

## АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ

### Примеры и свойства: Обзор\*

*А. П. Кузнецов<sup>1</sup>, Н. В. Станкевич<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

В данной статье представлен обзор известных в нелинейной динамике малоразмерных моделей, демонстрирующих квазипериодическое поведение. Также представлены новые результаты, относящиеся к анализу многочастотных квазипериодических колебаний для моделей с внешним воздействием и связанных осцилляторов.

*Ключевые слова:* Квазипериодические колебания, динамические системы, показатели Ляпунова, скрытые аттракторы.

### Введение

Квазипериодические колебания представляют собой широко распространенный в науке и технике класс колебаний [1–7]. В последнее время данному виду колебаний уделяется большое внимание, поскольку, с одной стороны, они являются не таким сложными, как хаотические, а с другой стороны, они непериодические, что делает их интересными для анализа. Можно отметить некоторые перспективы в использовании данного класса колебаний, например, при скрытой передаче информации [6].

В наиболее общем виде квазипериодические колебания представляют собой колебания с двумя и более компонентами, характеризующимися несоизмеримыми частотами. В данном случае (для двух компонент) в фазовом пространстве прообразом является тор с двумя направлениями обхода. На рис. 1, *a* представлен двухчастотный тор-аттрактор. При увеличении числа несоизмеримых частотных компонент размерность тора увеличивается. Так, например, если система характеризуется четырьмя несоизмеримыми частотными компонентами, то это будет соответствовать

\*Статья написана по материалам доклада, прочитанного на XVI Международной зимней школе-семинаре по радиофизике и электронике СВЧ. Саратов, Россия, 2–7 февраля 2015.

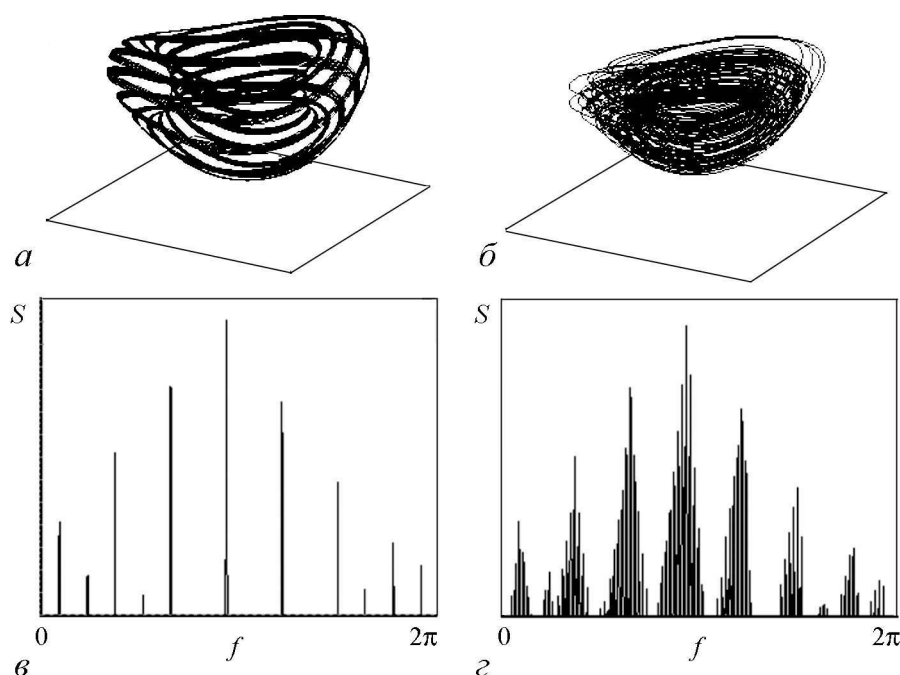


Рис. 1. Примеры аттракторов и спектров Фурье двухчастотных (а), (б) и четырехчастотных (в), (г) торов в пятимерном пространстве. Визуализировать подобного рода фигуру достаточно сложно. На рис. 1, б представлен пример трехмерной проекции четырехчастотного тора. Колебания данного рода имеют характерную форму спектра Фурье: имеется основная частотная компонента, окруженная компонентами-спутниками (пример спектра для двухчастотного квазипериодического режима на рис. 1, в). При увеличении размерности тора, в окрестности каждой компоненты-спутника рождаются новые спутники. Характерный вид спектра Фурье для четырехчастотного квазипериодического режима представлен на рис. 1, г.

Традиционными примерами систем с квазипериодической динамикой являются неавтономные системы, поскольку в таких системах легко обеспечить условие несоизмеримости частот [1, 2]. Однако возможна и автономная квазипериодичность, которая наблюдается в генераторах квазипериодических колебаний. В литературе представлено достаточно мало автономных динамических систем, демонстрирующих квазипериодические колебания. В данной работе представлен обзор подобных моделей, и особое внимание уделяется именно квазипериодическим колебаниям в этих системах. Также представлены новые модели, демонстрирующие автономную квазипериодичность, причем предложены модели с различными сценариями рождения тора, а также обсуждаются новые малоисследованные эффекты, которые могут возникать в таких системах, например, «скрытые аттракторы». Также в работе рассмотрены вопросы вынужденной и взаимной синхронизации квазипериодических колебаний.

Особое внимание обратим на методы изучения квазипериодических колебаний. Отличение квазипериодических колебаний от хаотических является не такой уж простой задачей. По форме фазового портрета и спектра Фурье достаточно сложно выделить даже двухчастотные квазипериодические режимы, не говоря уже о торах

Сигнатура спектра показателей Ляпунова

Реализующийся режим	Обозначение	Сигнатура спектра показателей Ляпунова ( $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5, \Lambda_6$ )
разбегание на бесконечность	D	-
устойчивая неподвижная точка	E	(-, -, -, -, -, -)
периодический режим	P	(0, -, -, -, -, -)
двухчастотный квазипериодический	T2	(0, 0, -, -, -, -)
трехчастотный квазипериодический	T3	(0, 0, 0, -, -, -)
четырёхчастотный квазипериодический	T4	(0, 0, 0, 0, -, -)
хаотический	C	(+, 0, -, -, -, -)
гиперхаотический	H	(+, +, 0, -, -, -)

более высокой размерности. Одним из наиболее удобных методов выявления квазипериодических колебаний высокой размерности является расчет полного спектра показателей Ляпунова. Наличие в сигнатуре спектра показателей Ляпунова дополнительных нулевых показателей говорит о наличии в системе дополнительных несоизмеримых частот. В таблице представлены сигнатуры показателей Ляпунова и их обозначения, которые будут в дальнейшем использоваться в тексте статьи.

## 1. Известные системы с автономной квазипериодической динамикой

**1.1. Схема Чуа.** Одной из хорошо известных и всесторонне исследованной теоретически и экспериментально моделей нелинейной динамики является схема Чуа [8–10], представляющая собой электронную схему с кусочно-линейной характеристикой. Она приводится (с помощью уравнений Кирхгофа) к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha f(y - x), \\ \dot{y} &= -f(y - x) - z, \\ \dot{z} &= \beta y, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $f(x) = -ax + 0.5(a + b)[|x + 1| - |x - 1|]$ . Уравнения (1) задают трехмерную динамическую систему с четырьмя управляющими параметрами. Традиционно фиксируют значения  $a$ ,  $b$  и наблюдают за плоскостью параметров  $(\alpha, \beta)$ . Типичным для (1) эффектом является переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Однако при некотором выборе параметров  $a$  и  $b$  возможно и квазипериодическое поведение. Зафиксируем параметры следующим образом:  $a = 0.07$  и  $b = 0.1$ . На рис. 2 представлены два фазовых портрета и сечения Пуанкаре плоскостью  $x = 0$ , соответствующие двухчастотным торам. На рисунках хорошо видна инвариантная кривая, соответствующая сечению двухчастотного тора.

Также к возможным системам с квазипериодическими колебаниями можно отнести модифицированные модели схемы Чуа, в которых кусочно-линейная характе-

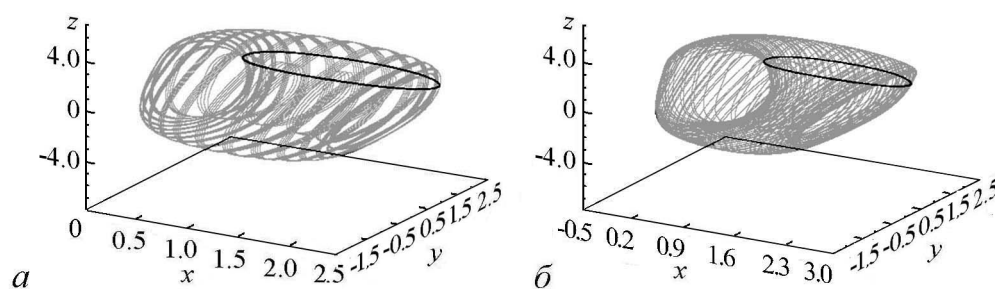


Рис. 2. Примеры фазовых портретов для системы Чуа при:  $a - \alpha = 3, \beta = 2.5$ ;  $b - \alpha = 6, \beta = 2.5$ . Черной линией обозначено сечение Пуанкаре поверхностью  $x = 0$

ристика заменяется некоторой непрерывной функцией. В системах подобного рода также могут возникать квазипериодические колебания, достаточно подробно об этом написано в [11, 12].

**1.2. Модель Лоренца-84.** Несколько менее известным примером автономной динамической трехмерной системы, которая может демонстрировать квазипериодические колебания, является модель, предложенная Лоренцем в рамках климатической мотивации в 1984 году [13–16]. Ее называют иногда система Лоренц-84 (в отличие от классической системы Лоренца)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax - y^2 - z^2 + aF, \\ \dot{y} &= -y + xy - bxz + G, \\ \dot{z} &= -z + bxy + xz. \end{aligned} \quad (2)$$

Эта система имеет четыре управляющих параметра, из которых два обычно фиксируют, выбирая значения  $a = 0.25, b = 4$ . Фрагмент карты ляпуновских показателей на плоскости двух оставшихся параметров ( $G, F$ ) представлена на рис. 3. Основные периоды регулярных режимов указаны соответствующими цифрами на карте.

При построении карты диапазон параметров был выбран таким образом, чтобы визуализировать область квазипериодических колебаний (рис. 3, *a*). На карте хорошо видна узкая область автономной квазипериодичности  $T_2$ . На плоскости параметров она наблюдается выше линии бифуркации Неймарка–Сакера, в результате которой и рождается тор в фазовом пространстве. На эту линию опирается система расширяющихся языков Арнольда, отвечающих резонансным циклам разного периода.

На рис. 3, *б* приведен пример трехмерного фазового портрета. Черным цветом изображен цикл периода 2, для которого параметры отвечают ситуации до порога бифуркации Неймарка–Сакера. Серым цветом показан тор, родившийся на базе этого цикла. Таким образом, особенность данной системы в том, что бифуркация Неймарка–Сакера происходит на основе двухобrotnого предельного цикла. Соответственно, на картах режимов самый широкий язык Арнольда имеет период 6, что отвечает резонансу 1:3 на базе цикла периода 2.

Отметим, что для рассматриваемой системы характерна мультистабильность, отвечающая одновременной реализации квазипериодического и периодического режимов. Так, на рис. 3, *б* представлен еще один цикл периода 2, сосуществующий с инвариантным тором.

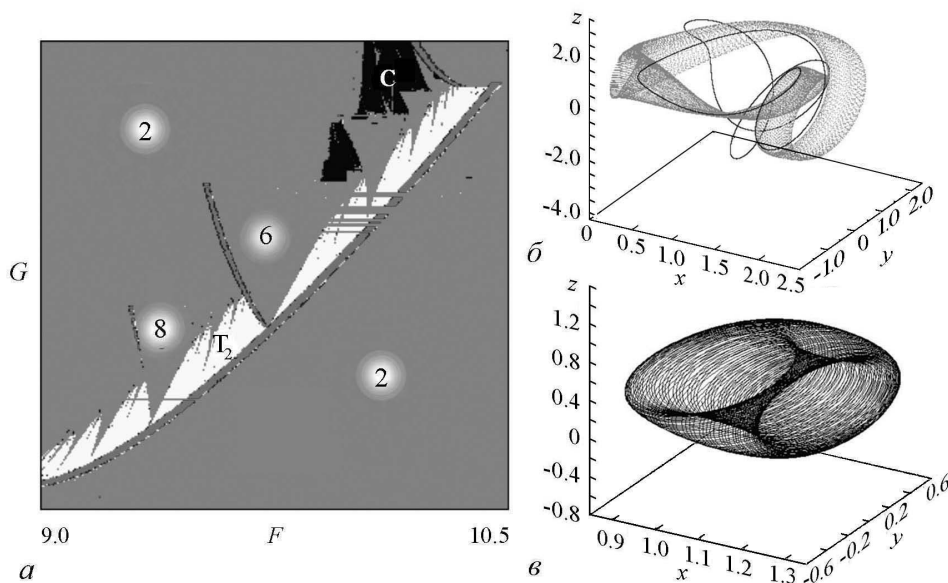


Рис. 3. *a* – карта показателей Ляпунова для модели Лоренца-84 (2) при  $a = 0.25$ ,  $b = 4$ ; *b* – примеры фазовых портретов системы (2) серый цвет  $F = 9.997$ ,  $G = 0.58878$ , черный  $F = 9.0$ ,  $G = 0.58878$ ; *в* – пример неустойчивого тора при  $F = 2.47$ ,  $G = 1.65$ , полученный итерированием системы (2) в обратном времени

Интересно, что система Лоренц-84 может демонстрировать и неустойчивый тор, который можно визуализировать, если интегрировать уравнения (2) в обратном времени. На рис. 3, *в* дан пример фазового портрета, отвечающего неустойчивому инвариантному тору.

**1.3. Модифицированный генератор Анищенко–Астахова.** Двумерный тор можно реализовать в трехмерной автономной динамической системе, однако, возможность *бифуркации удвоения двумерного тора* в автономной системе требует повышения размерности фазового пространства, как минимум, до четырех. В.С. Анищенко с соавторами был разработан генератор квазипериодических колебаний с четырехмерным фазовым пространством, в котором наблюдается такая бифуркация [17–19]. Далее мы представим описание этого генератора, а также более детально охарактеризуем его динамику.

Эта система представляет собой развитие известной эталонной модели нелинейной динамики – генератора Анищенко–Астахова [8], в которую с целью обеспечения незатухающих двухчастотных колебаний вводится дополнительная цепь обратной связи, характеризующаяся собственной частотой, отличающейся от резонансной частоты контура генератора,

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= mx + y - x\varphi - dx^3, \\
 \dot{y} &= -x, \\
 \dot{z} &= \varphi, \\
 \dot{\varphi} &= -\gamma\varphi + \gamma\Phi(x) - gz,
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

где  $\Phi(x) = I(x)x^2$ ,  $I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

Система (3) является нелинейной диссипативной динамической системой размерности  $N = 4$  и характеризуется четырьмя управляющими параметрами:  $m$  – параметр возбуждения,  $d$  – параметр нелинейной диссипации,  $\gamma$  – параметр затухания и  $g$  – параметр инерционности фильтра.

На рис. 4 представлена карта показателей Ляпунова модифицированного генератора Анищенко–Астахова (3) на плоскости основных управляющих параметров  $g$  и  $m$  для фиксированных значений  $\gamma = 0.2$  и  $d = 0.001$ . Как видно из рисунка, при малых значениях параметра  $m$  в системе реализуются автоколебания, которым отвечает неподвижная точка в сечении Пуанкаре (период 1 на карте). С увеличением параметра  $m$  можно придти к линии рождения двумерного тора, которой отвечает бифуркация Неймарка–Сакера основного предельного цикла. На карте показателей Ляпунова хорошо видна лежащая выше этой линии область квазипериодических колебаний  $T_{2Q_1}$ , в которую встроена система языков синхронизации, отвечающих рациональному соотношению частот в генераторе. Наиболее выражен язык синхронизации периода 4. Его особенность – наличие *вторичной бифуркации Неймарка–Сакера*. Этот факт иллюстрирует рис. 4, б, на котором показан фазовый портрет и его сечение Пуанкаре гиперповерхностью  $\varphi = 0$  из области двухчастотных квазипериодических колебаний над языком периода 4. Можно видеть, что с увеличением параметра  $m$  сначала наблюдается простой предельный цикл, затем происходит бифуркация Неймарка–Сакера и рождается инвариантный тор. При увеличении параметра  $m$  на этом торе возникает резонансный цикл периода 4, а затем – вторичная бифуркация Неймарка–Сакера. На ляпуновской карте соответствующая область квазипериодичности примыкает к вершине языка и обозначена буквой  $T_{2q}$ .

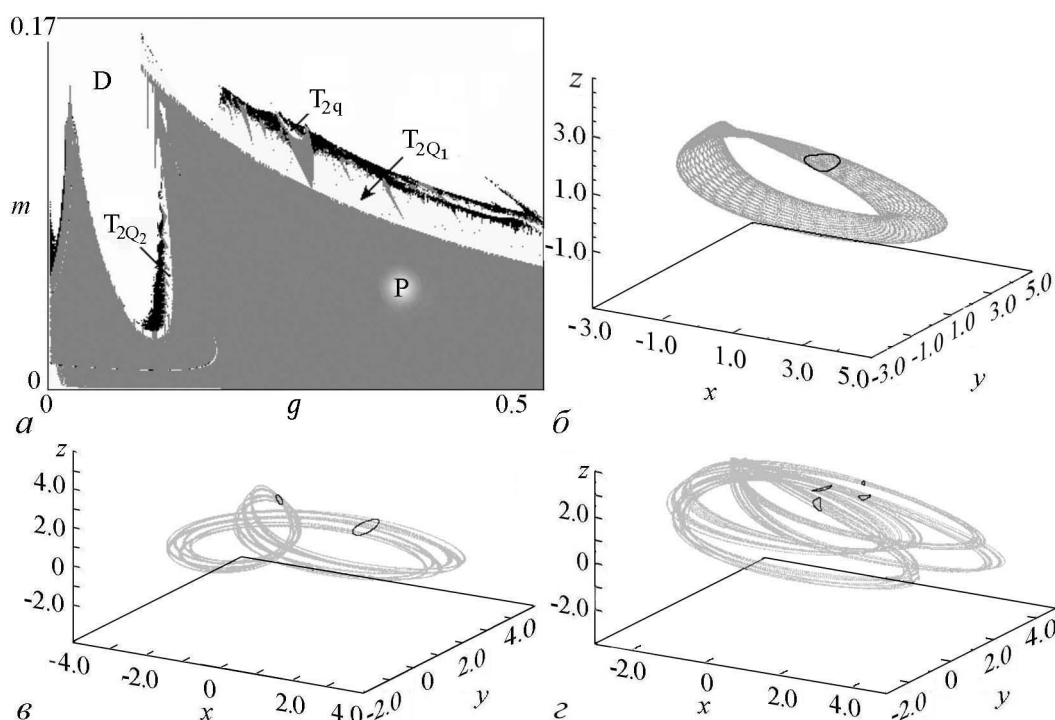


Рис. 4. а – карта показателей Ляпунова для модифицированного генератора Анищенко–Астахова; б–г примеры фазовых портретов или сечений Пуанкаре для квазипериодических аттракторов из различных областей квазипериодики:  $T_{2Q_1}$ ,  $T_{2Q_2}$ ,  $T_{2q}$ , соответственно

Фиксируем теперь параметр  $m$  и будем уменьшать  $g$ . Как видно из приведенной на рис. 4 карты режимов, сначала происходит бифуркация удвоения основного предельного цикла, так что период в сечении Пуанкаре становится равным 2. Однако далее снова наблюдается рождение квазипериодических колебаний на базе уже этого двухоборотного цикла. На плоскости параметров рис. 4 имеет место соответствующая область квазипериодичности  $T_{2Q_2}$  со встроенной системой языков Арнольда. На рис. 4, в представлен фазовый портрет и сечение Пуанкаре двухчастотного тора из данной области.

Помимо описанных бифуркаций и колебательных режимов в системе (3) могут реализоваться бифуркации удвоения двумерного тора. При постепенном увеличении параметра  $m$  инвариантная кривая становится двухоборотной – данная перестройка соответствует бифуркации удвоения тора. При дальнейшем увеличении параметра  $m$  можно наблюдать еще две бифуркации удвоения тора. Далее инвариантная кривая теряет гладкость, и реализуется переход к хаосу через ее разрушение [17].

## 2. Автономный генератор квазипериодических колебаний

Представленные выше системы обладают той или иной спецификой. Так система Чуа включает элемент с негладкой (кусочно-линейной) характеристикой. Система Лоренц-84 демонстрирует квазипериодические колебания только для двухоборотного предельного цикла и в узкой области параметров. И для той и другой модели трудно указать четкие физические механизмы, отвечающие за колебания с несоизмеримыми частотами. Генератор Анищенко–Астахова в значительной мере лишен этих недостатков, однако, характеризуется более высокой размерностью фазового пространства. В недавних работах [20,21] была предложена простейшая трехмерная модель, демонстрирующая квазипериодические колебания. Далее мы детально обсудим соответствующую модель генератора и ее модификации [22].

### 2.1. Теоретическая модель генератора квазипериодических колебаний.

Исходным пунктом при создании данного генератора является функциональная схема *релаксационного автогенератора*, которая содержит накопительный элемент (типа конденсатора), который постепенно заряжается через сопротивление от источника напряжения, а затем быстро разряжается через «пороговый» элемент (типа неоновой лампы). «Пороговый элемент» должен иметь два порога: один для зажигания и другой для гашения колебаний. Когда уменьшение напряжения через конденсатор достигнет уровня гашения, пороговый элемент выключается, и конденсатор начинает снова заряжаться, что ведет к повторению цикла.

Далее в качестве порогового элемента был выбран автогенератор с *жестким возбуждением*, для которого управляющим параметром выступает выходная переменная накопительного элемента. Автогенератор наряду с порогом возбуждения колебаний по управляющему параметру имеет также порог, более низкий, для срыва колебаний. Тогда в системе должны возникать релаксационные колебания, сопровождаемые циклами зарядки и разрядки накопительного элемента. Теперь система будет иметь *два характерных временных масштаба*. Один ассоциируется с релаксационными колебаниями, а другой – с основной рабочей частотой автоколебательного элемента. Соотношение частот можно задавать произвольно, так что следует ожидать, что система способна генерировать самоподдерживающиеся квазипериодические колебания.

Описанный физический механизм реализует следующая модель:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= \mu - x^2.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь  $x$  – обобщенная координата, относящаяся к автоколебательному элементу;  $\omega_0$  – частота его собственных колебаний. Множитель перед производной  $\dot{x}$  содержит параметр  $\lambda$ , характеризующий глубину положительной обратной связи в автогенераторе, а также нелинейный член  $x^2$ , стимулирующий возбуждение колебаний, и член  $x^4$ , отвечающий за насыщение при больших амплитудах. Нелинейность, соответствующая комбинации двух последних членов, обеспечивает жесткое возбуждение автогенератора, обусловленное присутствием субкритической бифуркации Андронова–Хопфа. Как следствие, в системе имеет место *гистерезис*, причем в зависимости от параметра  $\beta$  изменяется ширина петли гистерезиса. Параметр  $\lambda$  входит в уравнение вместе с аддитивной добавкой  $z$ , которая характеризует состояние накопительного элемента, а эволюция этой переменной во времени задается вторым уравнением. Система (4) имеет два независимых временных масштаба. В качестве одного фигурирует характерное время восстановления состояния накопительного элемента  $\tau \approx \mu^{-1}$ , а в качестве второго – основной период колебаний автогенератора  $T = 2\pi/\omega_0$ .

Обратимся к численному исследованию системы (4) в зависимости от параметров, определяющих характерные временные масштабы системы. На рис. 5, а показана карта показателей Ляпунова на плоскости таких параметров  $(\omega_0, \mu)$ . Белым цветом обозначена область, для которой изображающая точка уходит на бесконечность. Из рисунка хорошо видно, что при  $\mu > 1$  типичным является устойчивый предельный цикл, отвечающий неподвижной точке в сечении Пуанкаре. При  $\mu < 1$  этот цикл претерпевает бифуркацию Неймарка–Сакера, в результате которой в системе становятся возможными устойчивые двухчастотные торы (им отвечают квазипериодические режимы). На карте можно видеть характерную систему языков Арнольда. Внутри языков Арнольда реализуются предельные циклы, которые являются резонансными и лежат на поверхности соответствующего тора. Подчеркнем, что эти циклы отвечают *внутренним резонансам* системы (4), поскольку рассматриваемая система автономна.

При уменьшении собственной частоты  $\omega_0$  проявляется внутреннее устройство языков – наблюдаются бифуркации удвоения периода резонансных циклов и переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Кроме того, на рисунке просматривается линия *перекрывтия языков*. Правее этой линии имеют место квазипериодические режимы, а левее располагаются области хаоса.

Отметим, что при существенном увеличении собственной частоты  $\omega_0$  хаотические режимы исчезают и остаются только квазипериодические, по крайней мере, на уровне достигаемого в наших расчетах разрешения. С физической точки зрения это область, в которой реализуются режимы *пульсирующей генерации* [20,21].

Обозначим теперь  $y = \dot{x}$ . Тогда в трехмерном фазовом пространстве  $(x, y, z)$  при соответствующем выборе параметров наблюдаются аттракторы в виде инвариантных торов. Пример такого аттрактора приведен на рис. 5, б. Рядом с портретом аттрактора на рис. 5, в представлен спектр Фурье генерируемого сигнала. Спектр Фурье для таких режимов выглядят точно так, как это и должно быть для квазипериодических колебаний: он содержит дискретное множество равно удаленных друг



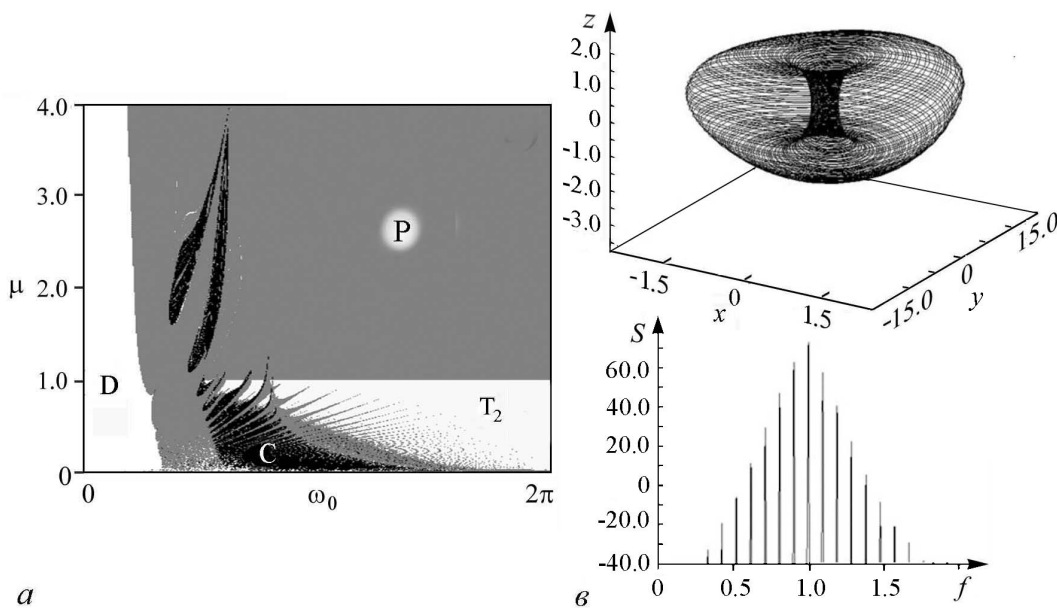


Рис. 5. *a* – карта показателей Ляпунова при  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0.5$ ; *b* – фазовый портрет и *c* – спектр Фурье для генератора (4) при  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\mu = 0.9$

от друга частотных компонент. Амплитуда компонент уменьшается вправо и влево от главной спектральной составляющей, которая соответствует основной частоте автоколебательного элемента. Расстояние между соседними компонентами определяется частотой релаксационных колебаний, то есть циклами заряда и разряда накопительного элемента, и увеличивается с ростом параметра  $\mu$ .

**2.2. Экспериментальная реализация.** Теперь перейдем к экспериментальной реализации данной системы. Описанный ниже эксперимент выполнен совместно с Е.П. Селезевым [25]. Основная идея состоит в следующем: конструируется автогенератор, автоколебания в котором изменяются в соответствии со схемой управления, как показано на рис. 6, *a*. Базовым элементом является автогенератор с индуктивной обратной связью, в котором используется полевой транзистор с двумя затворами (КП327). Такой транзистор позволяет реализовать механизм регулировки гашения и возбуждения автоколебаний в контуре.

Автогенератор генерирует самоподдерживающиеся колебания с амплитудой  $U$ . С помощью умножителя напряжение возводится в квадрат. Затем квадратичное напряжение  $U^2$  проходит через резистор  $R$  и переходит на интегратор, где оно интегрируется вместе с дополнительным напряжением  $U_2^0$ . Проинтегрированное напряжение – это напряжение на втором затворе полевого транзистора, от которого зависит ширина канала полевого транзистора. В зависимости от ширины канала в автогенераторе будут возбуждаться автоколебания или нет. В автогенераторе используется также система встречно-параллельных диодов (KD52R), они необходимы для создания требуемого типа нелинейности по типу осциллятора ван дер Поля.

Для возможности реализации квазипериодических автоколебаний в генераторе необходимо, чтобы характеристика полевого транзистора была *гистерезисной*. Это связано с тем, что на каждом цикле заряда–разряда автоколебания в генераторе не

должны гаснуть совсем, и для возбуждения колебаний на новом цикле необходима некая затравка. Для экспериментальной системы параметры были выбраны так, что ширина петли гистерезиса была максимальна.

На рис. 6, б представлена упрощенная схема нашего генератора в виде автогенератора с переменным током индуктивности, который обуславливается в соответствии со схемой управления рис. 6, а. Если записать законы Кирхгофа для общей точки  $U$ , то можно получить уравнения, описывающие динамику напряжения в схеме на рис. 6, б<sup>1</sup>,

$$\frac{d^2U}{dt^2} - \frac{1}{C_k} \left[ \frac{I_0}{\varphi} + k_0MU_2 + \left( 3S_1M - \frac{I_0}{8\varphi^3} \right) U^2 - 5S_2MU^4 \right] \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC_k}U = 0. \quad (5)$$

Здесь  $I_0$ ,  $\varphi$  – характеристики диодов;  $M$  – коэффициент взаимной индукции;  $S_1$ ,  $S_2$  – коэффициенты, описывающие крутизну ВАХ полевого транзистора. Таким образом, получаем уравнение автогенератора с жестким возбуждением с управляемым параметром возбуждения. При этом динамика напряжения на втором затворе полевого транзистора определяется схемой интегрирования и будет описана уравнением

$$\frac{dU_2}{dt} = \frac{1}{RC_1}(U_2^0 - U^2). \quad (6)$$

В соотношениях (5) и (6) выполним перенормировку времени на собственную частоту  $\sqrt{1/LC_k}$

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{dt^2} - \sqrt{\frac{L}{C_k}} \left[ \frac{I_0}{\varphi} + k_0MU_2 + \left( 3S_1M - \frac{I_0}{8\varphi^3} \right) U^2 - 5S_2MU^4 \right] \frac{dU}{dt} + U = 0, \\ \frac{RC_1}{\sqrt{LC_k}} \frac{dU_2}{dt} = U_2^0 - U^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Перепишем теперь математическую модель (4), также выполнив перенормировку времени на частоту  $\omega_0$ ,

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \omega_0^{-1}(\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + x = 0, \\ \omega_0\dot{z} = \mu - x^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, эта модель и система (7) эквивалентны. При этом в эксперименте, варьируя сопротивление  $R$ , можно менять параметр  $\omega_0$ , то есть первый временной масштаб системы. В свою очередь, подаваемое на интегратор управляющее напряжение  $U_2^0$ , с помощью которого регулируется напряжение на втором затворе полевого транзистора, является аналогом второго временного масштаба – параметра  $\mu$  в математической модели (4).

На рис. 6, в представлен пример двумерной проекции инвариантного тора на плоскость  $(U, U_2)$  в виде фотографии с экрана осциллографа в области, где реализуется квазипериодическая динамика.

<sup>1</sup>Подробный вывод можно найти в [5].

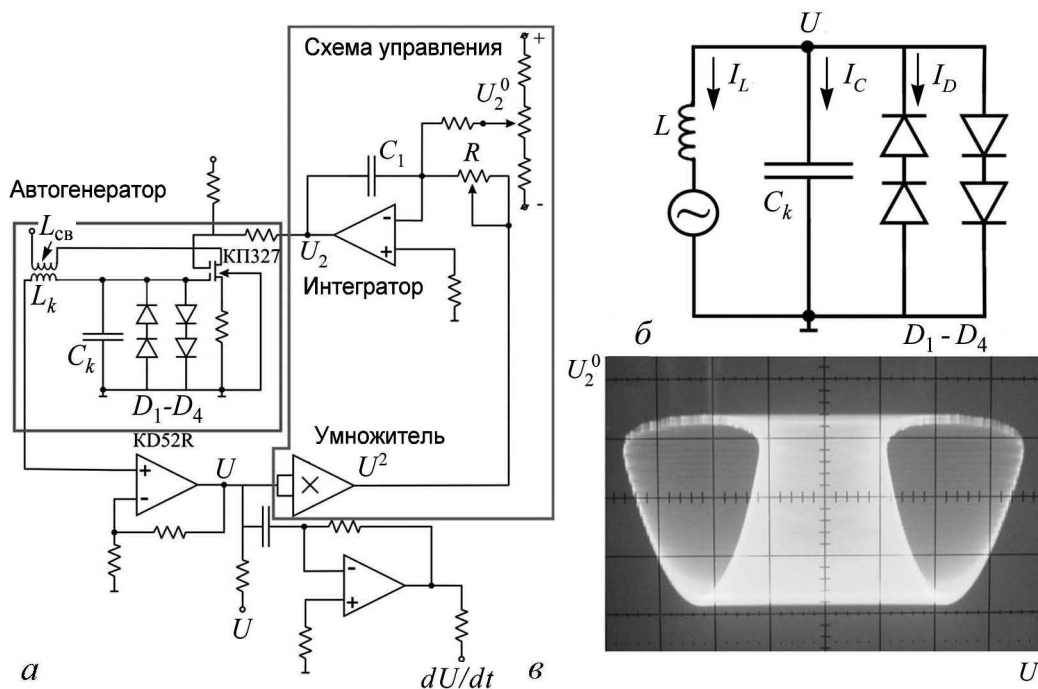


Рис. 6. *а* – схема генератора квазипериодических колебаний на базе двухзатворного полевого транзистора; *б* – упрощенная схема автогенератора; *в* – пример двумерной проекции фазового портрета, сфотографированного с экрана осциллографа на плоскости переменных  $(U, U_2^0)$

**2.3. Hidden-аттракторы.** Одним из новейших направлений изучения типов динамики динамических систем является изучение так называемых «скрытых» аттракторов (hidden-attractors) [24–28]. Аттракторы автоколебательных систем имеют бассейны притяжения, которые обычно ассоциируются с неустойчивым состоянием равновесия, в то время как скрытые аттракторы имеют бассейны притяжения, не пересекающиеся с неустойчивым равновесием. В указанных работах представлены примеры поиска подобных скрытых аттракторов в хорошо известных системах (например, система Чуа), а также представлены примеры новых динамических систем с подобного рода аттракторами.

Предложенный нами генератор квазипериодических колебаний не имеет состояний равновесия, соответственно все аттракторы, существующие в системе, являются «скрытыми» [29–31]. На рис. 7, *а–в* представлены бифуркационные деревья в окрестности резонанса  $5 : 2$ , где можно наблюдать сосуществование резонансного цикла с тором, а также сосуществование тора с хаотическими аттракторами. Данные деревья были построены для различных начальных условий и различных направлений сканирования по параметру. В результате седло-узловой бифуркации рождается резонансный цикл  $5 : 2$ . Так как система (4) имеет симметрию относительно перестановки  $x \rightarrow -x$ , то по циклу можно пройти по часовой стрелке и против. При увеличении параметра  $\omega_0$  происходит потеря симметрии в результате бифуркации «вилка» и уже каждый из аттракторов претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода с переходом к хаосу. Таким образом, в некотором диапазоне параметров сосуществуют два хаотических и квазипериодический аттрактор. На рис. 7, *г–е* представлены двумерные проекции подобных сосуществующих аттракторов. При даль-

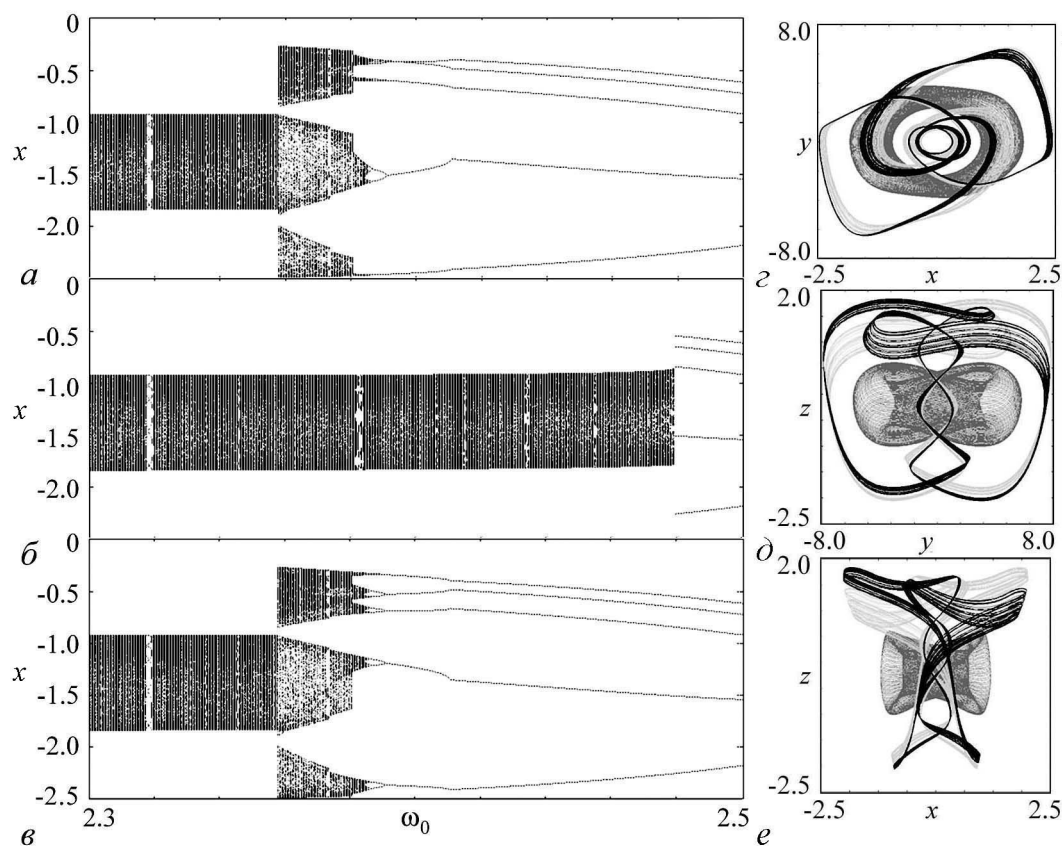


Рис. 7. *a-e* – бифуркационные деревья системы (4), построенные для различных начальных условий и различных типов наследования начальных условий при  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.9$ ; *z-e* – двумерные проекции сосуществующие квазипериодического и двух хаотических «скрытых» аттракторов при  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.9$ ,  $\omega_0 = 2.383$

нейшем увеличении параметра  $\omega_0$  два хаотических аттрактора в результате кризиса объединяются в один, который затем исчезает совсем. Подобное сосуществование «скрытых» аттракторов наблюдается и для других резонансных циклов [31].

**2.4. Модификация 1: Генератор с одной неподвижной точкой.** В системе (4) отсутствует состояние равновесия. С одной стороны, это позволяет изучать в системе такое явление как «скрытые» аттракторы, с другой стороны, появление квазипериодических аттракторов из первоначального положения равновесия не наблюдается. Это ограничение может быть объяснено наличием постоянного источника энергии в схеме генератора. Действительно, при фиксированном увеличении параметра  $\mu$  это уравнение представляет собой источник постоянного тока вместо источника постоянного напряжения. Чтобы решить эту проблему, прибегнем к иной формулировке

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - k\dot{x}^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Модель (9) можно интерпретировать как автогенератор с жестким возбуждением, у которого цепь подачи питания инерционная. Параметр  $\varepsilon$  характеризует поступление энергии от источника питания, параметр  $b$  отвечает за инерционные свойства

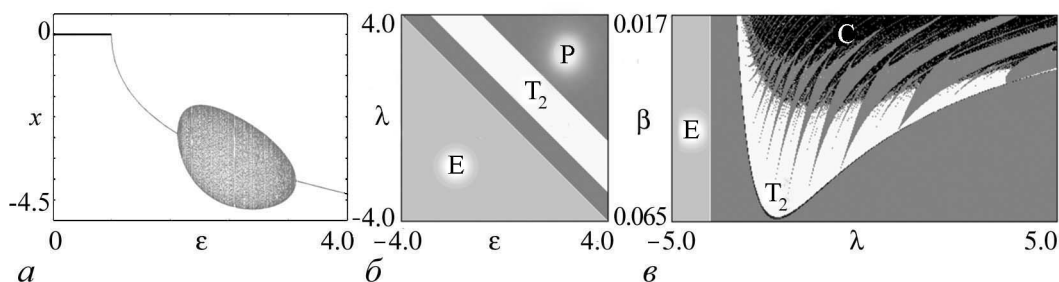


Рис. 8. *a* – бифуркационное дерево системы (9) при  $\lambda = 0$ ,  $b = 1$ ,  $k = 0.02$ ,  $\beta = 1/18$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ; карты показателей Ляпунова на различных плоскостях параметров при  $b = 1$ ,  $k = 0.02$ ,  $\omega_0 = 2\pi$  и различных значениях:  $\beta = 1/18$  (*б*) и  $\varepsilon = 4$  (*в*)

цепи питания. Член, содержащий коэффициент  $k$ , отвечает за отбор энергии в автогенератор. Этот параметр обычно имеет значение  $k = 0.02$ .

Данная модель имеет одну неподвижную точку с координатой:  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, \varepsilon)$ . Проанализировав данную точку на устойчивость, можно получить условия бифуркации Андронова–Хопфа

$$\lambda = -\varepsilon \quad \text{и} \quad \lambda = b - \varepsilon - \omega_0^2. \quad (10)$$

Теперь обратимся к численному исследованию системы. На рис. 8 представлены бифуркационное дерево, построенное в зависимости от параметра  $\varepsilon$ , и карты показателей Ляпунова на различных плоскостях параметров. На бифуркационном дереве (рис. 8, *a*) черной жирной линией отмечена область, где существует устойчивая неподвижная точка, затем она в результате бифуркации Андронова–Хопфа при  $\varepsilon = \lambda = 0$  становится неустойчивой и рождается предельный цикл. При дальнейшем увеличении параметра  $\varepsilon$  происходит бифуркация Неймарка–Сакера, и рождается двухчастотный тор. На рис. 8, *б* изображена плоскость параметров, ответственных за бифуркацию Андронова–Хопфа, также на ней отмечена аналитически полученная линия бифуркации Андронова–Хопфа. Как видно из рисунка аналитически найденная линия бифуркации Андронова–Хопфа хорошо согласуется с результатами численного анализа. На рис. 4, *б* видна полоса конечной ширины в которой реализуются квазипериодические режимы. Причем ее ширина ограничена вдоль диагонали  $\lambda = \varepsilon$ , а вдоль диагонали  $\lambda = -\varepsilon$  она неограничена. Таким образом, при определенном выборе управляющих параметров имеем достаточно грубые квазипериодические колебания.

На рис. 8, *в* представлена еще одна карта динамических режимов на плоскости параметров  $(\lambda, \beta)$ . На данной плоскости видна характерная система языков Арнольда, причем с уменьшением параметра  $\beta$  языки расширяются, перекрываются и в системе происходит разрушение тора с возникновением хаотической динамики. При увеличении параметра  $\beta$  происходит бифуркация Неймарка–Сакера и в системе рождается устойчивый цикл.

**2.5. Модификация 2: Генератор с двумя неподвижными точками.** Предыдущая модификация позволила наблюдать трансформации аттрактора в фазовом пространстве от неподвижной точки к тору через последовательность бифуркаций Андронова–Хопфа и Неймарка–Сакера. Рассмотрим еще одну модификацию генера-

тора. Исходные уравнения запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= (\mu - x^2)(2 - z^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Эта формулировка по-прежнему позволяет рассматривать процесс зарядки, который происходит в источнике тока. Тем не менее, скорость зарядки теперь регулируется путем ограничения механизма, который защищает систему от достижения напряжений за пределами интервала  $[-c; c]$ . Данная система теперь будет иметь две неподвижные точки  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, \pm c)$ . Собственные значения для точек задаются следующими соотношениями:

$$L_1 = \mp 2\mu c, \quad L_{2,3} = \frac{1}{2}((\lambda \pm c) \pm \sqrt{(\lambda \pm c)^2 - 4\omega_0^2}). \quad (12)$$

Условие для бифуркации Андронова–Хопфа будет иметь вид  $\lambda = \pm c$  для каждой неподвижной точки. Таким образом, для положительных значений  $c$  неподвижная точка при  $(0, 0, c)$  притягивает в направлении  $z$ , и при этом в плоскости  $(x, y)$  имеет место неустойчивый фокус. Для точки  $(0, 0, -c)$  все наоборот:  $z$ -направление отталкивающее, а в плоскости  $(x, y)$  – притягивающий фокус.

Подобная конфигурация особым образом задает структуру фазового пространства. Фазовое пространство ограничено плоскостями  $z = \pm c$ , между которыми существует двухчастотный тор. На рис. 9, *а* представлена графически структура фазового пространства модели (11). При уменьшении параметра  $c$  плоскости  $z_0 = \pm c$  сближаются, при  $c = 0.25$  тор сталкивается с плоскостями, ограничивающими фазовое пространство, и вместо него рождаются два предельных цикла – устойчивый и неустойчивый. На рис. 9, *б* представлено бифуркационное дерево системы (11) для различных начальных условий, на котором видны данные трансформации при вариации параметров. На рисунке используются следующие обозначения:  $E_1, E_2$  – устойчивая и неустойчивая неподвижные точки, отвечающие плоскостям  $z_0 = \pm c$ ;  $S_1$  – устойчивый предельный цикл, лежащий в плоскости  $z_0 = c$ ;  $S_2, N_2$  – устойчивый и неустойчивый циклы, лежащие между плоскостями.

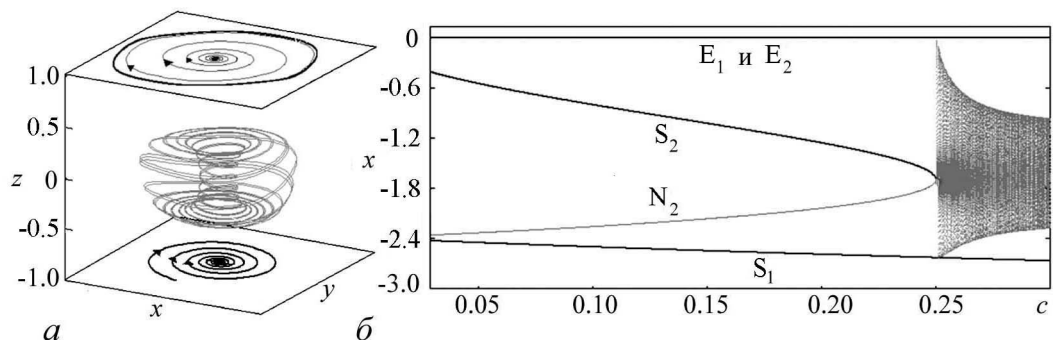


Рис. 9. Система (11): *а* – структура фазового пространства при  $\lambda = 0, \beta = 0.5, \omega_0 = 2\pi, \mu = 0.9, c = 1$ ; *б* – бифуркационная диаграмма при  $\lambda = 0, \beta = 0.5, \omega_0 = 2, \mu = 0.9$

### 3. Синхронизация генератора внешним сигналом

Обсудим задачу о синхронизации генератора квазипериодических колебаний внешним сигналом [33]. В качестве автономной системы будем использовать генератор квазипериодических колебаний (4). Воздействие выберем в виде периодической последовательности *коротких импульсов*. Такой выбор облегчает интерпретацию получаемых результатов, поскольку в промежутке между импульсами динамика системы автономна. С другой стороны, импульсное воздействие может представлять интерес для приложений, например, в биофизике [34].

Итак, пусть внешний сигнал в виде периодической последовательности дельта-импульсов воздействует на генератор (4)

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= A\Sigma\delta(t - nT), \\ \dot{z} &= \mu - x^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $A$  – амплитуда внешнего сигнала, а  $T$  – его период.

Выберем значения параметров  $\beta = 0.25$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\mu = 0.9$ , чему отвечает автономный инвариантный тор. Карта показателей Ляпунова и ее увеличенные фрагменты для неавтономной системы (13) приведены на рис. 10, *a–г*. При этом выбран

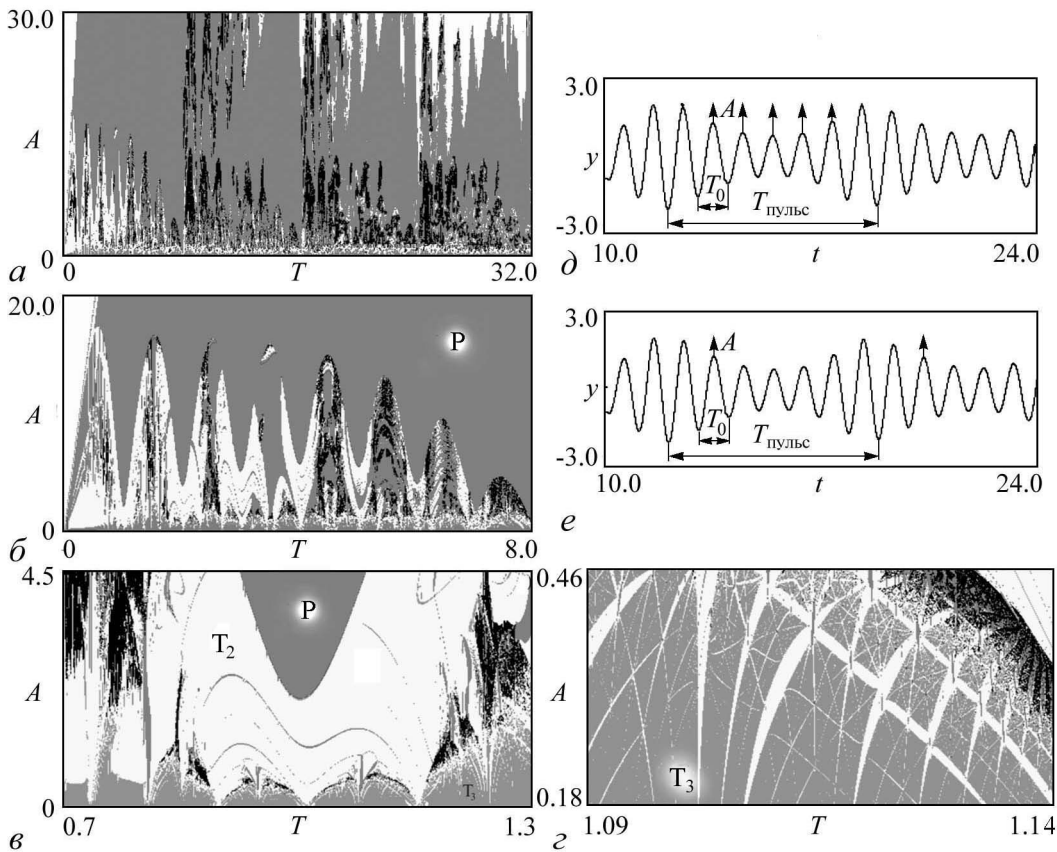


Рис. 10. *a–г* карта показателей Ляпунова и ее увеличенные фрагменты возбуждаемого импульсами генератора при  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0.25$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\mu = 0.9$ ; *д–е* временные реализации автономной системы (4)

увеличенный диапазон по периоду воздействия, чтобы можно было увидеть особенности наблюдаемой картины. В рассматриваемом случае имеется множество языков периода 1, которые следуют примерно через равные интервалы  $T \approx 1$ . Однако языки объединены в *группы*, примерно по семь-восемь языков, которые дают еще один период на карте  $T \approx 8$ . Для более четкого восприятия этого момента на рис. 10, б показан увеличенный фрагмент карты динамических режимов, захватывающий первую группу из восьми языков периода 1.

Возникновение регулярных режимов периода 1 означает возможность стабилизации квазипериодических колебаний внешним сигналом, так что реализуется *полная синхронизация* системы внешним сигналом. Полная синхронизация носит пороговый по амплитуде характер, что отличает ее от синхронизации регулярного режима. Особенность картины на рис. 10, б состоит в том, что порог полной синхронизации с ростом периода воздействия сначала повышается, а при  $T \approx 4$  начинает вновь понижаться. При  $T \approx 8$  он становится очень низким, почти нулевым. Затем картина повторяется и что важно, не копируясь в деталях, но сохраняя общие черты описанной организации.

Для объяснения наблюдаемых особенностей обратимся к реализации сигнала, показанной на рис. 10, д и рис. 10, е. Это типичная для квазипериодического режима картина колебаний, на которой выделяются два характерных временных масштаба:

- $T_0$  – собственный период колебаний осциллятора, который при выбранном значении  $\omega_0 = 2\pi$  составляет  $T_0=1$ ,
- $T_{\text{пульс}}$  – период биений квазипериодических колебаний, который по рис. 10, д можно оценить, как  $T_{\text{пульс}} \approx 7-8$ .

Добавим теперь внешнее воздействие. Поскольку внешний сигнал представляет собой последовательность дельта-импульсов, то в промежутках между импульсами система автономна. В свою очередь, через каждый момент времени  $T$  координата  $y = \dot{x}$  получает добавку, равную амплитуде импульса<sup>2</sup>.

Из рис. 10, д хорошо видно, во-первых, что синхронизация, отвечающая периоду 1 в стробоскопическом сечении, возможна при действии импульса в моменты времени  $T = T_0, T = 2T_0, T = 3T_0, \dots, T = nT_0$ . Конечно, динамика системы (13) не одномерна и есть еще оставшиеся две переменные, поэтому такая картина носит не точный, а приближенный характер. Во-вторых, с ростом числа периодов  $n$  амплитуда сигнала  $A$ , необходимая для синхронизации, сначала возрастает, а затем понижается. Причина – наличие биений в автономной системе с периодом  $T_{\text{пульс}}$ . При  $T \approx T_{\text{пульс}}$  необходимая для стабилизации амплитуда сигнала снова становится почти равной нулю. Таким образом, мы имеем качественное объяснение организации плоскости «период воздействия–амплитуда воздействия» в пределах одной группы языков на рис. 10, б.

Рис. 10, е иллюстрирует, что при  $T > T_{\text{пульс}}$  картина снова повторяется. При этом имеет место все же неточное воспроизведение, поскольку рассматривается режим с несоизмеримыми частотами, и автономные реализации не воспроизводят себя точно. В результате возникает вторая группа из 7–8 языков и т.д.

<sup>2</sup>При воздействии дельта-функций по типу уравнений (13), как известно, координата  $x$  не меняется, а скорость  $y = \dot{x}$  получает добавку, равную амплитуде импульса  $A$ .



Такова картина режима полной синхронизации. Однако автономная система (13) характеризуется двумя несоизмеримыми частотами. При добавлении в систему внешнего воздействия появляется возможность реализации в системе квазипериодических режимов с тремя несоизмеримыми частотами, то есть трехчастотных торов.

На рис. 10, *в, г* приведены фрагменты карты ляпуновских показателей, отчетливая палитра стандартная. Выбран крупный масштаб, отвечающий окрестности основного языка полной синхронизации<sup>3</sup>. Область полной синхронизации  $P$  имеет порог по амплитуде и характерное «округлое» основание. При малых амплитудах внешнего сигнала в системе наблюдаются трехчастотные квазипериодические колебания, хорошо видные на рис. 10, *в*. На рисунке можно видеть также, что в область трехчастотных колебаний встроена система языков двухчастотных торов. При этом наиболее крупные языки имеют систему более узких «сателлитов». При еще большем увеличении на рис. 10, *г* визуализируется картина *резонансной паутины Арнольда* – наблюдается система тонких полос двухчастотных режимов, на пересечении которых возникают небольшие острова периодических режимов высокого порядка.

Стоит отметить, что для случая *гармонического воздействия* карта ляпуновских показателей в окрестности основного резонанса аналогична представленной на рис. 10, *в*, и визуально она практически идентична случаю импульсного сигнала.

#### 4. Синхронизация двух связанных генераторов квазипериодических колебаний

Рассмотрим теперь систему двух связанных генераторов (4)<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{1,2} - (\lambda + z_{1,2} + x_{1,2}^2 - \frac{1}{2}x_{1,2}^4)\dot{x}_{1,2} + \omega_{01,02}^2 x_{1,2} + M_c(\dot{x}_{1,2} - \dot{x}_{2,1}) &= 0, \\ \dot{z}_{1,2} &= \mu_{1,2} - x_{1,2}^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $x_1, z_1$  – переменные, характеризующие первый генератор;  $x_2, z_2$  – переменные второго генератора;  $M_c$  – коэффициент диссипативной связи [35].

Система (14) характеризуется четырьмя независимыми частотами, которые регулируются четырьмя параметрами: собственными частотами генераторов  $\omega_{01}, \omega_{02}$  и частотами релаксационных колебаний  $\mu_1, \mu_2$ . Для нас важно рассмотреть ситуацию, когда подсистемы демонстрируют квазипериодические колебания. Для этого нужно отстроиться от возможных сильных резонансов. С этой целью в соответствии с ляпуновской картой рис. 5 выберем область изменения параметра  $\omega_0$  так, что  $\omega_0 > 3$ . Теперь фиксируем  $\omega_{01} = \omega_0, \omega_{02} = \omega_0 + \Delta$ , где  $\Delta$  будет представлять собой регулируемую частотную расстройку генераторов. Остальные параметры выбираем  $\omega_0 = \pi, \mu_1 = \mu_2 = 0.9$ . В этом случае первый генератор в автономном режиме демонстрирует квазипериодические колебания, а изменение частотной расстройки  $\Delta$  в положительную область оставляет преимущественно автономный квазипериодический режим и во второй подсистеме.

<sup>3</sup>На рис. 10, *б* первый язык периода 1.

<sup>4</sup>Задача о синхронизации квазипериодических генераторов является сложной и многоплановой. Некоторые вопросы для связанных квазипериодических генераторов Анищенко–Астахова обсуждались в [36].

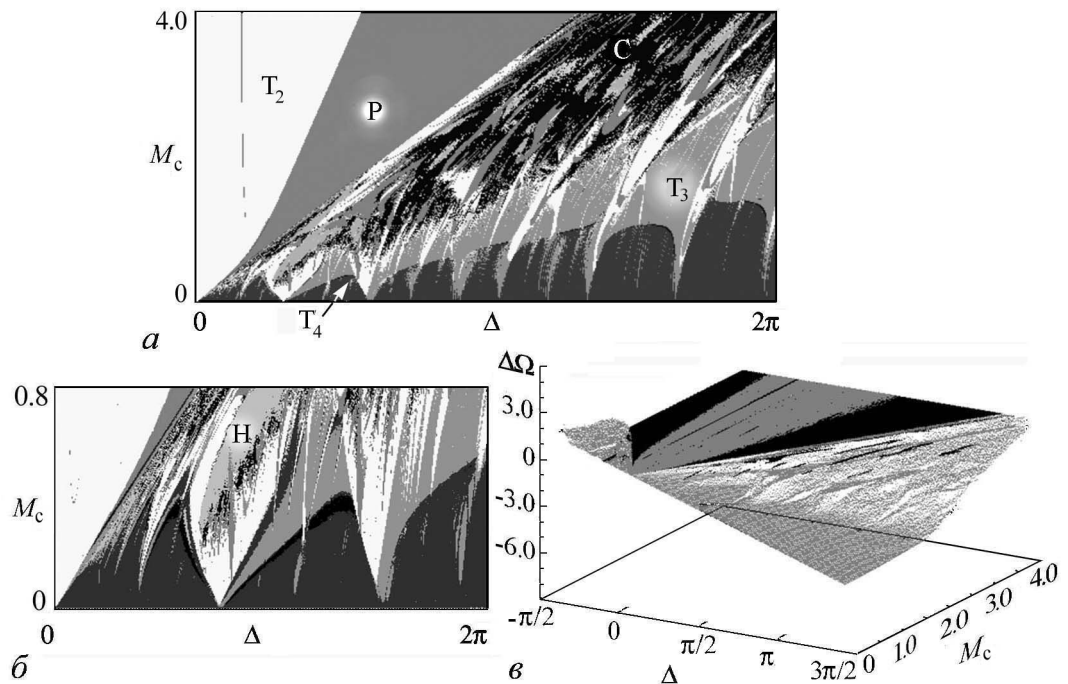


Рис. 11. *a* – карта показателей Ляпунова для системы (14) при  $\lambda = 0$ ,  $\omega_0 = \pi$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$ ; *b* – увеличенный фрагмент карты; *в* – трехмерная поверхность

На рис. 11, *a* представлена карта показателей Ляпунова системы связанных генераторов (14) на плоскости «частотная расстройка–величина связи» в широком диапазоне изменения параметров. Цифры отвечают периодам циклов. Начнем обсуждение с самой большой области двухчастотных режимов, обозначенной на рисунке символом  $T_2$ . Она имеет форму традиционного языка с основанием в точке  $\Delta = 0$ ,  $M_c$ . Внутри этой области имеет место режим *фазовой синхронизации квазипериодических колебаний*.

На рис. 11, *в* представлена трехмерная поверхность, дающая зависимость разности фаз генераторов  $\Delta\Omega$  от частотной расстройки и параметра связи<sup>5</sup>. Нерегулярные режимы на построенной поверхности отмечены серым цветом. Черным цветом показаны периодические режимы. Как видно из рисунка, захват квазипериодических колебаний происходит не только при малой связи и расстройке, но и при больших значениях параметров. Из точки нулевой частотной расстройки выходит язык, внутри которого наблюдается нерегулярный режим. В соответствии с картой показателей Ляпунова это двухчастотный квазипериодический режим, при котором разности фаз равны нулю. Таким образом, генераторы взаимно захвачены, но их колебаний являются двухчастотными квазипериодическими.

При увеличении частотной расстройки возникает чисто периодический режим. Таким образом, при выходе из основного языка двухчастотной квазипериодичности при большой связи возникает *полная синхронизация генераторов*, отвечающая простейшему периодическому режиму. Можно сказать, что при достаточно большой связи и достаточно большой частотной расстройке наблюдается *подавление квазипериодических колебаний* за счет взаимодействия генераторов. При этом полная синхронизация имеет порог по величине связи.

<sup>5</sup>В данном случае аттракторы являются фазо-когерентными, и их фазы хорошо определяются чисто геометрическим образом [1].

Язык полной синхронизации на рис. 11, *а* сужается при уменьшении связи и имеет порог по ее величине. Это означает, что при выходе из основной двухчастотной области при малой связи будет возникать квазипериодический режим более высокой размерности. Особенность данной системы состоит в том, что при малой связи практически сразу происходит переход от двухчастотного к четырехчастотному тору. Причина, скорее всего, в идентичности генераторов по второму частотному параметру:  $\mu_1 = \mu_2$ . На рис. 11, *б* представлен увеличенный фрагмент карты показателей Ляпунова, на которой видны данные особенности. На фрагменте также видно, что при малой связи доминируют четырехчастотные торы. С другой стороны, имеет место система языков трехчастотных торов, основания которых расположены на оси частотной расстройки  $\Delta$ . Вершины этих языков выстроены вдоль границы, которая отделяет возникающую при большой связи сплошную полосу трехчастотных режимов. В эту полосу встроены области двухчастотной квазипериодичности, а при еще большей связи возникают хаос и гиперхаос. Внутри областей двухчастотной квазипериодичности, хаоса и гиперхаоса имеется система островов периодических режимов более высокого порядка. Они, однако, не образуют какой-либо регулярной структуры. Все области периодических режимов имеют порог по величине связи.

### Заключение

Таким образом, в данной работе представлен обзор моделей, в которых исследованы двухчастотные квазипериодические колебания. Представлено семейство генераторов квазипериодических колебаний с минимальной размерностью фазового пространства. На примере одного из генераторов изучены свойства скрытых аттракторов. Исследована вынужденная и взаимная синхронизация двухчастотных квазипериодических колебаний. Обнаружено специфическое устройство плоскости параметров внешнего сигнала: наличие двух масштабов на карте. Выявлена возможность фазовой и полной взаимной синхронизации генераторов в режиме двухчастотных квазипериодических колебаний.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 14-02-31064, 14-02-00085) и гранта государственной поддержки ведущих научных школ НШ-1726.2014.2.*

### Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Основы теории сложных систем. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. 620 с.
3. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М: Наука, 1980. 360 с.
4. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 с.
5. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В. Физика квазипериодических колебаний. Саратов: Издательский центр «Наука», 2013, 252 с.

6. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: Новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
7. *Дмитриев А.С., Ефремов Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И.* Генерация хаоса. М.: Техносфера, 2013. 424 с.
8. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001, 296 с.
9. *Мацумото Т.* Хаос в электронных схемах // ТИИЭР. 1987.Т. 75, № 8. С. 66.
10. *Matsumoto T., Chua L., Tokunaga R.* Chaos via torus breakdown // IEEE Trans. Circ. Syst. 1987. Vol. 34, № 3. P. 240.
11. *Baptista M.S., Caldas I.L.* Phase-locking and bifurcations of the sinusoidally-driven double scroll circuit // Nonlinear Dynamics. 1998. Vol. 17. P. 19.
12. *Baptista M.S., Caldas I.L.* Dynamics of the two-frequency torus breakdown in the driven double scroll circuit // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. №4. P. 4413.
13. *Lorenz E.N.* Irregularity: A fundamental property of the atmosphere // Tellus. 1984. Vol. 36A. P. 98.
14. *Shil'nikov A., Nicolis G., Nicolis C.* Bifurcation and predictability analysis of a low-order atmospheric circulation model // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 5, № 6. P. 1701.
15. *Broer H., Simo C., Vitolo R.* Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // Nonlinearity. 2002. Vol. 15. P. 1205.
16. *Rossa F., Witte V., Govaerts W., Kuznetsov Yu.* Numerical Periodic Normalization for Codim 2 Bifurcations of Limit Cycles. // arXiv:1111.4445
17. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 19. С. 88.
18. *Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. P. 046216.
19. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Устойчивость, синхронизация и разрушение квазипериодических колебаний // Нелинейная динамика. 2006. Т.2, № 3. С. 267.
20. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V.* A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010. Vol. 15. P. 1676.
21. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Станкевич Н.В.* Автономный генератор квазипериодических колебаний // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 2. С. 51.
22. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Stankevich N.V.* Generators of quasiperiodic oscillations with three-dimensional phase space //European Physical Journal. 2013. Vol. 222. P. 2391.
23. *Kuznetsov A., Kuznetsov S., Seleznev E., Stankevich N.* A generator of quasiperiodic oscillations: An autonomous dynamics and synchronization of coupled generators // Nonlinear Dynamics of Electronic Systems. 2012. Wolfenbuettel. P. 100.
24. *Леонов Г.А., Кузнецов Н.В.* Скрытые колебания в динамических системах: Шестнадцатая проблема Гильберта, гипотеза Айзермана и Кальмана, скрытые аттракторы в контурах Чуа // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т.5. С. 105.
25. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Kuznetsova O.A., Seledzhi S.M., Vagitsev V.I.* Hidden oscillations in dynamical systems // Trans. Syst. Control. 2011. Vol. 6. P. 54.

26. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Vagitsev V.I. Localization of hidden Chua's attractors // Phys. Lett. A. 2011. Vol. 375. P. 2230.
27. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Vagitsev V.I. Hidden attractor in smooth Chua systems // Physica D. 2012. Vol. 241. P. 1482.
28. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Mokaev T.N. Hidden attractor and homoclinic orbit in Lorenz-like system describing convective fluid motion in rotating cavity // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. Vol. 28, Issue 1–3. P. 166.
29. Wei Z., Wang R., Lin A. A new finding of the existence of hidden hyperchaotic attractors with no equilibria // Math. Comp. Sim. 2014. Vol. 100. P. 13.
30. Jafari S., Sprott J.C., Golpayegani S.M.R.H. Elementary quadric chaotic flows with no equilibria // Phys. Lett. A. 2013. Vol. 377. P. 699.
31. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E. and Stankevich N.V. Co-existing hidden attractors in a radiophysical oscillator system // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2015. Vol. 48, № 12. P. 125101.
32. Stankevich N.V., Kurths J., Kuznetsov A.P. Forced synchronization of quasiperiodic oscillations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. Vol. 20, № 1. P. 316.
33. Клиньшов В.В., Некоркин В.И. Переустановка фазы сложных автоколебаний импульсным воздействием // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 87, вып. 2. С. 85.
34. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. P. 056202.
35. Кузнецов А.П., Станкевич Н.В. Синхронизация генераторов квазипериодических колебаний // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 3. С. 409.

## References

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. England, Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
2. Loskutov A.Yu., Mikhailov A.S. Foundations of the Theory of Complex Systems. M.-Izhevsk: Institute of computer research, 2007. 620 p. (in Russian).
3. Landa P.S. Self-Oscillations in Systems with a Finite Number of Degrees of Freedom. M.: Science, 1980. 360 p. (in Russian).
4. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Strelkova G.I. Synchronization of Regular, Chaotic and Stochastic Oscillations. M.-Izhevsk: Institute of computer research, 2008. 144 p. (in Russian).
5. Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Stankevich N.V., Turukina L.V. Physics of Quasiperiodic Oscillations. Saratov: Publishing center "Science 2013. 252 p. (in Russian).
6. Dmitriev A.S., Panas A.I. Dynamical Chaos: New Media for Communication Systems. M.: Fizmatlit, 2002 (in Russian).
7. Dmitriev A.S., Efremova E.V., Maksimov N.A., Panas A.I. Generation of Chaos. M.: Technospetra, 2013. 424 p. (in Russian)
8. Kuznetsov S.P. Dynamical Chaos. M.: Fizmatlit, 2001. 296 p. (in Russian)
9. Matsumoto T. // TIIER. 1987. Vol. 75, № 8. P. 66 (in Russian).

10. *Matsumoto T., Chua L., Tokunaga R.* // IEEE Trans. Circ. Syst. 1987. Vol. 34, № 3. P. 240.
11. *Baptista M.S., Caldas I.L.* // Nonlinear Dynamics. 1998. Vol. 17. P.119.
12. *Baptista M.S., Caldas I.L.* // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, № 4. P. 4413.
13. *Lorenz E.N.* // Tellus. 1984. Vol. 36A. P. 98.
14. *Shil'nikov A., Nicolis G., Nicolis C.* // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 5, № 6. P. 1701.
15. *Broer H., Simo C., Vitolo R.* // Nonlinearity. 2002. Vol. 15. P. 1205.
16. *Rossa F., Witte V., Govaerts W., Kuznetsov Yu.* // arXiv:1111.4445
17. *Anishchenko V.S., Nikolaev S.M.* // Technical Physics Letters. 2005. Vol. 31, № 10. P. 853.
18. *Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J.* // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. P. 046216.
19. *Anishchenko V.S., Nikolaev S.M.* // Nonlinear Dynamics. 2006. Vol.2, № 3. P. 267 (in Russian).
20. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V.* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010. Vol. 15. P. 1676.
21. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V.* // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2010. Vol. 18, № 2. P. 51 (in Russian).
22. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Stankevich N.V.* //European Physical Journal . 2013. Vol. 222. P. 2391.
23. *Kuznetsov A., Kuznetsov S., Seleznev E., Stankevich N.* // Nonlinear Dynamics of Electronic Sitems. 2012. Wolfenbuettel, p. 100.
24. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V.* // Modern Mathematics. Fundamental Problems. 2012. Vol.5. P. 105 (in Russian).
25. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Kuznetsova O.A., Seledzhi S.M., Vagaitsev V.I.* // Trans. Syst. Control. 2011. Vol. 6. P. 54.
26. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Vagaitsev V.I.* // Phys. Lett. A. 2011. Vol. 375. P. 2230.
27. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Vagaitsev V.I.* // Physica D. 2012. Vol. 241. P. 1482.
28. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Mokaev T.N.* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. Vol. 28, Issue 1–3. P. 166.
29. *Wei Z., Wang R., Lin A.* // Math. Comp. Sim. 2014. Vol. 100. P. 13.
30. *Jafari S., Sprott J.C., Golpayegani S.M.R.H.* // Phys. Lett. A. 2013. Vol. 377. P. 699.
31. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E. and Stankevich N.V.* // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2015. Vol. 48, № 12. P. 125101.
32. *Stankevich N.V., Kurths J., Kuznetsov A.P.* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. Vol. 20, № 1. P. 316.
33. *Klinshov V.V., Nekorkin V.I.* // Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. 2008. Vol. 87, № 2. P. 78.
34. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. P. 056202.
35. *Kuznetsov A.P., Stankevich N.V.* // Nonlinear Dynamics. 2013. Vol. 9, № 3. P. 409 (in Russian).

*Поступила в редакцию 25.05.2015*

# AUTONOMOUS SYSTEMS WITH QUASIPERIODIC DYNAMICS

## Examples and their properties: Review

*A. P. Kuznetsov<sup>1</sup>, N. V. Stankevich<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Kotel'nikov Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

<sup>2</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

The paper is a review of well-known in nonlinear dynamics models with low dimensional of phase space and quasiperiodic behavior. Also new results related to analysis of many-frequencies quasiperiodic oscillations for models with external action and coupled oscillators are discussed.

**Keywords:** Quasiperiodic oscillations, dynamical systems, Lyapunov exponents, hidden attractors.

*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, заведующий базовой кафедрой динамических систем Саратовского госуниверситета. Имеет звание профессора. Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 100 статей в российских и международных научных журналах. Научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний», «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны (сборник задач)» и др.



410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН  
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
www.sgtnd.narod.ru  
E-mail:apkuz@yandex.ru

*Станкевич Наталия Владимировна* родилась в Саратове (1985). Выпускница Лицея прикладных наук (2000). В 2007 году окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского. В 2011 году защитила диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика». С 2011 года работает доцентом кафедры «Радиоэлектроника и телекоммуникации» Саратовского государственного технического университета имени Ю.А. Гагарина. Имеет более 50 научных публикаций, из которых 22 статьи в российских и зарубежных ведущих научных журналах и одна монография (в соавторстве). Область научных интересов: динамические системы, многочастотные квазипериодические колебания.



4100054 Саратов, ул. Политехническая, 77  
Саратовский государственный технический университет  
им. Ю.А. Гагарина  
E-mail:stankevichnv@mail.ru