos(x - 2\varphi)/2 + \dots$. Далее переменные u и v убывают, и остаются близкими к нулю, пока величина $\mu + u^2 - v^2/5$ снова не станет положительной. Таким образом, на каждой стадии возбуждения фазы пространственных спектральных компонент претерпевают удвоение с изменением знака: $\varphi_{n+1} = -2\varphi_n$. Это – растягивающее отображение окружности, демонстрирующее хаос с показателем Ляпунова, равным $\ln 2 \approx 0.6931$.

Система уравнений (1)–(2) решалась численно с помощью явно-неявной разностной схемы. На рис. 1 представлена пространственно-временная зависимость переменных u и v при значениях параметров, указанных в подписи к рисунку. Колебания переменной u в среде представляют собой длительные стадии роста возмущений, чередующиеся с резкими спадами почти до нуля. Средний период между последовательными сбросами возбуждения в данном режиме составил $\tau = 50.37$. Можно видеть, что фазовый сдвиг от паттерна к паттерну меняется нерегулярно.

Поскольку функционирование распределенной системы основано на взаимодействии пространственных гармоник, приближенно динамику можно описать конечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, в качестве переменных которой выступают несколько наиболее значимых фурье-компонент переменных u и v . Представим решение уравнений (1)–(2) в виде усеченных рядов Фурье

$$\begin{aligned} u &= C_1 e^{ix} + C_1^* e^{-ix}, \\ v &= w + C_2 e^{2ix} + C_2^* e^{-2ix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь C_1 – комплексная амплитуда первой гармоники переменной u ; C_2 – комплексная амплитуда второй гармоники переменной v ; w – вещественная амплитуда нулевой гармоники переменной v . Подставляя соотношения (3) в уравнения (1), умножая

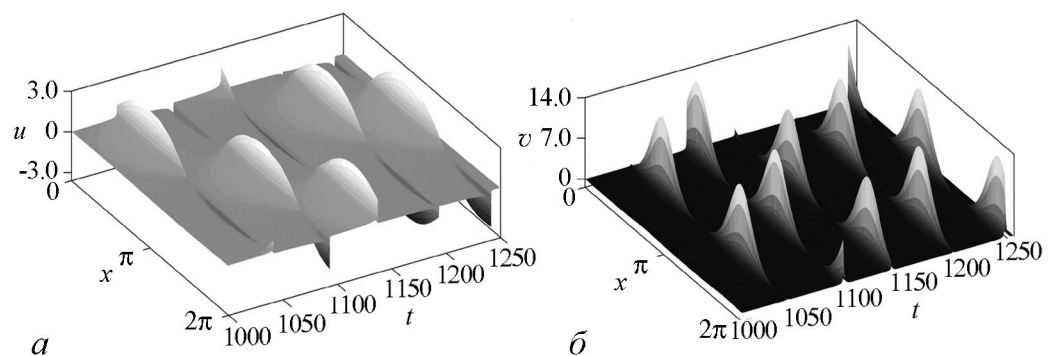


Рис. 1. Пространственно-временные реализации переменных u (а) и v (б) при значениях параметров $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$, $L = 2\pi$, $\Delta t = 0.001$, $\Delta x = L/64 \approx 0.098$

первое из получившихся выражений на e^{-ix} , а второе на e^{-2ix} или 1, и усредняя их в каждом случае по пространственному периоду 2π , приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= \left(\mu - \frac{1}{5}w^2 + 3|C_1|^2 - \frac{2}{5}|C_2|^2\right)C_1 - \frac{2}{5}C_2C_1^*w + \frac{1}{2}\varepsilon C_2^*, \\ \dot{C}_2 &= (2|C_1|^2 - 1)C_2 + (w + 1)C_1^2, \\ \dot{w} &= -w + 2\operatorname{Re}(C_2C_1^{*2}) + 2|C_1|^2(w + 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Система уравнений (4) решалась численно с помощью метода Рунге–Кутты четвертого порядка при $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$. Для построения отображения Пуанкаре секущая поверхность задавалась условием $S = |C_1| - 1 = 0$, причем отслеживаются значения переменных в моменты времени, когда пересечение этой поверхности сопровождается уменьшением абсолютной величины переменной C_1 .

На рис. 2, *а* изображена диаграмма для фазы переменной C_1 . Как видно из диаграммы, динамика фазы в конечномерной системе описывается растягивающим отображением окружности. На рис. 2, *б* изображена проекция аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскость действительной и мнимой частей переменной C_1 . Предположительно, аттрактор в сечении Пуанкаре представляет собой соленоид Смейла–Вильямса.

Для аттрактора потоковой системы вычислялись показатели Ляпунова по алгоритму Бенеттина с ортогонализацией по Граму–Шмидту. При значениях параметров $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$ показатели Ляпунова составили $\lambda = \{0.0123, 0, -0.892, -0.951, -0.972\}$. Поскольку средний период между последовательными прохождениями сечения Пуанкаре равен $\tau = 52.61$, старший показатель Ляпунова для отображения Пуанкаре $\Lambda_1 = \lambda_1\tau = 0.65$, что приблизительно соответствует показателю Ляпунова растягивающего отображения окружности $\ln 2$. Остальные показатели Ляпунова отображения Пуанкаре отрицательные (нулевой показатель, полученный для потоковой системы, у отображения отсутствует). Таким образом, элемент объема в фазовом пространстве отображения Пуанкаре испытывает за одну итерацию растяжение по одному направлению и сжатие по трем направлениям. Это соответствует построению гиперболического аттрактора типа Смейла–Вильямса (растяжение происходит по угловой переменной) в четырехмерном фазовом пространстве.

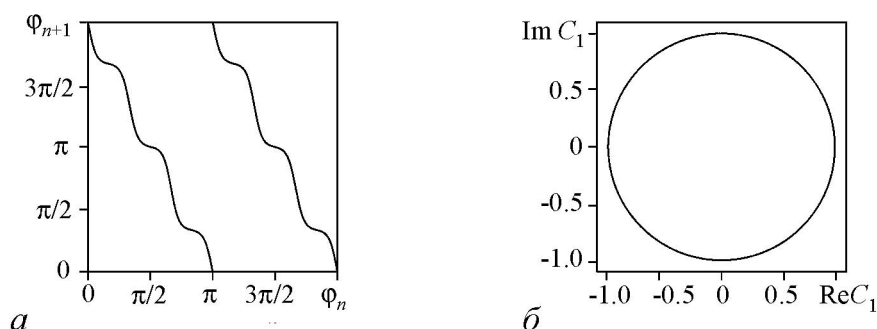


Рис. 2. Итерационная диаграмма для фазы переменной C_1 (*а*) и проекция аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскость действительной и мнимой частей переменной C_1 (*б*). Параметры $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$

Используя вместо (3) подстановки с большим числом гармоник, можно построить более точные конечномерные модели с гиперболическими аттракторами. В частности, используя вместо (3) соотношения

$$\begin{aligned} u &= C_1 e^{ix} + C_1^* e^{-ix}, \\ v &= w + C_2 e^{2ix} + C_2^* e^{-2ix} + C_4 e^{4ix} + C_4^* e^{-4ix}, \end{aligned} \quad (5)$$

где C_4 – комплексная амплитуда четвертой гармоники переменной v , на основе уравнений (2), получим систему

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= (\mu - \frac{1}{5}w^2 + 3|C_1|^2 - \frac{2}{5}|C_2|^2 - \frac{2}{5}|C_4|^2)C_1 - \frac{2}{5}C_2 C_1^* w - \\ &\quad - \frac{2}{5}C_1^* C_2^* C_4 + \frac{1}{2}\varepsilon(C_2^* + C_4), \\ \dot{C}_2 &= (2|C_1|^2 - 1)C_2 + C_4 C_1^{*2} + (w + 1)C_1^2, \\ \dot{C}_4 &= (2|C_1|^2 - 1)C_4 + C_1^2 C_2, \\ \dot{w} &= -w + 2\text{Re}(C_2 C_1^{*2}) + 2|C_1|^2(w + 1). \end{aligned} \quad (6)$$

(В подстановке (5) не учитываются гармоники переменной u , следующие за первой, так как их амплитуды оказываются намного меньше, чем амплитуда первой гармоники.)

Система уравнений (6) решалась численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Сечение Пуанкаре определялось так же, как и для системы (4).

Динамика фазы (рис. 3, *а*) приближенно описывается растягивающим отображением окружности. Преобразование фазы в системе (6) по сравнению с системой (4) оказывается сглаженным, благодаря учету дополнительной гармоники. На рис. 3, *б* изображена проекция аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскость действительной и мнимой частей переменной C_1 . Предположительно, аттрактор в сечении Пуанкаре представляет собой соленоид Смейла–Вильямса.

Показатели Ляпунова для аттрактора при значениях параметров $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$ составили $\lambda = \{0.0135, 0, -0.841, -0.934, -0.955, -0.96, -0.9639\}$. Средний период между последовательными сечениями $\tau = 49.6$, поэтому старший показатель Ляпунова отображения Пуанкаре $\Lambda_1 = \lambda_1 \tau = 0.67$, то есть близок

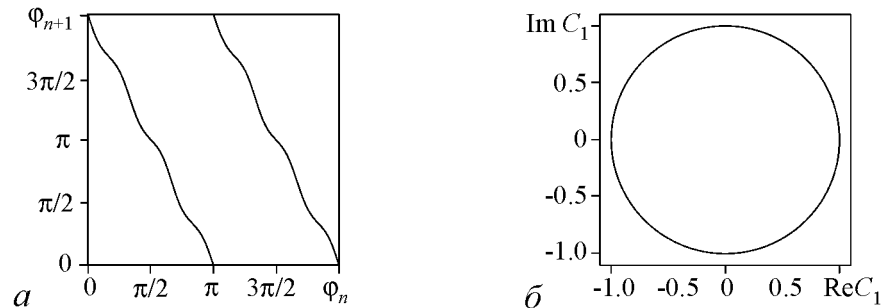


Рис. 3. Итерационная диаграмма для фазы переменной C_1 (*а*) и проекция аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскость действительной и мнимой частей переменной C_1 (*б*). Параметры $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$

к величине $\ln 2$, отвечающей равномерно растягивающему отображению окружности. Остальные показатели Ляпунова отрицательны. Это соответствует построению гиперболического аттрактора типа Смейла–Вильямса (если учесть, что растяжение происходит по угловой переменной) в шестимерном фазовом пространстве.

1.2. Система на основе брюсселятора. В работе [9] предложена модель неавтономной распределенной системы на основе системы типа брюсселятор [17, 18] с аттрактором Смейла–Вильямса. Модель описывается системой уравнений в частных производных

$$\begin{aligned}\partial_t u &= (A - u)(1 + \varepsilon \cos 3k_0 x) - Bu + u^2 v + \gamma(t) \sigma \partial_{xx} u, \\ \partial_t v &= Bu - u^2 v + \gamma(t) \partial_{xx} v,\end{aligned}\tag{7}$$

где

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1, & nT < t \leq nT + T/2, \\ 1/4, & nT + T/2 < t \leq (n+1)T. \end{cases}$$

Граничные условия – периодические:

$$u(x, t) = u(x + L, t), \quad v(x, t) = v(x + L, t),\tag{8}$$

где L – пространственный период. Фактор $(1 + \varepsilon \cos 3k_0 x)$ описывает пространственную неоднородность затухания в среде. Функция $\gamma(t)$ описывает периодическое переключение коэффициентов диффузии. В соответствии с периодическими граничными условиями, функции u и v периодические по координате и могут быть представлены рядами Фурье.

Система функционирует следующим образом. На первой половине периода модуляции ($nT < t \leq nT + T/2$) наиболее значимый вклад вносит первая пространственная гармоника, которая характеризуется некоторой фазой φ : $\cos(k_0 x + \varphi)$. На второй половине периода модуляции ($nT + T/2 < t \leq (n+1)T$), вторая пространственная гармоника $\cos(2k_0 x + 2\varphi)$ нарастает, а первая гармоника затухает. На следующем периоде первая гармоника возбуждается под воздействием возмущения, обусловленного произведением второй гармоники u и функции $(1 + \varepsilon \cos 3k_0 x)$, учитывающей пространственную неоднородность. Этим обеспечивается передача первой гармонике вновь возникающего паттерна удвоенной пространственной фазы (с обратным знаком), что следует из соотношения $\cos(2k_0 x + 2\varphi) \cos 3k_0 x = 1/2 \cos(k_0 x - 2\varphi) + \dots$. Этот процесс повторяется на каждом периоде. Таким образом, пространственные фазы на последовательных стадиях формирования волновых структур эволюционируют в соответствии с растягивающим отображением окружности $\varphi_{n+1} = -2\varphi_n + \text{const}$. Это хаотическое отображение характеризуется положительным показателем Ляпунова $\Lambda = \ln 2 = 0.693 \dots$

Уравнения (7)–(8) решались численно при значениях параметров $A = 2$, $B = 4.1$, $\sigma = 0.25$, $\varepsilon = 0.03$. Пространственный период был задан $L = 2\pi$, а период модуляции $T = 32\pi$. При таком выборе параметров волновое число, отвечающее максимальной неустойчивости, составляет $k_0 = \sqrt[4]{A^2/\sigma} = 2$. На рис. 4 показаны

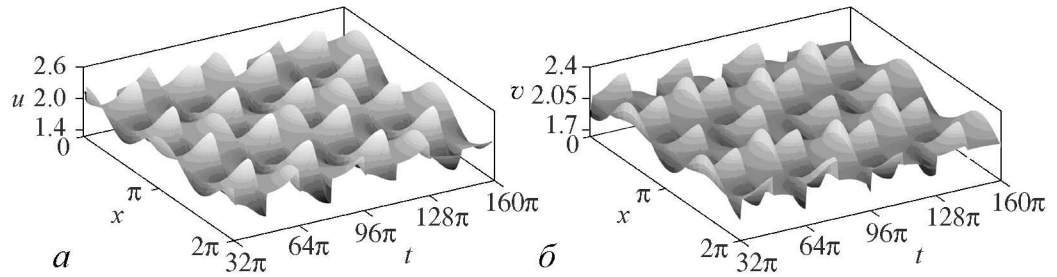


Рис. 4. Пространственно-временные реализации переменных u (а) и v (б) при значениях параметров $A = 2$, $B = 4.1$, $\sigma = 0.25$, $\varepsilon = 0.03$, $L = 2\pi$, $T = 32\pi$, $k_0 = 2$

пространственно-временные реализации, полученные в численных расчетах для переменных u и v . Можно видеть, что фазовый сдвиг от паттерна к паттерну меняется нерегулярным образом.

Так как работа системы основана на взаимодействии пространственных гармоник переменных u и v , можно свести ее описание к конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд наиболее значительных мод – первых слагаемых разложенного в ряды Фурье возмущения в окрестности неподвижной точки $(A, B/A)$ системы (7)–(8). Минимальный набор укороченных уравнений, который адекватно описывает динамику, можно получить с помощью подстановки

$$u(x, t) = A + x_1 \cos 2x + u_1 \sin 2x + x_2 \cos 4x + u_2 \sin 4x,$$

$$v(x, t) = B/A + y_1 \cos 2x + v_1 \sin 2x + y_2 \cos 4x + v_2 \sin 4x.$$

Коэффициенты Фурье x_1, u_1, x_2, u_2 и y_1, v_1, y_2, v_2 – это новые переменные, зависящие только от времени. Подставляя эти разложения в (7), после усреднения по пространственному периоду 2π получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - \varepsilon x_2/2 - Bx_1 - 4\sigma x_1 \gamma(t) + F_1, \\ \dot{u}_1 &= -u_1 + \varepsilon u_2/2 - Bu_1 - 4\sigma u_1 \gamma(t) + G_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - \varepsilon x_1/2 - Bx_2 - 16\sigma x_2 \gamma(t) + F_2, \\ \dot{u}_2 &= -u_2 + \varepsilon u_1/2 - Bu_2 - 16\sigma u_2 \gamma(t) + G_2, \\ \dot{y}_1 &= Bx_1 - 4y_1 \gamma(t) - F_1, \\ \dot{v}_1 &= Bu_1 - 4v_1 \gamma(t) - G_1, \\ \dot{y}_2 &= Bx_2 - 16y_2 \gamma(t) - F_2, \\ \dot{v}_2 &= Bu_2 - 16v_2 \gamma(t) - G_2, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_1 &= (2B + u_1v_1/2 + u_2v_2 + x_2y_2 + 3x_1y_1/4)x_1 + (A^2 + x_2^2/2 + u_2^2/2 + u_1^2/4)y_1 + \\
 &\quad + A(u_1v_2 + u_2v_1 + x_1y_2 + x_2y_1) + BA^{-1}(u_1u_2 + x_1x_2), \\
 G_1 &= (2B + x_1y_1/2 + u_2v_2 + x_2y_2 + 3u_1v_1/4)u_1 + (A^2 + x_2^2/2 + u_2^2/2 + x_1^2/4)v_1 + \\
 &\quad + A(x_1v_2 + u_2y_1 - u_1y_2 - v_1x_2) + BA^{-1}(x_1u_2 - u_1x_2), \\
 F_2 &= (2B + u_1v_1 + x_1y_1 + u_2v_2/2 + 3x_2y_2/4)x_2 + (A^2 + x_1^2/2 + u_1^2/2 + u_2^2/4)y_2 + \\
 &\quad + A(x_1y_1 - u_1v_1) + BA^{-1}(x_1^2 - u_1^2)/2, \\
 G_2 &= (2B + u_1v_1 + x_1y_1 + x_2y_2/2 + 3u_2v_2/4)u_2 + (A^2 + x_1^2/2 + u_1^2/2 + x_2^2/4)v_2 + \\
 &\quad + A(x_1v_1 + u_1y_1) + BA^{-1}x_1u_1.
 \end{aligned} \tag{10}$$

На рис. 5, а можно видеть, что динамика фазы описывается растягивающим отображением окружности. На рис. 5, б изображен аттрактор стробоскопического отображения в проекции на плоскость переменных x_1 и u_1 . Визуально аттрактор можно отнести к аттракторам типа Смейла–Вильямса.

Показатели Ляпунова стробоскопического отображения Пуанкаре составили $\Lambda = \{0.672, -2.49, -138.14, -148.25, -351.65, 362.86, -1263.72, -1264.64\}$. Отметим, что старший показатель положителен и близок к $\ln 2$, а остальные – отрицательны, что соответствует аттрактору типа Смейла–Вильямса в восьмимерном фазовом пространстве стробоскопического отображения Пуанкаре.

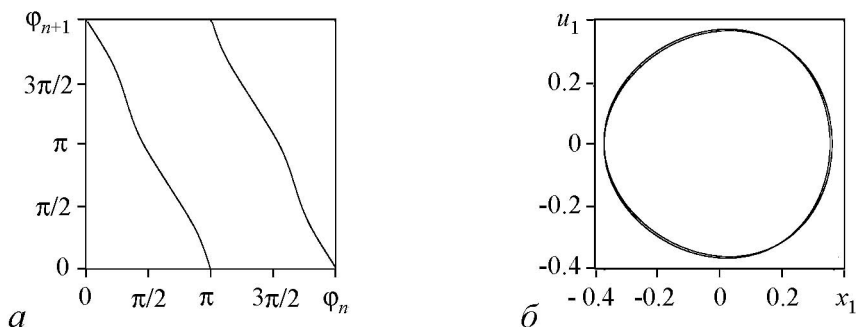


Рис. 5. Итерационная диаграмма для фазы $\varphi = \arctan(u_1/x_1)$ (а) и проекция аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскость переменных x_1 и u_1 (б). Параметры $A = 2$, $B = 4.1$, $\sigma = 0.25$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 32\pi$

1.3. Параметрическое возбуждение стоячих волн. В работах [6, 7, 12] предложена система, в которой осуществляется параметрическое возбуждение длинноволновых и коротковолновых паттернов стоячих волн благодаря соответствующим образом заданной модуляции накачки. Примером может служить нелинейная струна. Уравнение в частных производных имеет вид

$$\rho(x) \partial_t^2 u = -(\alpha + u^2) \partial_t u - \gamma u + G(t) \partial_x^2 u. \quad (11)$$

Граничные условия – периодические:

$$u(x, t) = u(x + L, t). \quad (12)$$

Слагаемое $-(\alpha + u^2) \partial_t u$ обеспечивает нелинейную диссипацию, слагаемое $-\gamma u$ подавляет возмущения с волновым числом $k = 0$. Присутствие нелинейной диссипации необходимо для стабилизации параметрической неустойчивости на некотором уровне амплитуды колебаний, однако для рассматриваемой здесь системы весьма существенным является еще и то обстоятельство, что кубическая нелинейность обеспечивает возникновение третьей и других нечетных гармоник при колебательно-волновых движениях. Функция $\rho(x) = 1 + \varepsilon \sin 4k_0 x$ описывает линейную плотность струны, при малом значении ε распределение массы вдоль струны – слабо неоднородное. Функция $G(t) = 1 + a \cos^2(2\pi t/T) \sin 2\omega_0 t + b \sin^2(2\pi t/T) \sin 6\omega_0 t$ описывает натяжение струны, величины a и b неотрицательные, $a + b < 1$. Частота ω_0 и волновое число k_0 равны друг другу. Длину L примем равной целому числу длин волн с волновым числом k_0 : $L = 2\pi N/k_0$.

Предположим, что при накачке на частоте $2\omega_0$ в системе возбуждена стоячая волна на частоте ω_0 с волновым числом k_0 , у которой расположение узлов и пучностей характеризуется фазовой постоянной θ , так что в грубом приближении $u \sim \cos \omega_0 t \sin(k_0 x + \theta)$.

Амплитуда волны стабилизируется на конечном уровне благодаря нелинейной диссипации, и из-за ее присутствия колебательно-волновое движение будет иметь также составляющую на третьей гармонике. Пространственная фаза гармоники на частоте $3\omega_0$ будет, очевидно, даваться величиной 3θ .

На следующем этапе временной эволюции амплитуда накачки на частоте $2\omega_0$ становится малой, и колебания на частоте ω_0 затухают. Амплитуда накачки на частоте $6\omega_0$, с другой стороны, с какого-то момента оказывается достаточной для развития параметрической неустойчивости стоячей волны с частотой $3\omega_0$ и волновым числом $3k_0$. Эта волна формируется из начального возмущения, отвечающего третьей гармонике волны, существовавшей на предыдущей стадии, так что пространственная фаза будет определяться величиной 3θ .

Далее вновь наступает стадия интенсивной накачки на частоте $2\omega_0$. Теперь затравочное колебательно-волновое возбуждение с волновым числом k_0 обеспечивается комбинацией возмущения $u \sim \cos 3\omega_0 t \sin(3k_0 x + 3\theta)$, оставшегося от предыдущей стадии. Поскольку эта комбинация содержит слагаемое, пропорциональное $\cos \omega_0 t \sin(k_0 x - 3\theta)$, новая фаза получается из предыдущей посредством растягивающего отображения окружности: $\theta_{n+1} = -3\theta_n + \text{const}$. Это хаотическое отображение характеризуется положительным показателем Ляпунова $\Lambda = \ln 3 \approx 1.098$. При

наличии сжатия в фазовом пространстве по остальным направлениям, для отображения, описывающего изменение состояния системы за период модуляции накачки, на этом основании можно предположить присутствие аттрактора типа соленоида Смейла–Вильямса. В статье [1] рассмотрены также варианты модели, где для фазы имеет место отображение окружности с растяжением в 5, 7, 9, 11 раз.

Система уравнений (11)–(12) решалась численно с использованием явной схемы типа «крест». На рис. 6 представлена пространственно-временная диаграмма, визуализирующая эволюцию огибающей для паттернов стоячих волн; форма струны показана в моменты, кратные периоду быстрых колебаний. Параметры приведены в подписи к рисунку. Как можно видеть, в системе поочередно возбуждаются длинноволновые и коротковолновые структуры, притом пространственная фаза их меняется от одного периода модуляции накачки к другому, претерпевая растягивающее отображение окружности. Фаза колебаний стоячих волн во времени, с другой стороны, жестко привязана к фазе накачки.

Поскольку параметрическое возбуждение в рассмотренной системе имеет место на волновых числах k_0 и $3k_0$, для сведения к конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, естественно искать решение уравнений (11)–(12) в виде

$$u(x, t) = y_1(t) \cos k_0 x + v_1(t) \sin k_0 x + y_3(t) \cos 3k_0 x + v_3(t) \sin 3k_0 x. \quad (13)$$

Подстановка этого выражения в (11)–(12) и разложение обеих частей уравнения в ряд Фурье с учетом гармоник того же порядка приводят к системе уравнений для коэффициентов

$$\ddot{y}_1 = \frac{F_1 - \varepsilon G_3/2}{1 - \varepsilon^2/4}, \quad \ddot{v}_1 = \frac{G_1 - \varepsilon F_3/2}{1 - \varepsilon^2/4}, \quad \ddot{y}_3 = \frac{F_3 - \varepsilon G_1/2}{1 - \varepsilon^2/4}, \quad \ddot{v}_3 = \frac{G_3 - \varepsilon F_1/2}{1 - \varepsilon^2/4}, \quad (14)$$

где

$$F_1 = -\omega_0 \left(1 + a \cos^2 \frac{\pi t}{T} \sin 2\omega_0 t + b \sin^2 \frac{\pi t}{T} \sin 6\omega_0 t \right) y_1 - \gamma y_1 - \alpha \dot{y}_1 - \\ - \frac{1}{2} \left[(3y_1^2/2 + y_1 y_3 + y_3^2 + v_1^2/2 + v_1 v_3 + v_3^2) \dot{y}_1 + \frac{1}{2} (y_1^2 + 4y_1 y_3 - v_1^2) \dot{y}_3 + \right. \\ \left. + (y_1 v_1 - y_3 v_1 + y_1 v_3) \dot{v}_1 + (y_1 v_1 + 2y_1 v_3) \dot{v}_3 \right],$$

$$G_1 = -\omega_0 \left(1 + a \cos^2 \frac{\pi t}{T} \sin 2\omega_0 t + b \sin^2 \frac{\pi t}{T} \sin 6\omega_0 t \right) v_1 - \gamma v_1 - \alpha \dot{v}_1 - \\ - \frac{1}{2} \left[(3v_1^2/2 - v_1 v_3 + v_3^2 + y_1^2/2 - y_1 y_3 + y_3^2) \dot{v}_1 + \frac{1}{2} (y_1^2 + 4v_1 v_3 - v_1^2) \dot{v}_3 + \right. \\ \left. + (y_1 v_1 - y_3 v_1 + y_1 v_3) \dot{y}_1 + (-y_1 v_1 + 2y_3 v_1) \dot{y}_3 \right],$$

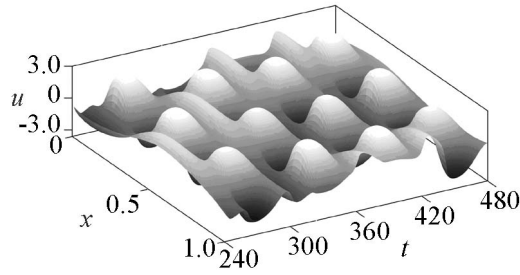


Рис. 6. Пространственно-временные реализации переменной u при значениях параметров $\omega_0 = 2\pi$, $k_0 = 2\pi$, $L = 1$, $a = 0.4$, $b = 0.2$, $\varepsilon = 0.2$, $\alpha = 0.4$, $\gamma = 0.03$, $T = 60$

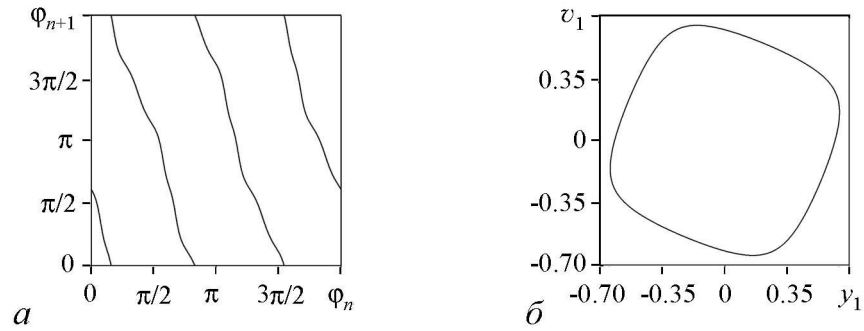


Рис. 7. Итерационная диаграмма для фазы $\varphi = \arctan(v_1 v_1 / y_1)$ (а) и проекция аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскость переменных x_1 и u_1 (б). Параметры $\omega_0 = 2\pi$, $a = 0.4$, $b = 0.2$, $\varepsilon = 0.2$, $\alpha = 0.4$, $\gamma = 0.03$, $T = 60$

$$\begin{aligned}
 F_3 = & -9\omega_0 \left(1 + a \cos^2 \frac{\pi t}{T} \sin 2\omega_0 t + b \sin^2 \frac{\pi t}{T} \sin 6\omega_0 t \right) y_3 - \gamma y_3 - \alpha \dot{y}_3 - \\
 & - \frac{1}{4} \left[(y_1^2 + 4y_1 y_3 - v_1^2) \dot{y}_1 + 2(-y_1 v_1 + 2y_3 v_1) \dot{v}_1 + \right. \\
 & \left. + (2y_1^2 + 2v_1^2 + 3y_3^2 + v_3^2) \dot{y}_3 + 2y_3 v_3 \dot{v}_3 \right], \\
 G_3 = & -9\omega_0 \left(1 + a \cos^2 \frac{\pi t}{T} \sin 2\omega_0 t + b \sin^2 \frac{\pi t}{T} \sin 6\omega_0 t \right) v_3 - \gamma v_3 - \alpha \dot{v}_3 - \\
 & - \frac{1}{4} \left[2(y_1 v_1 + 2y_1 v_3) \dot{y}_1 + (y_1^2 + 4v_1 v_3 - v_1^2) \dot{v}_1 + 2y_3 v_3 \dot{y}_3 + \right. \\
 & \left. + (2y_1^2 + 2v_1^2 + y_3^2 + 3v_3^2) \dot{v}_3 \right].
 \end{aligned}$$

На рис. 7, б изображен аттрактор стробоскопического отображения системы (14) в проекции на плоскость y_1 и v_1 . Визуально его можно отнести к аттракторам типа Смейла–Вильямса. На рис. 7, а приведена итерационная диаграмма для фаз $\varphi = \arctan(v_1 / y_1)$. Можно видеть, что динамика фазы описывается растягивающим отображением окружности.

С помощью алгоритма Бенеттина был вычислен спектр показателей Ляпунова аттрактора стробоскопического отображения Пуанкаре: $\Lambda = \{1.099, -22.1, -30.44, -40.78, -43.61, -46.43, -56.67, -69.97\}$. Отметим, что старший показатель положителен и близок к величине $\ln 3$, а остальные отрицательные. Это соответствует аттрактору типа Смейла–Вильямса в восьмимерном фазовом пространстве стробоскопического отображения Пуанкаре.

2. Результаты численной проверки гиперболической природы аттракторов

Для всех конечномерных моделей систем, описанных в предыдущем разделе, были получены гистограммы распределений углов между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями аттракторов в сечении Пуанкаре.

На рис. 8 представлены гистограммы распределений углов для отображений Пуанкаре пятимерной и семимерной модели модифицированного уравнения Свифта–Хохенберга. Оба распределения дистанцированы от нуля, что подтверждает гиперболическую природу аттракторов. Распределение для пятимерной аппроксимации

более широкое и состоит из нескольких «частей». Более узкое распределение для семимерной аппроксимации означает, что аттрактор устроен примерно одинаково во всех областях. Семимерная модель лучше отражает свойства исходной распределенной системы, чем пятимерная.

На рис. 9 приводится гистограмма распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми направлениями для аттрактора конечномерной модели модифицированного уравнения Брюсселятора. Нулевые углы в распределении отсутствуют, что подтверждает предположение о гиперболичности аттрактора. Отметим, что распределение сосредоточено в очень узком диапазоне углов.

На рис. 10 представлена гистограмма распределения углов для конечномерной модели струны с параметрическим возбуждением. Распределение дистанцировано от нуля, что подтверждает гиперболическую природу аттрактора системы.

Заключение

В данной работе к трем редуцированным конечномерным моделям распределенных систем, предложенных как примеры, характеризующиеся присутствием хаотических аттракторов типа Смейла–Вильямса, была применена предложенная в [12] модифицированная методика проверки гиперболичности. Тест состоит в построении распределения углов между подпространствами устойчивых и неустойчивых направлений на хаотическом аттракторе и позволяет отличить режимы с гиперболическим и негиперболическим аттракторами. Благодаря использованию нового алгоритма [14], метод требует относительно небольшого объема вычислений, поскольку и устойчивое и неустойчивое подпространство задаются лишь одним

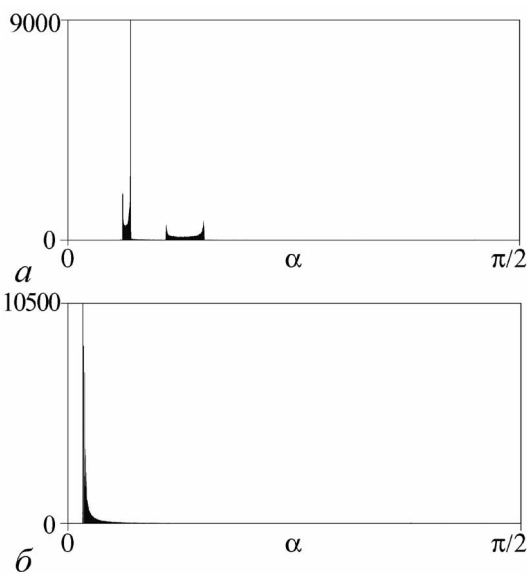


Рис. 8. Гистограмма распределения углов между устойчивым и неустойчивым направлениями на аттракторе в сечении Пуанкаре пятимерной (а) и семимерной (б) модели модифицированного уравнения Свифта–Хохенберга. Параметры $\mu = 0.03$, $\varepsilon = 0.03$

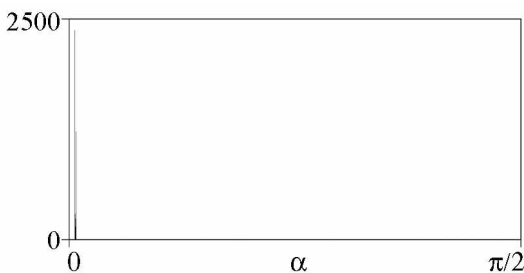


Рис. 9. Гистограмма распределения углов между устойчивым и неустойчивым многообразиями аттрактора в сечении Пуанкаре конечномерной модели модифицированной системы типа Брюсселятора. Параметры $A = 2$, $B = 4.1$, $\sigma = 0.25$, $\varepsilon = 0.03$, $T = 32\pi$

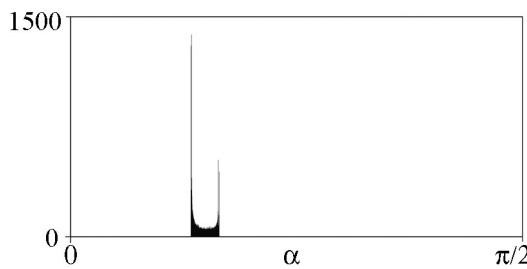


Рис. 10. Гистограмма распределения углов между устойчивым и неустойчивым направлениями на аттракторе в сечении Пуанкаре конечномерной модели струны с параметрическим возбуждением при $\omega_0 = 2\pi$, $a = 0.4$, $b = 0.2$, $\varepsilon = 0.2$, $\alpha = 0.4$, $\gamma = 0.03$, $T = 60$

вектором каждое. Это делает удобным применение теста к системам произвольной размерности. В работе методика применена только к системам с одномерным неустойчивым подпространством, однако ее можно применять и к системам с произвольно большими размерностями устойчивых и неустойчивых подпространств [12]. Для всех рассмотренных примеров – системы на основе модификации уравнений Свифта–Хохенберга и модели брюсселятора, а также системы с параметрическим возбуждением стоячих волн – тест подтверждает предположение об однородно гиперболической природе аттракторов в отображении Пуанкаре.

Автор благодарен профессору С.П. Кузнецову за обсуждение и помощь.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №14-02-31162 и гранта поддержки ведущих научных школ НШ-1726.2014.2.

Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 488 с.
2. Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // Успехи физических наук. 2011. Т.181, № 2. С. 121.
3. Синай Я.Г. Стохастичность динамических систем // В кн. Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 192.
4. Anishchenko V.S., Kopeikin A.S., Kurths J., Vadivasova T.E., Strelkova G.I. Studying hyperbolicity in chaotic systems // Physics Letters A. 2000. Vol. 270. P. 301.
5. Katok A., Hasselblatt B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
6. Круглов В.П., Кузнецов А.С., Кузнецов С.П. Гиперболический хаос в системах с параметрическим возбуждением паттернов стоячих волн // Нелинейная динамика. Т.10, №3. 2014. с. 265-277.
7. Isaeva O.B., Kuznetsov A.S., Kuznetsov S.P. Hyperbolic chaos of standing wave patterns generated parametrically by a modulated pump source // Phys. Rev. E. 2013. Vol.87. 040901.
8. Kruglov V.P., Kuznetsov S.P., Pikovsky A. Attractor of Smale–Williams type in an autonomous distributed system // Regular and Chaotic Dynamics. 2014. Vol. 19, № 4. P. 483.
9. Kruglov V.P. Attractor of Smale–Williams type in modified Brusselator model // Book of Abstracts. International Conference <Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity> 19-23 May 2014, Saratov: Saratov State University. 2014. P. 26.
10. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P., Pikovsky A. Hyperbolic chaos of Turing patterns // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 108. 194101.
11. Kuznetsov S.P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. 144101.
12. Kuznetsov S.P. Some mechanical systems manifesting robust chaos // Nonlinear Dynamics and Mobile Robotics. 2013. Vol. 1, № 1. P. 3.

13. *Cross M.C. and Hohenberg P.C.* Pattern formation outside of equilibrium // *Rev. Mod. Phys.* 1993. Vol. 65, № 1. 1993. P. 851.
14. *Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Kan I.* How often are chaotic saddles nonhyperbolic? // *Nonlinearity.* 1993. Vol. 6. P. 779.
15. *Kuptsov P.V., Parlitz U.* Theory and computation of covariant Lyapunov vectors // *Journal of nonlinear science.* 2012. Vol. 22, № 5. P. 727.
16. *Kuptsov P.V.* Fast numerical test of hyperbolic chaos // *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 85, № 1. 015203.
17. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. 280 с.
18. *Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Dewel G., Borckmans P.* Absolute and convective instabilities in a one-dimensional Brusselator flow model // *The Journal of chemical physics.* 1997. Vol. 106, № 18. P. 7609.

Поступила в редакцию 25.12.2014

TECHNIQUE AND RESULTS OF NUMERICAL TEST FOR HYPERBOLIC NATURE OF ATTRACTORS FOR REDUCED MODELS OF DISTRIBUTED SYSTEMS

V. P. Kruglov

Saratov State University

V.A. Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

A test of hyperbolic nature of chaotic attractors, based on an analysis of statistics distribution of angles between stable and unstable subspaces, is applied to reduced finite-dimensional models of distributed systems which are the modifications of the Swift–Hohenberg equation and Brusselator model, as well as to the problem of parametric excitation of standing waves by the modulated pump.

Keywords: Uniformly hyperbolic attractor, structural stability, Lyapunov exponents.

Круглов Вячеслав Павлович – родился в 1990 году. В 2007 году окончил среднюю школу № 8 г. Саратова. В 2012 окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. В настоящее время является аспирантом ФНП СГУ и работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, в должности стажера-исследователя. Участвовал в научных конференциях «ХАОС», «Нелинейные волны», «Нелинейные дни для молодых», «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», «Гамильтонова динамика, неавтономные системы и структуры в уравнениях с частными производными», «Динамика, бифуркации и странные аттракторы». Автор 5 статей в российских и международных научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410019, Саратов, ул. Зеленая, 38
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
Саратовский филиал
E-mail: kruglovyacheslav@gmail.com



В.П. Круглов

Изв. вузов «ПНД», т. 22, № 6, 2014

93