



## НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ И ЕЕ ТЕСТИРОВАНИЕ

*С. С. Волощук*

Саратовский государственный университет

Приведен вариант построения нелинейной нестационарной теории взаимодействия электронных потоков в двухлучевых системах для случая попутных и встречных пучков. Сделано тестовое сравнение результатов построенной теории с расчетами линейной теории для обоих случаев.

*Ключевые слова:* Электронно-волновая лампа, двухпучковая неустойчивость, метод частиц в ячейках.

### Введение

Благодаря простоте конструкции и возможности конструирования терагерцевых приборов многолучевые системы являются привлекательным объектом исследования. К настоящему времени предложены теории для многих частных случаев таких систем: например, линейная теория попутных и встречных пучков [1], нелинейная теория попутных пучков [2]. В настоящей работе предлагается вариант нелинейной нестационарной теории взаимодействия электронных потоков в двухлучевых системах (примером такой системы может быть электронно-волновая лампа). Рассмотрены случаи попутных и встречных пучков. Проведено тестовое сравнение результатов расчета в рамках нелинейной теории с расчетами линейной теории электронно-волновой лампы [1] для обоих случаев.

На рис. 1 представлена схема электронно-волновой лампы с попутными пучками. Разность скоростей потоков обеспечивается разностью потенциалов катодов

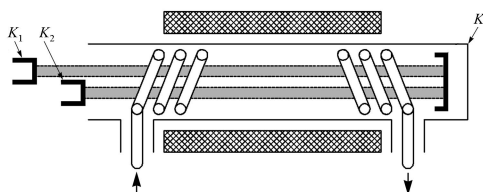


Рис. 1. Схема электронно-волновой лампы с попутными пучками

$K_1$  и  $K_2$ . Один из потоков модулируется на входе с помощью отрезка замедляющей системы (например, спирали). Скорость потока подбирается близкой к фазовой скорости замедляющей системы, что обеспечивает эффективное взаимодействие. Далее пучки поступают в пространство дрейфа, где взаимодействуют.

Усиленный сигнал снимается вторым отрезком замедляющей системы. Отработанные пучки оседают на коллекторе  $K$ .

В построенной модели модуляция с помощью отрезков спирали для простоты заменена на скоростную модуляцию в момент влета, что соответствует модуляции с помощью резонатора.

Анализ рассматриваемой модели основан на методе «частицы в ячейках» (particle-in-cell или PIC-модель). Модель фактически является модификацией одномерной модели клистрона с бесконечно широким пучком [3]: один пучок заменяется на два пучка, каждый для своего сорта частиц, отличающихся начальными средними скоростями. При такой замене приходится складывать электрические поля первого и второго пучка на каждом шаге, но появляется возможность вычислять распределение тока для каждого пучка в отдельности.

Основные уравнения модели: это уравнение Пуассона и уравнения движения. Для удобства была произведена нормировка физических величин:

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \rho_0 \tilde{\rho} && \text{— объемная плотность заряда,} \\ v_i &\rightarrow v_0 \tilde{v}_i && \text{— скорость крупной частицы в } i\text{-м пучке,} \\ \varphi &\rightarrow v_0^2 \tilde{\varphi} / \eta && \text{— потенциал,} \\ E &\rightarrow v_0^2 \tilde{E} / (L\eta) && \text{— напряженность электрического поля,} \\ x &\rightarrow L \tilde{x} && \text{— координата крупной частицы,} \\ t &\rightarrow L \tilde{t} / v_0 && \text{— время.} \end{aligned}$$

Здесь  $L$  – длина пространства взаимодействия;  $v_0$ ,  $\rho_0$  – невозмущенная начальная скорость и плотность первого потока;  $\eta$  – отношение заряда к массе электрона. Безразмерные переменные обозначены знаком тильда « $\sim$ », так как далее будет идти речь только о безразмерных переменных, знак тильда будем опускать.

Рассмотрим кратко схему реализации расчетов. Пространство взаимодействия разбивается на ячейки. Вычисление значений плотности заряда, потенциала, поля пространственного заряда происходит в узлах этой сетки (эти величины дискретны по координате). На каждом шаге в пространство влетают электроны, координата которых непрерывно меняется на всей длине взаимодействия.

Каждая итерация начинается с процедуры «взвешивания» частиц [3] для каждого пучка в отдельности. Это необходимо для перехода от пучка электронов с «непрерывными» координатами к дискретному распределению плотности заряда в пространстве. После того, как получены распределения зарядов в первом и втором пучке, происходит вычисление распределений потенциалов. Для этого решается уравнение Пуассона «методом распространения ошибки»

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \alpha^2 \rho, \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0, \end{cases}$$

где  $\alpha = \omega_p L / v_0$ ,  $\omega_p$  – плазменная частота.

Теперь возможно вычислить распределение напряженности поля пространственного заряда на основе центральных разностей

$$E_{\text{пз}} = - \partial \varphi / \partial x,$$

где  $\varphi(x)$  есть решение уравнения Пуассона.

До этого момента все величины вычислялись для каждого пучка в отдельности, и в результате имеем два распределения напряженности поля пространственного заряда, создаваемых каждым пучком. Суммируя эти распределения, получим распределение напряженности поля, действующее на электроны. Используя узловые значения, можно с помощью линейной интерполяции вычислить напряженность поля, действующую на каждую частицу,

$$E(x_m) = E_j((j+1)\Delta x - x_m) + E_{j+1}(x_m - j\Delta x),$$

здесь  $m$  – индекс по массиву частиц,  $j$  – индекс по массиву ячеек.

Найденная напряженность поля для каждой частицы используется для вычисления изменения скорости и координаты крупных частиц

$$V_{t+1} = v_t + E(x_m)\Delta t,$$

$$X_{t+1} = x_t + v_t\Delta t.$$

Последний этап – это ввод в пространство новых электронов и удаление электронов вышедших за пределы пространства взаимодействия.

Для анализа процессов, протекающих в пространстве взаимодействия, удобнее рассматривать плотность тока пучка. Вычисление распределения плотности тока происходит аналогично вычислению распределения плотности заряда.

### Результаты расчетов для модели попутных потоков и их сравнение с линейной теорией

Для тестирования описанной модели будем сравнивать результаты расчетов с линейной теорией (см., например, [4]). Уравнения гидродинамической модели в используемых переменных имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 i_1}{\partial x^2} + 2jw\alpha \frac{\partial i_1}{\partial x} - w^2\alpha^2 i_1 = -\alpha^2 (i_1 + i_2), \\ \frac{\partial^2 i_2}{\partial x^2} + 2jw\frac{\alpha}{v} \frac{\partial i_2}{\partial x} - w^2\frac{\alpha^2}{v^2} i_2 = -\frac{\alpha^2}{v^2} (i_1 + i_2), \end{cases} \quad (1)$$

здесь  $i_1, i_2$  – плотность тока первого и второго пучка;  $v = v_{01}/v_{02}$  – отношение начальных немодулированных скоростей первого и второго потоков;  $w = \omega/\omega_p$  – частота входного сигнала, нормированная на плазменную частоту;  $j$  – мнимая единица. Система (1) записана в предположении, что все переменные величины изменяются во времени как  $e^{j\omega t}$ .

Решение дисперсионного уравнения для системы (1) имеет следующий вид:

$$b_k = \frac{\beta}{\beta_p} = \frac{2}{1+v} \left( w \pm \sqrt{\left(w\frac{v-1}{v+1}\right)^2 + 1} \pm \sqrt{4\left(w\frac{v-1}{v+1}\right)^2 + 1} \right), \quad k = 1, \dots, 4, \quad (2)$$

здесь  $\beta_p = \omega_p/v_{01}$ . Таким образом, решение системы (1) представляет собой суперпозицию четырех парциальных волн пространственного заряда. Зависимости мнимой и действительной части волнового числа от частоты приведены на рис. 2. Видно,

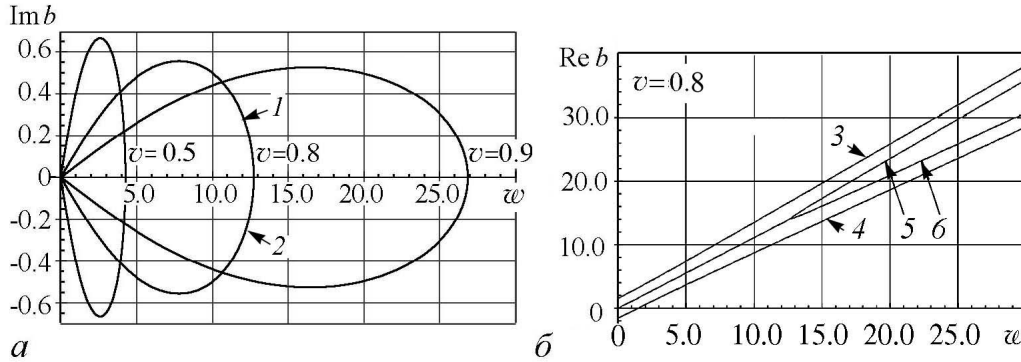


Рис. 2. Дисперсионная характеристика модели для нескольких параметров  $v$ :  $a$  – мнимая часть волнового числа,  $b$  – действительная часть волнового числа

что существуют две области изменения корней. В первой области ( $0 < w < 13$  для  $v = 0.8$ ) существует: одна волна с экспоненциально возрастающей амплитудой (1), одна с экспоненциально затухающей (2) (рис. 2,  $a$ ) и две волны с постоянной амплитудой (3, 4) (рис. 2,  $b$ ) – эту область изменения параметра  $w$  принято называть областью неустойчивости. Во второй области ( $13 < w$  для  $v = 0.8$ ) возможно распространение четырех волн постоянной амплитуды (3, 4, 5, 6) (рис. 2,  $b$ ) – это область интерференции.

Для того, чтобы сравнивать линейную модель с нелинейной нужно использовать одинаковую модуляцию входного электронного потока. Уравнения линейной модели записаны относительно плотности тока, поэтому модуляцию по скорости можно ввести следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{i}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} \\ \tilde{\rho} = \frac{\tilde{i} - \rho_0 \tilde{v}}{v_0} \end{array} \right. \xrightarrow{\rho \sim e^{j\omega t}} \frac{\partial \tilde{i}}{\partial x} \Big|_{x=0} = j\omega \rho_0 \frac{\tilde{v}}{v_0},$$

или в используемых безразмерных переменных:  $\frac{\partial \tilde{i}}{\partial x} \Big|_{x=0} = jw\alpha\tilde{v}$ , где  $w$  – безразмерная частота модуляции. Таким образом, граничные условия для линейной модели имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{i}_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = jw\alpha\tilde{v}_1, \\ \frac{\partial \tilde{i}_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \\ \tilde{i}_1 \Big|_{x=0} = 0, \\ \tilde{i}_2 \Big|_{x=0} = 0. \end{array} \right.$$

Рассмотрим работу лампы в области неустойчивости при следующих параметрах:  $\alpha = 1$ ,  $w = 10$ ,  $v = 0.9$ . На рис. 3 приведены распределения первой гармоники плотности тока в лампе для первого и второго пучка вдоль пространства взаимодействия: здесь 1 – модулированный пучок, 2 – немодулированный; сплошная линия – линейная теория; кружками обозначено распределение плотности первой гармоники тока по расчетам нелинейной теории, квадратами – второй гармоники. На начальном

этапе модели демонстрируют хорошее взаимное соответствие. Как и ожидалось из анализа дисперсионных диаграмм, модели демонстрируют рост амплитуды тока по пространству взаимодействия. Из рис. 3, б видно, что на определенной длине начинают сказываться нелинейные эффекты: с ростом координаты заметно увеличивается амплитуда второй гармоники (рис. 4, б), что и приводит к расхождению результатов.

Рассмотрим поведение модели в области интерференции при следующих параметрах:  $\alpha = 1$ ,  $v = 0.8$ . На рис. 5 приведены зависимости распределения амплитуды первой гармоники тока в немодулированном пучке по пространству взаимодействия.

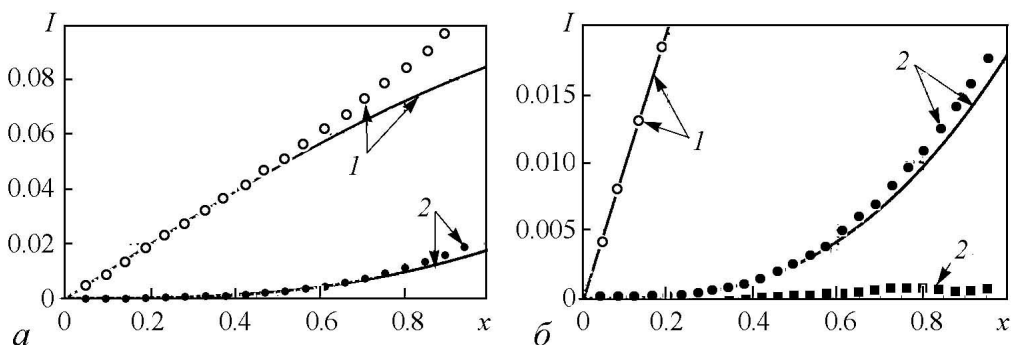


Рис. 3. а – распределение по длине пространства взаимодействия первой гармоники тока: 1 – модулированный пучок при амплитуде модуляции начальной скорости  $10^{-2}$ , 2 – немодулированный пучок; б – увеличенный фрагмент участка для первой гармоники модулированного и немодулированного пучка и второй гармоники тока немодулированного пучка

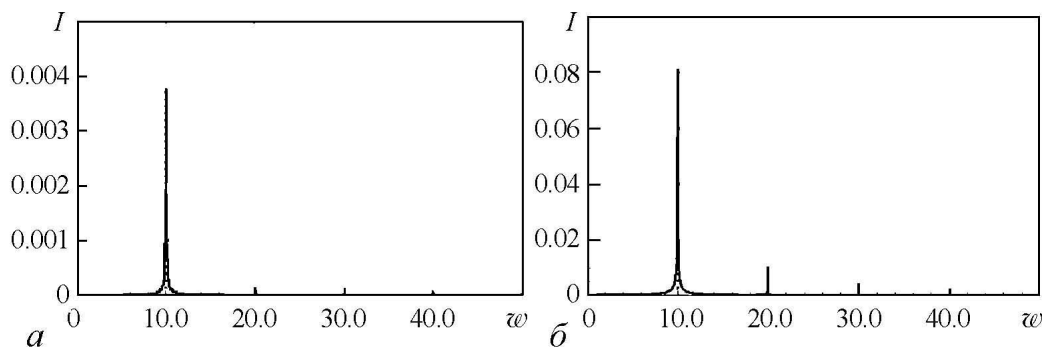


Рис. 4. Спектры переменной составляющей тока немодулированного пучка для различных координат  $x$  пространства взаимодействия: а – 0.05, б – 0.95

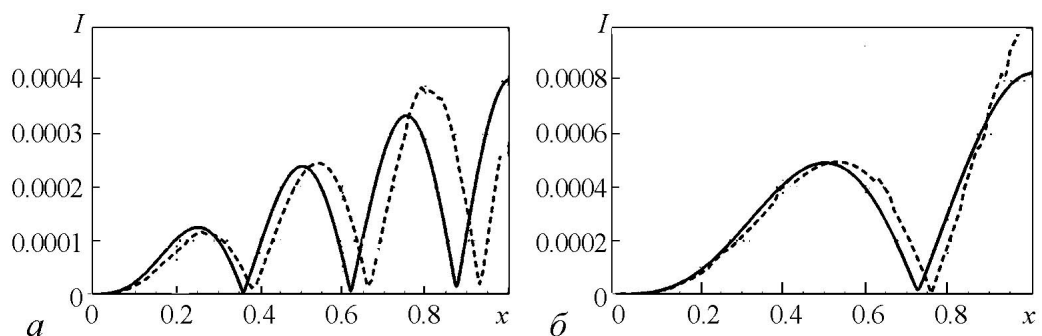


Рис. 5. Распределение первой гармоники тока для различной входной частоты  $w$  в немодулированном пучке: а – 100, б – 50. Сплошная линия – линейная модель, пунктирная линия – нелинейная модель

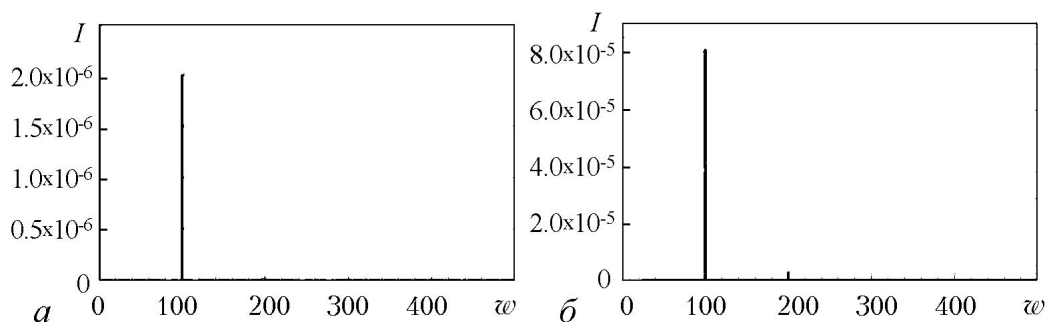


Рис. 6. Спектр переменной составляющей тока для различных координат  $x$  пространства взаимодействия:  $a - 0.05$ ,  $b - 0.95$

Поведение линейной и нелинейной модели в области интерференции качественно совпадают, но с ростом координаты результаты расходятся. Это происходит из-за роста амплитуды второй гармоники, что видно из спектра, приведенного на рис. 6, б.

### Результаты расчетов для встречных потоков и их сравнение с линейной теорией

Перейдем к анализу встречных потоков. Для проверки результатов нелинейной модели воспользуемся результатами работы [1], которая также основана на линейной гидродинамической теории, но построенной для встречных потоков.

Для простоты будем рассматривать случай встречных потоков, движущихся с одинаковыми скоростями навстречу друг другу. Уравнения модели аналогичны (1), но в данном случае имеем  $v = -1$ . Для этого случая можно получить (см., например, [1]) точное решение дисперсионного уравнения, которое имеет вид,

$$b_k = \pm \sqrt{1 + w^2 \pm \sqrt{1 + 4w^2}}, \quad k = 1, \dots, 4.$$

На рис. 7 приведены дисперсионные зависимости мнимой и действительной частей волновых чисел  $b_k$ . Аналогично случаю попутных пучков можно выделить область неустойчивости ( $0 < w < 1.4$ ) и область интерференции ( $1.4 < w$ ), где существуют такие же волны, как и в случае попутных пучков.

Рассмотрим поведение моделей встречных пучков в области интерференции. На рис. 8 показано распределение тока по координате для двух моделей и спектр плотности тока модулированного пучка в точке  $x = 0.95$ . Здесь: сплошной линией показано распределение переменной составляющей тока для гидродинамической модели, точками – распределение первой гармоники тока нелинейной модели. Кривые 1 соответствуют модулированному пучку, движущемуся в положительном направлении, кривые 2 – немодулированному встречному пучку. Модуляция потока производилась по скорости, величина модуляции 0.01. Графики построены при частоте модуляции  $w = 5$  для разных значений параметра  $\alpha$ .

Можно сделать вывод, что даже при малой модуляции с увеличением параметра  $\alpha$  в спектре тока появляются нелинейные составляющие (рис. 8, б), с ростом которых соответствие между моделями пропадает (рис. 8, в). Увеличение параметра  $\alpha$  можно интерпретировать как увеличение длины пространства взаимодействия.

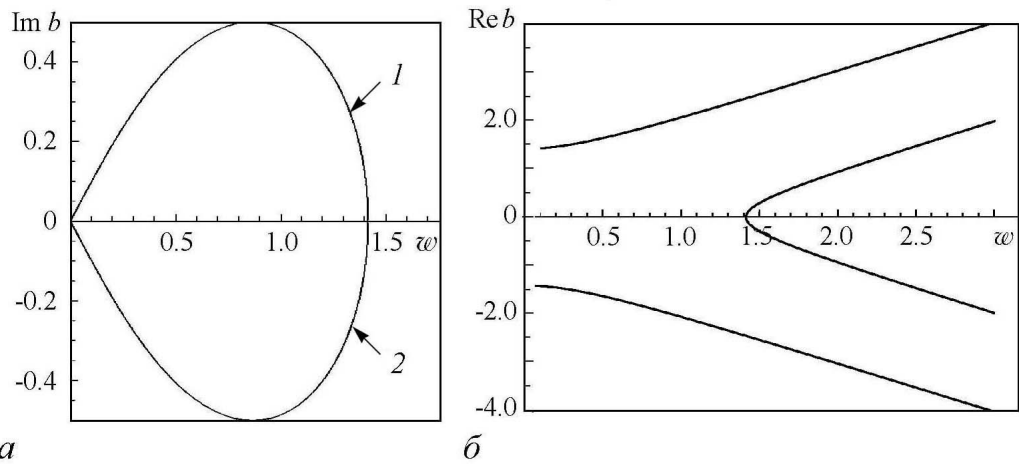


Рис. 7. Дисперсионная характеристика модели для встречных пучков с одинаковыми скоростями:  $a$  – мнимая часть волновых чисел,  $b$  – действительная часть волновых чисел

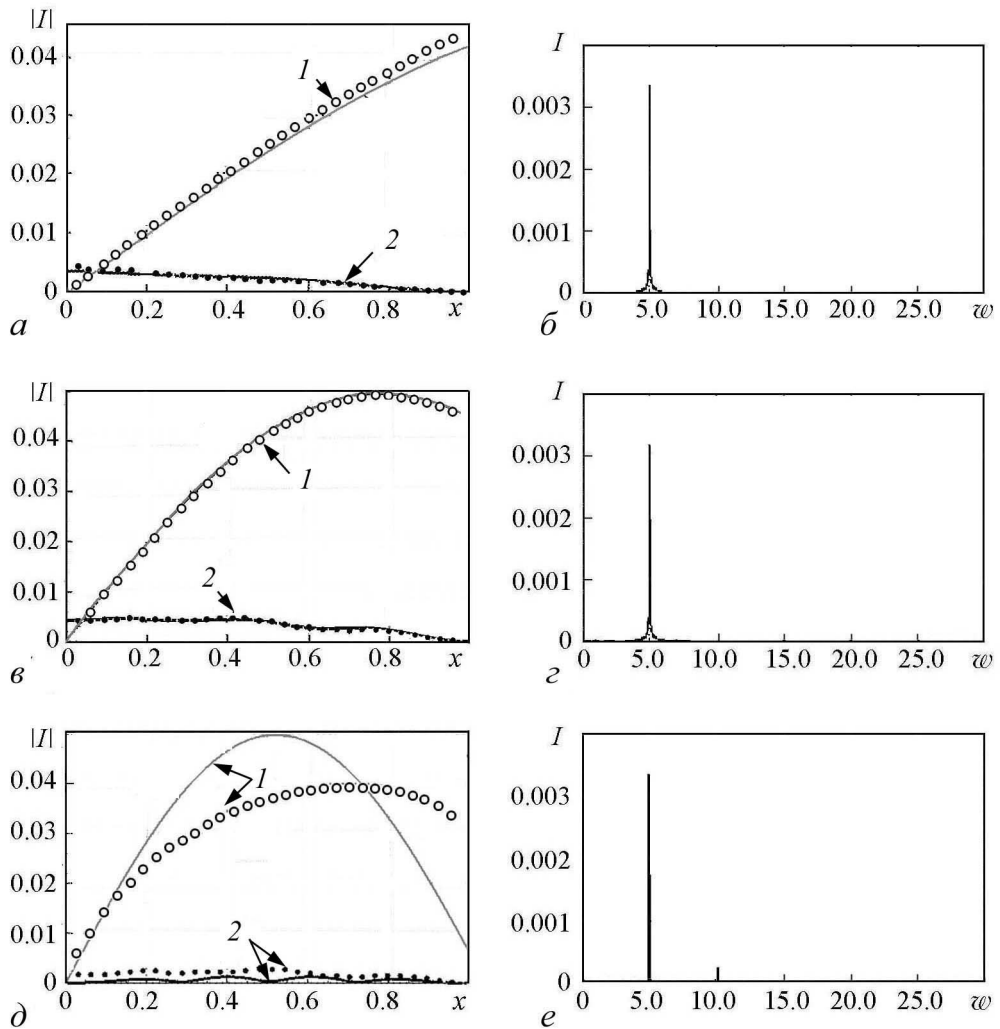


Рис. 8. Распределение тока модулированного  $1$  и немодулированного  $2$  пучка по координате для двух моделей и спектр плотности тока модулированного пучка при  $x = 0.95$  для различных значений  $\alpha$ :  $a - 1, б - 2, в - 3$

Также из этих рисунков видно, что возбуждаемая во встречном пучке амплитуда колебаний плотности тока гораздо меньше амплитуды колебаний в модулированном пучке. С увеличением частоты модуляции  $w$  ( $w > 5$ ) возбуждаемая амплитуда колебаний плотности тока уменьшается, и взаимодействие между пучками практически пропадает, что соответствует результатам работы [1].

В [1] показано, что для области неустойчивости возможно добиться значительного усиления входного сигнала. Но в нелинейной модели не удалось добиться значительного усиления, так как для РС-модели начинают проявляться свойства частиц, а именно возможность их поворота.

В некоторой области параметров  $w$  и  $\alpha$ , в которой не происходит поворота частиц, поведение моделей качественно совпадает (рис. 9). Вне этой области возможен поворот электронов, что принципиально невозможно в гидродинамической (линейной) модели.

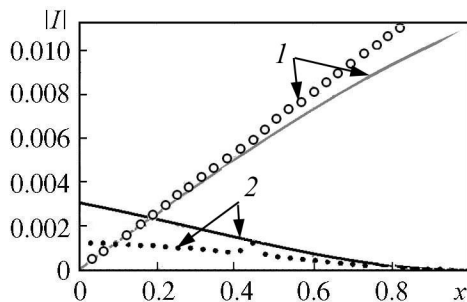


Рис. 9. Распределение тока модулированного 1 и немодулированного 2 пучка по координате для двух моделей при  $w = 1.3$ ,  $\alpha = 1$

### Заключение

Предложенная нелинейная модель двухлучевой системы демонстрирует хорошее соответствие линейной модели на коротких промежутках взаимодействия. С ростом длины пространства дрейфа увеличивается вклад высших гармоник и соответствие между моделями пропадает. При некоторых значениях входного сигнала и длины пространства дрейфа в построенной модели происходит разворот электронов, что невозможно в линейных моделях, используемых для сравнения.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-02-01209 А.*

### Библиографический список

1. Лопухин В.М., Рошаль А.С. Усилитель на встречных электронных потоках // Радиотехника и электроника. 1962. № 4, с 643.
2. Филимонов Г.Ф. Нелинейная теория двухлучевой электронной лампы. Ч. I. Вывод и исследование уравнений // Радиотехника и электроника. 1959. № 3, с 489.
3. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. В 2-х т. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003
4. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Советское радио, 1970.

### References

1. Lopuhin V.M., Roshal A.S. Opposite directed beam amplifier // Radiotekhnika i elektronika. 1962. № 4. P. 643. (In Russian)



2. *Filimonov G.F.* Nonlinear theory two-stream tube. P. I. Deriving and studying of equations // Radiotekhnika i elektronika. 1959. № 3. P. 489. (In Russian)
3. *Trubetskov D.I., Khramov A.E.* Lectures on Microwave Electronics for Physicists. In 2 volumes. Moscow: FIZMATLIT, 2003. (In Russian)
4. *Shevchik V.N., Trubetskov D.I.* Analytic methods of calculation in microwave electronics. Moscow: Sovetskoe radio, 1970. (In Russian)

Поступила в редакцию 26.05.2015

## NONLINEAR MODEL OF TWO ELECTRON BEAM AND TESTING

*S. S. Voloshchuk*

Saratov State University

Non-linear nonstationary theory of two-stream amplifier has been suggested for case of co- and opposite directed beams. Non-linear theory has been compared with calculation of linear theory for both cases.

*Keywords:* Two-stream amplifier, two-stream instability, particle-in-cell method.



*Волощук Сергей Сергеевич* – родился в Саратове (1990), окончил Саратовский государственный университет (2013). В настоящее время – аспирант факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Научные интересы – численные методы, многолучевые системы. Имеет одну научную публикацию в журнале «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: ss.voloshchuk@gmail.com