Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

УДК 530.145; 530.182

ПОИСК ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ОПИСАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ВАКУУМНОГО РОЖДЕНИЯ e^-e^+ ПАР В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

В. В. Дмитриев, С. А. Смолянский, Р. М. Яхиббаев

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Простейшее кинетическое уравнение, описывающее вакуумное рождение электрон-позитронной плазмы в сильном линейно поляризованном электрическом («лазерном») поле, редуцировано к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Получено также соответствующее укороченное уравнение, не содержащее диссипативных вкладов. В области действия туннельного механизма вакуумного рождения впервые получены нелокальные по внешнему полю асимптотические решения этого уравнения, описывающие остаточную электрон-позитронную плазму, формирующуюся в результате действия «лазерного» импульса. Методом стереографической проекции кинетическое уравнение приведено к уравнению Риккати и на его основе найдены оценки сверху решений кинетического уравнения.

Ключевые слова: Вакуумное рождение, электрон-позитронная плазма, уравнение Риккати.

Введение

Вакуумное рождение частиц в сильных полях различной природы (эффект Заутера–Эйлера–Гейзенберга–Швингера) является одним из фундаментальных предсказаний квантовой электродинамики (КЭД), не получившим до настоящего времени экспериментального подтверждения из-за экстремально высокого значения критической напряженности электрического поля $E_c = m^2/e \sim 10^{16}$ В/см. Первоначальные предсказания были ограничены случаем постоянного поля и основывались на туннельной интерпретации эффекта. Этот результат получил корректное обоснование в работе Ю. Швингера [1]. Реальные надежды на экспериментальное обнаружение эффекта связаны со стремительным развитием лазерных технологий [2]. Ожидается, что околокритическая напряженность поля будет достигнута в фокусном пятне в ближайшие годы. В этой связи возникла необходимость в развитии теории вакуумного рождения электрон-позитронной плазмы (ЭПП) под воздействием сильных быстропеременных электрических полей (необходимые для этого условия выполняются в фокусном пятне встречных лазерных пучков). Такая теория стала развиваться, в основном, в двух направлениях.

Барьерный механизм, который был основой первых предсказаний Заутера–Эйлера–Гейзенберга, явился стимулом для обобщения квазиклассических методов квантовой механики в КЭД сильных быстропеременных полей. Независимо были предложены несколько различающиеся подходы ([3] и, например, [4]), которые позволили оценивать скорость производства остаточной ЭПП в периодическом поле с точностью до предэкспоненциального множителя, не обращаясь по-существу к динамическому уровню описания (сравнительный анализ был выполнен в [5]).

В работе [6] на строгой непертурбативной основе было получено кинетическое уравнение (КУ) относительно функции распределения ЭПП, генерируемой из вакуума под действием линейно поляризованного пространственно однородного электрического поля с произвольной зависимостью от времени. Это КУ и его модификации стали основой многочисленных исследований по вакуумному рождению частиц в квантовой электродинамике, квантовой хромодинамике и космологии.

Для дальнейшего важно напомнить, что генерируемая электромагнитным импульсом ЭПП проходит в своей эволюции три своеобразных стадии: квазичастичную – в период действия внешнего поля; стадию переходного процесса, сопровождающуюся сильными флуктуациями; и конечную стадию самостоятельного существования (ей соответствует остаточная ЭПП) [5].

Область действия квазиклассических методов [3,4] ограничена оценками остаточной ЭПП, тогда как кинетическая теория эффективна на всех этапах эволюции ЭПП (это подтверждается результатами численных анализов, основанных на КУ). В частности, в работе [7] было показано, что кинетическая теория в предельном случае постоянного поля воспроизводит результат Ю. Швингера.

Однако, поскольку кинетический подход учитывает все детали динамики ЭПП, включая возбуждаемые внешним полем вакуумные флуктуации (Zitterbewegung), это может создавать серьезные трудности при численном анализе КУ. Таким образом, поиск приближенных сглаженных решений КУ является актуальной задачей. Этой проблеме посвящены работы [8, 9], в которых двумя различными подходами были получены сглаженные решения КУ в области квазичастичной эволюции. Такие решения обращаются в нуль в out-состоянии при $t \to \infty$ и, следовательно, не описывают остаточную ЭПП.

В настоящей работе для поиска нетривиальных решений в асимптотически удаленной области out-состояний мы используем новый подход, основанный на сведении исходного интегродифференциального КУ либо эквивалентной ему системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) к нелинейному ОДУ второго порядка (это возможно с учетом существующего в теории интеграла движения). На первый взгляд, это позволяет воспользоваться здесь хорошо известным в теории дифференциальных уравнений ВКБ-методом получения приближенных решений (метод Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна) [10–12], заимствованным из квантовой механики. Ниже на этом пути впервые получены некоторые асимптотические результаты, однако, так же как и в работах [8, 9], не были найдены характерные для работ [3, 4] решения, не аналитические по параметру $\eta = E_0/E_e$ (E_0 – амплитуда напряженности электрического поля). Анализируются причины такого результата. Далее методом стереографической проекции получены уравнения типа Риккати в различных представлениях и на их основе найдены оценки сверху решений КУ.

Основные уравнения

Для линейно поляризованного поля с 4-потенцилом $A^{\mu} = (0, 0, 0, A^3(t) = A(t))$ в гамильтоновской калибровке КУ имеет вид [6] (точка сверху означает производную по времени)

$$\dot{f}(\vec{p}, t) = \frac{1}{2}\lambda(\vec{p}, t) \int_{t_0}^{t} dt' \lambda(\vec{p}, t') \left[1 - 2f(\vec{p}, t')\right] \cos\theta(t, t'). \tag{1}$$

Здесь амплитуда вакуумных переходов $\lambda(\vec{p}, t)$ и высокочастотная фаза $\theta(t, t')$ равны, соответственно,

$$\lambda(\vec{p}, t) = eE(t)\varepsilon_{\perp}/\varepsilon^2(\vec{p}, t), \tag{2}$$

$$\theta(t, t') = 2\int_{t_0}^{t} d\tau \varepsilon(\vec{p}, \tau), \tag{3}$$

где $E(t) = -\dot{A}(t)$; $\varepsilon(\vec{p}, t) = \sqrt{\varepsilon_{\perp}^2 + P^2}$ – квазиэнергия в поле $A(t)$, $\varepsilon_{\perp} = \sqrt{m^2 + p_{\perp}^2}$ – поперечная энергия и $P = p^3 - eA(t)$ – квазиимпульс. Начальное условие соответствует отсутствию поля и ЭПП: $A(t_0) = 0,\ f(\vec{p}, t_0) = 0$.

Интегродифференциальному уравнению (1) можно сопоставить систему трех ОДУ

$$\dot{f} = \frac{1}{2}\lambda u, \quad \dot{u} = \lambda(1 - 2f) - 2\varepsilon v, \quad \dot{v} = 2\varepsilon u \tag{4}$$

с дополнительными начальными условиями $u(t_0) = v(t_0) = 0$. Функции $u(\vec{p}, t)$ и $v(\vec{p}, t)$ описывают вакуумные поляризационные эффекты. Справедлив интеграл движения

$$(1 - 2f)^2 + u^2 + v^2 = 1, \tag{5}$$

записанный с учетом начальных условий. Таким образом, в любой момент эволюции вектор $\vec{V}(f, u, v)$ лежит на поверхности эллипсоида (5).

Возможны два канонических представления системы ОДУ (4), соответствующие двум физическим параметризациям времени: $t \to mt = \tau$ (m-параметризация) и $t \to \omega t = \tau$ (ω-параметризация, ω – характерная частота внешнего поля). Пусть $E(t) = E_0\xi(t)$, так что

$$A(t) = -\frac{E_0}{\omega}\int^{t\omega} d(t'\omega)\xi(t') = -\frac{E_0}{\omega}\Xi(\omega t). \tag{6}$$

Теория является двухпараметрической по внешнему полю, характеризуемому безразмерными параметрами η и $\gamma = E_c\omega/E_0 m$ (параметр адиабатичности). Область $\gamma \ll 1$ соответствует доминированию туннельного механизма, при $\gamma \gg 1$ действует многофотонный механизм возбуждения ЭПП. Наиболее интересной является существенно непертурбативная область $\gamma \ll 1$. В пределе $\gamma \to 0$ приведенная квазиэнергия ε/m имеет особенность. Выделим ее в явном виде

$$\varepsilon/m = \varepsilon_{\gamma}/\gamma, \quad \varepsilon_{\gamma} = \left[\gamma^2\varepsilon_{\perp}^2/m^2 + (\gamma p^3/m - \Xi)^2\right]^{1/2}, \tag{7}$$

так что $\lim_{\gamma\to 0}\varepsilon_\gamma = |\Xi|$, что соответствует энергии электрона во внешнем поле при $\vec{p}=0$. Тогда амплитуда (2) может быть представлена в виде

$$\lambda = \eta\gamma^2\lambda_\gamma \quad \lambda_\gamma = \varepsilon_\perp \xi/\varepsilon_\gamma^2 \tag{8}$$

независимо от выбора параметризации.

Система ОДУ (4) в m-параметризации в асимптотической области $\gamma \ll 1$ будет иметь вид

$$\dot f = (\eta\gamma^2/2)\lambda_\gamma u, \quad \dot u = \eta\gamma^2\lambda_\gamma(1-2f) - (2/\gamma)\varepsilon_\gamma v, \quad \dot v = (2/\gamma)\varepsilon_\gamma u. \tag{9}$$

В ω-параметризации эта система принимает вид

$$\dot f = (\gamma/2)\lambda_\gamma u, \quad \dot u = \gamma\lambda_\gamma(1-2f) - (2/\eta\gamma^2)\varepsilon_\gamma v, \quad \dot v = (2/\eta\gamma^2)u. \tag{10}$$

Последняя система была предварительно изучена в работе [9], а ОДУ третьего порядка, построенное на основе системы (9), рассмотрено в работе [8]. В обеих работах не было удовлетворительных решений в области действия поля. Однако было найдено нетривиальное решение для ЭПП в остаточном стационарном состоянии.

Ниже мы продолжим поиск решения типа ВКБ проблемы на основе полученного в следующем разделе нелинейного ОДУ второго порядка (что возможно с учетом закона сохранения (5)), уповая на то, что метод ВКБ хорошо адаптирован к теории ОДУ второго порядка [10–12].

Нелинейное ОДУ второго порядка

Получим сначала искомое уравнение в общем виде. Из закона сохранения (5) можно выразить функцию v через f и u. Подставим результат во второе уравнение системы (4)

$$\dot u = \lambda(1-2f) - 2\varepsilon\left[1-(1-2f)^2 - u^2\right]^{1/2}. \tag{11}$$

Продифференцируем первое уравнение системы (4) и используем его и (11), чтобы получить замкнутое уравнение для функции распределения. В результате получим уравнение осцилляторного типа с нелинейной частью

$$\ddot f - \frac{\dot\lambda}{\lambda}\dot f + \lambda^2 f = \frac{1}{2}\lambda^2 - 2\lambda\varepsilon\big[f - f^2 - \frac{\dot f^2}{\lambda^2}\big]^{1/2}, \tag{12}$$

или

$$\ddot F - (\dot\lambda/\lambda)\dot F + \lambda^2 F = 2\lambda\varepsilon\big[1 - F^2 - \lambda^{-2}\dot F^2\big]^{1/2}, \tag{13}$$

где введена функция заполнения $F = 1-2f \in [0,1]$. Начальные условия $F(t_0)=1$, $\dot F(t_0)=0$ соответствуют начальным условиям для уравнений (1), (4).

Из (13) следует полезная и неожиданная интерпретация отдельных слагаемых: амплитуда вакуумных переходов (2) определяет частоту медленных осцилляций функции заполнения (быстрые осцилляции, согласно (1) и (3), происходят на частотах 2ε), а функция $\dot\lambda/\lambda$ описывает обобщенную диссипацию. Нелинейная правая часть соответствует вынуждающей внешней силе с амплитудой $2\lambda\varepsilon$, на которую оказывает влияние как уровень заполнения F^2, так и скорость заполнения $\lambda^{-2}\dot F^2$.

Ниже мы рассмотрим простейшую ситуацию, когда можно пренебречь вынуждающей силой, то есть правыми частями уравнений (12), (13). Уравнение (12) в этом приближении слабого поля ($\eta \gg 1$) имеет вид

$$\ddot{f} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\dot{f} + \eta^2\lambda^2 f = 0 \tag{14}$$

и может быть решено методом ВКБ [10–12]. Во втором приближении в разложении по $1/\eta$ получим

$$f(\vec{p},t) = \sin^2\Big\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt'\lambda(t')\Big\} = \sin^2 J(\vec{p};t,t_0)/2. \tag{15}$$

Таким образом, функция распределения в этом приближении осциллирует с вынужденной частотой, набор фазы определяется интегралом $J(\vec{p};t,t_0)$. Эта функция распределения обладает физическим смыслом, $0 \le f \le 1$, является интегрируемой (интеграл по импульсному пространству определяет плотность числа ЭПП пар) и удовлетворяет начальному условию. Важно также, что полученное решение является нелокальным по внешнему полю и, следовательно, пригодным для описания остаточной ЭПП при $t \to \infty$. При исследовании КУ (1) нелокальное решение получено впервые. Это позволяет исследовать некоторые особенности импульсного спектра остаточной сильно неравновесной ЭПП и его зависимость от используемого приближения.

Простейший результат может быть получен в лидирующем приближении, когда в интеграле (15) влияние внешнего поля учитывается только в числителе амплитуды (2) (силовой эффект), так что

$$J(\vec{p};t,t_0) = \frac{eE_0\varepsilon_\perp}{\varepsilon_0^2(\vec{p})}\int_{t_0}^{t} dt'\xi(t'), \tag{16}$$

где $\varepsilon_0(p) = \sqrt{m^2+p^2}$. Интеграл в (16) зависит исключительно от параметров поля. Из (16) видно, что p^3-вырождение функции распределения, важное для формирования псевдотеплового спектра [15], отсутствует. Для финитных полей из (15) и (16) следует, что скорость рождения ЭПП является нелинейной функцией длительности полевого импульса.

Нетрудно теперь показать, что решение (15) приводит к p^3-вырождению, если не использовать лидирующее приближение. Входящий в (15) интеграл вычисляется с помощью замены (см. определение (6)) $\omega\xi(t)dt = d\Xi(\omega t)$,

$$J(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} dt'\lambda(t') = \frac{\varepsilon_\perp}{\omega}\Big\{\operatorname{arctg}\frac{x(t)}{a} - \operatorname{arctg}\frac{x(t_0)}{a}\Big\}, \tag{17}$$

где $a = \gamma\varepsilon_\perp/m$ и $x(t) = \Xi(\omega t) - \gamma p^3/m$.

Отсюда видно, что только инфинитные поля приводят к p^3-вырождению в двойной асимптотике $t \to \infty$, $t_0 \to -\infty$: в этом пределе при любом конечном p^3 можно пренебречь импульсным слагаемым в $x(t) \simeq \Xi(\omega t)$

В качестве модельной ситуации интересно рассмотреть частный случай, когда вторая поляризационная функция в (4) и (5) полагается равной нулю, $v = 0$ (сечение

$u = 0$ приводит, согласно (4), к тривиальному решению $f = 0$). Этот случай соответствует (f, u)-сечению эллипсоида (5) и укороченным уравнениям. Соответствующее ОДУ второго порядка имеет вид

$$\ddot{F} + \lambda^2 F = \dot{\lambda}\sqrt{1 - F^2}. \tag{18}$$

По сравнению с уравнением (13) здесь отсутствуют диссипативные вклады $\sim \dot{F}$. Однако уравнение (18) является вполне самостоятельным в том смысле, что оно не может быть получено из (13) вычеркиванием $\dot{F}$. Для малых осцилляций $F^2 \ll 1$ из (18) получим неоднородное ОДУ второго порядка с квадратичной нелинейностью (приближение слабой нелинейности)

$$\ddot{F} + \lambda^2 F + (\dot{\lambda}/2)F^2 = \dot{\lambda}. \tag{19}$$

Поскольку диссипативное слагаемое в уравнении (12) проявляется лишь в третьем порядке разложения по $1/\eta$, уравнение (19) приводит в рассматриваемом приближении к тому же решению (15), что и уравнение (12).

Редкий тип иррациональной нелинейности в ОДУ (12) и (13) имеет, в частности, аналогию в космологии. Запишем уравнения Фридмана в метрике FRW относительно масштабного фактора $a(t)$ (напр., [13])

$$\dot{a}^2 = \frac{G}{3}\varepsilon a^2 - \kappa, \quad \ddot{a} = -\frac{G}{6}(\varepsilon + 3p)a, \tag{20}$$

где $\kappa = 0, \pm 1$, а ε и p есть плотность материи и давление. Исключая в этих уравнениях $a(t)$, получим ОДУ второго порядка с обсуждавшимся типом иррациональной нелинейности

$$\ddot{a} = -\frac{1}{2}(\varepsilon + 3p)\sqrt{\frac{G}{3\varepsilon}(\kappa + \dot{a}^2)}. \tag{21}$$

Согласно стандартному условию энергодоминантности, здесь $\varepsilon + 3p > 0$. В отличие от уравнений (12) и (13), это уравнение не содержит массового слагаемого в левой части, что и приводит к отсутствию в эволюции осцилляторного режима. Эта бесщелевая модель эволюции имеет аналоги в других физических моделях (например, в КЭД $D = 2 + 1$ модели в графене [14]). Таким образом, ОДУ типа (13) охватывает целый ряд задач современной теоретической физики.

Стереографическая проекция

Переобозначим для удобства функцию заполнения $b \equiv F = 1 - 2f$. Тогда интеграл движения (5) позволяет интерпретировать функции v, u, b как точку на единичной сфере $P(v, u, b)$

$$v^2 + u^2 + b^2 = 1. \tag{22}$$

Расположим единичную сферу таким образом, что ее северный полюс будет иметь координаты $N(0, 0, 1)$. Тогда прямая NP пересекает плоскость (u, v) в координатах

$$\tilde{u} = \frac{u}{1 - b} = \frac{u}{2f}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{1 - b} = \frac{v}{2f}. \tag{23}$$

Отсюда

$$\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 = \frac{1+b}{1-b} = 1 + \frac{1}{f}, \quad b = \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 - 1}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + 1}. \tag{24}$$

Обратные преобразования для (23) имеют вид

$$u = \frac{2\tilde{u}}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + 1}, \quad v = \frac{2\tilde{v}}{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + 1}. \tag{25}$$

Уравнения (4) можно переписать в матричном виде

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v \\ u \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\varepsilon & 0 \\ -2\varepsilon & 0 & \lambda \\ 0 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ u \\ b \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Из (23)–(26) можно получить систему двух ОДУ относительно новых переменных

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = -2\varepsilon\tilde{u} + 2\lambda\tilde{u}\tilde{v}, \tag{27}$$

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = 2\varepsilon\tilde{v} - \lambda\left(\tilde{u}^2 - \tilde{v}^2 - 1\right). \tag{28}$$

Введем комплексную величину $z = \tilde{v} + i\tilde{u}$, тогда систему уравнений (27)–(28) можно переписать в виде одного уравнения

$$\dot{z} \equiv \frac{dz}{dt} = i\lambda + 2i\varepsilon z - i\lambda z^2. \tag{29}$$

Это нелинейное ОДУ первого порядка, известное как уравнение Риккати. Его можно линеаризовать с помощью преобразований Хопфа–Кола [16]

$$z = \alpha\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}, \quad \alpha = \frac{1}{i\lambda}, \quad \dot{\Omega} \equiv \frac{d\Omega}{dt}. \tag{30}$$

Отсюда получаем линейное ОДУ второго порядка

$$\ddot{\Omega} + 2\left(-i\varepsilon + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\right)\dot{\Omega} + \lambda^2\Omega = 0. \tag{31}$$

В отличие от уравнения (13), данное уравнение является однородным. Можно избавиться от младших производных и привести это уравнение к виду, удобному для нахождения ВКБ-асимптотики.

Для нахождения непосредственно функции распределения f удобно использовать обратное преобразование

$$f = \frac{1}{2}\frac{zz^* - 1}{zz^* + 1}. \tag{32}$$

ВКБ–оценка

Введем мнимое время $\tau \equiv it$ и перепишем уравнение Риккати (29) в виде

$$z' \equiv \frac{dz}{d\tau} = \lambda + 2\varepsilon z - \lambda z^2. \tag{33}$$

Используем следующие преобразования:

$$y \equiv \lambda z, \quad \beta \equiv y - \Big(\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\ln\lambda\Big), \quad \frac{x'}{x} \equiv \beta. \tag{34}$$

Следуя [12], введем комплекснозначную функции $Q(\tau) \in C^2(I)$ на интервале I: $0 < \tau < \infty$

$$Q(\tau) \equiv \lambda^2 + \Big(\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\ln\lambda\Big)^2 + \frac{d}{d\tau}\Big(\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\ln\lambda\Big), \tag{35}$$

удовлетворяющую следующим условиям:

1) $Q(\tau) \neq 0, \tau \in I$;

2) существует ветвь $\sqrt{Q(\tau)}$ класса $C^2(I)$, такая что $\mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{Q}(\tau)} \geqslant 0$, $\tau \in I$.

Тогда уравнение (33) имеет простой вид

$$x'' - Q(\tau)x = 0. \tag{36}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} S(\tau,\tau_0) &= \int_{\tau_0}^{\tau}\sqrt{Q(\gamma)}d\gamma, \\ \delta(\tau) &= \frac{1}{8Q^{5/2}}\Big[\sqrt{Q}''\sqrt{Q} - \frac{5}{4}\Big(\sqrt{Q}'\Big)^2\Big], \\ \rho(\tau,\tau_0) &= \int_{\tau_0}^{\tau}|\delta(\gamma)|\,d\gamma. \end{aligned} \tag{37}$$

Положим

$$\tilde{x}_1(\tau) = Q^{-1/4}(\tau)\exp\left[S(\tau,\tau_0)\right]. \tag{38}$$

Если выполнено условие $\rho(0,\tau) < \infty,\ \tau \in I$, то справедлива следующая ВКБ-оценка решения $x_1(\tau)$ уравнения (36)

$$\Big|\frac{x_1(\tau)}{\tilde{x}_1(\tau)} - 1\Big| \leqslant 2\Big(e^{2\rho(0,\tau)} - 1\Big). \tag{39}$$

Теперь положим

$$\tilde{x}_2(\tau) = Q^{-1/4}(\tau)\exp\left[-S(\tau,\tau_0)\right]. \tag{40}$$

При условии $\rho(\tau,\infty) < \infty,\ \tau \in I$ имеем следующую ВКБ-оценку решения $x_2(\tau)$ уравнения (36):

$$\Big|\frac{x_2(\tau)}{\tilde{x}_2(\tau)} - 1\Big| \leqslant 2\Big(e^{2\rho(\tau,\infty)} - 1\Big). \tag{41}$$

Из ВКБ-оценок следуют асимптотические формулы для решений

$$x_1(\tau) \ \sim\ \tilde{x}_1(\tau), \quad \tau \to 0; \quad x_2(\tau) \ \sim\ \tilde{x}_2(\tau), \quad \tau \to \infty. \tag{42}$$

Данные оценки (38) и (40) полезны при численном решении исходных уравнений.

Результаты работы

В настоящей работе был продолжен поиск в русле работ [8, 9] приближенных решений КУ, описывающих на непертурбативной основе вакуумное рождение ЭПП в сильном переменном линейно поляризованном «лазерном» поле. Исходное интегро-дифференциальное КУ немарковского типа мы редуцировали к ОДУ второго порядка с иррациональной нелинейностью (13) и нашли его частное решение в асимптотической области $\gamma \gg 1$, в которой действует многофотонный механизм вакуумного рождения. Впервые это решение оказалось пригодным для описания out-состояния ЭПП. Важной особенностью решения является его аналитический характер по полевому параметру $\eta = E_0/E_c$, а также возникновение p^3-вырождения в случае инфинитных полей. Этот результат стимулирует поиск более реалистических решений ВКБ типа, которые, как можно ожидать, также содержатся в уравнении (13).

Библиографический список

1. *Schwinger J.* On gauge invariance and vacuum polarization // Phys. Rev. 1951. Vol. 82. P. 664.
2. *Gregori G., Blaschke D.B. et al.* A proposal for testing subcritical vacuum pair production with high power lasers // High Energy Density Physics. 2010. Vol. 6, № 2. P. 166.
3. *Brezin E., Itzykson C.* Pair production in vacuum by an alternating field // Phys. Rev. D. 1970. Vol. 2. P. 1191.
4. *Bulanov S.S., Narozhny N.B., Mur V.D., Popov V.S.* Electron-positron pair production by electromagnetic pulses // JETP. 2006. Vol. 102, № 1. P. 9.
5. *Smolyansky S.A., Dmitriev V.V., Panferov A.D., Prozorkevich A.V., Blaschke D., Juchnowski L.* WKB-type approximations in the theory of vacuum particle creation in strong fields // Proceedings of the XXII Baldin ISHEPP. 2014. P. 043.
6. *Schmidt S., Blaschke D., Ropke G., Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V., Toneev V.D.* A quantum kinetic equation for particle production in the Schwinger mechanism // IJMP. E. 1998. Vol. 07, № 06. P. 709.
7. *Fedotov A.M., Gelfer E.G., Korolev K.Yu., Smolyansky S.A.* Kinetic equation approach to pair production by a time-dependent electric field // Phys. Rev. D. 2011. Vol. 83. P. 025011.
8. *Smolyansky S.A., Bonitz M., Prozorkevich A.V.* Laser driven electron-positron pair creation-kinetic theory versus analytical approximations // Contrib. Plasma Phys. 2013. Vol. 53, № 10. P. 788.
9. *Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V., Dmitriev V.V., Tarakanov A.V.* Smoothed solutions in the kinetic theory of $e+e$-vacuum pair creation in strong laser fields. Linear polarization // IJMP. E. 2014. Vol. 23, № 11. P 1450068.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Пер. с нем. Изд. 4-е, испр. М.: Наука: Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. 576 с.
11. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений / Пер. с англ. М.: Мир, 1984, 535 с.

12. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
13. *Глинер Э.Б.* Раздувающаяся Вселенная и вакуумоподобное состояние физической среды // УФН. 2002. Т. 172, № 2. С. 221.
14. *Yokomizo N.* Radiation from electrons in graphene in strong electric field // Annals of Phys. 2014. Vol. 351. P. 166.
15. *Нарожный Н.Б., Никишов А.И.* Решения уравнений Клейна–Гордона и Дирака для частицы в постоянном электрическом поле и распространяющейся вдоль него плоской электромагнитной волне // ТМФ. 1976. Т. 26, № 1. С. 16.
16. *Webb G.M., Hu Q., le Roux J.A., Dasgupta B., Zank G.P.* Hamiltonians and variational principles for Alfven simple waves // J. Phys. A: Math. Theor. 2012. Vol. 45, № 2. P. 025203.

References

1. *Schwinger J.* // Phys. Rev. 1951. Vol. 82, P. 664.
2. *Gregori G., Blaschke D.B. et al.* // High Energy Density Physics. 2010. Vol. 6, № 2. P. 166.
3. *Brezin E., Itzykson C.* // Phys. Rev. D. 1970. Vol. 2. P. 1191.
4. *Bulanov S.S., Narozhny N.B., Mur V.D., Popov. V.S.* // JETP. 2006. Vol. 102, № 1. P. 9.
5. *Smolyansky S.A., Dmitriev V.V., Panferov A.D., Prozorkevich A.V., Blaschke D., Juchnowski L.* // Proceedings of the XXII Baldin ISHEPP. 2014. P. 043.
6. *Schmidt S., Blaschke D., Ropke G., Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V., Toneev V.D.* // IJMP. E. 1998. Vol. 07, № 06. P. 709.
7. *Fedotov A.M., Gelfer E.G., Korolev K.Yu., Smolyansky S.A.* // Phys. Rev. D. 2011. Vol. 83. P. 025011.
8. *Smolyansky S.A., Bonitz M., Prozorkevich A.V.* // Contrib. Plasma Phys. 2013. Vol. 53, № 10. P. 788.
9. *Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V., Dmitriev V.V., Tarakanov A.V.* // IJMP. E. 2014. Vol. 23, № 11. P. 1450068.
10. *Kamke E.* Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Vieweg+ Teubner Verlag, 1977. 670 p.
11. *Nayfeh Ali H.* Perturbation Methods. John Wiley & Sons, New York, 2000. 441 p.
12. *Fedoryuk M.V.* Asymptotic Analysis: Linear Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993. 363 p.
13. *Gliner E.B.* // Physics-Uspekhi. 2002. Vol. 45, № 6. P. 213.
14. *Yokomizo N.* // Annals of Phys. 2014. Vol. 351. P. 166.
15. *Narozhnyi N.B., Nikishov A.I.* // Theor. and Math. Phys. 1976. Vol. 26, № 1. P. 9.
16. *Webb G.M., Hu Q., le Roux J.A., Dasgupta B., Zank G.P.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2012. Vol. 45, № 2. P. 025203.

Поступила в редакцию 26.05.2015

SEARCH FOR APPROXIMATE METHODS FOR DESCRIPTION OF NONLINEAR VACUUM $e^{-}e^{+}$ PAIRS CREATION PROCESSES IN ELECTROMAGNETIC FIELDS

V. V. Dmitriev, *S. A. Smolyansky*, *R. M. Yahibbaev*

Saratov State University

The simplest kinetic equation for description of the electron-positron plasma vacuum creation in a strong linearly polarized electric («laser») field was reduced to the nonlinear ordinary differential equation of the second order. The corresponding truncated equation without the dissipative contributions was obtained also. In area of the tunnel mechanism action the non-local under an external field solutions for the residual electron-positron plasma was first obtained. In general case, the upper estimations for the kinetic equation solutions was found on the Riccati equation basis that is a result of application of the stereographic projection method to the basic kinetic equation.

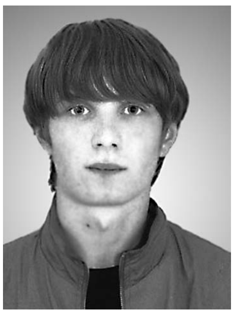
Keywords: Vacuum creation, electron-positron plasma, Riccati equation.

Дмитриев Вадим Владимирович – родился в Саратове (1980). Окончил Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (2003). Там же защитил кандидатскую диссертацию (2007) в области теоретической физики. Доцент кафедры теоретической физики СГУ. Автор более 20 работ по квантовой теории поля и гравитации.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: dmitrievv@gmail.com

Смолянский Станислав Александрович – родился в Саратове (1936). Окончил Саратовский госуниверситет (1960). Защитил кандидатскую диссертацию (1969) и докторскую (1988) в области теоретической физики. Профессор кафедры теоретической физики СГУ. Автор более 150 работ по данному направлению.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: smol@sgu.ru



Яхиббаев Равиль Маратович – родился в с. Осинов-Гай, Саратовской области (1993), окончил СГУ (2015). Магистрант кафедры теоретической физики СГУ. Лауреат стипендии Правительства Российской Федерации (2014).

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: ravmarat@gmail.com