

Данный специальный выпуск журнала посвящен 70-летию члена-корреспондента РАН Дмитрия Ивановича Трубецкого, одного из ведущих ученых в «нелинейном сообществе» России. К юбилею ученого его коллеги, известные специалисты в области сверхвысоко-частотной электроники и нелинейной динамики, представили в журнал статьи по своим последним наиболее значимым результатам. Редакционная группа юбилейного выпуска надеется, что он будет полезен широкому кругу читателей, интересующихся современными проблемами нелинейной динамики и прикладной физики.

От имени всех авторов журнала, членов редколлегии журнала и его редакции поздравляем Дмитрия Ивановича и желаем ему всего самого наилучшего, долгих лет творчески активной жизни, новых интересных открытий.

ШКОЛА Д.И. ТРУБЕЦКОВА

Счастливый Жизненный Удел –
От суеты и маеты
Суметь оставить Память Дел...

М.А. Миллер

Вместо предисловия

В 2008 году исполнилось 70 лет Дмитрию Ивановичу Трубецкову, члену-корреспонденту РАН, Заслуженному деятелю науки РФ, доктору физико-математических наук, профессору, заведующему кафедрой электроники, колебаний и волн Саратовского государственного университета, почетному гражданину города Саратова.

Школа Трубецкого Д.И. – уникальное явление, широко известное как в бывшем Советском Союзе, так и сейчас в России, охватывает не только научную школу в привычном понимании этого слова – начиная с 1995 года, научная школа Д.И. Трубецкого пять раз признавалась победителем конкурсов на звание ведущей научной школы России: 1996–1999, 2000–2002, 2003–2005, 2006–2007 и 2008 годы. Это – школа в широком понимании – наука, образование, большая просветительская деятельность.

Приступая к подготовке статьи о Дмитрии Ивановиче, мы, его ученики разных поколений, прекрасно сознавали, что полностью осветить всю удивительную жизнь и деятельность этого ученого, педагога, организатора – сложная задача. Но нами двигала глубокая уверенность в том, что наше отношение к Д.И. Трубецкову

разделяют не только все его многочисленные ученики, коллеги по работе и по научному нелинейному сообществу, но и просто большое число людей, с которыми он сталкивался за время своей многогранной деятельности. Именно на их полную поддержку мы и надеемся.

Дмитрий Иванович Трубецков родился 14 июня 1938 года в Саратове. В 1955 году он окончил с золотой медалью среднюю школу № 19 (ныне гимназия № 1 Саратова) и поступил на физический факультете Саратовского университета. Выбор Д.И. был не случаен, физика увлекала его еще со школьных лет. В Саратове в это время бурно развивалась электронная промышленность, связанная с созданием новых предприятий и научно-исследовательских институтов, а в СГУ был создан так называемый второй физический факультет, который готовил научные кадры и специалистов в области электроники. С этого момента вся жизнь Д.И. связана с Саратовским университетом. Каждый период его жизни и деятельности (от студента до ректора) оставил яркий след в истории университета, описать их в одной статье просто невозможно. Поэтому сначала кратко в хронологическом порядке остановимся на основных моментах его деятельности, а далее более подробно осветим отдельные эпизоды.

Хронология научной, педагогической и общественной деятельности Дмитрия Ивановича Трубецкова

1955–1960 Учеба в университете, активное участие в общественной жизни (член редколлегии газеты «Физик», награждение орденом «Знак почета» и медалью «За освоение целинных и залежных земель»), серьезное занятие научной работой с третьего курса под руководством зав. кафедрой электроники, профессора В.Н. Шевчика, который являлся создателем в Саратове научной школы в области сверхвысокочастотной электроники. В этот период – первое выступление на научном семинаре кафедры, первая научная публикация совместно с В.Н. Шевчиком.

1960–1969 Учеба в аспирантуре, работа сначала ассистентом, а потом старшим преподавателем и доцентом на кафедре электроники, защита диссертации на тему «Некоторые специальные вопросы линейной теории лучевых приборов магнетронного типа» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1965). В этот период он – секретарь научного семинара кафедры (история этого известного в области электроники сверхвысоких частот семинара начинается с 1952 года и продолжается уже под руководством Д.И. до настоящего времени, насчитывая более 1200 заседаний). В 1966 году Д.И. избирается делегатом XV съезда ВЛКСМ.

1969 Создание под руководством Д.И. научной группы в НИИ механики и физики СГУ из аспирантов и молодых научных работников, которая начинает проводить исследования, направленные на изучение широкого круга нелинейных явлений в активных распределенных системах типа «электронный поток – электромагнитная волна». Первые защиты кандидатских диссертаций его учениками – ныне профессорами Ю.П. Шараевским (1972) и Ю.И. Левиным (1974), В.П. Шахиным (1973) – в настоящее время представителем России в ЕС.

1970 Начинается эпоха Зимних школ-семинаров по электронике сверхвысоких частот для молодых инженеров и научных работников (на этих школах ниже

остановимся подробно). «Школы Трубецкого» – такое название им было присвоено электронным сообществом. Эти школы с завидной периодичностью (2-3 года) продолжаются до настоящего времени (четырнадцатая по счету школа планируется в январе 2009). Эти школы сделали Саратов центром электроники СВЧ в бывшем СССР и в РФ, положили начало тесной дружбы молодого ученого Дмитрия Ивановича с членом-корреспондентом РАН Львом Альбертовичем Вайнштейном – крупным ученым с мировым именем в области сверхвысокочастотной электродинамики и электроники, способствовали также установлению тесных научных контактов с Радиофизической школой академика А.В. Гапонова-Грехова.

- 1970** Издание монографии В.Н. Шевчик, Д.И. Трубецков «Аналитические методы в электронике СВЧ», М.: Сов. Радио, 1970. 584 с. (по рейтингу журнала «Электронная техника» книга вошла в золотой фонд электроники).
- 1974** Создание в НИИМФе СГУ экспериментальной группы по исследованию нелинейных и нестационарных явлений в электронных приборах сверхвысоких частот. Начало совместной работы с Институтом прикладной физики РАН (Горький) в области релятивистской электроники. Первые защиты кандидатских диссертаций по экспериментальной тематике под руководством Д.И. – Р.Ш. Амиров (1975), Б.П. Безручко (1980).
- 1978** Защита докторской диссертации на тему «Нелинейные переходные процессы при взаимодействии электронного потока в скрещенных полях с электромагнитной волной».
- 1980** Присвоение ученого звания профессора по кафедре электроники.
- 1981** Д.И. возглавляет кафедру электроники, в настоящее время она носит название кафедра электроники, колебаний и волн.
- 80-е годы** Создание научной школы в Саратовском университете по междисциплинарному научному направлению – нелинейная динамика (за рубежом более популярен термин «синергетика»). Сегодня научная школа охватывает широкий круг проблем, связанных с теоретическим и экспериментальным исследованием нелинейных и нестационарных явлений и закономерностей сложной динамики, включая динамический хаос и образования структур, в различных автоколебательных распределенных и сосредоточенных системах, в том числе радиофизической природы (устройства вакуумной электроники СВЧ и микроэлектроники, магнитоэлектроники, радиотехнические цепочки, решетки и сети из различных динамических элементов), в моделях экологии, биологии и социальных наук. С 1995 года школа признана ведущей в Российской Федерации.
- 1985** Организует и проводит первую Международную научную школу-конференцию «Хаотические автоколебания и образование структур». В настоящее время проведено 8 таких школ, охватывающих широкую географию участников со всей страны и из-за рубежа.
- 1988** Организует и проводит первую Научную школу для школьников «Колебания, волны, электроны», эти школы стали регулярными и проводятся с периодичностью в два года. С 1997 года школа стала называться «Нелинейные дни в Саратове для молодых», приобрела статус Всероссийской и проводится ежегодно.
- 7 декабря 1991** Избирается членом-корреспондентом РАН по Отделению общей физики и астрономии (теперь – Отделение физических наук).

- 24 декабря 1991** По инициативе Д.И. и при поддержке профессора А.М. Богомолова, бывшего в то время ректором СГУ, открывается Государственный учебно-научный центр «Колледж», целью которого стали реализация непрерывного среднего и высшего образования, разработка и внедрение новых технологий образования, проведение фундаментальных и прикладных научно-исследовательских работ с широким привлечением студентов, подготовка и издание учебной, научной и методической литературы.
- 1992** По инициативе Д.И. и в результате большой организаторской деятельности создается первая ступень Колледжа прикладных наук, которая впоследствии получила название «Лицей прикладных наук» (обучение ведется с 8-го по 11-й классы)
- 1993** Один из организаторов издания в Саратовском университете общероссийского журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» (главный редактор – академик Ю.В. Гуляев, один из заместителей главного редактора – Д.И. Трубецков), единственного на этот момент в России специализированного журнала по данной тематике.
- 1 сентября 1994** Открывает в Саратовском государственном университете Высший колледж прикладных наук на правах факультета (вторая ступень Колледжа прикладных наук). Теперь это факультет нелинейных процессов, единственный в России, нет ему факультетских аналогов и в мире. Является научным руководителем факультета.
- 1994–2003** На посту ректора возглавляет Саратовский государственный университет. Это время связано со многими сложными и важными проблемами в истории Саратовского университета – с укрупнением университета (включение в его состав Саратовского и Балашовского педагогических институтов, нескольких техникумов), с образованием новых факультетов (компьютерных наук и информационных технологий, философского, социологического, нелинейных процессов) и введением новых специальностей, с развитием новых связей с зарубежными университетами, с созданием Соросовского центра ИНТЕРНЕТ (кстати, Д.И. четырежды получал звание Соросовского профессора), Научно-образовательного центра «Нелинейная динамика и биофизика» и Международного института общественных наук, со строительством новых корпусов (в этот период был сдан в эксплуатацию новый X корпус, началось строительство XI корпуса). В годы ректорства Д.И. Трубецков входил в состав Президиума Союза ректоров России, был заместителем председателя Совета ректоров Приволжского федерального округа, председателем Совета ректоров Саратовской области, награжден медалью университета американского штата Вайоминг за международное сотрудничество.
- 1998** Присуждение звания Заслуженный деятель науки Российской Федерации.
- 2000** Удостоен премии Президента России в области образования за создание концепции преподавания естественных наук для гуманитариев (Д.И. Трубецков. Колебания и волны для гуманитариев. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж». 1997. 392 с.).
- 2000** Создание в СГУ совместно с ГосУНЦ «Колледж», СФ ИРЭ РАН и ИБФРМ РАН новой интеграционной структуры – Научно-образовательного института «Открытые системы». В основе создания интеграционной структуры лежит

новое междисциплинарное направление – нелинейная динамика или синергетика. В состав Института «Открытые системы» входят: Лицей прикладных наук (8–11 классы), факультет нелинейных процессов с тремя базовыми кафедрами в академических институтах и на предприятиях (СФ ИРЭ РАН, ИБФРМ РАН, ФГУП НПП «Алмаз»), редакционно-издательской отдел всероссийского научно-технического журнала «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика», научный сектор. Институт получает статус Федеральной экспериментальной площадки (Приказ Министра образования № 1128 от 22.03.2001 г.), что позволяет использовать нестандартные подходы в области образования.

2001–2002 Под редакцией Д.И. подготовлена и выходит в свет серия «Современная теория колебаний и волн» (М.: Физматлит) из шести учебников, в четырех из них он является соавтором.

2004 Открывается прием в СГУ на специальность «Физика открытых нелинейных систем» (квалификация «физик, системный аналитик»). Стандарт этой специальности был разработан по инициативе Д.И. и при его огромном участии. За всю свою историю университет впервые удостоился чести быть инициатором создания принципиально новой специальности. Специальность «Физика открытых нелинейных систем» – это воплощение идей школы Д.И. Трубецкова в области междисциплинарного подхода к системе высшего образования.

С чего все начиналось

Можно без преувеличения сказать, что школа Д.И. в том широком понимании, о котором мы упомянули выше, началась с саратовских Зимних школ-семинаров по электронике и радиофизике сверхвысоких частот, идейным вдохновителем и организатором которых был и остается Дмитрий Иванович Трубецков.

История этих школ необычна и замечательна. Прошло более 40 лет с момента проведения (осень 1967) в Аштараке (Армения) первой (оказавшейся единственной) Всесоюзной школы по электронике сверхвысоких частот. Школа была организована для молодых учёных, занимающихся электроникой СВЧ, а лекции на этой школе читали почти все «звёзды» Советского Союза в области электроники и электродинамики: академики А.В. Гапонов, Н.Д. Девятков, член-корреспондент АН СССР Л.А. Вайнштейн, профессора В.Т. Овчаров, В.А. Солнцев и многие другие. Участником этой школы был и молодой Д.И. После возвращения из Аштарака у Д.И. и возникла идея создания подобных школ в Саратове для молодых научных работников и инженеров промышленных предприятий и вузов города, занимающихся теорией и разработкой электронных приборов, с целью знакомить большой контингент молодых «электронщиков» с последними научными достижениями в области электроники и электродинамики СВЧ. А для этого важно, чтобы лекции читались крупными учеными и специалистами, как отечественными, так и зарубежными. Кстати этот принцип Д.И. считал определяющим при организации всех последующих научных мероприятий, даже когда это касалось организации научных школ для молодых, включая студентов и школьников. Идею Д.И. активно поддержал Владимир Николаевич Шевчик, он в то время руководил кафедрой электроники и был директором НИИМФа СГУ, а позже ректором СГУ. Возглавлял он и оргкомитет первых школ.

Состав слушателей, в основном инженерный, определил и основную особенность Саратовских школ – лекции должны быть *учебными и читаться в доступной для инженеров форме*. Определил он и необычную для того времени форму финансирования – *организацию и проведение школ оплачивали предприятия и научно-исследовательские институты Саратова*. Учебная направленность школ определила и другую особенность – *издавать полные тексты лекций до начала работы школ*.

Первая Зимняя школа-семинар инженеров по теоретической электронике СВЧ (такое название было у саратовских школ в начальный период) проходила с 27 января по 9 февраля 1970 года в пансионате «Волжские дали» (пригород Саратова). Первая Саратовская школа была замечательна тем, что на ней членом-корреспондентом АН СССР Львом Альбертовичем Вайнштейном было прочитано 10 лекций по современной теории электронных приборов СВЧ, которые позже легли в основу совместной с профессором В.А. Солнцевым монографии «Лекции по сверхвысокочастотной электронике» (М.: Сов. радио, 1973). Кстати, в этом году исполняется 35 лет со дня выхода этой замечательной книги, по которой учились и учатся все последующие поколения электроников. Навсегда останутся в нашей памяти, участников тех первых школ, лекции Льва Альбертовича, удивительным образом методически построенные, отличающиеся ясностью и простотой изложения сложных теоретических вопросов и задач. Он стал символом и по-настоящему Учителем саратовских школ. Именно в этот период и зародилась дружба Д.И., совсем молодого тогда ученого, с Л.А. Вайнштейном. По словам самого Д.И., именно тесное общение с Л.А. оказало огромное влияние на его взгляды и становление как ученого с нелинейным мышлением и междисциплинарным (колебательно-волновым) подходом ко многим научным задачам, в том числе и в области сверхвысокочастотной электроники.

На первую школу приехали также читать лекции многие известные ученые Советского Союза: В.Т. Овчаров (Москва, НИИ «Титан»), Р.А. Силин (Фрязино МО, НИИ «Исток»), М.Б. Цейтлин (Москва, ИРЭ АН СССР) и др. Большинство из них стали постоянными участниками и лекторами почти всех последующих школ, что, естественно, сыграло определяющую роль в развитии Саратовской сверхвысокочастотной электронной школы и сделало ее ведущей научной школой в этом направлении в стране.

Вторая Зимняя школа состоялась ровно через 2 года (1972). Л.А. Вайнштейн прочитал на этой школе свои знаменитые лекции «О трех загадках магнетрона», а Д.И. Трубецков вместе со своим научным коллективом подготовил цикл лекций «Теория приборов магнетронного типа», включающий, в основном, последовательное изложение теории нелинейных явлений в лучевых приборах М-типа. Все последующие школы проходят с регулярной последовательностью, но уже с интервалом в 3 года, сохраняя как пространственную (почти все школы, кроме одной, проводились в пансионате «Волжские дали»), так и временную традиции (школы всегда зимние).

Начиная с третьей школы (1975), тематика стала неизменно расширяться и уже дальше школы стали называться «школы-семинары по электронике и радиофизике». На третью школу впервые приехал большой «десант» из Горького – лауреаты государственной премии М.И. Петелин, Ю.К. Юлпатов, профессор Ш.Е. Цимринг, молодой доктор наук М.И. Рабинович (в настоящее время проживает и работает в США), Г.С. Нусинович (в настоящее время проживает и работает в США), Е.Е. Неча-

ев. Горьковчане впервые прочитали на школе лекции по релятивистской электронике и мазерам на циклотронном резонансе, а в программе школы появился новый раздел «Нелинейные и волновые процессы», в рамках которого М.И. Рабинович прочитал курс лекций «Автоколебательные распределенные системы». Без преувеличения можно сказать, что лекции, прочитанные М.И. Рабиновичем на этой школе и вызвавшие огромный интерес у слушателей, положили начало новому научному направлению «нелинейная динамика», которое в настоящее время стало одним из приоритетных в Саратовском университете, а колебания и волны стали основной идеологией научных интересов Д.И. Об этом свидетельствует и написанная им в этот период совместно с М.И. Рабиновичем монография «Введение в теорию колебаний и волн», выдержавшая несколько изданий, в том числе и зарубежных.

С каждым годом расширялась «география» Зимних школ, причем, не только лекторов, но и «школьников» – Москва, Ленинград (С.-Петербург), Горький (Нижний Новгород), Харьков, Киев, Томск, Хайфа (Израиль) и другие города. Надо отметить, что программы всех школ неизменно содержали традиционную «электронную» тематику, но в них стали появляться разделы, посвященные квантовой радиофизике, термоядерному синтезу, численному моделированию и даже чистой математике. А самое главное, что от школы к школе неизменно расширялся раздел программы, посвященный современному математическому аппарату теории колебаний и волн, анализу нелинейных динамических систем, стохастическим колебаниям.

Научные школы-семинары, задуманные как областные, с самого начала практически стали всесоюзными, а затем приобрели ранг международных. С момента организации первой школы прошло 38 лет, накопилась целая библиотека трудов школы (несколько десятков томов), которая составляет золотой фонд российской электроники и служит ценным подспорьем уже для нового поколения исследователей и инженеров. Но эпоха Саратовских Зимних школ по электронике и радиофизике сверхвысоких частот продолжается. В феврале 2009 года планируется проведение четырнадцатой школы, тематика которой включает такие новые направления как СВЧ-вакуумная микроэлектроника и наноэлектроника, релятивистская и плазменная электроника больших мощностей, приложения СВЧ-техники в телекоммуникациях, медицине, ускорительной технике, в системах безопасности, история электроники и радиофизики СВЧ и др. Необходимо отметить, что все эти направления входят в круг научных интересов Д.И. Крупный ученый с широкой эрудицией, талантливый организатор Д.И. обладает удивительным даром – собирать на школах-семинарах самых ярких представителей электронной и нелинейной науки. На фундаменте Зимних школ и рождалась научная школа Д.И. Трубецкова, о чем пойдет речь далее.

Научная школа

В историческом аспекте можно сказать, что научная школа Д.И. Трубецкова ведет свое происхождение от школы в области электроники сверхвысоких частот, возникшей в Саратовском государственном университете в конце 1950-х годов и создателем которой был учитель Д.И. – профессор, заведующий кафедрой электроники В.Н. Шевчик. Большую роль в становлении Д.И. как самостоятельного ученого, помимо В.Н. Шевчика, сыграл также член-корреспондент АН СССР Л.А. Вайнштейн (Институт физических проблем РАН, Москва), о чем уже упоминалось.

В середине 1970-х годов группой молодых научных работников под руководством Д.И. были начаты самостоятельные исследования, охватывающие широкий

круг нелинейных и нестационарных явлений в активных распределенных системах типа «электронный поток – электромагнитное поле». Вскоре группа становится одним из ведущих научных коллективов в стране по исследованию этих явлений в приборах, основанных на взаимодействии электронного потока, движущегося в скрещенных статических электрическом и магнитном полях, с электромагнитной волной (приборы М-типа). Одним из первых результатов, полученных Д.И. совместно с С.П. Кузнецовым, стало создание нелинейной нестационарной теории возбуждения волноведущей системы электронным потоком и построение нестационарной модели лампы обратной волны М-типа. Это была по существу первая нестационарная нелинейная теория электронных приборов с распределенным взаимодействием. Практически одновременно по инициативе Д.И. были начаты экспериментальные исследования нестационарных хаотических явлений в электронно-волновых системах с обратной волной. Был проведен цикл теоретических и экспериментальных исследований сложной динамики в электронном пучке, взаимодействующем с обратной электромагнитной волной. В этих работах, пионерских для своего времени, была обнаружена стохастическая динамика в электронно-волновых системах, и, что самое важное, убедительно доказана динамическая природа хаотических колебаний в ней.

Бросая ретроспективный взгляд в прошлое, можно утверждать, что сверхвысокочастотная электроника, наряду с гидродинамикой, стала одной из первых «нелинейных» наук, в которой широкое применение получили различные методы теории динамических систем. В этом одно из проявлений тесной связи сверхвысокочастотной электроники и современной нелинейной теории колебаний и волн. Многие работы Д.И. стали основополагающими в области исследования сложных нелинейных режимов в электронно-волновых системах, заложив основы современной нестационарной нелинейной теории приборов сверхвысоких частот. Следует подчеркнуть, что исследование подобных режимов в распределенных автоколебательных системах, содержащих электронные потоки с электромагнитными полями, невозможно без вычислительного эксперимента. И здесь научная школа Д.И. стала одним из первых научных коллективов, широко использующих методы вычислительной физики для анализа принципиально нестационарных нелинейных процессов в приборах СВЧ. Именно первые вычислительные эксперименты по моделированию явлений автомодуляции и хаотической генерации в релятивистской лампе обратной волны О-типа, выполненные совместным коллективом под руководством М.И. Петелина (ИПФ АН, Горький) и Д.И. Трубецкова, оказали большое влияние на дальнейшее развитие подобных исследований как в СССР, так и за рубежом: Н.С. Гинзбург, С.П. Кузнецов, Т.Н. Федосеева «Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ» // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. С. 1037; Б.П. Безручко, С.П. Кузнецов, Д.И. Трубецков, «Экспериментальное наблюдение стохастических автоколебаний в динамической системе электронный поток – обратная электромагнитная волна» // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, № 3. С. 180. Указанные работы стали классическими и одними из наиболее часто цитируемых публикаций по сложным нестационарным явлениям в генераторах с длительным взаимодействием.

Вопросы исследования нестационарных процессов (в особенности, сложной динамики) в электронных системах кроме несомненного фундаментального значения имеют и широкое практическое приложение в связи с необходимостью создания мощных генераторов хаотических сигналов для различных применений (в системах радиолокации и радиопротиводействия, в системах нагрева плазмы в установках

управляемого термоядерного синтеза и т.д.). Поэтому с начала 1980-х годов исследования в области нелинейной динамики как применительно к задачам электроники сверхвысоких частот, так и к аналогичным задачам в других системах различной природы (в том числе в моделях экологии, биологии и в социальных науках) становятся одним из основных направлений научной школы Д.И. Трубецкого.

В середине 1980-х годов Д.И. выступил с инициативой проведения научных школ «Хаотические колебания и образование структур – ХАОС», подобных Зимним школам по электронике и радиофизике СВЧ и направленных на чтение лекционных курсов по актуальным проблемам нелинейной динамики, обмен последними идеями и научными достижениями в области теории хаоса и ее приложений. Организаторами первой школы «ХАОС» (1985) выступил Саратовский государственный университет в лице научной школы Д.И. Трубецкого и Саратовский филиал ИРЭ РАН. С этого момента школы «ХАОС» стали традиционными и регулярно проводятся раз в два года. К настоящему времени проведено 8 таких школ (последняя состоялась в сентябре 2007). Школа «ХАОС» стала ключевой по формированию «нелинейного» направления научных исследований в Саратовском университете и академических институтах города. За время существования школ «ХАОС» по приглашению Д.И. на них побывали с лекциями практически все ведущие российские и многие зарубежные исследователи в области нелинейной динамики. И сейчас упоминание школы-конференции с ярким названием «ХАОС» сразу же ассоциируется в нелинейном сообществе России с осенней школой в Саратове. Тематика школ менялась с течением времени. И если самые первые школы были посвящены, в основном, фундаментальным вопросам теории хаоса, то теперь, в первую очередь, затрагиваются вопросы приложения этой теории к поведению живых систем, в телекоммуникациях, социальных науках и т.д.

С начала 1990-х годов исследования Д.И., его коллег и учеников все чаще направляются на задачи приложения разработанных методов анализа и диагностики электронно-волновых систем к исследованию нелинейных систем различной природы, анализируются возможности применения методов нелинейной динамики к анализу систем, которые всегда были объектами социальных и общественных наук – человеческое общество, демография, экономические системы. Активная научная и просветительская работа в этом направлении делают Д.И. одним из неформальных лидеров такого нового научного направления, активно развивающегося в нашей стране, как синергетика. По Ю.Л. Климонтовичу «синергетика – не самостоятельная научная дисциплина, а новое междисциплинарное научное направление, цель синергетики – выявление общих идей, методов и общих закономерностей в самых различных областях естествознания, а также социологии и даже лингвистики; более того, в рамках синергетики происходит кооперирование различных специальных дисциплин». Первым серьезным успехом в этом направлении стало издание первой монографии в России, посвященной применению методов нелинейной динамики к анализу нефизических (социальных, геологических, экономических и др.) систем «Нелинейная динамика в действии. Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1995; в соавторстве с А.А. Короновским). Монография была переиздана в 2002 году.

В рамках этого междисциплинарного направления Д.И. выступает с инициативой проведения в Саратовском университете междисциплинарных научных конфе-

ренций, затрагивающих не только естественные, но и гуманитарные науки. Первая такая конференция, организованная в 1998 году совместно с историческим факультетом СГУ, носила название «Нелинейность и хаос в истории» и собрала исследователей из различных университетов и институтов России. Почетными гостями конференции были такие ведущие ученые в области междисциплинарных исследований как Г.Г. Малинецкий, Г.Т. Гурия, Б.Н. Пойзнер и др. В дальнейшем в Саратовском университете было проведено еще два подобных рабочих совещания «Нелинейная динамика открытых систем и гуманитарные и общественные науки». Д.И. был одним из самых активных лекторов на этих конференциях, всегда подготавливая одну-две лекции по обсуждаемой тематике. На последнем совещании, которое прошло в 2003 году, Д.И. выступил в качестве инициатора создания лекционного курса «Разрушим Вавилонскую башню непонимания», который фактически стал попыткой дать введение в современную нелинейную динамику или синергетику для гуманитариев. Этот курс лекций стал основой подготовленного учебника «Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях» (Москва: КомКнига, 2005. 304 с.) под авторством Д.И. Трубецкова и его учеников Б.П. Безручко, А.А. Короновского и А.Е. Храмова. Книга вышла в знаменитой серии «Синергетика: от прошлого к будущему», членом редколлегии которой является Д.И. Стоит отметить, что в этой же серии вышли еще две книги Д.И., которые являются более глубоким введением в теорию самоорганизации и синергетику: Д.И. Трубецков «Введение в синергетику. Книга 1. Колебания и волны» (Москва: Эдиториал УРСС, 2003) и Д.И. Трубецков «Введение в синергетику. Книга 2. Хаос и структуры» (Москва: Эдиториал УРСС, 2004).

Закономерным итогом этой научной и организаторской деятельности Д.И. Трубецкова стало признание созданной им научной школы в Саратовском университете по нелинейной динамике – ведущей научной школой России. В настоящее время коллектив научной школы включает 12 профессоров и 18 доцентов. Среди учеников Д.И. – 10 докторов наук и 34 кандидата наук. Из 108 сотрудников и студентов Саратовского государственного университета, получивших гранты Соросовских профессоров, доцентов, аспирантов, студентов, 56 грантов завоевали представители указанной научной школы.

Но активно занимаясь общими проблемами нелинейной динамики и синергетики, проводя исследования в области применения методов, разработанных в теории колебаний и волн, к нефизическим системам, Д.И. Трубецков не оставляет исследований в традиционных областях исследований научной школы, направленных на изучение нелинейных нестационарных процессов в системах электронно-волновой природы. И здесь он обращается к новым пионерским направлениям исследований. Во-первых, это экспериментальные и теоретические исследования таких новых источников сверхвысокочастотного излучения, как генераторы на виртуальном катоде, которые привели к созданию нового класса широкополосных источников шумоподобного хаотического сигнала в СВЧ-диапазоне – низковольтных виркаторов. Во-вторых, это теоретические и численные исследования в области вакуумной микроэлектроники. В-третьих, это рассмотрение различных вопросов классической и хаотической синхронизации как в приборах СВЧ, так и в эталонных моделях теории колебаний и волн, направленных на формирование единой концепции природы явления синхронизации в самых различных системах (демонстрирующих как регулярное, так и хаотическое поведение). Д.И. поддерживал и активно способствовал развитию в рамках научной школы физического эксперимента в области магнитоэлектрони-

ки и вакуумной электроники. Результатом стало создание эффективных источников хаотических сигналов на основе транзисторных усилителей и нелинейных линий передачи на магнитоэлектрических волнах и мощных узкополосных генераторов хаоса на базе многорезонаторных клистронов. Все эти работы проводились и проводятся в рамках научной школы Д.И. Трубецкого при его непосредственном участии и поддержке.

Многие результаты вышеупомянутых исследований были обобщены в монографиях, подготовленных под руководством Д.И. Так, в 1996 году в издательстве ГосУНЦ «Колледж» (Саратов) выходит монография «Лекции по вакуумной СВЧ микроэлектронике» (авторы Д.И. Трубецкий, А.Г. Рожнев, Д.В. Соколов), в которой систематизируются результаты исследования процессов в системах, использующих в качестве источников электронов автоэмиссионные катоды. В 2003 и 2004 годах в издательстве «Наука» выходит двухтомная монография «Лекция по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (авторы Д.И. Трубецкий, А.Е. Храмов), в которой изложены физические основы современных приборов СВЧ. В данной монографии особое внимание Д.И. уделил истории развития знаний о способах генерации и усиления электромагнитных волн, роли отдельных исследователей на пути становления современной электроники сверхвысоких частот.

Говоря о научной деятельности Дмитрия Ивановича, нельзя не упомянуть издаваемый с 1993 года в Саратовском государственном университете единственный на тот момент в России специализированный журнал с «нелинейнодинамической» тематикой – «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика». Журнал сыграл существенную роль в становлении всего «нелинейного сообщества России». Нобелевский лауреат, академик В.Л. Гинзбург, академики А.В. Гапонов-Грехов и В.Е. Захаров в одном из писем так высказались о журнале: «...Журнал является научной трибуной многих ведущих школ России. Среди постоянных авторов журнала признанные во всем мире специалисты по нелинейной динамике из России, Германии, США и других стран. Журнал включен в перечень ведущих научных журналов и изданий, выпускаемых в РФ, в которых публикуются основные научные результаты на соискание ученой степени доктора наук. Издание журнала такого уровня укрепляет престиж отечественной науки и, несомненно, делает честь для Саратовского государственного университета...».

Школу отличает и постоянно действующий научный семинар, на котором прошло уже более 1200 заседаний. Еще одна традиция научной школы Д.И. Трубецкого заключается в том, что почти все представители школы читают лекции студентам, ведут практические и семинарские занятия, читают лекции школьникам в Лицее прикладных наук. Д.И. читал ряд спецкурсов в университетах Москвы, С.-Петербурга, Ростова-на-Дону, Самары, а также в университетах Вайоминга (США) и Сеула (республика Корея). Но об этой стороне его деятельности более подробно остановимся в следующем разделе.

Учитель и педагог

Дмитрий Иванович – Учитель, как говорится, «от Бога». Выступает ли он перед научной аудиторией, читает ли лекции студентам, ведет ли уроки в лицее – всегда находит нужный стиль и глубокую аргументацию излагаемого на высоком научном уровне материала (иначе он не может). Оригинальные методические приемы, четкость и ясность изложения материала, высокая культура речи, великолепная

дикция – все это неизменно присутствует в лекциях, докладах, выступлениях Д.И. Его эрудиция поражает и буквально завораживает слушателей, в то же время часто возникает чувство, что присутствуешь не на лекции или докладе, а участвуешь в беседе с интересным человеком. Удивляет и его трепетное (трудно подобрать другое слово) отношение к студентам и аспирантам. Если к нему приходит дипломник, курсовик или просто любой студент, он отодвигает в сторону любые, иногда достаточно важные дела, и уделяет пришедшему столько времени, сколько нужно.

Педагогическая и учебно-организационная деятельность неотъемлемый элемент школы Д.И. Трубецкого, которая объединяет его единомышленников во взглядах на науку, образование, на человеческие ценности. Формулируя основной принцип созданной Дмитрием Ивановичем научной школы, вероятно, можно обратиться к известному принципу Вильгельма фон Гумбольдта, который можно определить так: «Академическая свобода и единство исследования и преподавания». Д.И. часто повторяет слова: «Нет науки без образования, нет образования без науки». Закономерно, что возглавляемый им научно-педагогический коллектив «Колебания, волны, хаос, структуры, нелинейная динамика» также признан ведущим в России.

Образовательная, как и научная, деятельность Д.И. Трубецкого и его школы столь велика и многообразна, что все охватить в этой статье невозможно. Остановимся на некоторых моментах.

Опираясь на опыт организации научных школ для инженеров и научных работников по электронике и радиофизике, стремясь использовать активные методы привлечения молодежи в науку как можно раньше, Дмитрий Иванович «выдал» своей команде новую идею: давайте сделаем научную школу для школьников, на которой старшеклассники могут получать информацию о научных достижениях, о научных проблемах из первых рук и непосредственно общаться в течение нескольких дней с ведущими учеными нашего университета и других вузов страны. Так появилась «детская» научная школа «Колебания, волны, электроны» с периодичностью один раз в два года. Первая была проведена в январе 1988 года. Эта и все последующие школы проводились в пансионатах, куда и слушатели, и преподаватели выезжали на несколько дней. Для первой и всех последующих школ характерна атмосфера равенства школьников, интересующихся наукой, и ученых-преподавателей, которые уже оставили след в науке, атмосфера доступности неформального общения любого школьника с любым ученым, возможность задавать и обсуждать любые вопросы, в том числе, не научные или околonaучные. Например, на одной из школ обсуждался вопрос «нужно ли девушкам идти в науку, что их там ждет». Школа «Колебания, волны, электроны» проводилась в те времена, когда для большого числа школьников, особенно из сельской местности, компьютер был недостижим. Поэтому компьютерный класс, который организаторы привозили в пансионат на школу, и занятия по информатике пользовались большим вниманием, и учащихся с трудом удавалось уговорить оставить компьютер и идти спать – завтра опять лекции, семинары и пр.

В начале 1990-х наступили другие времена. Мы стали жить, как любят говорить журналисты и политики, в другой стране. Страна изменилась, но, по-прежнему, команда Д.И. проводит школы «взрослые» и «детские». Тем не менее, время внесло свои коррективы. После краткого перерыва в 1997 году возобновилась «детская» научная школа, как писали в местной прессе, «самое любимое, очевидно! – детище кафедры электроники, колебаний и волн и нового факультета нелинейных процессов». Что же изменилось?

Прежде всего следует отметить, что изменилось название школы. Д.И. предложил совершенно неожиданное и неординарное название: «Нелинейные дни в Саратове для молодых». Новое название связано с развитием на факультете нелинейных процессов нового научного направления – нелинейной динамики. Целью школ стало формирование интереса одаренной молодежи к естественным наукам, прежде всего к нелинейной динамике.

Школы стали ежегодными. Изменился состав слушателей школы. Помимо учащихся старших классов полноправными участниками школ стали студенты и аспиранты физического факультета и факультета нелинейных процессов. Лекции слушают все участники школы, а затем происходит разделение: для старшеклассников проводятся семинары, а для студентов и аспирантов организуется миниконференция, на которой они выступают с докладами. Бывает так, что и школьники выступают с самостоятельными докладами. Во время работы школы проводятся вечера английского языка, академ-бои, брейн-ринги, круглые столы, дискуссии. Важным элементом школ стали олимпиады по физике для старшеклассников.

С первых дней существования «детские» школы приобрели широкую известность, вышедшую за пределы Саратовской области. На школы приезжали делегации учащихся и студентов из Москвы, Нижнего Новгорода, Воронежа, Красноярска, Ижевска, Германии.

Успех научных школ во многом определяется составом лекторов. У «детских» школ в этом аспекте благодаря авторитету и организаторским способностям Дмитрия Ивановича проблем не было. Здесь можно было бы привести длинный список «громких» имен ученых из Москвы, Нижнего Новгорода, Петербурга, Казани, Саратова, можно было бы упомянуть имена крупных ученых из Германии, Англии, США, Латвии. Не умаляя заслуг остальных, назовем четыре имени. Все школы начинались с блестящих лекций Д.И. На многие школы с очень интересными лекциями и беседами приезжали из Москвы профессора Сергей Петрович Капица, Юлий Александрович Данилов, лауреат Государственной премии Наталья Александровна Ирисова, выпускник, а ныне профессор МФТИ Георгий Теодорович Гурия. Все названные лица великолепные рассказчики, их лекции и беседы всегда пользовались неизменным успехом, но, что не менее важно, они с удовольствием общались с молодыми участниками школ и в кулуарах, и в столовой, и во время прогулок, и во время вечерних бесед. Им всегда было чем поделиться, что рассказать, они всегда были готовы поддержать молодежь. Они – Учителя.

В одном из интервью Ю.А. Данилов сказал (точнее, так представил его слова журналист): «Научные школы для молодых, организованные в Саратове ..., – явление уникальное. В мире нет ничего подобного или параллельного такой форме обучения, когда старшее поколение ученых читает лекции, а младшее делает научные доклады, проверяя себя на прочность. И все это происходит на фоне фантастического неформального общения».

В 1990–1991 годах Д.И. формулирует перед своей командой новую задачу: создать некую структуру, которая реально объединяла бы среднее и высшее образование в единое целое, обеспечив непрерывное обучение одаренных ребят. Началось бурное обсуждение: какая должна быть структура по форме, как ее назвать, с чего начать и т.п. Для названия ключевым выбрали слово «колледж», как наиболее отвечающее поставленным целям. В словаре иностранных слов прочитали: «Колледж (англ. – college) – высшее или среднее научное учреждение ... колледжи как высшее учебное заведение часто входят в состав университетов». Так появилось на-

звание – Колледж прикладных наук. Первая ступень (среднее образование с 8-го по 11-й классы) новой учебной структуры – Колледжа прикладных наук – была открыта в 1992 году, вторая ступень – Высший колледж прикладных наук, был открыт как структурное подразделение (на правах факультета) Саратовского государственного университета в 1994 году.

ТЕЛЕГРАММА

САРАТОВ ЦТ 5621 57 11/12 1910 -

ЛИЦЕЕ САРАТОВ. 26 УЛ АСТРАХАНСКАЯ 83 СГУ ТРУБЕЦКОВУ Д И=

УВАЖАЕМЫЙ ДМИТРИЙ ИВАНОВИЧ

ПОЗДРАВЛЯЮ ВАС ЛИЧНО ЗПТ ВСЕХ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ И СТУДЕНТОВ ВЫСШЕГО КОЛЛЕДЖА ПРИКЛАДНЫХ НАУК ПЯТИЛЕТИЕМ ЭТОГО УНИКАЛЬНОГО УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ ЗПТ В СТЕНАХ КОТОРОГО РАЗВИВАЮТСЯ НОВЫЕ ЗПТ ВОСТРЕБОВАННЫЕ САМОЙ ЖИЗНЬЮ НАПРАВЛЕНИЯ В ВЫСШЕМ ОБРАЗОВАНИИ ЖЕЛАЮ ВАМ И ВАШИМ КОЛЛЕГАМ ЗДОРОВЬЯ СЧАСТЬЯ БЛАГОПОЛУЧИЯ И ВДОХНОВЕННОГО ТВОРЧЕСТВА»
ВИЦЕ-ГУБЕРНАТОР ВОЛОДИН-

Со временем пришлось изменить название учебных структур. В соответствии с нормативными документами системы образования колледжами могут называться только бывшие техникумы и профессиональные училища. Первая ступень стала Лицеом прикладных наук, а вторая – факультетом нелинейных процессов. Тем не менее, слово «колледж» оказалось настолько емким и точным, что и лицей, и факультет продолжают часто называть колледжем, тем самым, подчеркивая, что эти структуры образуют единое учебно-методическое пространство, охватывающее талантливую молодежь от школьной скамьи до аспирантуры, образовательные технологии в обеих структурах строятся на идеях нелинейной динамики, основой обеих структур является то, что называют школой Трубецкого. Основная функция созданной по инициативе Д.И. модели непрерывного образования – обеспечение интеллектуальной и нравственной среды, в которой одаренные молодые люди могут реализовать свои способности. В рамках этой модели при непосредственном участии Д.И. создана уникальная система взаимосвязанных учебных дисциплин: трехгодичный школьный курс «Колебания, волны, синергетика», вузовские курсы «Физика колебаний», «Физика волн», «Теория катастроф», «Динамические системы и бифуркации», «Динамический хаос», «Колебания и волны в активных средах», «Самоорганизация в открытых системах» и др. Значительный вклад вносит Д.И. в разработку принципиально новой специальности «физика открытых нелинейных систем» с квалификацией «физик, системный аналитик». Впервые в Саратовском государственном университете введена специальность, стандарт которой создан не в столичном вузе, а непосредственно в нашем университете. При утверждении стандарта на экспертной комиссии Минобрнауки Российской Федерации была оказана полная поддержка необходимости введения специальности в бурно развивающейся области науки – нелинейной динамике. Но возник вопрос: почему это надо делать не в столичном (где, казалось бы, возможностей больше), а в провинциальном вузе, в Саратове. Ответ нашли сами

эксперты: в Саратове находится официально признанная ведущая научная школа в области нелинейных явлений.

Может сложиться мнение, что так называемый болонский процесс и ликвидация специалитета в области физических наук сведут на нет усилия по созданию новой специальности. Это не так. Во-первых, на факультете останется главное направление – нелинейная динамика. Во-вторых, «физика открытых нелинейных систем» станет программой при подготовке магистров. В-третьих, созданные учебные лаборатории и разработанные учебные дисциплины для новой специальности в большей части будут использованы при введении направления «Прикладные математика и физика». В настоящее время коллектив сотрудников факультета под руководством Д.И. подготовил все необходимые документы для открытия этого направления.

Для обеспечения тесной связи процесса педагогической деятельности с научными исследованиями Д.И. инициировал создание на факультете нелинейных процессов базовых кафедр, территориально расположенных в институтах РАН и в научно-производственных предприятиях, что позволило использовать научный потенциал и материальную базу этих организаций в образовательном процессе и вовлечь одаренных студентов на ранней стадии обучения в реальную науку. Кроме того, за счет грантов, выигранных школой Трубецкова, были созданы на факультете учебно-научные лаборатории, в которых учебный и исследовательский процессы идут параллельно.

Заслугой Д.И. является организация Научно-образовательного института «Открытые системы», в состав которого вошли Лицей прикладных наук, факультет нелинейных процессов, редакционно-издательский отдел журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», отделение физики нелинейных систем НИИ ЕН СГУ. Научно-образовательный институт «Открытые системы», руководимый Д.И., обеспечивает единое пространство для учебной, научной и издательской деятельности и отвечает духу междисциплинарного направления – нелинейной динамики.

Факультет нелинейных процессов осуществил «экспансию» на другие факультеты, на которых по их заявкам сотрудники научной школы Д.И. читают уникальный междисциплинарный курс «Синергетика». Впервые этот курс был разработан и прочитан Дмитрием Ивановичем в 1998 году на философском факультете. Курс иллюстрирован большим числом примеров как из областей естествознания, так и из областей, близких студентам-гуманитарям: биологии, экономики, социологии. Лекционный цикл затрагивает глобальные проблемы, стоящие перед человечеством на данном этапе развития и подводит слушателей к осознанию необходимости кооперации на общечеловеческом уровне, разработки стратегий выживания, опирающихся на современное нелинейное естественно-научное мировоззрение.

Признанием подобных исследований и учебно-педагогической деятельности стало присуждение в 2000 году профессору, члену-корреспонденту РАН Д.И. Трубецкову премии Президента в области образования за создание системы преподавания естественных наук гуманитариям.

В образовательной деятельности Д.И. важное место занимает написание учебников и учебных пособий. Так, например, в 1984 году издательство «Наука» издает учебник «Введение в теорию колебаний и волн» (авторы Рабинович М.И. и Трубецков Д.И.), которое сразу становится библиографической редкостью. Книга выдержала три издания на русском языке (в 1984, 1994 и 2000 годах) и переведена

на английский язык в Нидерландах. Библиографической редкостью стала подготовленная им и его учениками в рамках программы «Интеграция» серия «Современная теория колебаний и волн» из шести книг, выпущенных в 2001–2002 годах Физматлитом и рекомендованных Минобразованием России в качестве учебных пособий для студентов высших учебных заведений физического профиля.

Вместо заключения

Все, кто хоть немного знаком с Д.И., поймут, что сказанное здесь – лишь только часть того, на что можно было бы обратить внимание, говоря о научной и образовательной деятельности этого человека с удивительной трудоспособностью. Да и разве возможно провести границу между научной и образовательной деятельностью, говоря о школе Трубецкого.

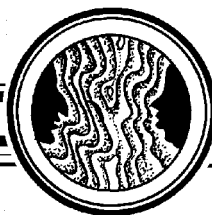
Поэтому естественным для него стало увлечение историей науки. Во введении к уже упомянутой выше монографии «Лекции по СВЧ электронике для физиков» Дмитрий Иванович пишет: «Еще одна особенность лекций – в них определенное место занимает история СВЧ электроники». М.В. Волькенштейн в своей книге «Перекрестки науки» (М.: Наука, 1972) писал: «Есть физики – и очень хорошие физики, которые не интересуются историей своей науки. Мне это не импонирует. Мне всегда казалось, что знание истории науки, более того, знание творческих индивидуальностей, ее развивающих, очень обогащает мысль. В отличие от искусства наука объективна, она имеет дело с независимыми от человека законами природы. Но наука, так же как и искусство, создается людьми, она есть и познание и творчество. Интересны не только окончательные результаты исследования, но и путь, который к ним привел, в особенности, если этот путь был найден великим интеллектом». С этим трудно не согласиться, тем более потому, что основные идеи СВЧ электроники выдвинули не только физики, но и летчик Сигурд Вариан, гуманитарий Хэлл и архитектор Компфнер».

Приведенные Дмитрием Ивановичем слова М.В. Волькенштейна отражают его собственное отношение к физике, которая для него не просто набор открытий и изящно решенных задач, но и, в первую очередь, люди, которые творили науку, которые жили наукой. Его всегда интересуют мысли людей науки, их свершения, их победы, их путь в науке. Характерна в этом отношении и подготовленная им для молодых людей, желающих найти себя в науке, серия увлекательных и информативных книг «След вдохновений и трудов упорных». Его циклы лекций по истории науки («Нелинейная динамика в датах», «Леонардо да Винчи как нелинейное явление» и др.) с большим интересом слушают академики, профессора, учителя школ, студенты и школьники.

Обобщая все сказанное, авторы статьи надеются, что сама жизнь и творческая деятельность Дмитрия Ивановича Трубецкого может рассматриваться как нелинейное явление, как удивительный феномен в так любимой им нелинейной науке.

*Саратовский государственный
университет, июнь 2008*

*Ю.И. Левин,
А.Е. Храмов,
Ю.П. Шараевский*



О РАЗВИТИИ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В ЭЛЕКТРОНИКЕ СВЧ И НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

(Заметки по поводу...)

В современных условиях руководитель научной работы подобен режиссеру, он создает спектакль, хотя не появляется сам на сцене.

П.Л. Капица

Слова, вынесенные в эпиграф, взяты из известной работы академика, лауреата Нобелевской премии П.Л. Капицы «Эксперимент, теория, практика» и были сказаны им на общем собрании Академии наук СССР. Было отмечено также, что для гармонического развития науки необходимо взаимное влияние и обогащение теории и эксперимента. Выразительным подтверждением этой мысли является наше многолетнее научное общение с Дмитрием Ивановичем Трубецковым, который принял и развил традиции от наших общих учителей и наставников – профессоров П.В. Голубкова, В.Н. Шевчика и В.С. Стальмахова. Являясь крупным и широко известным физиком-теоретиком и организатором научных исследований, создавшим свою научную школу в электронике СВЧ и нелинейной динамике, Дмитрий Иванович всегда уделял большое внимание экспериментальным исследованиям в этих областях.

В течение нескольких десятилетий мы, начиная с проблемной лаборатории радиоэлектроники СГУ (легендарного «подвала» в V корпусе СГУ), занимаемся физическим экспериментом в области микроволновой электроники и нелинейной динамики. И все эти годы наши работы вызывали пристальный интерес Дмитрия Ивановича, поддерживались и обогащались постоянными обсуждениями и предложениями по постановке новых экспериментов. Уместно вспомнить, например, проблемы физического моделирования процессов взаимодействия потоков заряженных частиц с СВЧ-полями и волнами, которые выполнялись нашей научной группой на основе метода электронного зонда. Основами этих исследований были теория подобия и анализ размерностей, развитые применительно к электронике СВЧ Д.И. Трубецковым. Полученные им результаты позволили решить оригинальные задачи по физическому моделированию процессов энергообмена в релятивистских клистронах и автофазировки в сильноточных линейных ускорителях протонов. Другой пример связан с работами по моделированию гирорезонансных приборов, изучением которых

некоторое время занималась научная группа Д.И. Трубецкова. С «поддачи» Дмитрия Ивановича была оформлена совместная с теоретиками заявка на изобретение и получено авторское свидетельство на новый тип электронного зонда. Подобно «режиссеру, не появляющемуся на сцене», Дмитрий Иванович просил не включать его в соавторы изобретения. В трудные 1990-е годы, когда фактически было прекращено финансирование научных работ и рухнула технологическая база отдела радиоэлектроники, возникла проблема сохранения экспериментальных исследований в университете. И именно в этот период с «подсказки» Дмитрия Ивановича мы включились в экспериментальные исследования проблем нелинейной динамики в микроволновом диапазоне. Дмитрий Иванович давно обратил наше внимание на большие возможности автогенераторов на пролетных клистродах для изучения сложных и хаотических колебаний, синхронизации и возможности управления хаосом внешними гармоническими и шумовыми сигналами; так началась, по его выражению, «новая жизнь» многорезонаторных клистронов. При этих исследованиях постановка эксперимента и результаты постоянно и плодотворно обсуждались с Дмитрием Ивановичем. Так появились интересные идеи, а затем проведены эксперименты по синхронизации хаотических колебаний путем полного подавления хаоса в клистронном автогенераторе внешним гармоническим сигналом, «неожиданному» для нас эффекту синхронизации автоколебаний в ЛОВ на второй и третьей гармониках, который был объяснен Дмитрием Ивановичем. Под руководством и при непосредственном участии Д.И. Трубецкова получило развитие новое научное направление, связанное с исследованиями сверхширокополосных низковольтных виркаторов. Он, по существу – основоположник теоретических и экспериментальных работ по созданию генераторов хаотических СВЧ-колебаний на основе виртуального катода. В последние годы по этой тематике изготовлены и исследованы различные варианты вакуумных макетов, реализующих идеи низковольтного виркатора.

Дмитрий Иванович Трубецков является научным руководителем отделения физики нелинейных систем НИИ естественных наук. Со времени создания отделения Дмитрий Иванович активно поддерживает и принимает участие в исследовательских работах по развитию и совершенствованию методов расчета и методов физического эксперимента. Он считает, что без физического эксперимента в электронике СВЧ практически невозможно достичь больших успехов в понимании физических процессов и создании новых приборов. Дмитрий Иванович является научным руководителем ведущей научной школы РФ, многих госбюджетных НИР, исследований по грантам и программам, где основное внимание уделяется применению методов физического эксперимента в решении как фундаментальных, так и прикладных задач электроники СВЧ.

Особое значение имеет научное руководство Дмитрием Ивановичем грантов РФФИ (ОФИ), ориентированных на создание опытных образцов генераторов шумоподобных СВЧ сигналов. Очевидным является и тот факт, что эффективность физических исследований в значительной степени зависит от наличия современной измерительной техники. Глубоко понимая это положение, Дмитрий Иванович является инициатором в приобретении современной измерительной техники. За последние годы при его непосредственном участии и поддержке отделение приобрело новейшие

анализаторы СВЧ-спектров, измерители мощности, анализатор СВЧ-цепей, усилители, СВЧ-осциллограф и др. Использование этой техники, обладающей без преувеличения «фантастической» чувствительностью и разрешающей способностью, поднимает экспериментальные исследования на принципиально новый, значительно более высокий уровень.

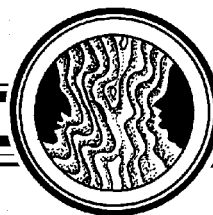
Отдельно следует отметить, что не только научные, но и учебные лаборатории факультета нелинейных процессов оснащаются современной измерительной аппаратурой и вычислительной техникой.

Дмитрий Иванович всегда уделял и уделяет большое внимание подготовке физиков-экспериментаторов. По его предложению и при непосредственном участии на предприятии «Алмаз» был открыт первый в университете филиал кафедры электроники, колебаний и волн (теперь базовая кафедра).

Эффективная работа всех экспериментальных научных групп в отделе НИИ физики нелинейных систем – не только заслуга непосредственных исполнителей, но является и результатом активной деятельности Дмитрия Ивановича Трубецкого.

*Саратовский государственный
университет, июнь 2008*

*Б.С. Дмитриев,
Ю.Д. Жарков,
Ю.А. Калинин*

**«КАКИЕ ДАТЫ КРУГЛЫМИ НАЗВАТЬ?»***Д.И. Трубецков*

Начиная с 2004 года, я публикую статьи под названием « $200n$ -й год в датах нелинейной динамики», где $n = 4, 5, 6, 7$, и вот теперь $n = 8$. Конечно, не собираюсь утомлять вас перечнем всех дат, связанных с 2008 годом, а выделю несколько, на мой взгляд, наиболее важных. Физик и поэт Валерий Канер написал:

Какие даты круглыми назвать?
Явлением нуля поделят даты
Шеренгу лет, похожих как солдаты,
На отделенья, чтоб маршировать
И тратить километры, киловатты,
А вспыхнет ноль, –
тогда осознавать,
Что вроде набежало многовато...
Какие даты круглыми назвать?

И далее Канер отвечает:

Сдается мне, всего круглей квадраты!

Если исходить из цифры 70, то с квадратами не очень получается: 8^2 было, 9^2 далеко, а 10^2 – первый настоящий юбилей. Давайте оставим его нашему университету и остановимся на круглых датах. Впрочем, одна квадратная дата есть в 2008 году. В этом году исполнилось бы 100 лет (явное совпадение круглости и квадратности) Льву Давидовичу Ландау. Об этом юбилее много рассказано и много написано. Вот что пишет о Ландау академик А.А. Абрикосов: «Во всех его работах поражает ясность и непредубежденность мысли, выдающаяся способность всегда правильно выделить из нагромождения теорий и фактов существо рассматриваемого вопроса, умение четко поставить задачу исследования, а затем, наконец, изящно разрешить поставленную проблему». Сказано удивительно точно.

Есть и еще один столетний юбилей, но о нем позже. Обратимся к другим далеким датам, хотя не так уж они далеки.

1918 90 лет назад Мариан Смолуховский, исходя из кинетического закона распределения энергии, дал объяснение броуновскому движению, доказав справедливость

молекулярно-кинетической теории. Кстати, часто пишут «броуновское движение», поскольку открывателя этого явления, английского ботаника, называют в разных книгах то Броуном, то Брауном. Интересно, что Эйнштейн раньше Смолуховского разработал теорию броуновского движения, не зная о существовании броуновского движения. Разумеется, Смолуховский, в свою очередь, не знал о теории Эйнштейна. Приведем вывод основной формулы теории, основываясь на физических соображениях и анализе размерностей.

Броуновское движение вызывается толчками, испытываемыми взвешенными в жидкости частицами со стороны окружающих молекул, совершающих тепловое движение. Толчки никогда в точности не уравниваются друг друга. В каждый момент времени частица движется в определенном направлении. Через некоторое короткое время направление равнодействующей силы ударов со стороны окружающих молекул меняется, и частица начинает двигаться в другом направлении. Таким образом, под влиянием ударов молекул окружающей среды скорость броуновской частицы непрерывно и беспорядочно меняется по величине и направлению.

Любопытно, что Лукреций в поэме «О природе вещей» предвидел и описал это явление, но, конечно, не имел возможности его наблюдать.

Пусть броуновская частица имеет форму шарика радиусом a . Если шарик равномерно движется в жидкости со скоростью v , то на него действует сила сопротивления F , пропорциональная скорости v . Действительно,

$$F = f(\eta, a, v),$$

где η – сила внутреннего трения жидкости (коэффициент динамической вязкости). В системе LMT матрица размерности имеет вид

$$\begin{array}{cccc} & F & \eta & a & v \\ \text{L} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ \text{M} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \text{T} & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array} \quad \text{и} \quad F = C\eta^\alpha a^\beta v^\gamma.$$

Тогда

$$\text{LMT}^{-2} = (\text{L}^{-1}\text{MT}^{-1})^\alpha \text{L}^\beta (\text{LT}^{-1})^\gamma,$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = -\alpha + \beta + \gamma \\ 1 = \alpha \\ -2 = -\alpha - \gamma \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \gamma = 1 \\ \beta = 1 \end{array} \quad F = C\eta a v.$$

Для шарообразной частицы величина C была вычислена Стоксом и равна 6π . Таким образом, $v = 1/(6\pi\eta a)F$, величина $B = 1/(6\pi\eta a)$ называется подвижностью частицы, то есть $v = BF$.

Введем средний квадрат смещения броуновской частицы $\langle r^2 \rangle$, где \vec{r} – полное смещение, а усреднение проведено по всем частицам. Разумно предположить, что r^2 зависит от тепловой энергии молекул окружающей среды, которая пропорциональна kT (k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура), от подвижности частиц B и от времени t . Тогда

$$\langle r^2 \rangle = f(kT, B, t).$$

В системе LMT матрица размерности имеет вид

$$\begin{array}{ccccc}
 \langle r^2 \rangle & kT & B & t & \\
 L & 2 & 2 & 0 & 0 \\
 M & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 T & 1 & -2 & 1 & 1
 \end{array}
 \quad \text{и} \quad \langle r^2 \rangle = C_1 (L^2 M T^{-2})^\alpha (M^{-1} T)^\beta T^\gamma,$$

$$L^2 = L^{2\alpha} M^{(\alpha-\beta)} T^{(-2\alpha+\beta+\gamma)},$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1.$$

Окончательно

$$\langle r^2 \rangle = C_1 kT \cdot B \cdot t,$$

в формуле Эйнштейна $C_1 = 6$, а у Смолуховского $C_1 = 192/27$.

1928 Александр Александрович Андронов на съезде русских физиков выступил с докладом «Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний». Г.С. Горелик так оценивает сделанное в этой работе. «До Андронова математики не подозревали, что предельные циклы «живут» в прикладных задачах, а физики и инженеры, занимающиеся исследованием колебаний, не знали, что уже существует математический аппарат, необходимый для общей теории колебательных процессов». Вот слова А.А. Андронова: «Предельный цикл есть геометрический образ, изображающий в фазовом пространстве периодическое движение автоколебательной системы; он представляет собой замкнутую кривую, к которой асимптотически приближаются соседние фазовые траектории».

Пожалуй, это был один из важнейших шагов на пути к нелинейной науке (замечу, что публикация доклада А.А. Андронова занимает лишь полторы страницы).

В этом же году Ч.В. Раман и К.С. Кришнан открыли явление комбинационного рассеяния. На эту тему написано много работ и высказано много сожалений о том, что Нобелевскую премию получил Раман и не получили Л.И. Мандельштам и Г.С. Ландсберг, открывшие комбинационное рассеяние независимо и одновременно с Раманом.

Родился Б.В. Чириков – один из основоположников теории хаоса. Ему, в частности, принадлежит знаменитый критерий перекрытия резонансов.

1938 Вышла в свет замечательная книга – Ф.М. Шемякин и П.Ф. Михалев «Физико-химические периодические процессы» (Издательство АН СССР, Москва–Ленинград, 1938). В предисловии к книге, написанном академиком Н.С. Курнаковым и профессором В.И. Николаевым, есть такие строчки: «В предлагаемой работе собран богатый справочно-описательный материал, иллюстрирующий естественные периодические структуры и процессы, с которыми мы встречаемся в геологии, минералогии и биологии, и экспериментально воспроизведенные химические, физико-химические и физические периодические структуры и процессы...».

Периодичность некоторых явлений в природе отмечалась ещё в глубокой древности, но только в настоящее время начинает становиться ясной их широкая распространенность».

Даже беглый просмотр книги позволяет сделать вывод, что к концу тридцатых годов по периодическим физико-химическим процессам был накоплен большой фактический материал, в основном экспериментальный. Список цитируемой в книге литературы насчитывает 925 наименований.

Почти 50 лет спустя профессор, доктор химических наук Б. Вольтер опубликовал ряд статей по истории периодических химических реакций. Одна из них под названием «Легенда и быль о химических колебаниях» («Знание – сила», № 4, апрель 1988 года, кстати, тоже круглая дата – 20 лет со дня публикации) имеет эпиграфом строки А.С. Пушкина

И устарела старина,
И старым бредит новизна,

а также преамбулу: «Говорят, забвение фактов рождает легенду, а легенда искажает истину. Парадоксально, но факт: возрастающий поток статей по химическим колебаниям всё дальше уносит нас от правды о более чем столетней истории их открытия». В статье приводятся различные факты о периодических химических реакциях, начиная с 1938 года и назад в прошлое – даже в XIX век.

Позднее мы ещё вернёмся к теме периодических химических реакций.

В том же 1938 году была опубликована статья Я.Б. Зельдовича и Д.А. Франк-Каменецкого «Теория теплового распространения пламени» (ЖТФ, 1938, т. 12, вып. 1, с. 100), ставшая классической в теории автоволн.

Но всё же главная дата, связанная с 1938 годом – 70 лет со дня публикации статьи А.А. Власова «О вибрационных свойствах электронного газа» (ЖЭТФ, 1938, т. 8, вып. 3, с. 291–318) и 100 лет со дня его рождения. У автора и статьи судьбы сначала были одинаково печальными, а потом (особенно после смерти автора) статья обрела бессмертие.

Анатолий Александрович Власов родился 20 августа 1908 года в городе Балашове. Окончил в 1931 году Московский государственный университет, где и работал до своей кончины – 22 декабря 1975 года.

А.А. Власов – физик-теоретик, научные работы которого посвящены физике плазмы, оптике, теории кристаллического состояния, теории гравитации, теории множественного рождения частиц. Он ввел понятие коллективных колебаний, широко используемое при исследовании систем многих частиц, разработал теорию колебательных свойств электронного газа, предложил новое кинетическое уравнение плазмы, учитывающее коллективные взаимодействия между заряженными частицами (уравнение Власова).

В 1970 году за цикл работ по физике плазмы А.А. Власов был удостоен Ленинской премии.

Из приведенной краткой биографии может показаться, что все прекрасно, но это не так.

Начнем с того, что представляют собой уравнения Власова для плазмы. Напомним, что кинетическое уравнение для каждого сорта частиц в классической плазме (электронов и ионов) имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{p}} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = Stf, \quad (1)$$

где f – функция распределения данных частиц по координатам \vec{r} и импульсам \vec{p} ; \vec{v} – скорость частиц, производная $\dot{\vec{p}} = (d\vec{p}/dt)$ определяется действующей на частицу силой, которая, в свою очередь, выражается через напряженности электрического и магнитного полей, создаваемых всеми остальными частицами в точке нахождения данной частицы. Будем далее рассматривать ситуации, в которых несущественны

столкновения между частицами плазмы, то есть ограничимся рассмотрением бесстолкновительной плазмы, когда интеграл столкновений Stf мал по сравнению со слагаемым $\vec{v} \nabla f$ в левой части уравнения (1). Для выполнения этого обычно необходимо, чтобы

$$v \ll \omega,$$

где v – эффективная частота столкновений (величина, обратная среднему времени свободного пробега частицы), ω – частота изменения макроскопических электрического E и магнитного B полей. Столкновениями можно пренебречь и в том случае, когда средняя длина пробега частиц $l \sim \bar{v}/\nu$ (\bar{v} – средняя скорость) велика по сравнению с длиной L , на которой меняется поле («длина волны» поля). Если обозначить $1/L \sim k$, то это условие запишется в виде

$$v \ll k\bar{v}.$$

Если пренебречь интегралом столкновений, кинетические уравнения для функций распределения электронов f_e и ионов f_i принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} - e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{B}] \right) \vec{v} \frac{\partial f_e}{\partial \vec{p}} &= 0, \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}} + ze \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{B}] \right) \vec{v} \frac{\partial f_i}{\partial \vec{p}} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где ze – заряд иона. Уравнения (2) и носят название уравнений Власова.

К этим уравнениям надо присоединить систему усредненных уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \text{div} \vec{B} &= 0, \\ \text{rot} \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, & \text{div} \vec{E} &= 4\pi\rho. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь ρ и \vec{j} – средняя плотность зарядов и плотность тока, которые выражаются через функции распределения соотношениями

$$\begin{aligned} \rho &= e \int (zf_i - f_e) d^3p, \\ \vec{j} &= e \int (zf_i - f_e) \vec{v} d^3p. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (2)–(4) составляют единую систему уравнений, определяющих одновременно как f_e и f_i , так и \vec{E} и \vec{B} . Поля, определяемые таким образом, называются самосогласованными. Систему уравнений (2)–(4) называют уравнениями Власова–Максвелла. Думаю, что многие увидели в системе уравнений (2)–(4) систему основных уравнений сверхвысокочастотной электроники.

В статье 1938 года А.А. Власов выделил два следующих момента (в статье это – курсив).

«Обстоятельства... заставляют выдвинуть утверждение, что метод кинетического уравнения, учитывающий только парное взаимодействие – взаимодействие посредством удара – для системы заряженных частиц является аппроксимацией, строго говоря, неудовлетворительной, что в теории таких совокупностей существенную роль должны играть силы взаимодействия и на далёких дистанциях и что, следовательно, система заряженных частиц есть по существу не газ, а своеобразная система, стянутая далекими силами»

(стр. 292). И далее, на стр. 297 он пишет: «Итак, вопрос о вибрационных свойствах допускает упрощение задачи – можно пренебречь всеми взаимодействиями посредством удара».

В статье на основе линеаризованных уравнений были рассмотрены дисперсия продольных волн (плазма), дисперсия продольных волн в электронном газе с функцией распределения Ферми (металл), дисперсия поперечных волн (ионосфера). На основе результатов работы 1938 года по статистической теории электронной плазмы, ставших впоследствии классическими, Власов в 1944 году успешно защитил докторскую диссертацию.

Для воссоздания дальнейших событий обратимся к очерку «Анатолий Александрович Власов», написанному Юрием Львовичем Климонтовичем (Ю.Л. Климонтович. Воспоминания коллег и его личные заметки о людях науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2005, 118 с.). Юрий Львович отмечает, что Власов был несомненно одним из самых талантливых ученых на физическом факультете МГУ. В то время он читал курс «Электронная теория», который выделялся среди других курсов оригинальностью по содержанию и ярким изложением. Далее Климонтович пишет следующее. «Его удивительное дарование привлекло к нему многих. Поражала быстрота его реакции на семинарах, посвященных разным вопросам физики, глубина и четкость его вопросов, стремление критически переосмыслить устоявшиеся физические теории. Однако общение с ним для многих затруднялось сложностью его характера». В 1946 году происходит событие, мотивы которого не были ясны ни для Юрия Львовича, ни для его однокурсников, среди которых были Григорий Гарибян, Иосиф Гольдман, Юрий Широков и др. В ЖЭТФ (1946, т. 16, с. 246) появилась статья четырех авторов – В.Л. Гинзбурга, Л.Д. Ландау, М.А. Леонтовича и В.А. Фока, начальные слова которой, по мнению Юрия Львовича, были чудовищно несправедливыми. Они звучали так. «В последнее время (в 1944–1945 гг.) в печати появился ряд работ А.А. Власова... Рассмотрение указанных работ А.А. Власова привело нас, однако, к убеждению об их полной обоснованности и об отсутствии в них каких-либо результатов, имеющих научную ценность». Как пишет Климонтович, «критическая статья» четырех авторов произвела на него и его товарищей (тогда четверокурсников) удручающее впечатление, которое... «не изгладилось у меня окончательно...».

Письму предшествовал ряд событий на физическом факультете МГУ в 1944 году.

Уже упоминалось, что именно в 1944 году Власов защитил докторскую диссертацию. Вскоре после защиты был объявлен конкурс на замещение должности заведующего кафедрой теоретической физики. Претендентов было два: И.Е. Тамм и А.А. Власов. Избрали Власова. Снова слово Ю.Л. Климонтовичу. «Это решение обеспокоило группу ведущих физиков и математиков, поскольку в избрании А.А. Власова решающую роль сыграли, по их мнению, голоса членов Ученого Совета, тормозящих развитие образования и науки на физическом факультете. Результатом послужило письмо председателю Комитета по высшей школе С.В. Кафтанову. Приведем выдержки из этого письма.

"Многоуважаемый Сергей Васильевич, Московский университет должен быть ведущей и образцовой школой для наших молодых ученых. Состояние физического факультета этого университета вселяет в нас беспокойство...

Кафедру теоретической физики Московского университета надо рассматривать как ведущую в Советском Союзе и поэтому несомненно выбор её руководителя должен быть произведен с большой ответственностью. Московским университетом этот выбор сделан в пользу проф. Власова.

Просим Вас не отказать ознакомить нас с материалами и заключениями физико-математического факультета Московского университета, приведшими к выбору Власова на эту кафедру, а также обсудить этот вопрос с нами.

Академики: Алиханов, Крылов, Соболев, Папалекси, Капица, Христианович, Вавилов, Фрумкин, Бернштейн, Лебедев, Семенов, Курчатов, Фок, Мандельштам"

Результатом этого письма 14 академиков стало назначение заведующим кафедрой теоретической физики МГУ В.А. Фока».

Через два месяца после вступления в должность В.А. Фок в письме к П.Л. Капице дает следующую характеристику А.А. Власову и его методу, по существу отрицающая плодотворность идеи о коллективных взаимодействиях и самосогласованного приближения.

«Проф. А.А. Власов играет настолько активную роль на факультете, что о нем стоит сказать подробнее. Это молодой профессор, недавно сделавший хорошую работу по теории электронной плазмы и защитивший ее в качестве докторской диссертации. Он – способный человек, крайне самовлюбленный и неуравновешенный. Он ученик А.С. Предводителя и И.Е. Тамма. В настоящее время он фанатически увлечен неверной идеей о том, что метод, примененный им к решению задачи о плазме, имеет будто бы универсальный характер. Он вообразил, что ряд разнородных явлений, как-то: сверхтекучесть гелия, сверхпроводимость, флуктуации, упругость и пр. (явления, которые на самом деле между собой едва ли связаны) имеют общую причину – наличие "далеких взаимодействий". При этом он думает, что эта причина может быть учтена его формальным методом. Убедительных доводов в пользу своей идеи он привести не в состоянии, но часто выступает с декларациями о том, что нужно "искать новых путей в науке" и т.п., причем выставляет себя новатором, а всех прочих (внеуниверситетских физиков) консерваторами...

А.С. Предводителев всячески внушает А.А. Власову, что он гений и этим, по моему, губит его: из него мог бы выработаться настоящий ученый, а сейчас он стоит на прямом пути к тому, чтобы стать лжеученым».

Время показало, что Владимир Александрович Фок ошибался. Что же последовало за этими событиями? А.А. Власов подвергался критике не только со стороны маститых академиков, но и со стороны некоторых физиков-теоретиков МГУ. Но не все так относились к А.А. Власову и его идеям. И среди «не всех» был Андрей Дмитриевич Сахаров, о чем можно судить по следующему отрывку из его воспоминаний (журнал «Знамя», 1990, № 10, с. 35–36).

«Основной для меня курс квантовой механики читал профессор А.А. Власов – несомненно очень квалифицированный и талантливый физик-теоретик, бывший ученик И.Е. Тамма. Читал Анатолий Александрович обычно хорошо, иногда даже отлично, с блеском делая по ходу лекции нетривиальные замечания, открывающие какие-то скрытые стороны предмета, создавая для нас возможности более глубокого понимания. При этом очень странная была и внешняя манера чтения – закрывал лицо руками и так, ни на кого не глядя, монотонно произносил фразу за фразой. Конечно, все это были признаки болезни, о чем я тогда не догадывался. Уже после войны я слышал, как Леонтович говорил: "Раньше, когда я был рядом, как только я видел, что Власов начинает сходиться с катушек, я его как следует бил, и он приходил в норму. А без меня он окончательно свихнется". Конечно, дело было не только в битье. Я думаю, что дружба с такими людьми, как Леонтович, была важна для Власова...

Первые, очень интересные работы Власова были написаны совместно с Фурсовым, потом их плодотворное содружество распалось. Наиболее интересны работы Власова по бесстолкновительной плазме; введенное им уравнение по праву носит его имя. Уже после войны Власов опубликовал (или пытался опубликовать) работу, в которой термодинамические понятия вводились для системы с малым числом степеней свободы. Многие тогда с огорчением говорили об этой работе как о доказательстве его упадка как ученого. Но, может быть, Власов был не так уж и неправ. При выполнении определенных

условий "расхождения траекторий" система с малым числом степеней свободы может быть эргодической (не поясняя термина, скажу лишь, что отсюда следует возможность термодинамического рассмотрения). Пример, который я знаю из лекций проф. Синая: движение шарика по бильярдному полю, если стенки сделаны вогнутыми внутрь поля.

Власов был первым человеком (после папы), который предположил, что из меня может получиться физик-теоретик».

Из слов А.Д. Сахарова следует, что Власов подошел, в какой-то мере, и к идее динамического хаоса.

Незадолго до своей смерти Анатолий Александрович подготовил для издательства «Наука» рукопись своей последней книги, которая увидела свет лишь в 1978 году под названием «Нелокальная статистическая механика». Ряд крупных ученых уклонились от ее рецензирования, а рецензенты из Института теоретической физики имени Ландау дали «разгромный отзыв». По счастью, вмешался Николай Николаевич Боголюбов, заявивший: «Все, что написано А.А. Власовым, должно быть опубликовано». Более того, он предварил книгу своим предисловием, в котором отдал дань таланту Анатолия Александровича Власова. Как указывает Ю.Л. Климонтович: «С момента публикации последней книги Анатолия Александровича Власова прошло уже четверть века и лишь недавно появились первые работы, в которых демонстрируется эффективность развитого в ней нового метода статистической теории».

Справедливости ради следует отметить, что в десятом томе курса теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица «Физическая кинетика» (М.: «Наука», 1979), который написан Е.М. Лифшицем и Л.П. Питаевским, есть параграф 27 «Самосогласованное поле», где указывается, что понятие «самосогласованное поле» введено в кинетические уравнения А.А. Власовым, и приводится система уравнений, называемая уравнениями Власова.

Каково же сегодня место уравнений Власова в физике? Ответ на этот вопрос дает книга В.В. Веденяпина «Кинетические уравнения Больцмана и Власова» (М.: Физматлит, 2001, 112 с.). В аннотации к книге, в частности, написано: «... уравнение Власова описывает плазму, электронный газ, галактики, крупномасштабную Вселенную».

В упомянутой книге уравнения Власова (или уравнения самосогласованного поля) записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(v, \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \left(F(f), \frac{\partial f}{\partial V} \right) = 0. \quad (5)$$

В уравнении (5) сила сама есть функционал от функции распределения f , а уравнение (5) имеет вид уравнения сдвига вдоль характеристик. Простейший вид зависимости силы F от функции распределения соответствует парному потенциалу взаимодействия $K(x, y)$

$$F = -\nabla \int K(x, y) f(y, v, t) dv dy. \quad (6)$$

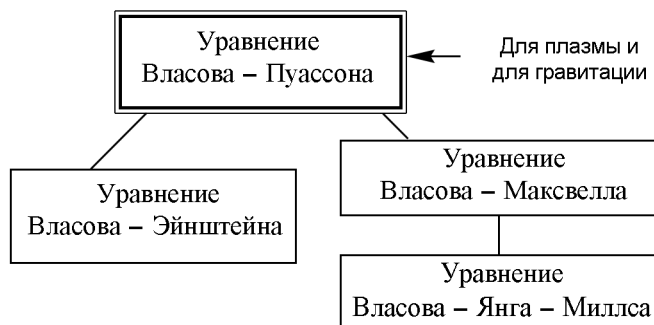
Именно этот вид взаимодействия дает систему уравнения Власова. Обычно, чтобы различать виды взаимодействий, говорят о системах уравнений «Власова плюс ещё кого-то». Существуют уравнения Власова–Пуассона, Власова–Максвелла, Власова–Эйнштейна, Власова–Янга–Миллса. Уравнение Власова–Пуассона бывает двух видов – для плазмы и для гравитации. В обоих случаях (6) заменяется на уравнение Пуассона действием оператора Лапласа при условии, что $K(x, y)$ – фундаментальное решение оператора Лапласа. Следовательно, K есть потенциал единичного заряда в трёхмерном случае, нити в одномерном и плоскости в двумерном случае.

Уравнение Власова–Эйнштейна получается, если в гравитационном случае заменить взаимодействие по Ньютону на взаимодействие по Эйнштейну.

Для плазмы заменой электростатики на электродинамику получаем уравнение Власова – Максвелла.

Наконец, если у нас сохраняется не заряд, а векторная величина (изотопический заряд или цвет), то вместо электромагнитных потенциалов нужно взять матрицы, и получатся уравнения Янга–Миллса, которые дают принятую в настоящее время теорию объединенного электро- (слабого и сильного) взаимодействия.

На диаграмме приведена иерархия уравнений Власова.



Для полноты представления о том, какое место занимает уравнение Власова в современной физике, приведем длинную цитату из книги В.В. Веденяпина (Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001, 112 с.).

«Данная иерархия дает нам примеры захватывающих романов между математикой и различными частями естествознания. Отдельные главы этого романа будут описаны в дальнейшем... Уравнение динамики N тел как следствие уравнения Власова: подстановка в виде суммы дельта-функций. Подстановка в виде интегралов от дельта-функций и лагранжевы координаты. Примеры: осцилляторы и антиосцилляторы, экспоненциальное разбегание, две гамильтоновы структуры. Эйлеро-лагранжевы координаты и гидродинамическая подстановка, N -слойная и континуум-слойная гидродинамика. Примеры: расширяющаяся Вселенная, перехлёсты и границы гидродинамического описания. Энергетическая подстановка, когда функция распределения зависит только от энергии. В этом случае уравнение (5) переходит в нелинейное уравнение для потенциала. Это уравнение аналогично уравнениям Бернулли для уравнения Эйлера. И уравнения типа Власова по своей судьбе аналогичны уравнениям Эйлера: их частные случаи стали появляться раньше, чем были написаны уравнения Власова. При этом в той же самой энергетической постановке, выражающей закон сохранения энергии. В приложениях это были плазменный диод (диод Лэнгмюра), уравнение Дебая для электролитов и уравнение Лэна–Эмдена в гравитации. В математике такое уравнение еще раньше было изучено в геометрии и называется уравнением Лиувилля».

1948 Возвращаемся к периодическим химическим реакциям.

И.Е. Сальников успешно защитил в Горьковском университете кандидатскую диссертацию на тему «Теория периодического протекания гомогенных химических реакций». Руководителем Сальникова был Д.А. Франк-Каменецкий, книга которого «Диффузия и теплопередача в химической кинетике» вышла в 1947 году и уже содержала главу о химических колебаниях. Книга впоследствии выдержала три издания, переведена в США и Швеции, став научной классикой. Почему следует выделить

факт защиты Сальниковым диссертации? Дело в том, что в диссертации собрана обширная информация о более чем вековой истории изучения химических колебаний и получены первые теоретические результаты с позиций нелинейной теории колебаний. Заметим, что сначала в 1947 году диссертация была представлена к защите в институте химической физики, но защита не состоялась. Диссертацию отвергли, и причиной было то, что она опередила свое время.

Интересно, что ещё раньше появились работы А.А. Витта и Ф.М. Шемякина под названием «Математическая теория периодических реакций», в которых было дано математическое доказательство волновых явлений на плоской поверхности химически активной среды.

В 1948 году увидело свет первое английское издание «Кибернетики» Норберта Винера (Wiener N. *Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine*. The Technology Press and John Wiley & Sons, Inc., New York – Hermann et Cie, Paris, 1948). Скромная книга в красном переплётё, в которой была масса описок и опечаток, скоро стала одной из «книг века» – научным бестселлером.

В книге «Я – математик» (Издательство «Наука», М., 1964) Винер так комментирует реакцию на выход «Кибернетики». «Появление книги в мгновение ока превратило меня из ученого-труженика, пользующегося определенным авторитетом в своей специальной области, в нечто вроде фигуры общественного значения. Это было приятно, но имело и свои отрицательные стороны, так как отныне я был вынужден поддерживать деловые отношения с самыми разнообразными научными группами и принимать участие в движении, которое приняло такой размах, что я уже не мог с ним справиться» (с. 318).

Главная мысль «Кибернетики» – подобие процессов управления и связи в машинах, живых организмах и обществах, будь то общества животных или людей. Логическое обоснование кибернетики – общая теория динамических систем (а может быть, просто общая теория систем), которая не создана.

Н. Винер был убежден в единстве науки и в необходимости тесного взаимодействия её различных дисциплин. Он был врагом узкой специализации, дробления науки на бесчисленные изолированные ветви. Полон сарказма в его «Кибернетике» портрет узкого специалиста: «Он набит жаргоном своей специальной дисциплины и знает всю литературу по ней и все ее подразделы. Но всякий вопрос, сколько-нибудь выходящий за эти узкие пределы, такой ученый чаще всего будет рассматривать как нечто, относящееся к коллеге, который работает через три комнаты дальше по коридору. Более того, всякий интерес со своей стороны к подобному вопросу он будет считать непозволительным нарушением чужой тайны» («Кибернетика». М.: Сов. Радио, 1968, с. 44).

О широте интересов самого Винера свидетельствует его выступление перед публикой в роли романиста. Герой его романа – талантливый ученый – становится жертвой корыстных дельцов. Роман называется «Искуситель» (Wiener N. *The Tempter*, Random House. New York, 1956) и представляет собой современный вариант истории Фауста и Мефистофеля.

В том же 1948 году вышла в свет книга Клода Шеннона «Математическая теория информации» (Shannon C.-E. *A Mathematical Theory of Communication* // *Bell System Techn. J.* 1948. Vol. 27, № 3).

Деннис Габор, работая в Лондонском университете, сформулировал принципы голографии.

1958 Борис Павлович Белоусов сдал в печать заметку «Периодически действующая реакция и ее механизм». Выйдет она в сборнике рефератов по радиационной меди-

цине в 1959 году (поэтому оставим ее 2009 году). Заметка в три страницы. Описание эксперимента, который И.Р. Пригожин назвал самым важным экспериментальным событием ушедшего XX века.

Нобелевская премия в области физики присуждена П.А. Черенкову, И.Е. Тамму, И.М. Франку за открытие и объяснение эффекта Вавилова–Черенкова.

И еще одну дату я не могу не отметить, хотя она не круглая.

1963 Сорок пять лет назад появилась модель Эдварда Лоренца – одна из первых, а затем и основных моделей динамического хаоса. К сожалению, в апреле этого года Эдварда Лоренца не стало.

Конечно, вы уже поняли, что я немного схитрил с выбором дат, собрав близкие по моей жизни даты. Броуновское движение с любимым анализом размерностей. Уравнение Власова и излучение Вавилова–Черенкова – это почти вся сверхвысокочастотная электроника. Предельные циклы, периодические химические реакции, автоволны пламени, критерий Чирикова перекрытия резонансов, модель Лоренца – это современная теория колебаний и волн – нелинейная динамика. Кибернетика – один из вариантов общей теории динамических систем. Наконец, весь рассказ облечён в форму повествования о некоторых событиях в нелинейной науке и судьбах её создателей.

Я начинал строчками Валерия Канера и закончу строками этого физика-поэта:

«Прислушайтесь!
Это проходят года».

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 14.05.2008



ИЗМЕНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ УСРЕДНЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ШУМА И ВИБРАЦИЙ

П.С. Ланда

Обсуждается важная проблема вызванного шумом изменения эффективных параметров усредненных движений в нелинейных системах. Эта проблема давно известна в физике в связи с выводом уравнений движения тел с учетом столкновений с молекулами окружающей среды, причем не только в нелинейном случае, но и в линейном. Но многие исследователи неявно полагают, что она существенна только при переходе от микроскопических уравнений к макроскопическим. В то же время эта проблема часто проявляет себя в современной макроскопической физике. Мы рассмотрим здесь несколько примеров такого изменения.

Введение

Из статистической физики известно, что уравнения движения макроскопических тел являются необратимыми, тогда как исходные уравнения движения на молекулярном уровне обратимы – это гамильтоновы уравнения. Появление необратимости связано с усреднением исходных уравнений по случайным воздействиям со стороны окружающих молекул [1]. Однако теория Больцмана справедлива только для идеального газа, поскольку он учел только парные столкновения молекул. Более общее решение задачи было дано Ю.Л. Климонтовичем [2]. В частности, Ю.Л. Климонтович применил свою теорию для вычисления силы Стокса в уравнении Ланжевена для броуновской частицы, совершив усреднение по быстрым флуктуациям, обусловленным столкновениями с молекулами окружающего газа.

Ниже мы рассмотрим примеры, где изменение за счет шума параметров усредненных движений в макроскопических системах играет исключительно важную роль.

1. Турбулентная вязкость и парадокс Прандтля

Известно, что в турбулентном потоке сопротивление движению тел увеличивается. Обычно это объясняют так называемой турбулентной вязкостью, которая, как правило, существенно больше кинематической вязкости. Турбулентную вяз-

кость можно трактовать как некую эффективную вязкость, вызванную турбулентными пульсациями. Понятие турбулентной вязкости ν_{turb} впервые было введено Прандтлем [3], который предложил феноменологическую формулу $\nu_{\text{turb}} = a\delta\Delta U$, где δ – толщина пограничного слоя, ΔU перепад скорости течения на пограничном слое, a – некоторый коэффициент. Эта формула находится в хорошем согласии со многими экспериментальными результатами. Однако, как писал Ландау [4], из-за наличия произвольного коэффициента a другие выражения для турбулентной вязкости также могут дать хорошее согласие с экспериментом. Ландау предложил следующую формулу для турбулентной вязкости: $\nu_{\text{turb}} \sim \nu \text{Re}/\text{Re}_{\text{cr}}$, где Re_{cr} – критическое число Рейнольдса.

Используя понятие турбулентной вязкости, Прандтль [5] предложил качественное объяснение известного парадокса о том, что баржа (или плот), движущиеся по течению реки, обгоняют течение до такой степени, что могут управляться рулем. Объяснение Прандтля основывалось на том, что вокруг баржи (или плота) образуется пограничный слой, обладающий меньшей турбулентной вязкостью, чем течение окружающей воды, и потому оказывающий меньшее сопротивление. Относительно недавно А.С. Гиневский и А.В. Колесников [6] разработали теорию, позволяющую рассчитать выигрыш в скорости. Они получили, что скорость баржи (или плота) должна превышать скорость течения примерно в полтора раза. Отсюда следует, что турбулентные пульсации весьма заметно изменяют силу сопротивления воды.

2. Парадокс, связанный с кажущимся нарушением второго закона термодинамики

В 50-х годах прошлого столетия во многих физических журналах (см., например, [7–11]) развернулась большая дискуссия, связанная с вопросом о справедливости второго закона термодинамики в неравновесных системах. Авторы этой дискуссии рассматривали простейший электрический выпрямитель, состоящий из диода и конденсатора (рис. 1). В работах [8, 9] было показано, что в такой цепи конденсатор может заряжаться без внешнего источника, только за счет тепловых флуктуаций. Этот парадоксальный результат даже вызвал некоторые сомнения в справедливости второго закона термодинамики применительно к рассматриваемому явлению [11].

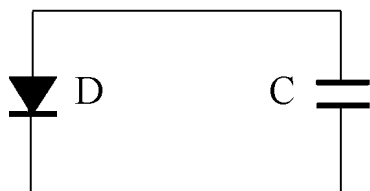


Рис. 1. Схематическое изображение электрического выпрямителя

Несколько раньше, а именно в 1950 году, Бриллюэн [7], рассматривая диод как нелинейное сопротивление, показал, что для справедливости второго закона термодинамики нужно ввести некоторый сдвиг вольт-амперной характеристики этого нелинейного сопротивления. Используя определенную модель диода, Стратонович [12] установил, что такой сдвиг,

действительно, существует, и рассчитал его. Этот сдвиг оказался как раз таким, который приводит к равенству нулю среднего значения напряжения на конденсаторе и среднего тока в цепи, не содержащей дополнительного источника. Ниже мы покажем, что это, действительно, так. Следует отметить, что подобная проблема, только не для электрического, а для механического выпрямителя (храповик с собачкой), была решена, по-видимому независимо, Фейнманом [13].

Рассмотрим простейшую цепочку, состоящую из диода D и конденсатора C (см. рис. 1). Напряжение на конденсаторе описывается следующим уравнением:

$$C\dot{V} + I(V) = 0, \quad (1)$$

где $I(V)$ – ток, текущий через диод, C – суммарная емкость диода и конденсатора.

Известно, что в состоянии теплового равновесия распределение вероятностей для напряжения V описывается формулой (см., например, [12])

$$w(V) = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{CV^2}{2kT}\right), \quad (2)$$

где k – постоянная Больцмана, T – температура.

Чтобы вычислить $I(V)$, мы, в соответствии с [12], рассмотрим вакуумный диод с двумя плоскопараллельными электродами, катодом и анодом. Известно, что в пространстве между электродами такого диода всегда имеется постоянный отрицательный заряд, создающий электрическое поле, которое можно описать потенциалом $U(x)$, где x – расстояние от катода. Качественное поведение функции $-eU(x)$, где $(-e)$ – заряд электрона, иллюстрирует рис. 2. Из рисунка видно, что на пути электронов имеется потенциальный барьер, высота которого равна максимальному значению функции $-U(x)$, которое мы обозначим $-U(x_0)$, где x_0 – значение x , соответствующее этому максимуму.

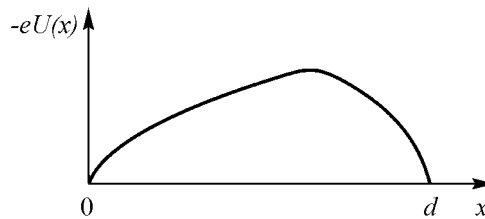


Рис. 2. Качественное поведение функции $-eU(x)$, где $(-e)$ – заряд электрона, $U(x)$ – разность потенциалов между электродами

Только те электроны перейдут через потенциальный барьер, энергия которых больше, чем $-eU(x)$. Остальные электроны вернуться обратно. Предполагая, что скорости электронов подчиняются максвелловскому распределению, легко показать, что относительное количество электронов, перешедших через потенциальный барьер, пропорционально $\exp(-eU(x_0)/(kT))$. Отсюда следует, что в отсутствие разности потенциалов между электродами токи, текущие через диод в противоположных направлениях, равны между собой и описываются выражением

$$I_+ = I_- = I_0 \exp\left(-\frac{eU(x_0)}{kT}\right), \quad (3)$$

где I_0 – некоторый коэффициент, имеющий размерность тока.

Если разность потенциалов между электродами отлична от нуля, то она должна изменяться во времени в силу изменения со временем заряда, индуцированного на электродах. Например, если электрон, вылетевший из катода, в момент времени t находится в точке x , где $0 < x < d$, d – расстояние между электродами, то заряд, индуцированный на аноде, и разность потенциалов равны

$$Q_1(x) = Q - \frac{ex}{d}, \quad V_1(x) = V - \frac{ex}{Cd}, \quad (4)$$

где $V = Q/C$.

Когда электрон, движущийся в противоположном направлении, находится в той же точке x , заряд, индуцированный на аноде, и разность потенциалов равны

$$Q_2(x) = Q + \frac{e(d-x)}{d}, \quad V_2(x) = V + \frac{e(d-x)}{Cd}. \quad (5)$$

Очевидно, что сила, действующая на электрон, в первом случае равна

$$F_1(x) = e \frac{\partial U(x)}{\partial x} + \frac{eV}{d} - \frac{e^2x}{Cd^2}, \quad (6)$$

а во втором случае

$$F_2(x) = e \frac{\partial U(x)}{\partial x} + \frac{eV}{d} + \frac{e^2(d-x)}{Cd^2}. \quad (7)$$

Точки максимума потенциала (x_1 и x_2) в первом и втором случае определяются уравнениями

$$F_1(x_1) = 0, \quad F_2(x_2) = 0. \quad (8)$$

Принимая во внимание, что $U(0) = U(d) = 0$, и интегрируя (6) по x от $x = 0$ до $x = x_1$ и (7) от $x = d$ до $x = x_2$, находим высоту потенциального барьера для электронов, движущихся в противоположных направлениях,

$$U_1 = -\frac{1}{e} \int_0^{x_1} F_1(x) dx = -U(x_1) - V \frac{x_1}{d} + \frac{e^2x_1^2}{2Cd^2}, \quad (9)$$

$$U_2 = -\frac{1}{e} \int_d^{x_2} F_2(x) dx = -U(x_2) + V \frac{d-x_2}{d} + \frac{e^2(d-x_2)^2}{2Cd^2}.$$

По аналогии с (3) находим выражения для тока, текущего от катода к аноду (I_+) и от анода к катоду (I_-),

$$I_+ = I_0 \exp\left(-\frac{eU_1}{kT}\right), \quad I_- = I_0 \exp\left(-\frac{eU_2}{kT}\right). \quad (10)$$

Суммарный ток равен

$$I(V) = I_0 \left[\exp\left(-\frac{eU_1}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{eU_2}{kT}\right) \right]. \quad (11)$$

Подставляя в (11) выражения (9), получаем

$$I(V) = I_0 \left[\exp \left(-\frac{eU(x_1)}{kT} + \frac{ex_1}{kTd} V - \frac{e^2 x_1^2}{2kTCd^2} \right) - \exp \left(-\frac{eU(x_2)}{kT} - \frac{e(d-x_2)}{kTd} V - \frac{e^2(d-x_2)^2}{2kTCd^2} \right) \right]. \quad (12)$$

Для простоты расчетов предположим, что силы F_1 и F_2 мало отличаются друг от друга и приближенно равны

$$F_1 \approx F_2 \approx e \frac{\partial U(x)}{\partial x}.$$

В этом случае точки максимума потенциалов x_1 и x_2 приблизительно совпадают, не зависят от V и приближенно равны x_0 . Тогда

$$I(V) \approx I_{00} \left[\exp \left(\frac{ex_0}{dkT} (V - V_{01}) \right) - \exp \left(-\frac{e(d-x_0)}{kTd} (V + V_{02}) \right) \right], \quad (13)$$

где $I_{00} = I_0 \exp(-eU(x_0)/(kT))$,

$$V_{01} = \frac{ex_0}{2Cd}, \quad V_{02} = \frac{e(d-x_0)}{2Cd}. \quad (14)$$

Из формулы (13) видно, что ток $I(V)$ обращается в нуль в точке

$$V = V_0 = \frac{x_0 V_{01} - (d-x_0)V_{02}}{d}, \quad (15)$$

то есть зависимость тока от разности потенциалов V не проходит через начало координат ($I(0) \neq 0$). Смещение отсутствует, только если $x_0 V_{01} = (d-x_0)V_{02}$. Но в этом случае рассматриваемая цепочка не выполняет функцию выпрямителя.

Вычисленное смещение вольт-амперной характеристики диода является именно той причиной, которая приводит к равенству нулю средних значений тока, текущего через диод, и напряжения на пластинах конденсатора, то есть к выполнению второго закона термодинамики. Действительно, принимая во внимание (2), мы получаем следующее выражение для среднего тока:

$$\begin{aligned} \langle I(V) \rangle &= I_{00} \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp \left(\frac{ex_0}{dkT} (V - V_{01}) \right) - \exp \left(-\frac{e(d-x_0)}{dkT} (V + V_{02}) \right) \right] \times \\ &\times \exp \left(-\frac{CV^2}{2kT} \right) dV = \exp \left[-\frac{ex_0}{dkT} \left(V_{01} - \frac{ex_0}{2Cd} \right) \right] - \\ &- \exp \left[-\frac{e(d-x_0)}{dkT} \left(V_{02} - \frac{e(d-x_0)}{2Cd} \right) \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Подставляя сюда формулы (14), получаем, что $\langle I(V) \rangle = 0$.

3. Перемещение легкой частицы в вязкой среде с пилообразным потенциалом под действием гармонической и случайной сил

В последние годы явление шумоиндуцированного перемещения броуновских частиц привлекает к себе значительное внимание многих исследователей, главным образом, в контексте различных биологических и химических проблем (см., например, [14–20]). Чаще всего рассмотрение этих проблем ограничивается случаем, когда движение частицы можно описать дифференциальным уравнением первого порядка вида

$$\dot{x} = -f(x) + \zeta(t) + \xi(t), \quad (17)$$

где $f(x)$ – периодическая функция x , обладающая некоторой асимметрией; $\zeta(t)$ – регулярная или случайная сила; $\xi(t)$ – белый шум, имитирующий тепловые флуктуации. Простейший вид функции $f(x)$ соответствует пилообразному потенциалу $U(x)$, показанному на рис. 3. В этом случае

$$f(x) = \begin{cases} a_1 & \text{для } nL < x < nL + x_1, \\ -a_2 & \text{для } nL - x_2 < x < nL, \end{cases} \quad (18)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $L = x_1 + x_2$ – период функции $f(x)$.

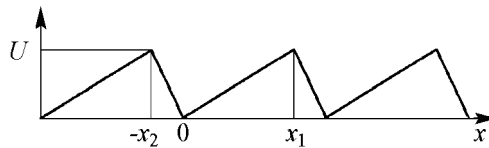


Рис. 3. Пример пилообразного потенциала

Ради простоты зададим силу $\zeta(t)$, изменяющейся по гармоническому закону

$$\zeta(t) = B \sin \omega t. \quad (19)$$

Обычно эта проблема решается посредством вычисления потока вероятности, исходя из уравнения Фоккера–Планка. Ниже эта задача рассмотрена с точки зрения определения средней силы $f(x)$ и показано, что в этой средней силе появляется постоянная составляющая, отсутствующая в исходной суммарной силе, действующей на частицу.

Усредняя уравнение (17) по статистическому ансамблю с учетом (19), получаем уравнение для средней скорости частицы $v(t) = \langle \dot{x} \rangle$

$$v(t) = -\langle f(x) \rangle + B \sin \omega t. \quad (20)$$

Усредняя далее (20) по времени, находим

$$\overline{v(t)} = -\overline{\langle f(x) \rangle}. \quad (21)$$

Чтобы вычислить $v(t)$ и $\langle f(x) \rangle$, запишем уравнение Фоккера–Планка, соответствующее уравнению Ланжевена (17),

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(f(x) - B \sin \omega t \right) w(x, t) + \frac{K}{2} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right). \quad (22)$$

Так как $f(x)$ является периодической функцией x , плотность вероятностей $w(x, t)$ также является периодической функцией x . Последнее позволяет решать уравнение (22) на интервале от $-x_2$ до x_1 .

Уравнение (22) удобно переписать в форме

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial G(x, t)}{\partial x}, \quad (23)$$

где поток вероятности $G(x, t)$ определяется по формуле

$$G(x, t) = - \left(\frac{K}{2} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \left(f(x) - B \sin \omega t \right) w(x, t) \right). \quad (24)$$

Интегрируя уравнение (24) по x от $-x_2$ до x_1 и принимая во внимание условия периодичности и нормировки для функции $w(x, t)$, находим

$$\langle f(x) \rangle = - \int_{-x_2}^{x_1} G(x, t) dx + B \sin \omega t. \quad (25)$$

Отсюда следует, что усредненная сила, в отличие от исходной силы $f(x)$, содержит как постоянную, так и переменную составляющие.

Чтобы найти $G(x, t)$, нужно решить уравнение (22). В большинстве опубликованных работ это уравнение решается в квазистатическом приближении, когда производной $\partial w / \partial t$ можно пренебречь. Очевидно, что это приближение справедливо для низких частот ω . В отличие от этих работ, не будем использовать квазистатическое приближение, но зато ограничим рассмотрение малыми амплитудами гармонической силы, то есть положим $B \ll 1$. Такой подход позволяет определить влияние частоты ω .

При указанном выше условии, наложенном на амплитуду B , можно искать решение уравнения (22) в виде ряда по B , ограничиваясь членами порядка не выше, чем B^2 :

$$w(x, t) = w_0(x) + w_1(x, t)B + w_2(x, t)B^2. \quad (26)$$

Подставляя (26) в уравнение (22), получаем уравнения для $w_0(x, t)$, $w_1(x, t)$ и $w_2(x, t)$:

$$\frac{K}{2} \frac{dw_0(x)}{dx} + f(x)w_0(x) = -G_0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(f(x)w_1(x, t) + \frac{K}{2} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial x} \right) + \frac{dw_0(x)}{dx} \sin \omega t &= 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(f(x)w_2(x, t) + \frac{K}{2} \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_1}{\partial x} \sin \omega t &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где G_0 – поток вероятности в нулевом приближении по B .

Задавая $w_1(x, t) = w_{1s}(x) \sin \omega t + w_{1c}(x) \cos \omega t$, $w_2(x, t) = w_{20}(x)$, получаем следующие уравнения для функций $w_{1s}(x)$, $w_{1c}(x)$ и $w_{20}(x)$:

$$\frac{K}{2} \frac{d^2 w_{1s}(x)}{dx^2} + \frac{d(f(x)w_{1s}(x))}{dx} + \omega w_{1c}(x) = \frac{dw_0}{dx}, \quad (29)$$

$$\frac{K}{2} \frac{d^2 w_{1c}(x)}{dx^2} + \frac{d(f(x)w_{1c}(x))}{dx} - \omega w_{1s}(x) = 0,$$

$$\frac{K}{2} \frac{dw_{20}(x)}{dx} + f(x)w_{20}(x) - \frac{w_{1s}(x)}{2} = -G_2, \quad (30)$$

где G_2 – поток вероятности во втором приближении по B .

Плотность вероятности $w(x, t)$ должна удовлетворять условиям непрерывности при $x = 0$, периодичности по x и нормировки. Эти условия приводят к следующим уравнениям:

$$w_0(0_-) = w_0(0_+), \quad w_0(-x_2) = w_0(x_1), \quad w_{1s}(0_-) = w_{1s}(0_+), \quad w_{1c}(0_-) = w_{1c}(0_+),$$

$$w_{1s}(-x_2) = w_{1s}(x_1), \quad w_{1c}(-x_2) = w_{1c}(x_1), \quad w_{20}(0_-) = w_{20}(0_+), \quad w_{20}(-x_2) = w_{20}(x_1),$$

$$\int_{-x_2}^{x_1} w_0(x) dx = 1, \quad \int_{-x_2}^{x_1} w_{1s}(x) dx = 0, \quad \int_{-x_2}^{x_1} w_{1c}(x) dx = 0, \quad \int_{-x_2}^{x_1} w_{20}(x) dx = 0. \quad (31)$$

Принимая во внимание (18), (31) и интегрируя уравнения (29) по x от $-\Delta$ до Δ , где $\Delta \rightarrow 0$, получаем условия разрыва производных для функций $w_{1s}(x)$ и $w_{1c}(x)$ в точке $x = 0$:

$$\left. \frac{dw_{1s}}{dx} \right|_{x=0_+} - \left. \frac{dw_{1s}}{dx} \right|_{x=0_-} = -\frac{2(a_1 + a_2)}{K} w_{1s}(0), \quad (32)$$

$$\left. \frac{dw_{1c}}{dx} \right|_{x=0_+} - \left. \frac{dw_{1c}}{dx} \right|_{x=0_-} = -\frac{2(a_1 + a_2)}{K} w_{1c}(0).$$

Интегрируя далее уравнения (29) по x от $-x_2$ до x_1 , находим соотношения между производными функций $w_{1s}(x)$ и $w_{1c}(x)$ в точках x_1 и $-x_2$:

$$\left. \frac{dw_{1s}}{dx} \right|_{x=x_1} - \left. \frac{dw_{1s}}{dx} \right|_{x=-x_2} = -\frac{2(a_1 + a_2)}{K} w_{1s}(x_1), \quad (33)$$

$$\left. \frac{dw_{1c}}{dx} \right|_{x=x_1} - \left. \frac{dw_{1c}}{dx} \right|_{x=-x_2} = -\frac{2(a_1 + a_2)}{K} w_{1c}(x_1).$$

Итак, чтобы вычислить $w(x, t)$, необходимо решить уравнения (27), (29) и (30) с граничными условиями (31), (32) и (33). Для функции $f(x)$, определяемой формулой (18), эти уравнения решаются точно. Общее решение уравнения (27) имеет вид

$$w_0(x) = \begin{cases} \left(C_0 + \frac{G_0}{a_1} \right) \exp\left(-\frac{2a_1x}{K}\right) - \frac{G_0}{a_1} & \text{для } 0 < x < x_1, \\ \left(C_0 - \frac{G_0}{a_2} \right) \exp\left(\frac{2a_2x}{K}\right) + \frac{G_0}{a_2} & \text{для } -x_2 < x < 0. \end{cases} \quad (34)$$

Из (31) следует, что $G_0 = 0$ и

$$C_0 = 2 \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \left[1 - \exp\left(-\frac{2U_0}{K}\right) \right]^{-1}, \quad (35)$$

где $U_0 = a_1 x_1 = a_2 x_2$ – высота потенциального барьера.

Общее решение уравнений (29) следующее:

$$w_{1s}(x) = \begin{cases} w_{1s}^{(1)}(x) & \text{для } 0 < x < x_1, \\ w_{1s}^{(2)}(x) & \text{для } -x_2 < x < 0, \end{cases} \quad (36)$$

$$w_{1c}(x) = \begin{cases} w_{1c}^{(1)}(x) & \text{для } 0 < x < x_1, \\ w_{1c}^{(2)}(x) & \text{для } -x_2 < x < 0, \end{cases}$$

где

$$w_{1s}^{(1)}(x) = -2\text{Im}[w_{11}(x)], \quad w_{1s}^{(2)}(x) = -2\text{Im}[w_{12}(x)], \quad (37)$$

$$w_{1c}^{(1)}(x) = 2\text{Re}[w_{11}(x)], \quad w_{1c}^{(2)}(x) = 2\text{Re}[w_{11}(x)],$$

$$w_{11}(x) = C_{11} \exp(k_{11}x) + C_{21} \exp(k_{21}x) - \frac{C_0 a_1}{\omega K} \exp\left(-\frac{2a_1x}{K}\right),$$

$$w_{12}(x) = C_{12} \exp(k_{12}x) + C_{22} \exp(k_{22}x) + \frac{C_0 a_2}{\omega K} \exp\left(\frac{2a_2x}{K}\right),$$

$$k_{11} = -\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 2i\omega K}}{K}, \quad k_{21} = -\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 2i\omega K}}{K},$$

$$k_{12} = \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 2i\omega K}}{K}, \quad k_{22} = \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 2i\omega K}}{K}.$$

Комплексные постоянные C_{11} , C_{21} , C_{12} и C_{22} находятся из условий (31), (32) и (33). Эти константы пропорциональны C_0 , и их можно записать в виде

$$\begin{aligned} C_{11} &= F_{11}(a_1, a_2, r_1, r_2, U_0/K)C_0, & C_{12} &= F_{12}(a_1, a_2, r_1, r_2, U_0/K)C_0, \\ C_{21} &= F_{21}(a_1, a_2, r_1, r_2, U_0/K)C_0, & C_{22} &= F_{22}(a_1, a_2, r_1, r_2, U_0/K)C_0, \end{aligned} \quad (38)$$

где F_{11} , F_{21} , F_{12} и F_{22} некоторые функции своих аргументов, имеющие довольно громоздкий вид.

Теперь остается найти общее решение уравнения (30). Оно может быть записано в виде

$$w_{20}(x) = \begin{cases} w_{20}^{(1)}(x) & \text{для } 0 < x < x_1, \\ w_{20}^{(2)}(x) & \text{для } -x_2 < x < 0, \end{cases} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} w_{20}^{(1)}(x) &= Q_1 \exp\left(-\frac{2a_1x}{K}\right) - \frac{G_2}{a_1} - \\ &\quad - 2\text{Im}\left(\frac{C_{11}}{Kk_{11} + 2a_1} \exp(k_{11}x) + \frac{C_{21}}{Kk_{21} + 2a_1} \exp(k_{21}x)\right), \\ w_{20}^{(2)}(x) &= Q_2 \exp\left(\frac{2a_2x}{K}\right) + \frac{G_2}{a_2} - \\ &\quad - 2\text{Im}\left(\frac{C_{12}}{Kk_{12} - 2a_2} \exp(k_{12}x) + \frac{C_{22}}{Kk_{22} - 2a_2} \exp(k_{22}x)\right). \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь G_2 – постоянная составляющая потока вероятности во втором приближении по B .

Из условий (31) получаем

$$\begin{aligned} \frac{G_2(a_1 + a_2)}{a_1 a_2} &= Q_1 - Q_2 - \\ &\quad - 2\text{Im}\left(\frac{C_{11}}{Kk_{11} + 2a_1} + \frac{C_{21}}{Kk_{21} + 2a_1} - \frac{C_{12}}{Kk_{12} - 2a_2} - \frac{C_{22}}{Kk_{22} - 2a_2}\right), \\ (Q_1 - Q_2) \exp\left(-\frac{2U_0}{K}\right) &- \frac{G_2}{a_1} - \frac{G_2}{a_2} - 2\text{Im}\left[\frac{C_{11} \exp(k_{11}x_1)}{Kk_{11} + 2a_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_{21} \exp(k_{21}x_1)}{Kk_{21} + 2a_1} - \frac{C_{12} \exp(-k_{12}x_2)}{Kk_{12} - 2a_2} - \frac{C_{22} \exp(-k_{22}x_2)}{Kk_{22} - 2a_2}\right] = 0, \\ \frac{K}{2} \left(\frac{Q_1}{a_1} + \frac{Q_2}{a_2}\right) &\left[1 - \exp\left(-\frac{2U_0}{K}\right)\right] + 2\text{Im}\left[\frac{C_{11}(1 - \exp(k_{11}x_1))}{(Kk_{11} + 2a_1)k_{11}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_{21}(1 - \exp(k_{21}x_1))}{(Kk_{21} + 2a_1)k_{21}} - \frac{C_{12}(1 - \exp(-k_{12}x_2))}{(Kk_{12} - 2a_2)k_{12}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_{22}(1 - \exp(-k_{22}x_2))}{(Kk_{22} - 2a_2)k_{22}}\right] - G_2 \left(\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

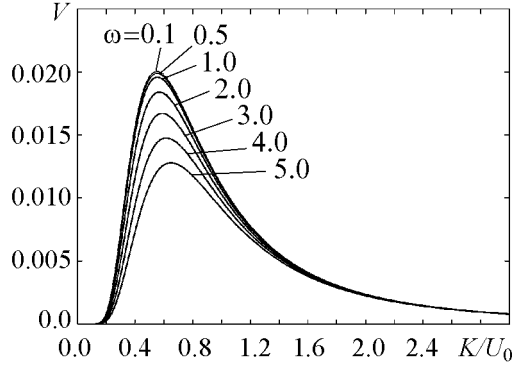


Рис. 4. Зависимости относительной средней скорости частицы от относительной интенсивности шума при $a_1 = 1.25$, $a_2 = 5$, $U_0 = 1$ и различных значений ω

Решая теперь уравнения (41), находим

$$\begin{aligned}
 G_2 = & -\frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{2U_0}{K}\right) \right]^{-1} \times \\
 & \times \operatorname{Im} \left\{ \frac{C_{11}}{Kk_{11} + 2a_1} \left[\exp(k_{11}x_1) - \exp\left(-\frac{2U_0}{K}\right) \right] + \right. \\
 & + \frac{C_{21}}{Kk_{21} + 2a_1} \left[\exp(k_{21}x_1) - \exp\left(-\frac{2U_0}{K}\right) \right] - \\
 & - \frac{C_{12}}{Kk_{12} - 2a_2} \left[\exp(-k_{12}x_2) - \exp\left(-\frac{2U_0}{K}\right) \right] - \\
 & \left. - \frac{C_{22}}{Kk_{22} - 2a_2} \left[\exp(-k_{22}x_2) - \exp\left(-\frac{2U_0}{K}\right) \right] \right\}. \quad (42)
 \end{aligned}$$

Примеры зависимостей относительной средней скорости частицы $V = \bar{v}/B^2 = G_2L$ от K/U_0 показаны на рис. 4 для $a_1 = 1.25$, $a_2 = 5$, $x_1 = 0.8$, $x_2 = 0.2$ и различных значений частоты ω . Сравнивая эти результаты с соответствующими результатами, полученными с использованием квазистатического приближения (см. [22]), видим, что они очень близки для частот ω , меньших или порядка 0.5. Для больших значений ω средняя скорость частицы зависит от частоты: с увеличением частоты средняя скорость уменьшается, а ее максимум сдвигается в направлении больших значений относительной интенсивности шума K/U_0 .

4. Стохастический резонанс в осцилляторе с большим затуханием

Явление стохастического резонанса чаще всего рассматривается на примере уравнения движения легкой частицы в простейшем бистабильном потенциальном

поле, возмущенном слабым гармоническим сигналом и белым шумом [21]:

$$\dot{x} + x^3 - x = A \cos \omega t + \xi(t), \quad (43)$$

где x – смещение частицы, $A \cos \omega t$ – периодический сигнал частоты ω , $\xi(t)$ – белый шум интенсивности K , то есть $\langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = K\delta(\tau)$.

Поскольку при использовании уравнения (43) трудно проследить влияние массы частицы и коэффициента затухания, рассмотрим уравнение более общего вида

$$\mu^2 \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + x^3 - x = A \cos \omega t + \xi(t), \quad (44)$$

где δ – коэффициент затухания; μ^2 – малый параметр, пропорциональный массе частицы.

Впервые результаты рассмотрения стохастического резонанса с точки зрения изменения эффективных параметров системы для усредненного движения, а не с принятой в литературе (см. [21]) точки зрения резонанса между частотой сигнала и средней частотой перескоков частицы из одного стационарного состояния в другое, были изложены в работах [22, 23]. Ниже дается обобщение результатов этих работ на уравнение (44).

Как следует из [24], спектральная плотность решений уравнений (43) и (44) содержит дискретные составляющие (нечетные гармоники частоты ω) и непрерывную составляющую, обусловленную шумом. Поэтому можем представить $x(t)$ в виде

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad (45)$$

где

$$s(t) = \langle x(t) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} \cos\left((2k+1)\omega t + \psi_{2k+1}\right), \quad \langle n(t) \rangle = 0. \quad (46)$$

Отношение B_1 к A будем называть коэффициентом передачи сигнала и обозначать $Q(K)$. Результаты расчетов показывают, что в определенном диапазоне интенсивностей шума коэффициент передачи в несколько раз больше единицы. Поэтому рассматриваемое явление предлагалось использовать для выделения слабых сигналов из шумов. При этом, однако, следует иметь в виду, что зависимость Q от K имеет максимум при некотором значении K , сильно зависящем от частоты ω (отсюда и возник термин «резонанс»). Однако в системе, описываемой уравнением первого порядка (см. (43)), резонанса в классическом смысле этого слова быть не может; тем более что зависимость Q от ω при фиксированном значении K является монотонно спадающей и не имеет максимума. Этот факт послужил одной из причин пересмотра механизма стохастического резонанса (см. [22, 23]).

Подставив (45) в уравнение (44), можно расщепить его на два уравнения, одно из которых описывает величины, усредненные по статистическому ансамблю, а другое – отклонения от этих величин. Следует заметить, что такое расщепление подобно разделению движений на быстрые и медленные, предложенное Блехманом [25] и использованное в [26–28] при рассмотрении вибрационного резонанса. Только, в отличие от [25], здесь разделяются движения на регулярные (усредненные) и случайные.

Так как в отсутствие сигнала (при $s = 0$) все нечетные моменты шума $m_j = \langle n^j \rangle$ равны нулю, в первом приближении по s можем положить $m_3 = as + b\dot{s}$, где a и b – неизвестные функции K и ω , которые будут найдены ниже. Принимая это во внимание, запишем уравнения для $s(t)$ и $n(t)$ в линейном приближении по s следующим образом:

$$\mu^2 \ddot{s} + (2\delta + b)\dot{s} + cs = A \cos \omega t, \quad (47)$$

$$\mu^2 \ddot{n} + 2\delta \dot{n} + n^3 - n + (3n^2 - 1 - c)s - b\dot{s} = \xi(t), \quad (48)$$

где эффективная жесткость

$$c = 3m_2 - 1 + a, \quad (49)$$

b – вызванная шумом добавка к коэффициенту затухания, $m_2 = \langle n^2 \rangle|_{s=0}$.

Чтобы рассчитать моменты m_j и найти a , b и c , используем уравнение Фоккера–Планка, соответствующее уравнению (48). При $\mu = 0$ указанное уравнение Фоккера–Планка является одномерным и решается относительно просто. Если же $\mu \neq 0$, оно является двумерным, что в общем случае значительно усложняет его решение. Однако при $\mu \ll 1$ для решения этого уравнения можно использовать метод, подобный предложенному в книге [24] для существенно более простого уравнения 2-го порядка с малым параметром μ .

По аналогии с [24] перепишем уравнение (48) в форме двух следующих уравнений Ланжевена:

$$\mu \dot{n} = y, \quad \mu \dot{y} = -\frac{2\delta}{\mu} y - n^3 + n - (3n^2 - 1 - c)s + b\dot{s} + \xi(t). \quad (50)$$

Этим уравнениям соответствует уравнение Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & -\frac{1}{\mu} \left(y \frac{\partial w}{\partial n} + \left[n - n^3 - (3n^2 - 1 - c)s + b\dot{s} \right] \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{1}{\mu^2} \left(2\delta \frac{\partial(yw)}{\partial y} + \frac{K}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (51)$$

Как и в работе [23], решение уравнения (51) удобно представить в форме суммы трех составляющих

$$w(n, y, t) = w_0(n, y) + w_1(n, y)s(t) + \frac{w_2(n, y)\dot{s}(t)}{\omega}. \quad (52)$$

Так как в линейном приближении $s(t)$ представляет собой гармонический сигнал частоты ω , то выполняется соотношение $\dot{s}(t) = -\omega^2 s(t)$. Принимая это во внимание, при подстановке (52) в уравнения (51), для функций $w_0(n, y)$, $w_1(n, y)$ и $w_2(n, y)$ получаем следующие уравнения:

$$\left(2\delta \frac{\partial(yw_0)}{\partial y} + \frac{K}{2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - \mu \left(y \frac{\partial w_0}{\partial n} - (n^3 - n) \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0, \quad (53)$$

$$2\delta \frac{\partial(yw_1)}{\partial y} + \frac{K}{2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - \mu \left(y \frac{\partial w_1}{\partial n} - (n^3 - n) \frac{\partial w_1}{\partial y} - \mu \omega w_2 \right) = -\mu(3n^2 - 1 - c) \frac{dw_0}{dy}, \quad (54)$$

$$2\delta \frac{\partial(yw_2)}{\partial y} + \frac{K}{2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} - \mu \left(y \frac{\partial w_2}{\partial n} - (n^3 - n) \frac{\partial w_2}{\partial y} + \mu \omega w_1 \right) = \mu \omega b \frac{dw_0}{dy}.$$

Как показано в [24], решение уравнения (53) может быть найдено путем приравнивания нулю каждой из скобок. В результате получаем

$$w_0(n, y) = C_0 \exp \left[-\frac{4\delta}{K} \left(\frac{y^2}{2} + u(n) \right) \right], \quad (55)$$

где $u(n) = n^4/4 - n^2/2$, C_0 – постоянная нормировки. Следует подчеркнуть, что $w_0(n, y)$ не зависит от параметра μ . Из (55) можно вычислить второй момент m_2 как функцию K и δ

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n^2 w_0(n, y) dy dn. \quad (56)$$

Чтобы найти неизвестные параметры c и b , необходимо рассчитать плотности вероятностей

$$v_{1,2}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{1,2}(n, y) dy. \quad (57)$$

Для этого используем метод разложения решения уравнений (54) по собственным функциям $Y_m(y)$ краевой задачи, описываемой уравнением

$$\frac{K}{4\delta} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{d(yY)}{dy} + \lambda Y = 0 \quad (58)$$

с граничными условиями $Y(\pm\infty) = 0$. Заметим, что каждое из уравнений (54) при $\mu = 0$ сводится к уравнению (58) при $\lambda = 0$.

Как показано в [22,24], собственные значения $\lambda_m = m$, а собственные функции $Y_m(y)$ выражаются через полиномы Эрмита $H_m(z)$:

$$Y_m(y) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\delta}{\pi K 2^m m!}} \exp \left(-\frac{2\delta y^2}{K} \right) H_m \left(y \sqrt{\frac{2\delta}{K}} \right). \quad (59)$$

Легко показать, что функции $Y_m(y)$ удовлетворяют следующим условиям ортогональности и нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_m(y) Y_l(y)}{Y_0(y)} dy = \delta_{ml}, \quad (60)$$

где δ_{ml} – символ Кронекера. Кроме того, следующие соотношения вытекают из

свойств полиномов Эрмита [22]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y_m(y) dy = \delta_{m0}, \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \frac{dY_m(y)}{dy} &= \sqrt{\frac{4\delta(m+1)}{K}} Y_{m+1}(y), \quad yY_m(y) = -\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\sqrt{m+1} Y_{m+1}(y) + \sqrt{m} Y_{m-1}(y) \right), \\ \frac{d(yY_m(y))}{dy} &= -\left(\sqrt{(m+1)(m+2)} Y_{m+2}(y) + mY_m(y) \right). \end{aligned} \quad (62)$$

Разложение решения уравнений (54) по собственным функциям $Y_m(y)$ может быть записано в форме

$$w_1(n, y) = \sum_{m=0}^{\infty} v_{1m}(n) Y_m(y), \quad w_2(n, y) = \sum_{m=0}^{\infty} v_{2m}(n) Y_m(y). \quad (63)$$

Интегрируя (63) по y и используя свойство (61), находим

$$v_1(n) = v_{10}(n), \quad v_2(n) = v_{20}(n). \quad (64)$$

Отсюда следует, что для решения нашей задачи достаточно вычислить функции $v_{10}(n)$ и $v_{20}(n)$.

Подставляя (63) в уравнения (54) и учитывая, что

$$w_0(n) = v_0(n) Y_0(y),$$

где

$$v_0(n) = C \exp\left(-\frac{4\delta u(n)}{K}\right), \quad C = \sqrt{\frac{\pi \mu K}{2\delta}} C_0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\sqrt{m+1} Y_{m+1}(y) + \sqrt{m} Y_{m-1}(y) \right) \frac{dv_{1m}}{dn} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{4\delta(m+1)}{K}} (n^3 - n) Y_{m+1}(y) v_{1m}(n) - \frac{2\delta}{\mu} m Y_m(y) v_{1m}(n) + \right. \\ \left. + \mu \omega Y_m(y) v_{2m}(n) \right) = -\sqrt{\frac{4\delta}{K}} (3n^2 - 1 - c) Y_1(y) v_0(n), \\ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\sqrt{m+1} Y_{m+1}(y) + \sqrt{m} Y_{m-1}(y) \right) \frac{dv_{2m}}{dn} + \right. \\ \left. + (n^3 - n) \sqrt{\frac{4\delta(m+1)}{K}} Y_{m+1}(y) v_{2m}(n) - \frac{2\delta}{\mu} m Y_m(y) v_{2m}(n) - \right. \\ \left. - \mu \omega Y_m(y) v_{1m}(n) \right) = \sqrt{\frac{4\delta}{K}} \omega b Y_1(y) v_0(n). \end{aligned} \quad (65)$$

Собирая члены, содержащие $Y_m(y)$ с одинаковыми индексами, и используя условие ортогональности, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{11}}{dn} + \mu \omega v_{20} = 0, \quad \sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{21}}{dn} - \mu \omega v_{10} = 0, \\
\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\frac{dv_{10}}{dn} + \sqrt{2} \frac{dv_{12}}{dn} \right) + \sqrt{\frac{4\delta}{K}} (n^3 - n) v_{10} - \frac{2\delta}{\mu} v_{11} + \mu \omega v_{21} = \\
= -\sqrt{\frac{4\delta}{K}} (3n^2 - 1 - c) v_0(n),
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\frac{dv_{20}}{dn} + \sqrt{2} \frac{dv_{22}}{dn} \right) + \sqrt{\frac{4\delta}{K}} (n^3 - n) v_{20} - \frac{2\delta}{\mu} v_{21} - \mu \omega v_{11} = \\
= \sqrt{\frac{4\delta}{K}} \omega b v_0(n),
\end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\sqrt{j} \frac{dv_{1,j-1}}{dn} + \sqrt{j+1} \frac{dv_{1,j+1}}{dn} \right) + \sqrt{\frac{4j\delta}{K}} (n^3 - n) v_{1,j-1} - \\
- \frac{2j\delta}{\mu} v_{1j} + \mu \omega v_{2j} = 0 \quad (j \geq 2),
\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\sqrt{j} \frac{dv_{2,j-1}}{dn} + \sqrt{j+1} \frac{dv_{2,j+1}}{dn} \right) + \sqrt{\frac{4j\delta}{K}} (n^3 - n) v_{2,j-1} - \\
- \frac{2j\delta}{\mu} v_{2j} - \mu \omega v_{1j} = 0 \quad (j \geq 2).
\end{aligned}$$

Разлагая далее v_{1m} и v_{2m} в ряд по μ

$$v_{1m} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k v_{1m}^{(k)}, \quad v_{2m} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k v_{2m}^{(k)} \tag{68}$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ , из уравнений (66) находим

• при μ^0 :

$$\omega v_{10}^{(0)} - \sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{21}^{(1)}}{dn} = 0, \quad \omega v_{20}^{(0)} + \sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{11}^{(1)}}{dn} = 0,$$

$$v_{11}^{(1)} = \frac{1}{2\delta} \left(\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{10}^{(0)}}{dn} + \sqrt{\frac{4\delta}{K}} (n^3 - n) v_{10}^{(0)} + \sqrt{\frac{4\delta}{K}} (3n^2 - 1 - c) v_0(n) \right), \tag{69}$$

$$v_{21}^{(1)} = \frac{1}{2\delta} \left(\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{20}^{(0)}}{dn} + \sqrt{\frac{4\delta}{K}} (n^3 - n) v_{20}^{(0)} - \sqrt{\frac{4\delta}{K}} \omega b v_0(n) \right);$$

• при μ^2 :

$$\begin{aligned}
\omega v_{10}^{(2)} - \sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{21}^{(3)}}{dn} &= 0, & \omega v_{20}^{(2)} + \sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{11}^{(3)}}{dn} &= 0, \\
v_{11}^{(3)} &= \frac{1}{2\delta} \left[\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\frac{dv_{10}^{(2)}}{dn} + \frac{4\delta}{K} (n^3 - n)v_{10}^{(2)} + \sqrt{2} \frac{dv_{12}^{(2)}}{dn} \right) + \omega v_{21}^{(1)} \right], & (70) \\
v_{21}^{(3)} &= \frac{1}{2\delta} \left[\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\frac{dv_{20}^{(2)}}{dn} + \frac{4\delta}{K} (n^3 - n)v_{20}^{(2)} + \sqrt{2} \frac{dv_{22}^{(2)}}{dn} \right) - \omega v_{11}^{(1)} \right], \\
v_{12}^{(2)} &= \frac{\sqrt{2}}{4\delta} \left(\sqrt{\frac{4\delta}{K}} (n^3 - n)v_{11}^{(1)} - \omega v_{20}^{(0)} \right), \\
v_{22}^{(2)} &= \frac{\sqrt{2}}{4\delta} \left(\sqrt{\frac{4\delta}{K}} (n^3 - n)v_{21}^{(1)} + \omega v_{10}^{(0)} \right); & (71)
\end{aligned}$$

• при μ^4 :

$$\begin{aligned}
\omega v_{10}^{(4)} - \sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{21}^{(5)}}{dn} &= 0, & \omega v_{20}^{(4)} + \sqrt{\frac{K}{4\delta}} \frac{dv_{11}^{(5)}}{dn} &= 0, \\
v_{11}^{(5)} &= \frac{1}{2\delta} \left[\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\frac{dv_{10}^{(4)}}{dn} + \frac{4\delta}{K} (n^3 - n)v_{10}^{(4)} + \sqrt{2} \frac{dv_{12}^{(4)}}{dn} \right) + \omega v_{21}^{(3)} \right], & (72) \\
v_{21}^{(5)} &= \frac{1}{2\delta} \left[\sqrt{\frac{K}{4\delta}} \left(\frac{dv_{20}^{(4)}}{dn} + \frac{4\delta}{K} (n^3 - n)v_{20}^{(4)} + \sqrt{2} \frac{dv_{22}^{(4)}}{dn} \right) - \omega v_{11}^{(3)} \right], \\
v_{12}^{(4)} &= \frac{1}{4\delta} \left[\sqrt{\frac{K}{2\delta}} \left(\frac{dv_{11}^{(3)}}{dn} + \frac{4\delta}{K} (n^3 - n)v_{11}^{(3)} + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{dv_{13}^{(3)}}{dn} \right) + \omega v_{22}^{(2)} \right], \\
v_{22}^{(4)} &= \frac{1}{4\delta} \left[\sqrt{\frac{K}{2\delta}} \left(\frac{dv_{21}^{(3)}}{dn} + \frac{4\delta}{K} (n^3 - n)v_{21}^{(3)} + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{dv_{23}^{(3)}}{dn} \right) - \omega v_{12}^{(2)} \right], \\
v_{13}^{(3)} &= \frac{1}{6\delta} \left[\sqrt{\frac{3K}{4\delta}} \left(\frac{dv_{12}^{(2)}}{dn} + \frac{4\delta}{K} (n^3 - n)v_{12}^{(2)} + \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{dv_{14}^{(2)}}{dn} \right) + \omega v_{23}^{(1)} \right], & (73) \\
v_{23}^{(3)} &= \frac{1}{6\delta} \left[\sqrt{\frac{3K}{4\delta}} \left(\frac{dv_{22}^{(2)}}{dn} + \frac{4\delta}{K} (n^3 - n)v_{22}^{(2)} + \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{dv_{24}^{(2)}}{dn} \right) - \omega v_{13}^{(1)} \right],
\end{aligned}$$

...

Здесь учтено, что

$$v_{10}^{(2k+1)} = 0, \quad v_{20}^{(2k+1)} = 0, \quad v_{11}^{(2k)} = 0, \quad v_{21}^{(2k)} = 0, \quad v_{1j}^{(l)} = v_{2j}^{(l)} = 0 \quad (j \geq 2l).$$

Уравнения (68), (70) и (72) удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_{10}^{(0)}}{dn^2} + \frac{4\delta}{K} \left((n^3 - n) \frac{dv_{10}^{(0)}}{dn} + (3n^2 - 1)v_{10}^{(0)} + 2\omega\delta v_{20}^{(0)} \right) = \\ = -\frac{4\delta}{K} \frac{d}{dn} \left((3n^2 - 1 - c)v_0(n) \right), \end{aligned} \quad (74)$$

$$\frac{d^2 v_{20}^{(0)}}{dn^2} + \frac{4\delta}{K} \left((n^3 - n) \frac{dv_{20}^{(0)}}{dn} + (3n^2 - 1)v_{20}^{(0)} - 2\omega\delta v_{10}^{(0)} \right) = \frac{4\delta}{K} \omega b \frac{dv_0(n)}{dn},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_{10}^{(2)}}{dn^2} + \frac{4\delta}{K} \left((n^3 - n) \frac{dv_{10}^{(2)}}{dn} + (3n^2 - 1)v_{10}^{(2)} + 2\omega\delta v_{20}^{(2)} \right) = \\ = - \left(\sqrt{2} \frac{d^2 v_{12}^{(2)}}{dn^2} + \omega^2 \frac{4\delta}{K} v_{10}^{(0)} \right), \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_{20}^{(2)}}{dn^2} + \frac{4\delta}{K} \left((n^3 - n) \frac{dv_{20}^{(2)}}{dn} + (3n^2 - 1)v_{20}^{(2)} - 2\omega\delta v_{10}^{(2)} \right) = \\ = - \left(\sqrt{2} \frac{d^2 v_{22}^{(2)}}{dn^2} + \omega^2 \frac{4\delta}{K} v_{20}^{(0)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_{10}^{(4)}}{dn^2} + \frac{4\delta}{K} \left((n^3 - n) \frac{dv_{10}^{(4)}}{dn} + (3n^2 - 1)v_{10}^{(4)} + 2\omega\delta v_{20}^{(4)} \right) = \\ = - \left(\sqrt{2} \frac{d^2 v_{12}^{(4)}}{dn^2} + \omega \sqrt{\frac{4\delta}{K}} \frac{dv_{21}^{(3)}}{dn} \right), \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_{20}^{(4)}}{dn^2} + \frac{4\delta}{K} \left((n^3 - n) \frac{dv_{20}^{(4)}}{dn} + (3n^2 - 1)v_{20}^{(4)} - 2\omega\delta v_{10}^{(4)} \right) = \\ = - \left(\sqrt{2} \frac{d^2 v_{22}^{(4)}}{dn^2} - \omega \sqrt{\frac{4\delta}{K}} \frac{dv_{11}^{(3)}}{dn} \right), \end{aligned}$$

где $v_{12}^{(2)}$, $v_{22}^{(2)}$, $v_{12}^{(4)}$ и $v_{22}^{(4)}$ описываются уравнениями (71), (73).

Так как система уравнений (74)–(76), (71), (73) является линейной, то ее общее решение представляет собой сумму общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы. Но, поскольку нас интересуют только решения в виде нечетных функций n , стремящиеся к нулю при $|n| \rightarrow \infty$, то в качестве решения однородной системы можно выбрать сумму только двух частных решений, оба из которых удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} v_{10}^{(0)}(0) = 0, \quad v_{20}^{(0)}(0) = 0, \quad v_{10}^{(2)}(0) = 0, \quad v_{20}^{(2)}(0) = 0, \quad v_{10}^{(4)}(0) = 0, \\ v_{20}^{(4)}(0) = 0, \quad v_{10}^{(2)}(n_0) = 0, \quad v_{20}^{(2)}(n_0) = 0, \quad v_{10}^{(4)}(n_0) = 0, \quad v_{20}^{(4)}(n_0) = 0, \\ v_{11}^{(1)}(0) = 0, \quad v_{21}^{(1)}(0) = 0, \quad v_{11}^{(3)}(0) = 0, \quad v_{21}^{(3)}(0) = 0, \end{aligned}$$

где n_0 – некоторое достаточно большое число (мы задавали $n_0 = 10$). Дополнительные условия для первого решения следующие:

$$\frac{dv_{10}^{(0)}}{dn}(n_0) = 10^{-6}, \quad \frac{dv_{20}^{(0)}}{dn}(n_0) = 0,$$

а для второго

$$\frac{dv_{10}^{(0)}}{dn}(n_0) = 0, \quad \frac{dv_{20}^{(0)}}{dn}(n_0) = 10^{-6}.$$

Таким образом, интересующее нас решение однородной системы, с точностью до членов порядка μ^4 , имеет вид

$$\begin{aligned} v_{10}^{(h)}(n) &= C_1 \left[v_{101}^{(0)}(n) + \mu^2 v_{101}^{(2)}(n) + \mu^4 v_{101}^{(4)}(n) \right] + C_2 \left[v_{102}^{(0)}(n) + \mu^2 v_{102}^{(2)}(n) + \mu^4 v_{102}^{(4)}(n) \right], \\ v_{20}^{(h)}(n) &= C_1 \left[v_{201}^{(0)}(n) + \mu^2 v_{201}^{(2)}(n) + \mu^4 v_{201}^{(4)}(n) \right] + C_2 \left[v_{202}^{(0)}(n) + \mu^2 v_{202}^{(2)}(n) + \mu^4 v_{202}^{(4)}(n) \right], \end{aligned} \quad (77)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, которые, наряду с неизвестными параметрами c и b , могут быть найдены из условий $\langle n \rangle = 0$ и $\langle n^3 \rangle = as + bs$, где $a = c + 1 - 3m_2$. К решению (77) следует добавить частное решение неоднородной системы уравнений (74)–(76), (71), (73), которое, в силу линейности, можно представить в виде суммы трех решений:

$$\begin{aligned} v_{10in}^{(0)}(n) &= v_{100}^{(0)}(n) + v_{10c}^{(0)}(n)c + v_{10b}^{(0)}(n)b, \quad v_{20in}^{(0)}(n) = v_{200}^{(0)}(n) + v_{20c}^{(0)}(n)c + v_{20b}^{(0)}(n)b, \\ v_{10in}^{(2)}(n) &= v_{100}^{(2)}(n) + v_{10c}^{(2)}(n)c + v_{10b}^{(2)}(n)b, \quad v_{20in}^{(2)}(n) = v_{200}^{(2)}(n) + v_{20c}^{(2)}(n)c + v_{20b}^{(2)}(n)b, \\ v_{10in}^{(4)}(n) &= v_{100}^{(4)}(n) + v_{10c}^{(4)}(n)c + v_{10b}^{(4)}(n)b, \quad v_{20in}^{(4)}(n) = v_{200}^{(4)}(n) + v_{20c}^{(4)}(n)c + v_{20b}^{(4)}(n)b. \end{aligned} \quad (78)$$

Из изложенного следует, что условия $\langle n \rangle = 0$ и $\langle n^3 \rangle = as + bs$ можно записать в виде следующих уравнений:

$$\begin{aligned} &\left(J_{101}^{(0)} + \mu^2 J_{101}^{(2)} + \mu^4 J_{101}^{(4)} \right) C_1 + \left(J_{102}^{(0)} + \mu^2 J_{102}^{(2)} + \mu^4 J_{102}^{(4)} \right) C_2 + J_{100}^{(0)} + \mu^2 J_{100}^{(2)} + \\ &+ \mu^4 J_{100}^{(4)} + \left(J_{10c}^{(0)} + \mu^2 J_{10c}^{(2)} + \mu^4 J_{10c}^{(4)} \right) c + \left(J_{10b}^{(0)} + \mu^2 J_{10b}^{(2)} + \mu^4 J_{10b}^{(4)} \right) b = 0, \\ &\left(J_{201}^{(0)} + \mu^2 J_{201}^{(2)} + \mu^4 J_{201}^{(4)} \right) C_1 + \left(J_{202}^{(0)} + \mu^2 J_{202}^{(2)} + \mu^4 J_{202}^{(4)} \right) C_2 + J_{200}^{(0)} + \mu^2 J_{200}^{(2)} + \\ &+ \mu^4 J_{200}^{(4)} + \left(J_{20c}^{(0)} + \mu^2 J_{20c}^{(2)} + \mu^4 J_{20c}^{(4)} \right) c + \left(J_{20b}^{(0)} + \mu^2 J_{20b}^{(2)} + \mu^4 J_{20b}^{(4)} \right) b = 0, \\ &\left(I_{101}^{(0)} + \mu^2 I_{101}^{(2)} + \mu^4 I_{101}^{(4)} \right) C_1 + \left(I_{102}^{(0)} + \mu^2 I_{102}^{(2)} + \mu^4 I_{102}^{(4)} \right) C_2 + I_{100}^{(0)} + \mu^2 I_{100}^{(2)} + \\ &+ \mu^4 I_{100}^{(4)} + \left(I_{10c}^{(0)} + \mu^2 I_{10c}^{(2)} + \mu^4 I_{10c}^{(4)} \right) c + \left(I_{10b}^{(0)} + \mu^2 I_{10b}^{(2)} + \mu^4 I_{10b}^{(4)} \right) b = a, \\ &\left(I_{201}^{(0)} + \mu^2 I_{201}^{(2)} + \mu^4 I_{201}^{(4)} \right) C_1 + \left(I_{202}^{(0)} + \mu^2 I_{202}^{(2)} + \mu^4 I_{202}^{(4)} \right) C_2 + I_{200}^{(0)} + \mu^2 I_{200}^{(2)} + \\ &+ \mu^4 I_{200}^{(4)} + \left(I_{20c}^{(0)} + \mu^2 I_{20c}^{(2)} + \mu^4 I_{20c}^{(4)} \right) c + \left(I_{20b}^{(0)} + \mu^2 I_{20b}^{(2)} + \mu^4 I_{20b}^{(4)} \right) b = \omega b, \end{aligned} \quad (79)$$

где

$$\begin{aligned}
 J_{101}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{101}^{(j)}(n) dn, & J_{201}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{201}^{(j)}(n) dn, & J_{102}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{102}^{(j)}(n) dn, \\
 J_{202}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{202}^{(j)}(n) dn, & J_{100}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{100}^{(j)}(n) dn, & J_{200}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{200}^{(j)}(n) dn, \\
 J_{10c}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{10c}^{(j)}(n) dn, & J_{20c}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{20c}^{(j)}(n) dn, & J_{10b}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{10b}^{(j)}(n) dn, \\
 J_{20b}^{(j)} &= \int_{-\infty}^{\infty} n v_{20b}^{(j)}(n) dn, & j &= 0, 2, 4.
 \end{aligned}$$

Уравнения (79) позволяют найти эффективную жесткость c и поправку к коэффициенту затухания b как функции K , ω , δ и μ .

Чтобы продемонстрировать влияние частоты сигнала, на рис. 5 показаны зависимости c , ωb и a от интенсивности шума K при $\mu = 0$, $\delta = 0.5$ и различных значениях ω . Влияние коэффициента затухания δ проиллюстрировано на рис. 6, где показаны те же зависимости при $\mu = 0$, $\omega = 0.1$ и $\delta = 0.25, 0.5, 1.0$. Из рисунка видно, что при увеличении δ все кривые смещаются в сторону больших значений интенсивности шума и максимальное значение поправки к коэффициенту затухания несколько уменьшается. Наконец, рис. 7 иллюстрирует влияние массы частицы (параметра μ). Этот рисунок построен для $\delta = 0.5$, $\omega = 0.1$. Видно, что зависимости параметров c , ωb и a от μ являются относительно слабыми. С увеличением μ все кривые смещаются в направлении больших значений интенсивности шума, минимальное значение c увеличивается, а максимальное значение ωb уменьшается.

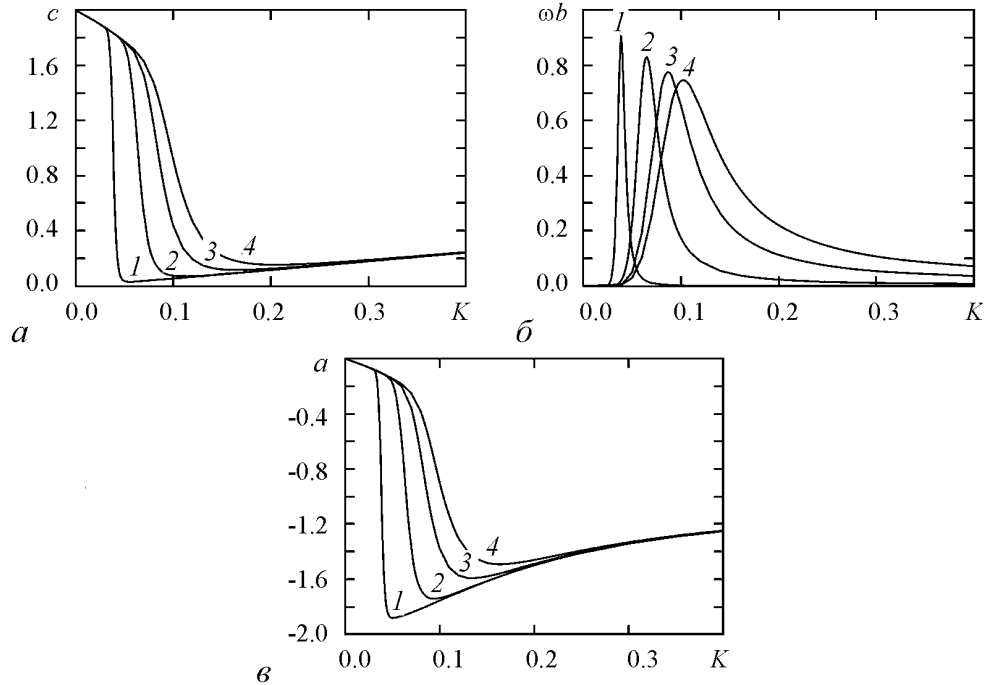


Рис. 5. Зависимости эффективных параметров c , ωb и a от интенсивности шума K при $\delta = 0.5$ для различных значений ω : 1 – 0.0001, 2 – 0.01, 3 – 0.05, 4 – 0.1

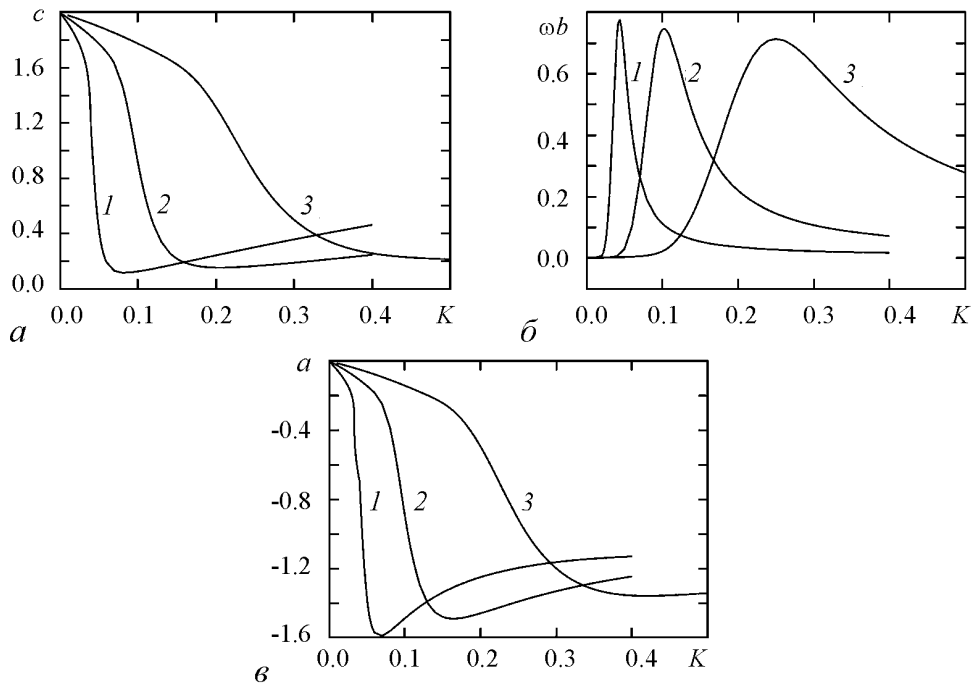


Рис. 6. Зависимости эффективных параметров c , ωb и a от интенсивности шума K при $\omega = 0.1$ и различных значениях коэффициента затухания δ : 1 – 0.25, 2 – 0.5, 3 – 1.0

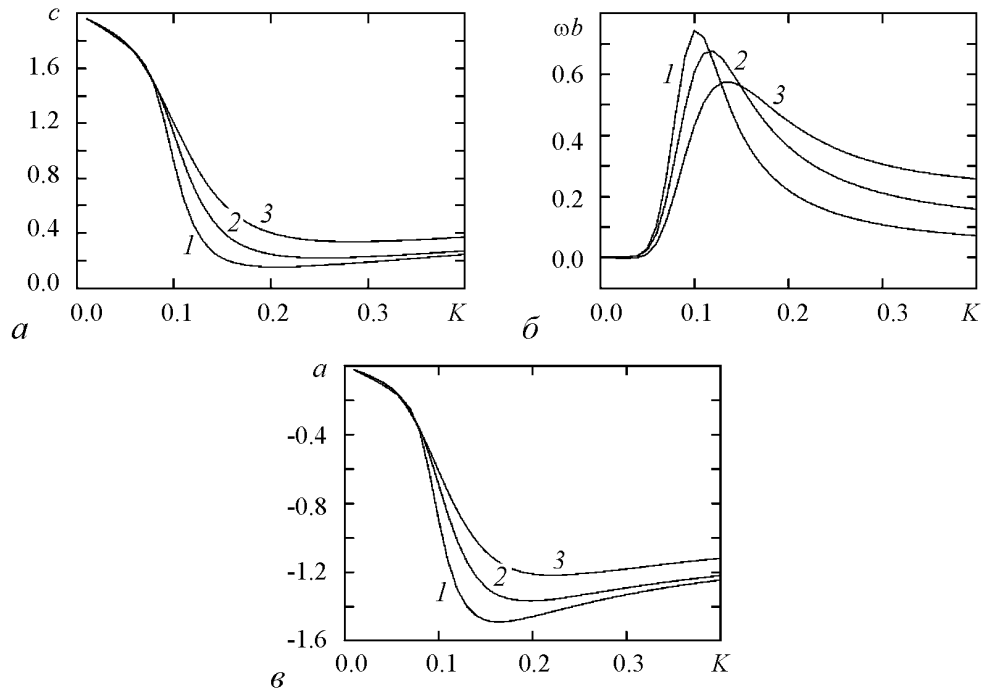


Рис. 7. Зависимости эффективных параметров c , ωb и a от интенсивности шума K при $\omega = 0.1$, $\delta = 0.5$ и различных значениях массы частицы μ : 1 – 0, 2 – 0.5, 3 – 1.0

Заключение

Итак, на ряде примеров показано, что шум может вызывать изменение эффективных параметров усредненных движений нелинейных систем. Найденные изменения являются как раз теми причинами, которые приводят к явлению кажущегося резонанса в такой системе с половинным числом степеней свободы, как передемпфированный осциллятор, к направленному смещению частиц в отсутствие направленной силы, к невозможности существования демона Максвелла и многим другим интересным явлениям.

Библиографический список

1. *Boltzmann L.* Лекции по теории газов. М.: Гостехиздат, 1956.
2. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1982.
3. *Prandtl L.* Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz // *Zs. angew. Math. Mech.* 1925. Vol. 5, № 2. P. 136.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
5. *Prandtl L.* Führer durch die Strömungslehre. 3 ed. / F. Vieweg. Braunschweig, 1949.
6. *Гиневский А.С., Колесников А.В.* Теория идеального плота // Доклады АН. 1980. Т. 251, № 2. С. 312.
7. *Brillouin L.* Can the rectifier become a thermodynamical demon // *Phys. Rev.* 1950. Vol. 78. P. 627.
8. *MacDonald D.K.C.* Brownian movement // *Phys. Rev.* 1957. Vol. 108. P. 541.
9. *Alkemade C.T.J.* On the problem of Brownian motion of nonlinear systems // *Physica.* 1958. Vol. 24. P. 1029.
10. *Van Kampen N.G.* Thermal fluctuations in a nonlinear system // *Phys. Rev.* 1958. Vol. 110. P. 319.
11. *Marek A.* A note to recent theories of Brownian motion in nonlinear systems // *Physica.* 1959. Vol. 25. P. 1358.
12. *Стратонович Р.Л.* О парадоксе в теории тепловых флуктуаций нелинейных сопротивлений // Вестник МГУ. 1960. № 4. С. 99.
13. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике // М.: Мир, 1965. Т. 4, гл. 46.
14. *Peskin C., Odell G., and Oster G.* // *Biophys. J.* 1993. Vol. 65. P. 316.
15. *Svoboda K., Schmidt C.F., Schnapp B.J. and Block S.M.* // *Nature.* 1993. Vol. 365. P. 721.
16. *Magnasco M.O.* Forced thermal ratchets // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71. P. 1477.
17. *Astumian R. Dean and Bier M.* Fluctuation driven ratchets: molecular motors // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 72. P. 1766.
18. *Doering C.R.* Randomly rattled ratchets // *Nuovo Cimento Soc. Ital. Fiz.* 1995. Vol. 17D. P. 685.
19. *Hänggi P. and Bartussek R.* // in *Nonlinear Physics and Complex Systems – Current Status and Future Trends*, Lect. Notes in Physics Vol. 476 / Ed. by J. Parisi, S.C. Müller, and W. Zimmermann. Berlin: Springer-Verlag, 1996. P. 294.
20. *Landa P.S.* Noise-induced transport of Brownian particles with consideration for their mass // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. P. 1325.

21. *Gammaitoni L.* // Rev. Mod. Phys. 1998. Vol. 70. P. 223.
22. *Landa P.S.* Regular and chaotic oscillations. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
23. *Ланда П.С.* Механизм стохастического резонанса // ДАН. 2004. Т. 399, № 4. С. 1.
24. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. Радио, 1961.
25. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
26. *Блехман И.И., Ланда П.С.* Сопряженные резонансы в нелинейных системах при двухчастотном воздействии. Виброиндуцированные бифуркации // Изв. вузов. ПНД. 2002. Т. 10, № 1-2. С. 44.
27. *Blekhman I.I. and Landa P.S.* Conjugate resonances and bifurcations in nonlinear systems under biharmonic excitation // Int. J. of Non-linear Mechanics. 2004. Vol. 39. P. 421.
28. *Блехман И.И., Ланда П.С.* Эффект сопряженности резонансов и бифуркаций при двухчастотном воздействии на маятник с вибрирующей осью подвеса // ДАН. 2004. Т. 395, № 2. С. 192.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию 17.12.2007

CHANGES IN THE EFFECTIVE PARAMETERS OF AVERAGED MOTIONS IN NONLINEAR SYSTEMS SUBJECT TO NOISE OR VIBRATION

P.S. Landa

An important problem of the change in the effective parameters of averaged motions in nonlinear systems is described. This problem is known in physics for a long time. It is concerned with the derivation of bodies motion equations taking into account the collisions with the molecules of the surrounding gas. Many researchers believe implicitly that this problem is essential only for the transfer from microscopic equations to macroscopic ones. However this problem reveals often itself in the present-day macroscopic physics. Below we give a number of the examples of such the change.



Ланда Полина Соломоновна – родилась в 1931 году в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 году. С 1956 года работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий научный сотрудник МГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор пяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», вышедшей в издательстве «Kluwer» (Голландия). Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика».
E-mail:landa@phys.msu.su



ТРАНЗИСТОРНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ ХАОСА МАЛОЙ МОЩНОСТИ

А.С. Дмитриев, Е.В. Ефремова, А.Ю. Никишов, А.И. Панас

Исследуются энергетические характеристики генераторов СВЧ-хаоса малой мощности. С этой целью рассматриваются свойства нескольких вариантов транзисторных генераторов. Анализируется потребление тока и мощности при генерации хаоса с требуемыми характеристиками и выявляются закономерности, показывающие соотношения между напряжением питания, потребляемым током и выходной мощностью на примере одного из генераторов. Проводится проектирование генератора в виде монолитной интегральной микросхемы на основе кремниво-германиевой технологии и приводятся оценки энергетических характеристик генератора.

Введение

Разработка и использование транзисторных генераторов хаоса СВЧ-диапазонов в СССР и России ведется с начала 1980-х годов [1–4]. Уже к середине 1980-х годов были созданы и успешно применялись транзисторные генераторы хаоса на микрополосковой технологии с выходными мощностями от десятков милливольт до ватта.

В конце 1990-х годов в связи с возникновением интереса к использованию хаотических колебаний в беспроводных коммуникационных системах потребовалось создать генераторы хаоса с выходной мощностью менее 10 мВт и малым потреблением. Такие характеристики определялись тем, что вновь создаваемые генераторы предназначались для использования, прежде всего, в нелицензируемых беспроводных сверхширокополосных системах связи, где накладываются достаточно жесткие ограничения на спектральную плотность мощности излучаемого сигнала, что естественно ведет и к ограничению в средней излучаемой мощности. Так, например, в спектральной маске, принятой в США [5], допускается использование сигналов со спектральной плотностью мощности не более -41.3 дБм/МГц в полосе от 3.1 ГГц до 10.6 ГГц. Таким образом, общая средняя излучаемая мощность не должна превышать -2.3 дБм, то есть менее 600 мкВт. Аналогичные ограничения на излучаемую спектральную плотность приняты в ЕС [6]. В решении Комитета по коммуникациям ЕС диапазон нелицензируемого применения сверхширокополосных сигналов существенно уже американского, а именно, 6.0–8.5 ГГц, поэтому максимальная средняя мощность излучения сверхширокополосных передатчиков не должна превышать -9.3 дБм, или около 100 мкВт.

Хаотические сигналы являются одним из типов сигналов, которые могут применяться в качестве носителя информации в сверхширокополосных средствах связи. Они рекомендованы стандартом IEEE 802.15.4a, вышедшим летом 2007 года [7], для применения в сверхширокополосных беспроводных персональных сетях связи (Ultra Wide Band Wireless Personal Area Networks, UWB WPAN). Поэтому разработка генераторов хаоса малой мощности является актуальной задачей.

Помимо обладания малой мощностью излучения, генераторы должны быть достаточно эффективными с точки зрения энергопотребления. Они должны формировать хаотический сигнал в заданной полосе частот и иметь незначительное внеполосное излучение. Кроме того, решения должны быть такими, чтобы в перспективе их можно было реализовать в виде интегральных микросхем на основе кремниевой или кремниево-германиевой технологий.

Следует отметить, что упоминавшиеся выше генераторы хаоса, созданные в 1980-е годы, были сконструированы в результате кропотливых экспериментальных исследований с применением компьютерных технологий в основном для качественного анализа бифуркационных явлений в генераторах на упрощенных моделях. Генераторы нового поколения так создавать было нельзя. Во-первых, это потребовало бы очень больших объемов экспериментальных исследований. Во-вторых, требовалось создать не один генератор с конкретными характеристиками, а генераторы, характеристики которых можно было бы по мере необходимости менять в достаточно широких пределах, в частности, это касается полосы частот генерации сигналов. В-третьих, прямой перенос результатов экспериментальной разработки на генератор в виде монолитной интегральной микросхемы невозможен по технологическим причинам. Наконец, в-четвертых, новое поколение генераторов нужно было реализовать не на микрополосковой технологии, а в виде устройств, использующих только сосредоточенные элементы.

В связи с перечисленными обстоятельствами, прежде всего, нужно было решить задачу перехода от экспериментальных методов разработки к компьютерной разработке генераторов с экспериментальной поддержкой. Затем разработать принципы создания транзисторных генераторов СВЧ-хаотических сигналов на основе элементов с сосредоточенными параметрами. После этого создать схемы генераторов, обеспечивающих генерацию хаоса с требуемыми спектральными характеристиками, реализовать эти схемы экспериментально, добиться соответствия между расчетными и экспериментальными результатами и после этого перейти к вопросам оптимизации генераторов по излучаемой мощности и потреблению.

Настоящая статья в основном посвящена решению последней задачи. Решение вопросов компьютерной разработки, принципов создания транзисторных генераторов СВЧ-хаоса, создания схем генераторов, обеспечивающих генерацию хаоса с требуемыми спектральными характеристиками, экспериментальной отработки создаваемых генераторов изложено в работах [8–17].

В разделах 1–4 рассматриваются несколько вариантов генераторов хаоса с учетом эволюции в процессе разработки и фиксируются их энергетические характеристики. В разделе 5 подробно исследуются энергетические характеристики одной из наиболее эффективных конструкций генератора хаоса, и производится ее оптимизация по энергетическим характеристикам.

Наконец, в последнем разделе 6 рассматривается возможность реализации ге-

нератора в виде монолитной микросхемы на основе биполярной кремниво-германиевой технологии. Кроме демонстрации возможности реализации генератора в виде интегральной микросхемы, этот раздел позволяет также спрогнозировать энергетические характеристики такого устройства и сравнить с характеристиками генератора на основе дискретных элементов, имеющих в продаже.

1. Генератор хаоса на основе схемы Колпитца

Первым генератором, который будет проанализирован с точки зрения энергетических характеристик, является генератор СВЧ-хаоса на основе емкостной трехточечной схемы (рис. 1). Это – схема, на которой впервые изучалась возможность компьютерной разработки транзисторного генератора СВЧ-хаоса на сосредоточенных

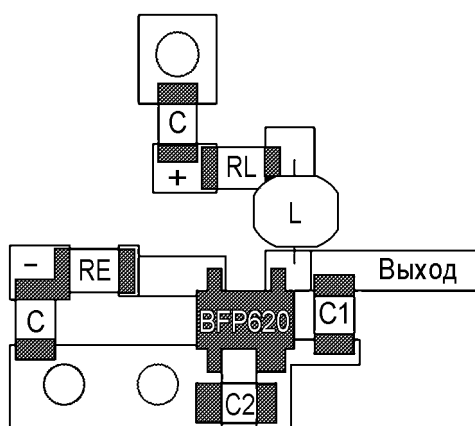


Рис. 1. Эскиз топологии генератора: $R_L = 30 \text{ Ом}$, $R_E = 400 \text{ Ом}$, $L = 3 \text{ нГн}$, $C_1 = 0.3 \text{ пФ}$, $C_2 = 0.53 \text{ пФ}$, транзистор BFP620

элементах [9]. Для этого на основе простой низкочастотной математической модели генератора и ее эквивалентной схемы в специализированном схемотехническом пакете ADS была разработана модель генератора, учитывающая реальные свойства как транзистора, так и пассивных элементов схемы. Результаты проведенных с помощью модели исследований показали, что, масштабируя соответствующим образом параметры структурных элементов генератора и выбирая подходящий активный элемент (кремниво-германиевый транзистор), можно получать в схемах на сосредоточенных элементах хаотические колебания с частотами вплоть до нескольких гигагерц.

Впоследствии в генераторе было учтено влияние подложки из материала FR-4. Он был реализован в виде экспериментального макета [14], и была изучена его работоспособность в диапазоне до 5 ГГц. В качестве активного элемента использовался транзистор BFP620.

Экспериментальное исследование режимов генератора показало, что в системе при напряжениях коллектор–база $V_C = 0\text{--}2 \text{ В}$ и напряжении эмиттер–база $V_E \approx 6 \text{ В}$ возникают многочастотные колебания, а также хаотические колебания. Однако последние неустойчивы и существуют в узких зонах изменения питающих напряжений транзистора. Спектр мощности одного из таких режимов приведен на рис. 2, а. Он занимает широкую полосу частот, но весьма неравномерен по диапазону. Второй режим работы генератора наблюдался при напряжении коллектор–база $V_C = 12 \text{ В}$ и небольших напряжениях эмиттер–база $V_E = 0.75\text{--}1.5 \text{ В}$ (рис. 2, б). В этом случае хаос в системе возникал практически сразу при открывании перехода эмиттер–база и устойчиво существовал при изменении напряжения на переходе в указанных пределах.

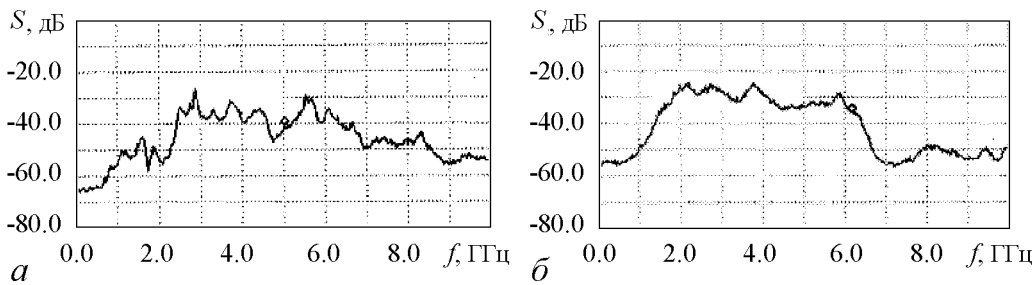


Рис. 2. Спектры хаотических колебаний генератора на трехточке: *a* – $V_C = 1$ В, $V_E = 6$ В; *б* – $V_C = 12$ В, $V_E = 1.5$ В, по уровню примерно 15 дБ ширина спектра примерно 5 ГГц (1.5–6.5 ГГц)

Генератор, работающий в первом режиме, давал на выходе (коллекторная цепь) до 1 мВт выходной мощности. КПД генератора при этом находилось в пределах 1%. При втором режиме работы генератора выходная мощность, выделяемая на нагрузке 50 Ом, достигала 4.5 мВт, а КПД генератора составлял примерно 2%.

Поскольку СВЧ-хаотические колебания, получаемые в генераторе на трехточке, довольно неустойчивы, и возможности управления их характеристиками весьма ограничены, были предприняты усилия по улучшению характеристик системы за счет повышения ее размерности.

2. Генератор хаоса с 2.5 степенями свободы

В работах [12, 13] была предложена и изучена модель нелинейной динамической системы с 2.5 степенями свободы, где в качестве активного элемента использовался биполярный транзистор. Электрическая схема системы, соответствующая модели, приведена на рис. 3.

Проведенное математическое моделирование показало, что в системе можно получить хаотические колебания, близкие по форме к полосовым колебаниям, что существенно для генераторов хаотических колебаний, применяемых в коммуникационных приложениях.

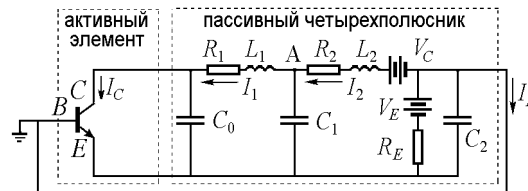


Рис. 3. Схема генератора с 2.5 степенями свободы

В работе [17] приведены результаты исследования динамики системы в пакете ADS, а также результаты экспериментального исследования динамики генератора, созданного на основе этой схемы в радиодиапазоне.

Генератор с 2.5 степенями свободы в СВЧ-диапазоне был предложен в работе [18]. В экспериментах с ним было установлено, что в динамике генератора можно выделить две области изменения управляющих напряжений, в которых система демонстрирует достаточно устойчивое хаотическое поведение. Первая область – это большие отрицательные смещения на переходе эмиттер–база транзистора ($V_E = 4–6$ В) и малые положительные на переходе коллектор–база ($V_C = 0–2$ В); вторая область наоборот – малые отрицательные напряжения на переходе эмиттер–база ($V_E = 1–2$ В) и высокие положительные напряжения на переходе база–коллектор ($V_C = 10–13$ В).

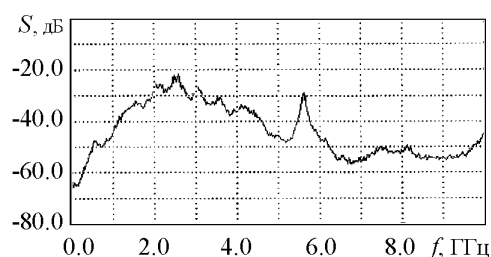


Рис. 4. Спектр мощности хаотического сигнала на выходе СВЧ-генератора хаоса при $V_C = 1.5$ В, $V_E = 5$ В

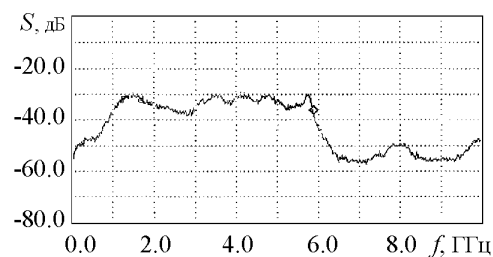


Рис. 5. Спектр мощности хаотического сигнала на выходе СВЧ-генератора хаоса при $V_C = 12.5$ В, $V_E = 1$ В

В режиме, спектр мощности которого показан на рис. 4, потребляемый ток составляет $J = 20$ мА, мощность выходного сигнала – $P = 4$ мВт. В таком режиме генератор имеет КПД примерно 3%. Спектр мощности колебаний состоит из двух частей. Основная мощность хаотических колебаний сосредоточена в диапазоне 1.5–3.5 ГГц. В районе частоты приблизительно 5.5 ГГц выделяется относительно узкий пик спектральной плотности сигнала, сформированный в окрестности второй гармоники базовой частоты 2.7 ГГц. Мощность выходного сигнала можно увеличить до 5 мВт при $V_C = 2$ В и $V_E = 6$ В. При одновременном изменении коллекторного и эмиттерного напряжения и сохранении между ними отношения V_E/V_C , примерно 3 В, можно оставаться в области хаоса, сохраняя при этом частотный диапазон спектра мощности. Так, при изменении V_E в пределах 3.5–7 В, а напряжения V_C в пределах 1–2.5 В, сохраняя в целом форму спектра мощности генерируемого хаотического сигнала, можно варьировать мощность сигнала в диапазоне 2–8 мВт.

При движении вниз по параметру V_E в динамике системы наблюдался гистерезис; генерация существовала вплоть до значений $V_E = 0.5$ В, проходя стадии от хаоса к многочастотному режиму и через обратные бифуркации удвоения к генерации одночастотных колебаний на частоте примерно 2.7 ГГц.

Спектр мощности сигнала, характерный для второго режима хаотических колебаний, приведен на рис. 5. В этом случае потребляемый ток $J \approx 20$ мА. Выходная мощность сигнала составляет 3 мВт и КПД $\approx 1.2\%$. Спектр сигнала при этом занимает полосу частот от 1 ГГц до 6 ГГц по уровню 10 дБ. Как видно из рис. 5, для такого режима работы транзистора системе свойственны сверхширокополосные хаотические колебания, неравномерность которых можно регулировать подстройкой напряжений питания.

В обоих рассмотренных режимах работы транзистора генерация хаотических колебаний была устойчивой в достаточно широком диапазоне изменения управляющих напряжений.

3. Генератор с одним напряжением питания

Выше был рассмотрен генератор хаотических колебаний на основе модели с 2.5 степенями свободы. На примере этого генератора была показана возможность получения в транзисторном генераторе СВЧ-хаотических сигналов в полосе частот от 1 до 6 ГГц. Однако хаотические колебания в этой системе реализуются при достаточно высоких напряжениях питания.

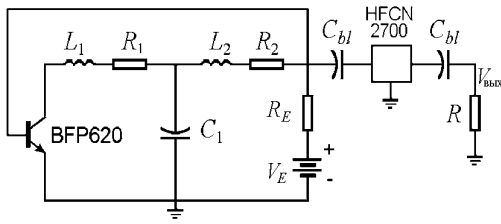


Рис. 6. Схема генератора с одним источником питания, $R = 50 \text{ Ом}$

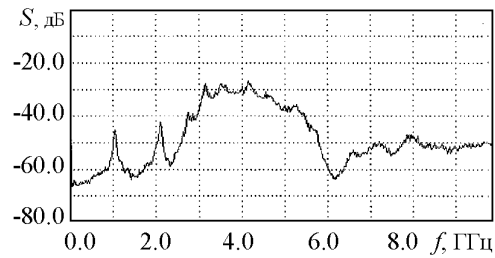


Рис. 7. Спектр мощности хаотического сигнала на выходе генератора при $V_E = 2 \text{ В}$

Для практического использования желательно иметь генераторы с уровнем напряжения питания до 2.0–2.5 В; в частности, только такие напряжения предпочтительны в случае реализации хаотических генераторов в виде монолитных интегральных схем. Так же желательно, чтобы генератор работал от единственного источника напряжения положительной полярности, так как использование дополнительного источника усложняет систему.

Для того, чтобы решить эти задачи, был предложен генератор, схема которого приведена на рис. 6. Эта схема отличается от схемы генератора с 2.5 степенями свободы тем, что из схемы удален источник питания в цепи коллектора. Соединение с «землей» перенесено с базы на эмиттер, а единственный источник питания подключен так, чтобы создавать положительную разность потенциалов между базой и эмиттером транзистора.

Как показало моделирование генератора в пакете ADS, на высоких частотах значительный вклад в динамику системы, вносят паразитные элементы корпуса транзистора, в частности, они определяют частоту генерации. Поэтому емкости C_0 и C_2 были удалены из схемы. Их роль выполняют паразитные емкости корпуса транзистора между базой и эмиттером, коллектором и эмиттером.

Наконец, для того, чтобы ограничить полосу частот генерируемого сигнала, в схему был введен фильтр высоких частот с частотой среза 2.7 ГГц. Следует отметить, что в схеме отсутствует развязка между генератором и фильтром на выходе генератора, поэтому фильтр играет двоякую роль: с одной стороны, он ограничивает полосу частот сигнала на выходе системы, а с другой, – является элементом цепи обратной связи генератора и вносит свой вклад в динамику генератора. В частности, в некоторых случаях добавление к системе фильтра приводит к возникновению хаотических режимов, хотя в отсутствие фильтра подобные режимы не наблюдались.

Плата макета, как и платы предыдущих макетов, выполнена на материале FR-4. В экспериментальном устройстве использовались компоненты со следующими номиналами: $L_1 = L_2 = 3.6 \text{ нГн}$, $C_1 = 0.1 \text{ пФ}$, $R_1 = R_2 = 1 \text{ Ом}$, $R_E = 15 \text{ Ом}$, $C_{bl} = 200 \text{ пФ}$. Напряжение питания генератора $V_E = 2 \text{ В}$.

Спектр мощности генератора с полосой генерации хаотического сигнала 3–5 ГГц представлен на рис. 7. Потребляемая мощность в этом режиме около 80 мВт, излучаемая мощность около 0.8 мВт, КПД порядка 1%.

4. Генератор с печатными индуктивностями

При работе с генератором, описанным в разделе 3, было выяснено, что верхняя граница частот генерируемого хаотического сигнала определяется номиналами индуктивностей в цепи обратной связи устройства. При этом использование индуктивностей минимального номинала из имеющихся на рынке (1 нГн) позволяет достичь частоты 5 ГГц в качестве верхней границы частот генерации. Для генерации хаоса на более высоких частотах необходимо было использовать какое-то альтернативное техническое решение. В качестве такого решения было предложено заменить чип индуктивности в генераторе на индуктивности в виде фрагментов металлизированных проводящих линий на поверхности платы. Величина индуктивностей таких фрагментов могла быть значительно меньше минимального номинала чипа индуктивностей. Использование печатной технологии позволяло обеспечить хорошую воспроизводимость номиналов и уменьшало количество навесных элементов в схеме. Меняя форму и размеры фрагментов, можно было обеспечить изменения номиналов индуктивностей в нужных пределах.

Моделирование в ADS генератора с единственным источником питания и печатными индуктивностями показало, что в генераторе с печатными индуктивностями не только реализуются сверхширокополосные хаотические колебания в диапазоне частот 3–5 ГГц и выше, но и увеличивается КПД по сравнению с генератором, в котором использовались чипы индуктивности.

На основании полученных результатов была синтезирована топология платы генератора и изготовлен макет генератора.

Разработанный генератор позволяет получать СВЧ-хаотические колебания в широком диапазоне изменения как центральной частоты, так и ширины полосы ге-

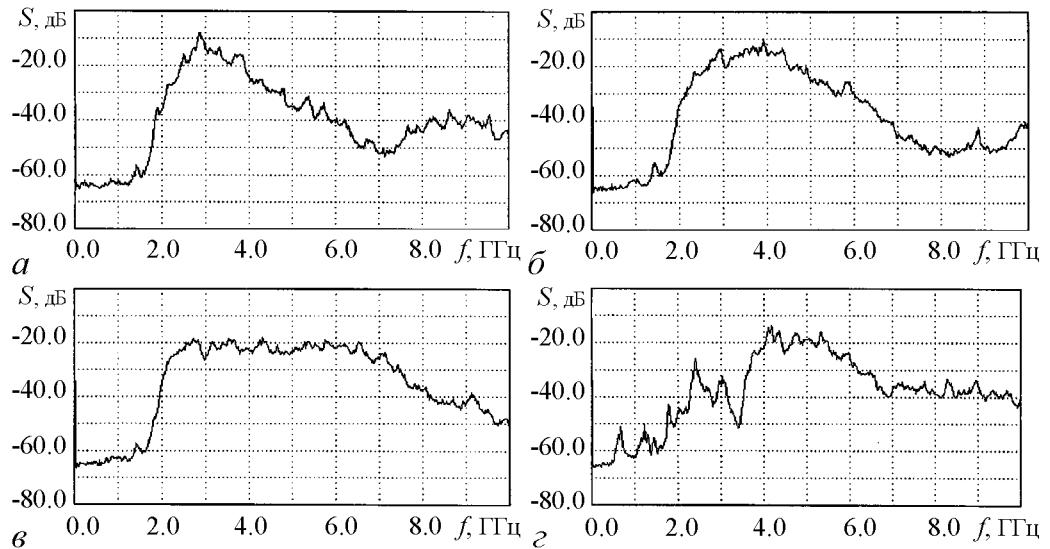


Рис. 8. Спектры мощности хаотического сигнала на выходе генератора при различных параметрах системы (l – длина проводящей линии, $l_{исх}$ – длина проводящей линии в исходном варианте): a – $C_1 = 0.5$ пФ, $V_E = 2$ В, $I = 40$ мА, $P_{вых} = 2$ мВт, КПД=2.5%; $б$ – $l = 0.75 \cdot l_{исх}$, $C_1 = 0.3$ пФ, $V_E = 2.4$ В, $I = 50$ мА, $P_{вых} = 2.5$ мВт, КПД=2.1%; $в$ – $l = 0.5 \cdot l_{исх}$, C_1 отсутствует, $V_E = 2.5$ В, $I = 60$ мА, $P_{вых} = 1.26$ мВт, КПД=0.8%; $г$ – фильтр HFCN-3500, C_1 отсутствует, $V_E = 2.8$ В, $I = 90$ мА, $P_{вых} = 1$ мВт, КПД=0.4%

нерируемого сигнала. Полоса генерируемого сигнала определяется номиналами используемых компонентов и длиной проводящей линии, играющей роль индуктивности. На рис. 8 приведены спектры мощности сигнала для ряда режимов, полученных при работе с данным генератором.

Как видно из рисунков, варьируя параметры системы, можно получать хаотические колебания с шириной полосы, по крайней мере, от 1.5 до 5.5 ГГц и с граничной верхней частотой приблизительно 8 ГГц.

Суммируя результаты, представленные в разделах 1–4, можно сделать вывод, что в процессе проведенных исследований были синтезированы простые структуры генераторов СВЧ-хаоса, разработаны способы управления спектральными характеристиками хаотических сигналов в них, созданы методики моделирования и проектирования таких устройств, на отечественной технологической базе реализован и экспериментально отработан ряд генераторов СВЧ-хаоса.

В следующем разделе будут проанализированы энергетические характеристики разработанных устройств.

5. Энергетические характеристики генераторов хаоса

Во всех описанных выше генераторах хаоса использовался один и тот же тип биполярного кремниево-германиевого транзистора BFP620. При этом в разных типах генераторов использовались разные номиналы напряжения питания, и достаточно сильно менялась потребляемая мощность. В данном разделе рассмотрим энергетические характеристики генераторов СВЧ-хаоса на примере генератора с печатными индуктивностями и проанализируем связь этих характеристик с бифуркационными диаграммами колебательных режимов.

На рис. 9 приведена двухпараметрическая диаграмма, отражающая зависимость режима работы генератора от приложенного напряжения питания и величины сопротивления в цепи питания для системы с фильтром HFCN-2700, $C_1 = 0.3$ пФ, $C_{bl} = 200$ пФ.

На диаграмме с помощью цвета обозначены различные динамические режимы системы. Область белого цвета соответствует отсутствию колебаний, области колебаний периода 1, 2 и 3 представлены различными оттенками серого и цифрой, соответствующей периоду колебаний, возникающих в данной области пространства параметров. Зоны хаоса обозначены на рисунке черным цветом. Узкие зоны серого цвета без цифр соответствуют многочастотным колебаниям.

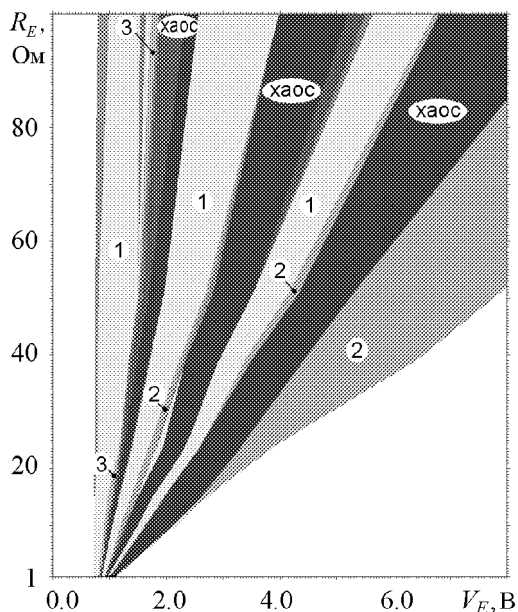


Рис. 9. Диаграмма зависимости динамического режима генератора от напряжения питания V_E и сопротивления в цепи питания R_E

В таблице приведены данные по энергетическим характеристикам системы для ряда хаотических режимов, представленных на диаграмме. В таблице используются следующие обозначения: R_E – сопротивление в цепи питания генератора, V_E – напряжение на источнике питания, I – потребляемый ток, $P_{вх}$ – потребляемая мощность, $P_{вых}$ – мощность сигнала на нагрузке, КПД – коэффициент полезного действия генератора.

Таблица

Энергетические характеристики генератора при различных параметрах цепи питания

R_E , Ом	V_E , В	I , мА	$P_{вх}$, мВт	$P_{вых}$, мВт	КПД, %
1.0	0.95	40.0	38.0	2.5	6.6
1.0	1.05	80.0	84.0	2.8	3.3
10.0	1.0	15.0	15.0	1.0	6.6
10.0	1.04	20.0	20.8	1.0	4.8
10.0	1.35	40.0	54.0	2.5	4.6
10.0	1.4	40.0	54.0	2.8	5.2
10.0	1.7	70.0	119.0	3.55	3.0
24.0	1.32	20.0	26.4	0.8	3.0
24.0	2.1	45.0	94.5	2.0	2.1
24.0	2.7	70.0	190.0	2.5	1.3
39.0	1.6	15.0	24.0	1.0	4.2
39.0	2.5	40.0	100.0	2.2	2.2
39.0	2.84	45.0	128.0	2.5	2.0
39.0	3.7	70.0	259.0	3.2	1.2
51.0	1.8	15.0	27.0	1.0	3.7
51.0	3.0	40.0	120.0	2.0	1.7
51.0	4.5	65.0	293.0	3.2	1.1
51.0	5.0	70.0	350.0	2.8	0.8
100.0	3.4	20.0	68.0	1.4	2.0
100.0	5.2	40.0	208.0	2.2	1.1
100.0	5.6	40.0	224.0	2.5	1.1
100.0	8.0	70.0	560.0	3.6	0.6
100.0	8.5	70.0	595.0	3.2	0.5
100.0	9.0	75.0	675.0	2.8	0.4

Из анализа таблицы и диаграммы видно, что в системе при данных параметрах существует три основные зоны хаотических колебаний. При этом каждая зона расширяется с ростом сопротивления в цепи питания генератора. Каждой зоне хаоса соответствует свое, слабо меняющееся внутри зоны, значение потребляемого тока. Так, слева направо первой зоне соответствует ток 15–20 мА, второй зоне 40–50 мА, третьей 70–80 мА. Аналогично, мощность сигнала на выходе генератора так же примерно одинакова для каждой зоны. В первой зоне мощность выходного сигнала 1 мВт, во второй зоне приблизительно 2–2.5 мВт, в третьей 3–3.5 мВт. При этом для каждой из зон при постоянном токе потребляемая мощность растет с ростом сопротивления R_E и соответствующем росте напряжения V_E . Таким образом, режимы с наименьшим потреблением мощности и наиболее высоким КПД наблюдаются при малых значениях сопротивления в цепи питания. Однако этим режимам соответствуют и наиболее узкие зоны хаоса.

На рис. 10 приведены спектры мощности сигнала на выходе системы при значениях параметров, соответствующих трем различным точкам на диаграмме рис. 9. Так, рис. 10, *а* соответствует случаю с низким сопротивлением в цепи питания и, соответственно, низким потреблением и высоким КПД ($R_E = 1 \text{ Ом}$, $V_E = 0.95 \text{ В}$); параметры, которым соответствует рис. 10, *б* лежат в наиболее широкой зоне хаоса ($R_E = 100 \text{ Ом}$, $V_E = 8.5 \text{ В}$); наконец рис. 10, *в* демонстрирует наиболее приемлемый режим ($R_E = 24 \text{ Ом}$, $V_E = 2.1 \text{ В}$), при котором потребление не слишком высоко, но режим достаточно устойчив к колебаниям параметров цепи питания генератора.

Из проведенного анализа следует, что выбор рабочего режима – это поиск компромисса между величиной приложенного напряжения, потребляемым током, общим потреблением энергии, устойчивостью хаотического режима к колебаниям напряжения питания генератора, величиной мощности генерируемого сигнала и КПД генератора.

Для того чтобы расширить полосу генерируемого хаотического сигнала, была предложена новая топологическая схема, в которой была уменьшена длина проводящей линии, заменяющей индуктивность.

На рис. 11 приведены спектр мощности сигнала на выходе генератора в хаотическом режиме. Энергетические характеристики генератора в этом режиме следующие: напряжение питания $V_E = 1.55 \text{ В}$, потребляемый ток I примерно 20 мА , мощность сигнала на выходе генератора $P_{\text{вых}} = 0.8 \text{ мВт}$. Как видно из рисунка, основная мощность генерируемого сигнала лежит в полосе $4\text{--}11.5 \text{ ГГц}$.

Устойчивая зона хаоса с достаточно гладким спектром при потребляемом токе I примерно 20 мА существует при напряжении питания V_E от 1.5 В до 1.6 В .

В этой системе также могут существовать несколько зон хаотических режимов с различными характерными токами. Управление потреблением и выходной мощностью может осуществляться путем подбора параметров цепи питания V_E и R_E .

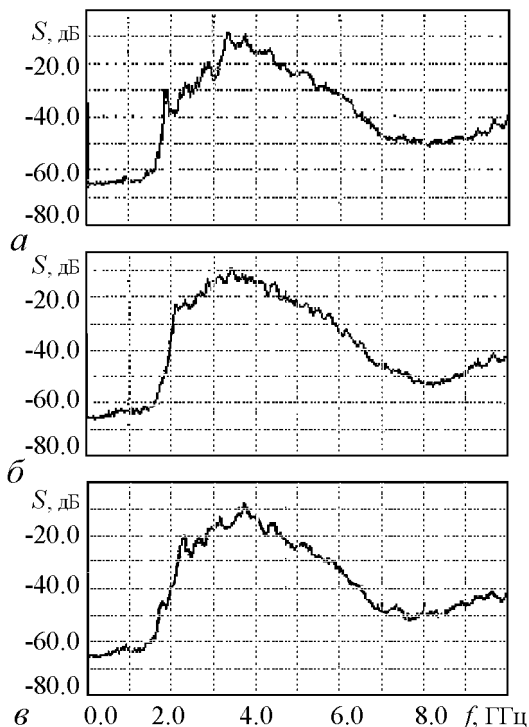


Рис. 10. Спектры мощности сигнала на выходе генератора при различных значениях параметров R_E и V_E : *а* – $R_E = 1 \text{ Ом}$, $V_E = 0.95 \text{ В}$; *б* – $R_E = 100 \text{ Ом}$, $V_E = 8.5 \text{ В}$; *в* – $R_E = 24 \text{ Ом}$, $V_E = 2.1 \text{ В}$

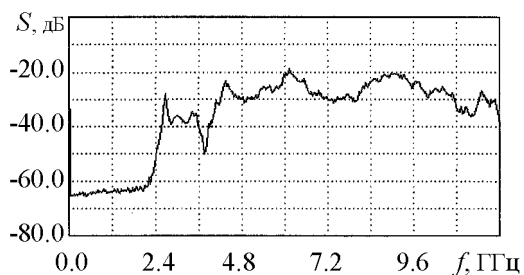


Рис. 11. Спектр мощности сигнала генератора при $V_E = 1.55 \text{ В}$, $I \approx 20 \text{ мА}$, $P = 0.8 \text{ мВт}$, КПД=2.6%

Дальнейшие возможности по улучшению характеристик генераторов хаоса, прежде всего, повышения технологичности, связаны с переходом на технологию интегральных монокристаллических микросхем. В следующем разделе кратко описан один из вариантов такого генератора и даны оценки его энергетических характеристик.

6. Генератор хаоса на основе Si-Ge технологии

В генераторах СВЧ-хаоса, рассматриваемых в данной статье, в качестве активного элемента используется биполярный кремниво-германиевый транзистор BFP620. Его граничная частота равна 70 ГГц, что намного превышает граничные частоты чисто кремниевых транзисторов. Эта характеристика является очень важной для возможности создания СВЧ-генераторов хаоса. Поэтому в качестве подходящей технологии при создании генераторов хаоса в виде монокристаллических интегральных микросхем, прежде всего, рассматривается кремниво-германиевая технология.

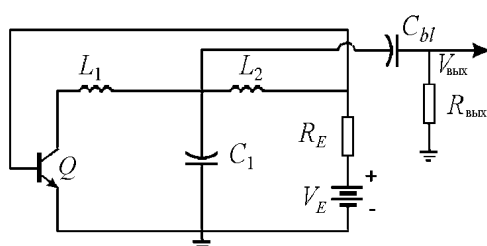


Рис. 12. Принципиальная схема генератора с биполярным транзистором на основе технологии Si-Ge 0.25 мкм

В рамках этой технологии было проведено проектирование генератора. Оно осуществлялось в пакете Cadence IC и состояло из нескольких этапов. Сначала была разработана электрическая схема устройства, затем проводилось ее моделирование, синтез топологии аналогового блока и верификация топологии. Этап верификации подразумевает контроль технических норм, проверку на соответствие топологии исходной схеме, а также экстракцию паразитных элементов.

Как правило, на этапе верификации выявляются некоторые недостатки топологии или схемотехники устройства, приводящие к сильному влиянию паразитных элементов. Поэтому цикл разработки повторяется, пока результаты моделирования не будут удовлетворительными.

В качестве базовой схемы генератора использовалась электрическая схема, представленная на рис. 12. Эта схема оказывается удобной для реализации на чипе в силу нескольких причин. Во-первых, малое количество элементов позволя-

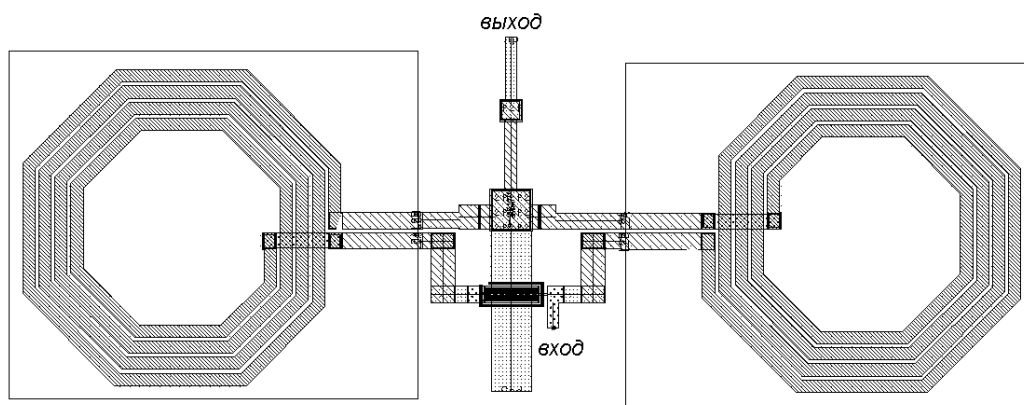


Рис. 13. Топологическая реализация генератора с биполярным транзистором на основе технологии Si-Ge 0.25 мкм

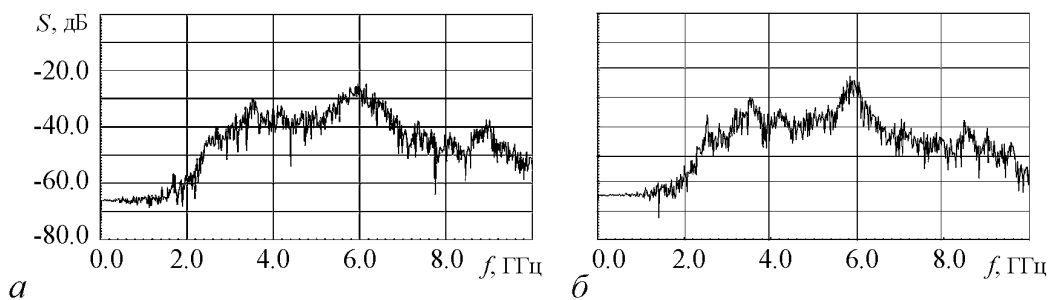


Рис. 14. Спектр мощности выходного сигнала генератора при напряжении питания 1.3 В: *a* – без учета влияния паразитных элементов топологии; *б* – с учетом влияния паразитных элементов топологии

ет избежать большого числа длинных контактных дорожек в топологии, что резко уменьшает вероятность негативного влияния паразитных сопротивлений и емкостей в микросхеме, которые подобные дорожки порождают. Во-вторых, данная схема позволяет разработать центрально симметричную топологию устройства (рис. 13), что снижает влияние негативных эффектов, возникающих при производстве и способных вывести устройство из заданного режима функционирования. И наконец, при данной конфигурации топологии генератора ее площадь оказывается менее 1 мм^2 .

Следует отметить, что все используемые в генераторе элементы не являются идеальными по своей сути, а описываются при схемотехническом моделировании некоторыми эквивалентными схемами, которые, помимо номинала самого элемента при определенной температуре, также учитывают сопротивления и емкости, вносящие потери, связанные с влиянием на элемент подложки скин-эффектов, а также вихревых токов. То есть на разных частотах номиналы элементов оказываются, вообще говоря, различными, что существенно затрудняет разработку устройства.

Поэтому подбор номиналов элементов электрической схемы генератора осуществлялся на основе анализа бифуркационных диаграмм колебательных режимов устройства. В процессе этого исследования был выбран наиболее подходящий режим генерации сверхширокополосного хаоса. Он реализуется при напряжении питания 1.3 В.

На рис. 14, *a* представлен спектр мощности выходного сигнала, получающийся при моделировании генератора без учета влияния паразитных эффектов топологии, а на рис. 14, *б* – спектр мощности, получающийся при моделировании работы генератора с учетом влияния всех паразитных емкостных и резистивных структур. Как видно из сравнения графиков, паразитные структуры несколько искажают спектр мощности, однако, не выводят генератор из рабочего хаотического режима. При внешней нагрузке 50 Ом в нем обеспечивается генерация хаотического сигнала в диапазоне частот 3–7 ГГц с выходной мощностью 0.26 мВт. При этом потребляемая мощность составляет 18 мВт, а КПД $\approx 1.4\%$.

Заключение

В статье исследована энергетическая эффективность генераторов СВЧ-хаоса малой мощности. С этой целью рассмотрены характеристики нескольких вариантов транзисторных генераторов. Затем на основе двухпараметрических диаграмм

режимов работы устройств проанализированы потребления тока и мощности при генерации хаоса с требуемыми характеристиками и выявлены закономерности, показывающие соотношения между напряжением питания, потребляемым током и выходной мощностью генераторов. Наконец, проведено предварительное проектирование генератора в виде монолитной интегральной микросхемы на основе кремниевогерманиевой технологии и получены оценки энергетических характеристик для транзисторных генераторов СВЧ-хаоса.

Полученные результаты подтверждают достаточно высокие характеристики существующих и разрабатываемых устройств, что подтверждается также их успешным использованием в экспериментальных и серийных сверхширокополосных прямохаотических приемопередатчиках.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-07-00298а) и аналитической ведомственной целевой программы «Развитие потенциала высшей школы» на 2006–2008 гг. Минобрнауки.

Библиографический список

1. Кислов В.Я. Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 10. С. 1783.
2. Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос. Новый носитель информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
3. Ефремова Е.В. Генераторы хаотических колебаний радио и СВЧ-диапазона // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 1. С. 17.
4. Иванов В.П. Сверхширокополосные генераторы шума и их практическое применение // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 1. С. 37.
5. Revision of Part 15 of the Commission's Rules Regarding Ultra-Wideband Transmission Systems, First Report and Order. Federal Communications Commission (FCC), ET Docket 98-153, FCC 02-48; Adopted: February 14, 2002; Released: April 22, 2002.
6. Radio Spectrum Committee working document, Brussels, 23 November, 2006.
7. IEEE Standard for Information technology. Telecommunications and information exchange between systems. Local and metropolitan area networks. Specific requirements. Part 15.4: Wireless Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications for Low-Rate Wireless Personal Area Networks (WPANs); Amendment 1: Add Alternate PHYs, 2007.
8. Максимов Н.А., Панас А.И. Однотранзисторный генератор полосовых хаотических сигналов радиодиапазона // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 2000. № 11. С. 61.
9. Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Хилинский А.Д. Принципы компьютерного моделирования транзисторных генераторов хаоса в пакете ADS (Advanced Design System) // Препринт №5 (633). 2003. ИРЭ РАН.
10. Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А. Управление огибающей спектра

- мощности в однотранзисторном генераторе хаотических колебаний // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49. № 2. С. 222.
11. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В.* Транзисторные генераторы хаоса с заданной формой спектра мощности колебаний // Радиотехника. 2005. № 8. С. 67.
 12. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Кузьмин Л.В.* Генерация последовательности хаотических импульсов при воздействии периодического сигнала на динамическую систему // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 22. С. 29.
 13. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Кузьмин Л.В., Атанов Н.В.* Генерация потока хаотических импульсов в динамической системе с внешним (периодическим) воздействием // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 5. С. 593.
 14. *Максимов Н.А.* Сверхширокополосный генератор хаоса СВЧ-диапазона на сосредоточенных элементах // Труды Всероссийской конф. «Сверхширокополосные сигналы в радиолокации, связи и акустике (СРСА-2006)». 4–7 июля, 2006, Муром, Россия. С. 154.
 15. *Атанов Н.В., Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А.* Формирование хаотических радиоимпульсов в генераторе с внешним периодическим воздействием // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 15. С. 1.
 16. *Атанов Н.В., Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Кузьмин Л.В.* Неавтономный генератор хаотических радиоимпульсов // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 12. С. 1454.
 17. *Ефремова Е.В., Атанов Н.В., Дмитриев Ю.А.* Генератор хаотических колебаний радиодиапазона на основе автоколебательной системы с 2.5 степенями свободы // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 1. С. 23.
 18. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Григорьев Е.В.* Генератор хаотических колебаний сверхвысокочастотного диапазона на основе автоколебательной системы с 2.5 степенями свободы // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 10. С. 1232.

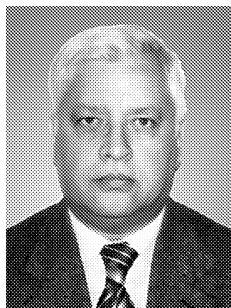
*Институт радиотехники
и электроники РАН
Московский физико-технический
институт*

Поступила в редакцию 9.04.2008

LOW-POWER CHAOTIC TRANSISTOR GENERATORS

A.S. Dmitriev, E.V. Efremova, A.Yu. Nikishov, A.I. Panas

Power characteristics of low-power microwave chaotic generators are investigated. Power characteristics of several variants of transistor generators are discussed. Current and power consumption necessary for generation of chaos with preassigned characteristics is analyzed, relationships between supply voltage, current draw and output signal power are shown on example of one of the generators. SiGe monolithic IC generator is designed and power characteristics of the generator are estimated.



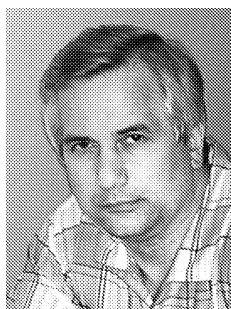
Дмитриев Александр Сергеевич – родился в 1948 году. Окончил Московский физико-технический институт (1971). Кандидат физико-математических наук (1974), доктор физико-математических наук (1988), профессор. Зав. отделом Института радиотехники и электроники РАН. Дважды Лауреат премии Совета Министров СССР (1984 и 1989). Область научных интересов – теория динамического хаоса, информационные технологии на основе хаотической динамики. Автор более 170 научных трудов, в том числе 2 монографий.



Ефремова Елена Валериевна – родилась в 1977 году. Окончила Московский физико-технический институт (2000). Кандидат физико-математических наук (2003), научный сотрудник ИРЭ РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика, электроника СВЧ, информационные и коммуникационные технологии на основе динамического хаоса. Автор более 40 научных публикаций.



Никишов Артем Юрьевич – родился в 1983 году. Окончил Московский физико-технический институт (2007). Аспирант Московского физико-технического института. Область научных интересов: генерация хаотических сигналов, проектирование специальных интегральных микросхем. Имеет 5 научных публикаций.



Панас Андрей Иванович – родился в 1955 году. Окончил Московский энергетический институт (1978). Кандидат физико-математических наук (1988), доктор физико-математических наук (2001). Директор Фрязинского отделения Института радиотехники и электроники РАН. Лауреат премии Ленинского комсомола (1987). Область научных интересов – радиофизические системы с хаотической динамикой, электронные устройства СВЧ. Автор более 120 научных работ.



СТАЦИОНАРНЫЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СТРУКТУРЫ АКТИВНОСТИ В ДВУМЕРНОМ АНСАМБЛЕ МОДЕЛЬНЫХ НЕЙРОНОВ ФИТЦХЬЮ–НАГУМО С ОСЦИЛЛЯТОРНЫМ ПОРОГОМ

А.С. Дмитричев, В.И. Некоркин

В работе проведено исследование пространственно-временной динамики двумерного ансамбля электрически связанных модельных нейронов ФитцХью–Нагумо с осцилляторным порогом. Показано, что в такой системе возможно формирование и распространение стационарных пространственно локализованных структур активности. Структуры могут иметь вид как отдельных локализованных образований, так и связанных состояний, состоящих из нескольких таких образований. Изучены основные характеристики структур – области существования, геометрические размеры и скорость распространения. Исследованы процессы взаимодействия структур. Дано объяснение существования и устойчивости локализованных структур в терминах траекторий в многомерном фазовом пространстве, ассоциирующимся с исследуемым ансамблем.

Введение

Нейронные системы представляют собой ансамбли, состоящие, как правило, из большого числа взаимодействующих между собой через синаптические связи нервных клеток – нейронов. Например, по оценкам нейрофизиологов головной мозг состоит приблизительно из 10^{11} нервных клеток, каждая из которых в среднем может образовывать от 10^3 до 10^5 связей с другими клетками. Несмотря на сложность, нейронные системы обладают удивительным свойством – способностью формировать пространственно локализованные структуры активности, представляющие уединенные группы нейронов в состоянии одновременной генерации потенциалов действия (рис. 1, *a*). При этом соседние, не входящие в структуру, нейроны демонстрируют состояние относительного покоя. Локализованные структуры могут не только возникать в определенных частях нейронного ансамбля, то есть иметь определенную пространственную локализацию, но и распространяться после образования как единое целое. В частности, такие структуры активности были зарегистрированы в ансамбле нейронов нижних олив оливо-мозжечковой цепи [1] и системе краткосрочной памяти [2], в срезах различных областей неокоры крыс [3,4], а также при некоторых формах патологических расстройств [5,6] и др.

Заметим, что локализованные структуры типичны не только для нейронных систем, но и для многих физических и химических систем. Экспериментально ло-

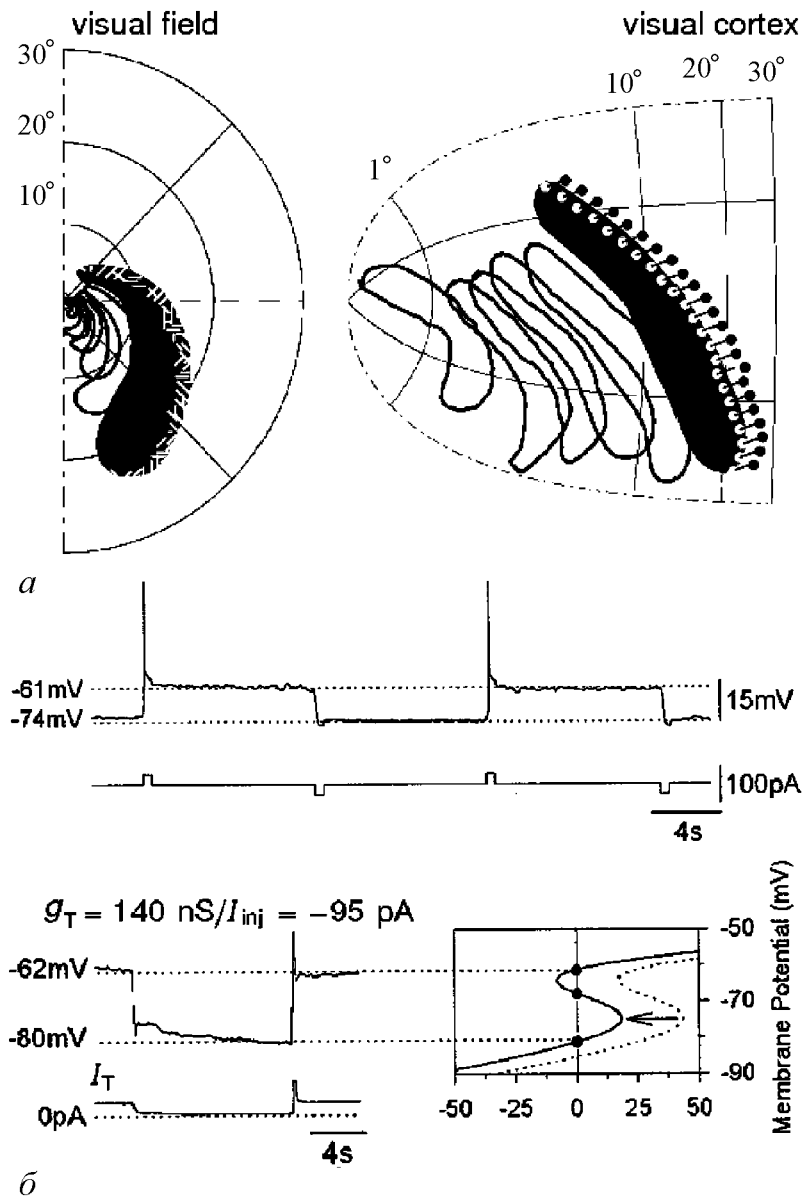


Рис. 1. *a* – локализованные структуры активности, возникающие в зрительной коре при мигрени с аурой (рисунок взят из работы [6]); *б* – бистабильное поведение таламо-кортикальных нейронов кошки (рисунок взят из работы [24])

кализованные структуры были обнаружены, например, в светочувствительной реакции Белоусова–Жаботинского [7–10], в газоразрядных [11–13] и оптических системах [14, 15], в гранулированных материалах [16]. Важнейший класс моделей, позволяющих описать динамику многих локализованных состояний, образуют системы типа «реакция–диффузия». Установлено, что в одномерных двухкомпонентных моделях этого класса существует большое разнообразие волновых устойчивых локализованных структур – одиночных импульсов (или автосолитонов), связанных

состояний из некоторого числа импульсов и др. В двухкомпонентных двумерных системах «реакция-диффузия» обнаружены устойчивые стационарные неподвижные локализованные структуры в виде пятен (*spots*). В то же времядвигающиеся пятна – неустойчивы. В таких моделях (в двумерной модели ФитцХью–Нагумо) были обнаружены [17, 18] лишь «долгоживущие» локализованные возбуждения, время жизни которых резонансным образом зависит от управляющего параметра, отражающего величину порога возбуждения в системе. В работах [10, 19, 20] показано, что придать устойчивость подвижным локализованным структурам в двумерных двухкомпонентных моделях можно путем введения в систему отрицательной обратной связи. Аналогичную стабилизирующую роль играет и увеличение числа диффундирующих компонентов в модели. Например, в [21–23] рассмотрен целый ряд трехкомпонентных двумерных систем «реакция–диффузия», демонстрирующих распространяющиеся устойчивые локализованные структуры.

В настоящей работе показано, что устойчивые распространяющиеся локализованные образования могут существовать и в двухкомпонентных двумерных системах без внешних стабилизирующих воздействий.

Работа посвящена исследованию процессов формирования и распространения локализованных волновых структур в системе следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{u}_{j,k} = f(u_{j,k}) - v_{j,k} + d(u_{j-1,k} + u_{j+1,k} - 4u_{j,k} + u_{j,k-1} + u_{j,k+1}), \\ \dot{v}_{j,k} = \varepsilon(g(u_{j,k}) - v_{j,k} - I), \end{cases} \quad (1)$$

где

$$j = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

$$f(u) = u - u^3/3, \quad g(u) = \begin{cases} \alpha u, & u < 0 \\ \beta u, & u \geq 0 \end{cases}$$

и

$$u_{j+N,k}(t) \equiv u_{j,k}(t), \quad u_{j,0}(t) \equiv u_{j,1}(t), \quad u_{j,M+1}(t) \equiv u_{j,M}(t).$$

Система (1) описывает динамику ансамбля электрически связанных модельных нейронов ФитцХью–Нагумо со сложнопороговым возбуждением [25]. Идентичные элементы ансамбля расположены в узлах двумерной пространственной решетки и в типичном случае взаимодействуют с четырьмя ближайшими соседями. В этой статье мы уделяем основное внимание волновым процессам и поэтому будем трактовать индексы j и k как пространственные координаты. Переменная $u_{j,k}$ качественно описывает динамику мембранного потенциала нейрона, находящегося в пространственном узле (j,k) решетки, а $v_{j,k}$ – динамику всех ионных токов, проходящих через мембрану этого нейрона и отвечающих за восстановления потенциала покоя мембраны. Параметр d характеризует силу электрической связи между нейронами ансамбля, I контролирует уровень деполяризации мембраны, а ε ($\varepsilon > 0$) – скорость изменения ионных токов. Параметры α и β ($\alpha, \beta > 0$) описывают нелинейные свойства ионных токов. В зависимости от значения параметров динамика элемента ансамбля может

быть достаточно разнообразной [25, 26]. Она включает в себя не только основные режимы нейронной активности (генерацию потенциала действия, состояния покоя и рефрактерности), но и некоторые специфические, характерные для нейронов с колебательными свойствами, режимы – подпороговые колебания и мультипороговое возбуждение спайков. В этой работе параметры элемента системы (1) выбираются так, что он одновременно обладает свойствами бистабильности и осцилляторным порогом возбуждения. Например, такое поведение демонстрируют таламокортикальные нейроны некоторых животных (рис. 1, б).

В одномерном случае динамика системы (1) изучалась в работах [26–28], в которых получены условия распространения разнообразных устойчивых одномерных волновых структур – от простейших импульсов возбуждения до фрактальных. Опираясь на эти результаты, в настоящей работе мы исследуем динамику двумерных локализованных образований. Статья организована следующим образом. В разделе 1 кратко излагаются базовые динамические свойства ансамбля. Раздел 2 посвящен описанию условий формирования и устойчивости в таком ансамбле стационарных пространственно-локализованных структур активности и их свойств. В разделе 3 изучаются связанные состояния, состоящие из нескольких локализованных структур. В заключении представлено краткое обсуждение результатов.

1. Базовые динамические свойства ансамбля

1.1. Динамика элемента ансамбля. Поведение элемента ансамбля описывается системой следующего вида

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) - v, \\ \dot{v} = \varepsilon(g(u) - v - I). \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) определена на фазовой плоскости и содержит четыре параметра. Зафиксируем для определенности параметры

$$\alpha = 0.9; \quad \beta = 0.8; \quad I = -0.025,$$

а параметр ε будем рассматривать в качестве контрольного из интервала $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, где $\varepsilon_1 = 0.6332\dots$, $\varepsilon_2 = 0.6606\dots$. При этих значениях параметров система (2) имеет [25] три состояния равновесия: $O_1(u_1^0, v_1^0)$, $O_2(u_2^0, v_2^0)$ и $O_3(u_3^0, v_3^0)$, где $u_i^0 (i = 1, 2, 3)$ – корни уравнения

$$f(u) - g(u) - I = 0,$$

а $v_1^0 = \alpha u_1^0, v_i^0 = \beta u_i^0 (i = 2, 3)$. Состояние равновесия O_2 является седлом, а два других – устойчивыми фокусами. Фазовый портрет системы (2) в рассматриваемом интервале значений ε представлен на рис. 2. Заметим, что граничные значения $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$ этого интервала являются бифуркационными. Значение $\varepsilon = \varepsilon_1$ соответствует бифуркации рождения двукратного предельного цикла, охватывающего все три состояния равновесия. На другой границе, при $\varepsilon = \varepsilon_2$, смыкаются сепаратрисы w_1^u и w_1^s , образуя петлю сепаратрис, в которую «влипают» неустойчивый предельный цикл l_1^u .

1.2. Бистабильность ансамбля. Непосредственно из системы (1) вытекает, что она имеет три пространственно однородных состояния

$$S_i(u_{j,k} = u_i^0, \quad v_{j,k} = v_i^0), \quad i = 1, 2, 3.$$

Линеаризовав систему (1) на этих состояниях, получим для возмущений $\xi_{j,k} = u_{j,k} - u_i^0, \eta_{j,k} = v_{j,k} - v_i^0$ следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{j,k} = [1 - (u_i^0)^2 - 4d]\xi_{j,k} - \eta_{j,k} + d(\xi_{j-1,k} + \xi_{j+1,k} + \xi_{j,k-1} + \xi_{j,k+1}), \\ \dot{\eta}_{j,k} = \varepsilon(g^0 \xi_{j,k} - \eta_{j,k}), \end{cases} \quad (3)$$

где

$$g^0 = \begin{cases} \alpha & \text{для состояния } S_1, \\ \beta & \text{для состояний } S_2 \text{ и } S_3. \end{cases}$$

Для нахождения ляпуновских характеристических показателей системы (3) мы применили подход из [29], основанный на использовании свойств полиномов Чебышева второго рода. В результате были получены следующие уравнения, определяющие характеристические показатели состояний S_i :

$$\lambda_{j,k}^2 + [\varepsilon - 1 + (u_i^0)^2 + d(4 - \rho_j + \mu_k)]\lambda_{j,k} + \varepsilon[d(4 - \rho_j + \mu_k) + g^0 - 1 + (u_i^0)^2] = 0,$$

где

$$\rho_j = 2 \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right), \quad \mu_k = 2 \cos\left(\frac{\pi k}{M}\right).$$

Несложный анализ корней полученной системы уравнений показывает, что в рассматриваемой области параметров набор $\{\lambda_{j,k}\}$, соответствующий состояниям равновесия S_1 и S_3 , на комплексной плоскости целиком расположен слева от мнимой оси и, следовательно, эти состояния являются локально устойчивыми. В спектре $\{\lambda_{j,k}\}$, отвечающем S_2 , существуют значения, имеющие положительную действительную часть, что свидетельствует о его неустойчивости. Таким образом, в рассматриваемой области параметров ансамбль (1) обладает бистабильными свойствами.

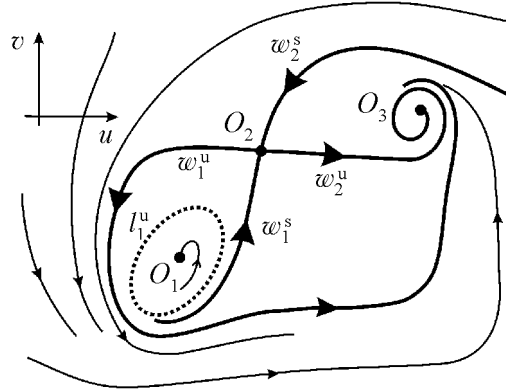


Рис. 2. Фазовая плоскость модельного нейрона с осцилляторным порогом

2. Стационарные локализованные структуры активности

По аналогии со стационарными (бегущими) волнами локализованные структуры, не меняющие свою форму и скорость при распространении, будем называть стационарными. На рис. 3 представлены примеры двумерных локализованных волновых структур активности, обнаруженных нами при численном моделировании

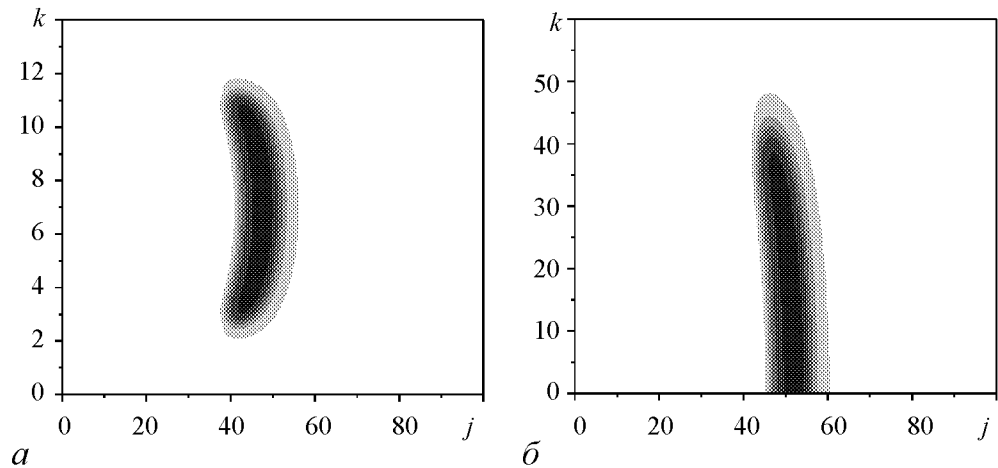


Рис. 3. Примеры двумерных пространственно локализованных структур активности. Значения параметров: $\varepsilon = 0.648515$; $d = 1$

системы (1). Каждая из этих структур представляет собой ограниченное по пространственным координатам образование элементов ансамбля (среды), находящихся в возбужденном состоянии (область, выделенная оттенками серого цвета), на фоне остальных элементов, демонстрирующих состояние относительного покоя (область, отмеченная белым цветом). Все обнаруженные нами структуры по типу симметрии могут быть разделены на два больших класса. К первому классу относятся структуры, ось симметрии которых не проходит через узлы решетки, а расположена между ними, например, структура, представленная на рис. 3, *a* – далее, для краткости – структура C_0 . Такие структуры состоят из двух полностью идентичных половинок. Если в системе (1) задать начальные условия в виде такой половинки, включающей в себя элементы одной из границ, то она ведет себя как стационарное локализованное образование, то есть движется вдоль границы, не изменяя ни свою скорость, ни форму (рис. 3, *б*). Будем обозначать такие структуры через C_b . Структуры второй группы включают дополнительную цепочку элементов, через которую проходит их ось симметрии. Вследствие этого распространение таких структур возможно только целиком внутри системы.

2.1. Пространственно-временные характеристики локализованных структур. Рассмотрим свойства стационарных структур на примере структуры C_0 . Прежде всего заметим, что структура C_0 в пространстве $\{j, k, u_{j,k}\}$ обладает симметрией, о которой говорилось выше, и некоторой кривизной.

Каждый элемент структуры C_0 совершает периодические по времени и пространственной координате j колебания. На рис. 4, *a* для примера представлена временная эволюция переменных $u_{j,k}, v_{j,k}$ для одного из центральных элементов структуры, а на рис. 4, *б* – проекции фазовых траекторий системы (1) на парциальные фазовые плоскости элементов для четырех различных значений индекса k . На каждой такой плоскости $(u_{j,k}, v_{j,k})$ переменные изменяются периодически по некоторой замкнутой кривой. При этом период обращения по этим кривым один и тот же и не зависит от выбора индексов j и k , а амплитуда колебаний $A_{j,k}$ является разной для разных элементов. Она максимальна (A_{\max}) в центре структуры и достаточно резко

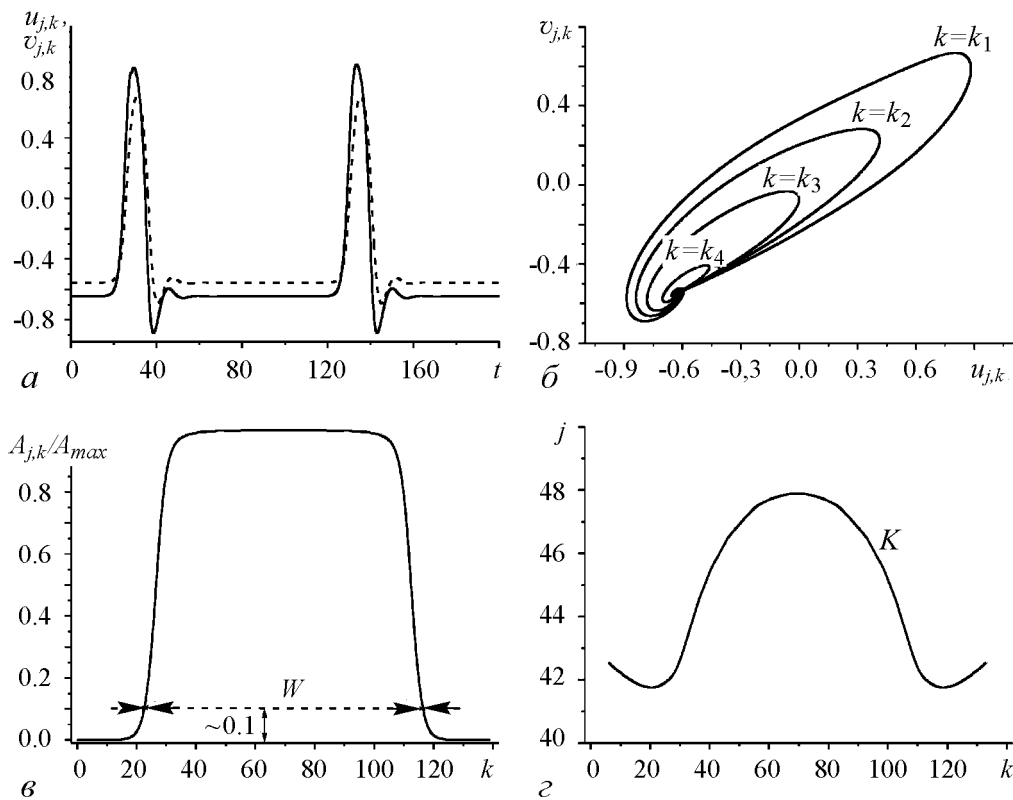


Рис. 4. Пространственно-временные характеристики локализованной структуры C_0 : a – временная эволюция переменных $u_{j,k}$, $v_{j,k}$ (переменным $u_{j,k}$ соответствуют значения, отмеченные сплошной линией, а переменным $v_{j,k}$ – штриховой) для одного из центральных элементов структуры ($k = 70$); b – проекции фазовых траекторий системы (1) на парциальные фазовые плоскости элементов для различных значений индекса k ($k_1 = 70$, $k_2 = 111$, $k_3 = 114$, $k_4 = 116$); c – зависимость нормированной амплитуды колебаний от продольной координаты k ; d – пространственная кривизна структуры

убывает на ее «краях». Это свойство иллюстрирует рис. 4, c , на котором представлена зависимость величины $A = A_{j,k}/A_{\max}$ от пространственной координаты k .

Для характеристики пространственных размеров структуры C_0 введем характерную ширину – величину W (см. рис. 4, c), вычисляемую на уровне 10% от максимального значения амплитуды. Структура C_0 обладает пространственной кривизной и поэтому максимальное значение амплитуды колебаний в любой фиксированный момент времени достигается в элементах, локализованных в точках некоторой кривой K (рис. 4, d).

2.2. Формирование и устойчивость стационарных локализованных структур. Выберем в качестве начальных условий отрезок не меняющегося вдоль координаты k плоского импульса возбуждения, который будем называть волновым сегментом. Получить такой сегмент можно следующим образом: иницируем на некотором участке системы распространение плоской импульсной волны возбуждения. После этого участки волны, прилегающие к границам системы, заменим стационарными значениями переменных. В результате такой процедуры получим волновой сегмент некоторого размера W_0 . Численное исследование пространственно-временной динамики системы (1) с начальными условиями в виде сегмента W_0 пока-

зало существование некоторого интервала значений параметра ε , для точек которого W_0 с течением времени принимает форму стационарной локализованной структуры C_0 (рис. 5, *a*). Вне этого интервала, хотя формирование структуры и происходит, она существует непродолжительное время. При этом на правой границе интервала

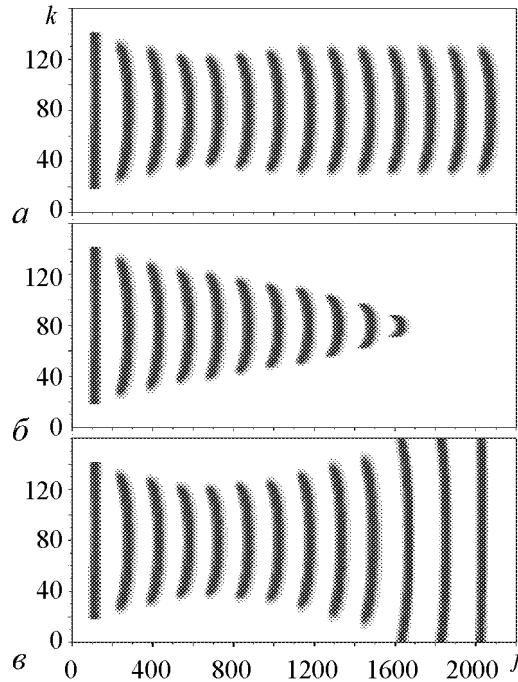


Рис. 5. Пространственно-временная динамика волнового сегмента $W_0 = 120$ при различных значениях параметра ε : 0.648515 – формирование стационарной локализованной структуры (*a*); 0.64852 – затухание к пространственно однородному состоянию S_1 (*b*); 0.64851 – эволюция к плоской импульсной волне возбуждения (*v*)

существования структура затухает (рис. 5, *b*) к пространственно однородному состоянию S_1 , а на левой принимает форму плоской импульсной волны возбуждения (рис. 5, *v*). Стационарные структуры могут формироваться с начальных условий не только в виде волновых сегментов. Мы обнаружили, что вариация ширины W в пределах ± 0.3 от стационарного размера не разрушает структуру C_0 . На рис. 6, *a* показана эволюция величины W , отвечающей начальному распределению в форме локализованной структуры, имеющей некоторую начальную ширину $W(0)$, отличную от стационарной. После переходного процесса $W(t)$ принимает постоянное значение и дальше не меняется, что свидетельствует об образовании стационарной локализованной структуры. Такое свойство система (1) демонстрирует в целом интервале значений ε : $E_0 = \{\varepsilon_0^- < \varepsilon < \varepsilon_0^+\}$. Вне интервала E_0 , как и в случае начального условия в форме волнового сегмента, локализованные структуры существуют лишь некоторое ограниченное время T , которое резонансным образом зависит от параметра ε (рис. 6, *b*).

Кроме представленных выше стационарных структур, в системе (1) возможно распространение устойчивых стационарных структур, отличающихся от C_0 и C_b лишь геометрическими размерами и скоростью движения. Для краткости обсуждение свойств этих структур проведем лишь для случая структур вида C_0 . На рис. 7, *a-v* представлены зависимости ширины таких структур C_n от параметра ε . Эти результаты были получены для системы (1) с начальными условиями в виде локализованных структур, имеющих начальную ширину $W(0)$, отличную от стационарной. Каждая из структур C_n существует в некоторой области параметров: $E_n = \{\varepsilon_n^- < \varepsilon < \varepsilon_n^+\}$. При этом области, соответствующие различным структурам C_n , могут как не иметь общих точек (рис. 7, *a*), так и пересекаться (рис. 7, *b, v*). Это означает, что система (1) может демонстрировать бистабильное (см. рис. 7, *b*) и мультистабильное поведение (см. рис. 7, *v*). Другими словами, при некоторых значениях параметра ε возможно распространение одновременно нескольких локализованных структур, отличающихся друг от друга размерами и скоростью. На рис. 7, *z*

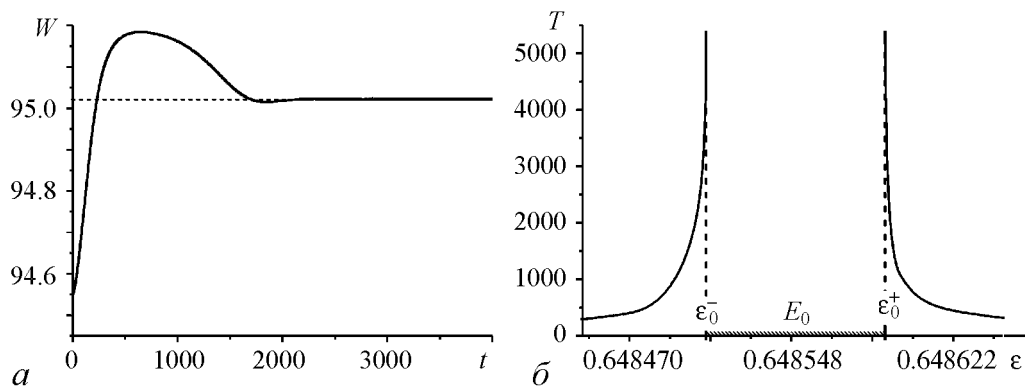


Рис. 6. *a* – эволюция ширины W локализованной структуры с отличным от стационарного начальным размером $W(0)$ ($\varepsilon = 0.64856, d = 1$), *б* – зависимость времени существования локализованных структур от параметра ε ($d = 1$)

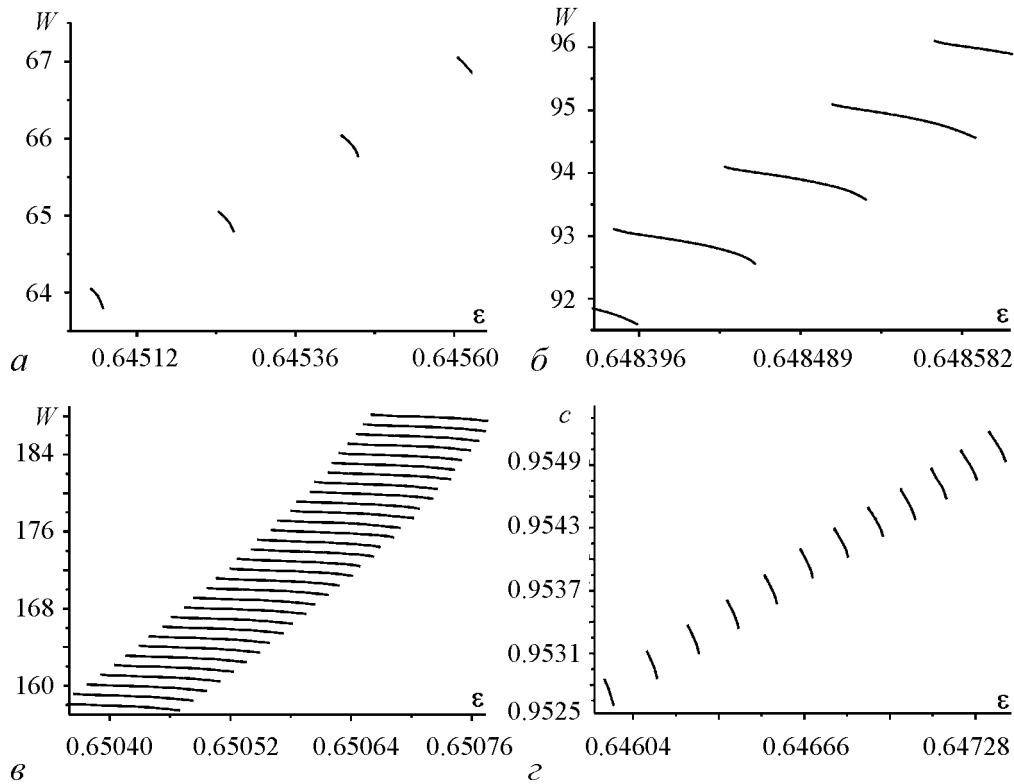


Рис. 7. Зависимость ширины локализованных структур от параметра ε (*a*, *б*, *в*); зависимость скорости локализованных структур от параметра ε (*г*)

показана зависимость c – скорости распространения локализованных структур – от параметра ε .

2.3. Динамические механизмы формирования и устойчивости стационарных структур. *Динамический баланс.* Покажем, что ключевую роль в формировании локализованных структур играет то, что локальные элементы системы (1) обладают осцилляторным порогом, то есть имеют на фазовой плоскости неустойчивый

предельный цикл (см. рис. 2). Введем в рассмотрение величину

$$F_{j,k} = u_{j-1,k} + u_{j+1,k} - 4u_{j,k} + u_{j,k-1} + u_{j,k+1}.$$

Численное моделирование системы (1) показало, что существование локализованных структур сопровождается периодическим во времени изменением $F_{j,k}$ во всех активированных элементах (рис. 8). Поэтому совокупное действие на выделенный элемент соседних элементов можно рассматривать как некоторое неавтономное силовое воздействие. Величина амплитуды $F_{j,k}(t)$ существенно зависит от индекса k : она максимальна у центральных элементов и стремится к нулю на «краях» структуры (см. рис. 8). Это связано с тем, что из-за граничных эффектов в направлении, перпендикулярном движению структуры (в направлении пространственной координаты k), величины силового воздействия недостаточно для преодоления порога и, начиная с некоторого k , элемент остается в состоянии покоя. Фактически, локализованные стационарные структуры есть результат некоторого «баланса» в граничных (по k) элементах структур между величиной силового воздействия и «размером» области притяжения состояния равновесия O_1 , выделяемой неустойчивым предельным циклом. Нарушение этого баланса происходит при выходе параметра ε из любой области E_n . При $\varepsilon < \varepsilon_n^-$ величина $F_{j,k}(t)$ является достаточной для преодоления порога возбуждения во всех элементах, и в системе (1) устанавливается плоский однородный волновой фронт возбуждения. Наоборот, при $\varepsilon > \varepsilon_n^+$ начального возбуждения недостаточно, чтобы преодолеть осцилляторный порог во всех элементах, и в системе (1) устанавливается пространственно однородное состояние S_1 .

Устойчивость в фазовом пространстве. Выше мы изучали волновые свойства системы (1) и поэтому трактовали ее как пространственно распределенную. С другой стороны, система (1) – динамическая система с многомерным фазовым пространством G . В связи с этим представляется интересным установить соответствие между траекториями в G и локализованными структурами. На рис. 9, *a* представлены зависимости двух старших ляпуновских показателей $-\lambda_1$ и λ_2 от параметра $\varepsilon \in E_0$, соответствующих траектории системы (1) с начальными условиями, выбранными на структуре C_0 и на состояниях равновесия O_1 для элементов вне этой структуры. При всех $\varepsilon \in E_0$ один из показателей равен нулю, а второй является отрицательным. Следовательно, все остальные показатели этой траектории имеют

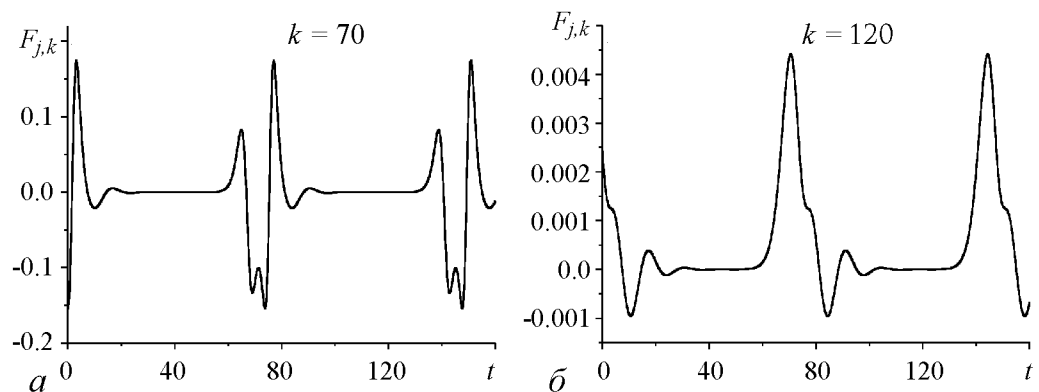


Рис. 8. Временная эволюция $F_{j,k}$: *a* – в центре структуры C_0 ($k = 70$); *b* – на «краях» структуры C_0 ($k = 120$)

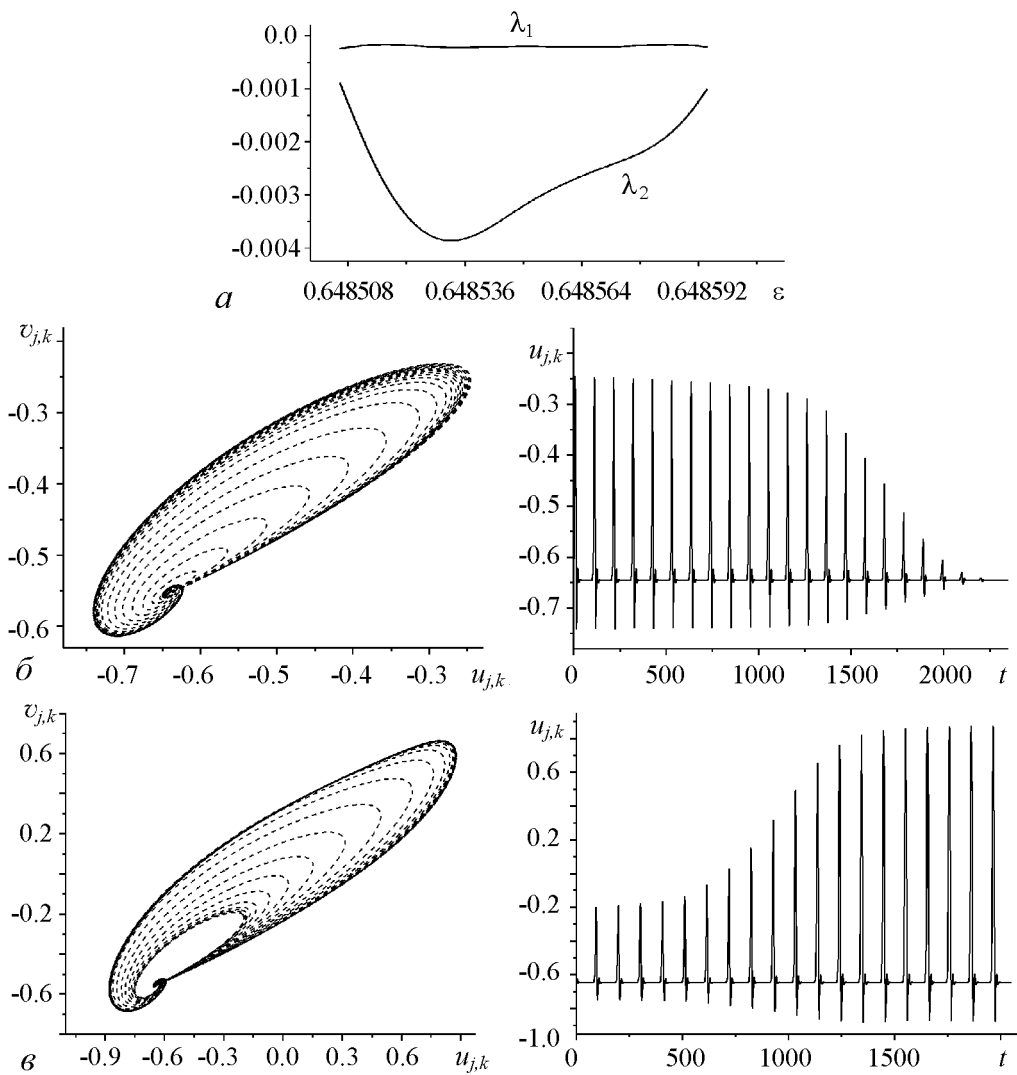


Рис. 9. а – два старших ляпуновских показателя предельного цикла L_c для значений параметра $\varepsilon \in E_0$; б, в – процессы установления новых аттракторов в фазовом пространстве G

отрицательную действительную часть и траектория представляет собой устойчивый предельный цикл L_c . При $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^-$ и $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$ ляпуновский показатель $\lambda_2 \rightarrow 0$. Это означает, что при выходе из E_0 предельный цикл L_c испытывает касательную бифуркацию и исчезает. После этой бифуркации состояние системы (1) описывается другим аттрактором. Рис. 9, б, в иллюстрируют процесс перехода на такие аттракторы. При выходе из E_0 через значение $\varepsilon = \varepsilon_0^+$ в каждом активированном парциальном элементе переменные $(u_{j,k}, v_{j,k})$ осцилляторно затухают к состоянию равновесия O_1 (рис. 9, б). Наоборот, выход из области E_0 через границу $\varepsilon = \varepsilon_0^-$ сопровождается осцилляторно-нарастающими колебаниями переменных $(u_{j,k}, v_{j,k})$ элементов, ранее принадлежавших структуре C_0 (рис. 9, в). В этом случае изображающая точка в фазовом пространстве G переходит на новый предельный цикл L_f , отвечающий плоскому волновому фронту возбуждения.

2.4. Взаимодействие локализованных структур активности. Как правило, уединенные волны в распределенных активных системах типа «реакция–диффузия» аннигилируют при столкновении друг с другом и границами системы, то есть ведут себя как автоволны. Однако это не всегда так и возможно иное поведение волн.

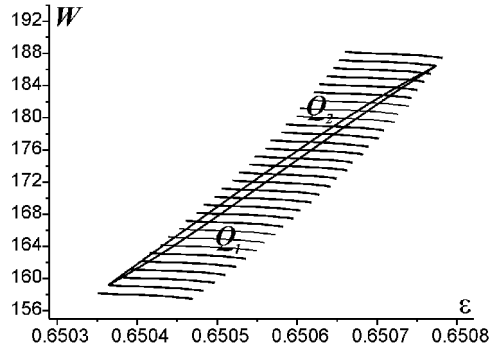


Рис. 10. Разбиение области существования локализованных структур линиями Q_1 и Q_2 на подобласти, соответствующие различным сценариям взаимодействия локализованных структур

Например, частицеподобное поведение, когда две волны проходят друг через друга или отражаются от границ, переизлучение волн перпендикулярно или под некоторым углом к направлению взаимодействующих волн, образование после взаимодействия связанных состояний, рождение дополнительной волны в результате взаимодействия и т.д. [13, 19, 21]. Наши исследования показали, что в системе (1) возможна как аннигиляция локализованных структур, так и их частицеподобное поведение. В зависимости от параметра ε и размеров структур существует три основных сценария их взаимодействия.

- Структуры, имеющие размеры из области ниже кривой Q_1 (рис. 10), после взаимодействия формируют неустойчивые локализованные образования, которые быстро затухают. Такое поведение означает аннигиляцию структур.
- Взаимодействие структур с размерами из области выше кривой Q_2 приводит к формированию двух распространяющихся в противоположные стороны плоских волн возбуждения.
- Взаимодействие структур, имеющих размеры из области, ограниченной линиями Q_1 и Q_2 , после короткого переходного процесса инициирует вторичные стационарные локализованные структуры. При этом размер сформировавшихся вторичных структур может и не совпадать с размером изначально взаимодействующих структур. Он может как уменьшаться, так и увеличиваться, однако не более чем на две единицы. Таким образом, в области между кривыми Q_1 и Q_2 имеет место частицеподобное поведение структур. Отметим, что все представленные здесь результаты относятся только к фронтальному столкновению идентичных структур.

3. Связанные состояния

На первый взгляд, сформировать связанные состояния в системе (1) можно, опираясь на свойства одиночных локализованных структур. Действительно, рассмотрим динамику пары идентичных структур, распространяющихся в одном направлении и расположенных в начальный момент на некотором расстоянии r друг от друга. При достаточно большом расстоянии, как и следовало ожидать, структуры не взаимодействуют друг с другом и пара устойчиво распространяется вдоль системы (рис. 11, *a*). Естественно, устойчивостью будут обладать и конфигурации из трех и более стационарных структур при достаточно большом расстоянии между

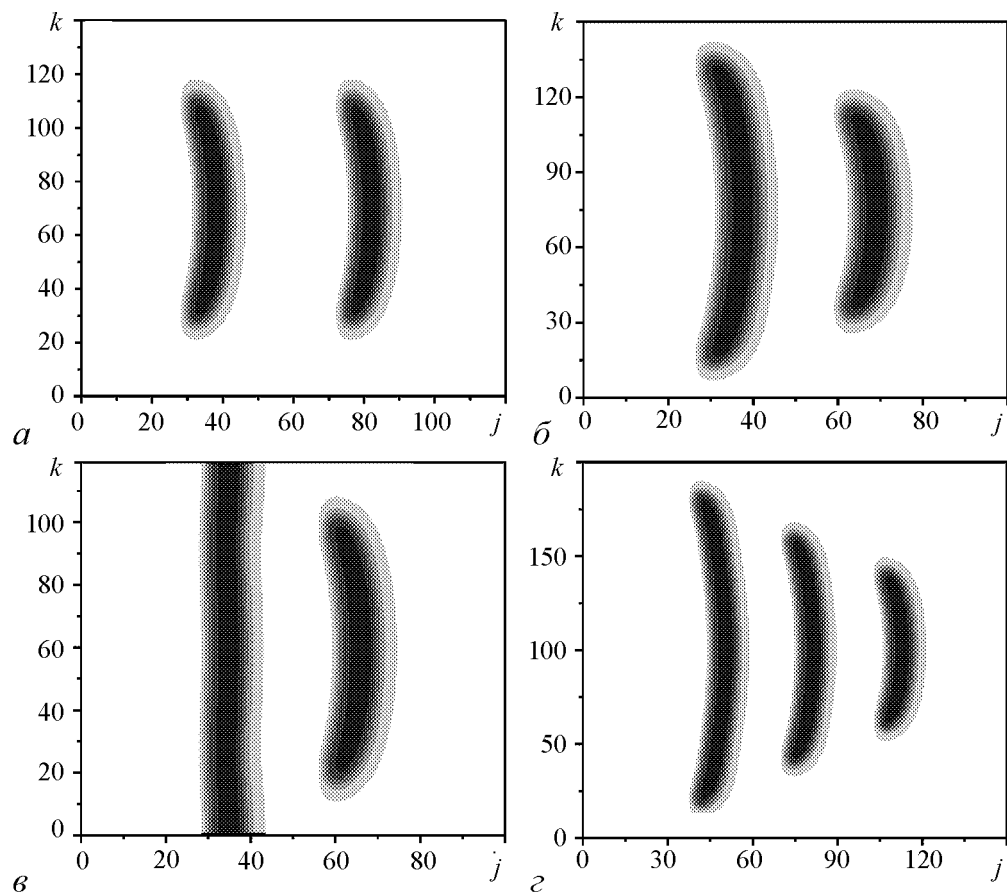


Рис. 11. a – устойчивая пара не взаимодействующих идентичных стационарных структур; \bar{b} , v , z – связанные состояния системы (1). Значения параметров: $\varepsilon = 0.648515$; $d = 1$

ними. Однако такие образования нельзя трактовать как связанные, поскольку структуры, фактически, независимы друг от друга. Тем не менее связанные состояния из локализованных структур в системе (1) все же существуют. Поясним, как они формируются. Будем уменьшать расстояние между начальными структурами. Состояние в виде пары (или более) идентичных структур, о которых речь шла выше, сохраняет свою устойчивость лишь до некоторого критического расстояния между ними – r_{cr} . Это расстояние зависит как от размеров структур, так и от параметров системы. Мы обнаружили, что в случае, когда расстояние между структурами в паре становится меньше критического, состояние пары дестабилизируется и устанавливается новая устойчивая конфигурация. Существует несколько различных вариантов поведения пары после дестабилизации. Причем, какой именно вариант реализуется, в общем случае зависит от расстояния r ($r < r_{cr}$) между структурами и поперечного размера системы M .

- Если расстояние между структурами является недостаточным, происходит подавление второй структуры в паре, и в системе остается всего лишь одна структура.

- В случае, когда расстояние близко к r_{cr} , начинается рост размера второй структуры, которая далее начинает изменять размер первой, приближая его к своему

собственному. Этот процесс продолжается до тех пор, пока в системе не сформируется структура в виде двух плоских импульсов возбуждения.

- В случае, когда расстояние имеет некоторое промежуточное значение между первыми двумя значениями, происходит ограничение роста главной структуры в паре, что далее приводит к формированию связанных состояний. В зависимости от M в системе (1) формируется связанное состояние либо из двух структур (рис. 11, б), либо из плоского фронта и структуры (рис. 11, в). Аналогично можно получить и более сложные связанные состояния, например, состояние из трех локализованных структур, представленное на рис. 11, г.

Отметим, что все рассмотренные в этом разделе структуры имеют соответствующие аналоги, распространяющиеся вдоль границ системы (1).

Заключение

Проведено исследование пространственно-временной динамики системы (1), моделирующей коллективное поведение ансамбля электрически связанных нейронов, обладающих бистабильными и осцилляторно-пороговыми свойствами. Обнаружено, что в некотором диапазоне параметра ϵ в таком ансамбле возможно формирование и распространение стационарных локализованных структур активности. Каждая такая структура представляет собой уединенную группу нейронов, находящихся в состоянии одновременной генерации потенциалов действия, на фоне других нейронов, демонстрирующих состояние относительного покоя. Объяснен механизм формирования структур и роль неустойчивого предельного цикла в этом процессе. Показано, что пространственная локализация связана с установлением баланса между силовым воздействием на элементы, находящиеся вблизи «края» структуры, и области притяжения устойчивого состояния равновесия O_1 . При нарушении этого баланса структура теряет свою устойчивость. Установлены основные закономерности взаимодействия локализованных структур при фронтальном столкновении, которое может приводить как к аннигиляции, так и к частицеподобному поведению этих структур. Показана возможность формирования связанных состояний из нескольких локализованных структур.

Представляется очень интересным, что, несмотря на наличие в системе одновременно двух устойчивых пространственно однородных состояний, волновые фронты, обычно переключающие среду из одного такого состояния в другое, не образуются. Применительно к бистабильным нейронным ансамблям это означает, что нейроны после одновременной генерации потенциалов действия сохраняют свое прежнее состояние покоя, а не переходят в новое.

Рассмотренные в этой работе локализованные структуры не исчерпывают всего многообразия локализованных состояний системы (1). Нами были обнаружены нестационарные, но тем не менее устойчивые локализованные структуры. Исследованию таких образований мы надеемся посвятить нашу следующую статью.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 06-02-16137, 08-02-97035, 08-02-00724).

Библиографический список

1. *Leznik E., Makarenko V., Llinas R.* Electrotonically mediated oscillatory patterns in neuronal ensembles: An in vitro voltage-dependent dye-imaging study in the inferior olive // *J. Neurosci.* 2002. Vol. 20, № 7. P. 2804.
2. *Wang X.-J.* Synaptic reverberation underlying mnemonic persistent activity // *Trends Neurosci.* 2001. Vol. 24. P. 455.
3. *Wu J.-Y., Guan Li, Tsau Yang.* Propagating activation during oscillations and evoked responses in neocortical slices // *J. Neurosci.* 1999. Vol. 19, № 12. P. 5005.
4. *Peinado A.* Traveling slow waves of neural activity: a novel form of network activity in developing neocortex // *J. Neurosci.* 2000. Vol. 20. P. RC54.
5. *Jung P., Milton J.* *Epilepsy as a dynamical disease.* Springer, New York, 2003.
6. *Dahlem M.A., et al.* Control of sub-excitable waves in neural networks by nonlocal coupling // *New trends and tools in complex networks* / Eds. R. Criado, J. Pello, M. Romance. Spain: Universidad Rey Juan Carlos, 2007.
7. *Kaminaga A., Vanag V.K., Epstein I.R.* «Black spots» in a surfactant-rich Belousov–Zhabotinsky reaction dispersed in a water-in-oil microemulsion system // *J. Chem. Phys.* 2005. Vol. 122. P. 174706.
8. *Vanag V.K., Epstein I.R.* Stationary and oscillatory localized patterns, and subcritical bifurcations // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 92. P. 128301.
9. *Sakurai T., Mihaliuk E., Chirila F., Showalter K.* Design and control of wave propagation patterns in excitable media // *Science.* 2002. Vol. 296. P. 2009.
10. *Mihaliuk E., Sakurai T., Chirila F., Showalter K.* Experimental and theoretical studies of feedback stabilization of propagating wave segment // *Faraday Discuss.* 2001. Vol. 120. P. 283.
11. *Astrov Y.A., Ammelt E., Purwins H.G.* Experimental evidence for zigzag instability of solitary stripes in a gas-discharge system // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 3129.
12. *Muller I., Ammelt E., Purwins H.G.* Self-organized quasiparticles: breathing filaments in a gas discharge system // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 82. P. 3428.
13. *Astrov Y.A., Purwins H.G.* Plasma spots in a gas discharge system: birth, scattering and formation of molecules // *Physics Letters A.* 2001. Vol. 283. P. 349.
14. *Розанов Н.Н.* Асимметричные движущиеся локализованные структуры в широкоапертурном нелинейном интерферометре // *Оптика и спектроскопия.* 2007. Т. 102, № 2. С. 292.
15. *Taranenko V.B., Slekyš G., Weiss C.O.* Spatial resonator solitons // *CHAOS.* 2003. Vol. 13, № 2. P. 777.
16. *Umbanhowar P.B., Melo F., Swinney H.L.* Localized excitations in a vertically vibrated granular layer // *Nature.* 1996. Vol. 382. P. 793.
17. *Понцова М.С.* Трансформация автоволн в локально неоднородных активных средах: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. М., 2004.
18. *Дудченко О.А., Гурия Г.Т.* Резонансный характер долгоживущих возбуждений в слабовозбудимых активных средах // *Труды LVIII научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук».* 2005. P. 4.
19. *Krischer K., Mikhailov A.S.* Bifurcation to traveling spots in reaction-diffusion systems // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 73. P. 3165.

20. *Sendina-Nadal I., et al.* Wave propagation in subexcitable media with periodically modulated excitability //Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86, № 8. P. 1646.
21. *Заикин А.Н.* Формирование, распространение и взаимодействие экситонов (автоволн-квазичастиц) в активной среде //Физическая мысль России. 1995. № 1. С. 54.
22. *Bode M., Liehr A.W., Schenk C.P., Purwins H.G.* Interaction of dissipative solitons: particle-like behaviour of localized structures in a three-component reaction-diffusion system //Physica D. 2002. Vol. 161. P. 45.
23. *Nishiura Y.* Scattering of traveling spots in dissipative systems //CHAOS. 2005. Vol. 15. P. 047509.
24. *Hughes S.W., et al.* All thalamocortical neurones possess a T-type Ca²⁺ 'window' current that enables the expression of bistability-mediated activities //J. Physiol. 1999. Vol. 517. P. 805.
25. *Некоркин В.И., Дмитричев А.С., Щапин Д.С., Казанцев В.Б.* Динамика модели нейрона со сложнопороговым возбуждением //Математическое моделирование. 2005. Т. 17, № 6. С. 75.
26. *Kazantsev V.B., Nekorkin V.I.* Spiking patterns emerging from wave instabilities in a one-dimensional neural lattice //Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. P. 017201.
27. *Некоркин В.И., Щапин Д.С., Дмитричев А.С.* Сложная волновая динамика ансамбля нейроноподобных элементов со сложнопороговым возбуждением //Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 1. С. 3.
28. *Nekorkin V.I., et al.* Heteroclinic contours and self-replicated solitary waves in a reaction-diffusion lattice with complex threshold excitation// Physica D. 2008 (принята к печати).
29. *Nekorkin V.I., Velarde M.G.* Sinergetic phenomena in active lattices. Springer-Verlag, 2002. 357 p.

*Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород*

Поступила в редакцию 23.04.2008

STATIONARY LOCALIZED ACTIVITY STRUCTURES IN TWO-DIMENSIONAL ENSEMBLE OF FITZHUGH–NAGUMO NEURONS WITH OSCILLATORY THRESHOLD

A.S.Dmitrichev, V.I. Nekorkin

We present the analysis of spatiotemporal dynamics of two-dimensional ensemble of electrically coupled FitzHugh–Nagumo neurons with oscillatory threshold. We show that in this system spatially localized activity structures can be formed. Such structures propagate through the system without changing their shape and velocity. We demonstrate that there exist two types of the structures: single and bound states. General characteristics of localized structures such as regions of existence, geometrical sizes and velocity are investigated. We also study structures interaction and give explanation for their existence and stability in terms of trajectories in associating with the ensemble multidimensional phase space.



Дмитричев Алексей Сергеевич – родился в 1980 году в с. Слободское Кстовского района Горьковской области, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2002). После окончания ННГУ работает в ИПФ РАН. Область научных интересов – теория нелинейных колебаний и волн, нейродинамика.
E-mail: admitry@neuron.appl.sci-nnov.ru



Некоркин Владимир Исаакович – родился на Украине (1948), окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1981, ГГУ) и доктора физико-математических наук (1992, СГУ). С 1971 года работал в Горьковском институте прикладной математики, с 1983 по 1986 год – в Горьковском политехническом институте, с 1986 года и по настоящее время работает на радиофизическом факультете ННГУ, профессор. Область научных интересов – теория колебаний и волн, структурообразование и нелинейные волны в непрерывных и дискретных средах, синхронизация и пространственно-временной хаос. Имеет более 100 научных публикаций в указанных направлениях, в том числе двух монографий (в соавторстве). В качестве приглашенного профессора читал лекции в Мадридском и Стэнфордском университетах. Работал в Калифорнийском университете.
E-mail: vnekorkin@neuron.appl.sci-nnov.ru



СИНХРОНИЗАЦИЯ ИМПУЛЬСАМИ И СИНХРОНИЗАЦИЯ В СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ: НОВЫЕ АСПЕКТЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

А.П. Кузнецов, Ю.П. Роман, Н.В. Станкевич, Л.В. Тюрюкина

В работе обсуждаются различные особенности синхронизации автоколебательных систем импульсами: роль неизохронности, возможность стабилизации неустойчивых систем, синхронизация связанных осцилляторов в режиме гибели колебаний и др. Представлены иллюстрации динамики связанных неизохронных осцилляторов и осцилляторов, неидентичных по управляющим параметрам и нелинейной диссипации.

Введение

Синхронизация – одно из наиболее популярных направлений исследования в теории колебаний и нелинейной динамике. Интерес к задачам о синхронизации обусловлен огромным количеством примеров в радиофизике, электронике, биологии, химии, климатологии и др. [1–5]. Наличие ритмов и их взаимосвязь – фундаментальное свойство природы. Кроме того, синхронизация для своего описания требует интересной теории, которая по мере своего развития обнаруживает все новые и новые существенные моменты, часто превращающиеся в самостоятельные направления исследований.

Одним из интересных аспектов теории синхронизации является синхронизация импульсами. Такие задачи привлекательны по ряду причин. Например, многие процессы в радиофизике, радиотехнике, электронике, биофизике и др. характеризуются наличием импульсного воздействия. (В этом легко убедиться с помощью поиска в сети Интернет на сочетание слов «синхронизация импульсами».) С другой стороны, импульсный характер воздействия может приводить к новым аспектам картины синхронизации и к новым колебательным эффектам, не имеющим аналогов в случае гармонического воздействия. Важно и то, что системы в случае коротких импульсов существенно проще для анализа, поскольку в промежутках между импульсами их динамика автономна. Поэтому использование в промежутках между импульсами приближенных методов приводит к более простым дискретным моделям, демонстрирующим, однако, сложное поведение. Наконец, для таких систем четко разделяются стадии воздействия и отклика, что облегчает интерпретацию результатов.

К изучению систем с импульсным возбуждением обращались многие авторы. Например, еще В.И. Арнольд в своей дипломной работе¹ для обоснования существования языков синхронизации, использовал воздействие сигналов в форме различных типов импульсов. При отсутствии компьютеров именно такие системы облегчают качественное понимание происходящих процессов. Для анализа систем с импульсным возбуждением является существенной модель воздействия в виде коротких, но значительных по амплитуде импульсов, которые представляются последовательностью δ -функций. Классической в такой постановке является задача о воздействии периодической последовательности δ -функций на автоколебательный осциллятор ван дер Поля. (В монографии [4] такая система названа маятником Ю.И. Неймарка.) Подобная система изучалась известным исследователем биологических систем Л. Глассом (L. Glass), Е. Дингом (E. Ding) и другими авторами [7– 26]. Для нее были выявлены многие аспекты теории синхронизации импульсами; некоторые из них отражены в настоящей работе.

Постоянное развитие компьютерной техники и теории динамических систем дает замечательную возможность вновь и вновь обращаться к классическим по постановке задачам. Это относится как к уже известным эффектам, для которых, однако, можно получить новые иллюстрации, так и к обнаружению новых интересных типов поведения. Более того, новые иллюстрации для традиционных, «уже изученных» задач, как правило, обнаруживают и новые, существенные аспекты, которые ранее не обсуждались. Таким образом, оказывается, что теория синхронизации даже «простых» автоколебательных систем не столь близка к завершению, что иллюстрирует сложность и многогранность нелинейных явлений. В настоящей работе дан обзор некоторых идей, подходов и результатов, относящихся к анализу синхронизации импульсами и взаимной синхронизации связанных осцилляторов с постепенным усложнением автономных систем с позиций размерности фазового пространства. Сначала рассмотрены автоколебательные системы с двумерным фазовым пространством, затем трехмерным и, наконец, четырехмерным фазовым пространством. Для двумерных систем указаны простейшие модели, исследована существенная роль неизохронности в картине синхронизации, эффект стабилизации неустойчивого предельного цикла импульсным сигналом, возможные типы режимов в возбуждаемой импульсами системе с бифуркацией слияния устойчивого и неустойчивого циклов. Для трехмерных автоколебательных систем обсуждаются вопросы зависимости картины синхронизации от направления импульса, возможность стабилизации импульсами системы в режиме «убегающих» фазовых траекторий и сопутствующие эффекты. Для четырехмерных систем рассматриваются некоторые моменты теории взаимной синхронизации: синхронизация неизохронных систем и систем с «лидирующим» осциллятором в случае неидентичных управляющих параметров и величины нелинейной диссипации. В заключение обсуждаются особенности синхронизации импульсами системы диссипативно связанных осцилляторов.

¹Выполнена в 1959 г., опубликована в журнале Chaos в 1991 [6] с оригинальными рисунками из дипломной работы.

1. Двумерные системы

1.1. Иерархия моделей. Наиболее популярными двумерными системами, демонстрирующими автоколебания, являются система ван дер Поля и ее развитие – система ван дер Поля–Дуффинга [1–5]. Как известно, любая (типичная) автоколебательная система у порога бифуркации Андронова–Хопфа приводится к универсальной нормальной форме [1, 5, 27]. Это означает, что синхронизация таких систем при небольшом превышении над порогом бифуркации должна обладать определенными универсальными чертами. По этой причине система ван дер Поля–Дуффинга может выступать не только как удобный пример для изучения синхронизации, но и как некоторая обобщающая модель.

Обратимся к системе ван дер Поля–Дуффинга, возбуждаемой периодической последовательностью δ -функций

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = B \sum \delta(t - nT). \quad (1)$$

Здесь x – динамическая переменная, T – период следования импульсов, B – их амплитуда. Параметр λ отвечает за бифуркацию Андронова–Хопфа (при $\lambda > 0$ в системе реализуется устойчивый предельный цикл), β – параметр нелинейности, введенной по типу нелинейности осциллятора Дуффинга.

Если превышение над порогом бифуркации невелико (параметр λ мал), то в промежутке между импульсами можно воспользоваться квазигармоническим приближением [1, 2, 5]. В момент действия импульса координата осциллятора x не меняется, а скорость \dot{x} получает добавку, равную амплитуде импульса B . Такое рассмотрение позволяет получить аналитически двумерное отображение для комплексной переменной $z = x + i\dot{x}$, выражающейся через координату и скорость осциллятора сразу после очередного импульса [20] следующим образом:

$$z_{n+1} = \frac{z_n \exp\left(\frac{\lambda T}{2} - iT\right) \exp(-i\psi_n)}{\sqrt{1 + |z_n|^2 \frac{\exp(\lambda T) - 1}{4\lambda}}} + iB, \quad (2)$$

где

$$\psi_n = \frac{3}{2}\beta \ln \left| \frac{|z_n|^2}{4\lambda} (\exp(\lambda T) - 1) + 1 \right| \quad (3)$$

– дополнительный набег фазы, связанный с нелинейной зависимостью скорости ее изменения от амплитуды колебаний.

В свою очередь, можно сделать еще одно приближение, состоящее в том, что в промежутке между импульсами изображающая точка успевает вернуться на предельный цикл. Тогда из (2) при $\lambda T \gg 1$ приходим к одномерному отображению для фазы [20]

$$\theta_{n+1} = \arctg \left(\frac{\sin \theta_n + C}{\cos \theta_n} \right) - \Omega - \frac{3}{2}\beta \ln (1 + 2C \sin \theta_n + C^2). \quad (4)$$

Здесь $C = B/(2\sqrt{\lambda})$ имеет смысл нормированной амплитуды внешнего воздействия, а

$$\Omega = T \left(1 + \frac{3}{2} \beta \lambda \right) \quad (5)$$

– нормированного периода.

Уравнения (1), (2), (4) образуют иерархию моделей (дифференциальная система, двумерное отображение, одномерное отображение), описывающих синхронизацию автоколебательной системы короткими импульсами. На рис. 1 показаны карты динамических режимов для дифференциальной системы и ее двумерного отображения при значениях параметров $\lambda = 0.2$ и $\beta = 1$. На картах оттенками серого цвета обозначены определяемые численно области различных периодических режимов. Белый цвет соответствует режиму периода 1, а черный – квазипериодическим режимам и хаосу. Для дифференциальной системы (1) периоды режимов определялись в стробоскопическом сечении, проводимом через период воздействия. На рис. 1 можно видеть систему языков синхронизации, причем указанный метод выявляет и их сложное внутренне устройство: наличие удвоений, характерных структур «crossroad area» [28] и др. Различные языки синхронизации периода 1 на рис. 1 отвечают разному числу оборотов изображающей точки на фазовой плоскости вокруг начала координат в промежутке между импульсами. Отметим, что значение параметра

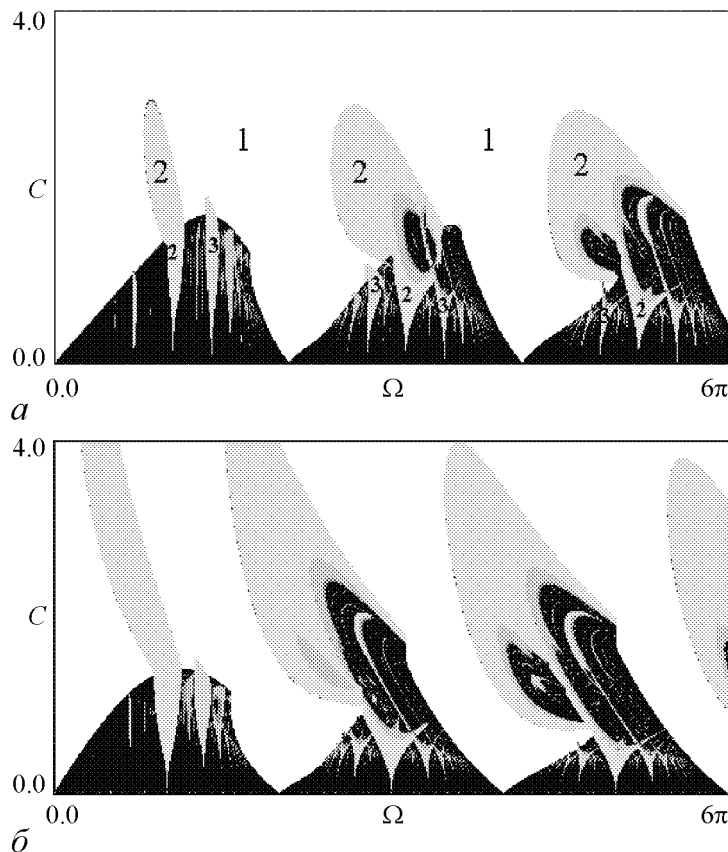


Рис. 1. Карты динамических режимов: *a* – возбуждаемого импульсами осциллятора ван дер Поля–Дуффинга (1); *б* – полученного для него двумерного отображения (2)

$\lambda = 0.2$ невелико, поэтому квазигармоническое приближение эффективно, и рисунки для дифференциальной системы и двумерного отображения мало различаются. Для значений λ больше или порядка единицы это оказывается уже не так [14, 19, 20].

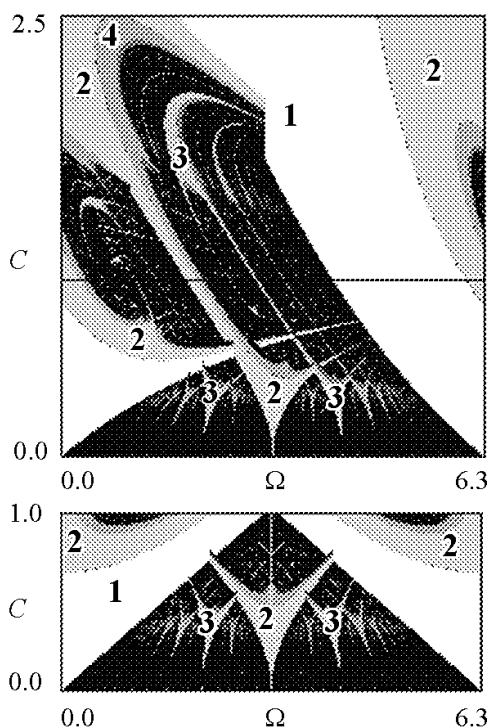


Рис. 2. *a* – Карта динамических режимов отображения окружности (4) для неизохронной системы ($\beta = 1$). *б* – Карта динамических режимов синус-отображения окружности (7)

няется условие возвращения на предельный цикл. Этот факт находит свое выражение на рис. 1 – с ростом периода воздействия (движение направо по карте) система языков модифицируется, приближаясь к картине на рис. 2, *a*. Тем не менее указанная тонкость говорит о том, что для релаксационных режимов необходим дополнительный анализ, и «универсальность» картины синхронизации может нарушаться. Соответствующее такому режиму одномерное отображение для системы ван дер Поля с импульсным возбуждением достаточно специфично. Оно получено и обсуждается в [14].

Еще одна особенность одномерного отображения для фазы (4) – строгая периодичность по нормированному периоду воздействия Ω , заданному выражением (5). Природа этой периодичности состоит в том, что режимы, различающиеся на целое число оборотов изображающей точки вокруг начала координат, неразличимы. Для исходной системы (1) и для двумерного отображения (2), как хорошо видно на рис. 1, это не так.

1.2. Сравнение синхронизации изохронных и неизохронных систем. При анализе моделей (1), (2), (4) выделяются два важных случая: изохронные и существенно неизохронные системы. Первые отличаются тем, что параметр β равен

На рис. 2, *a* показана карта динамических режимов одномерного отображения для фазы (4) при $\beta = 1$. Можно видеть характерную структуру языков синхронизации, которую интересно сравнить с рис. 1. На первый взгляд может показаться, что условия работоспособности двумерного и одномерного отображений противоречивы: для эффективности первого нужно, чтобы было справедливо квазигармоническое приближение, то есть $\lambda \ll 1$. С другой стороны, для эффективности одномерного отображения необходима быстрая возвращаемость изображающей точки на предельный цикл. Это противоречие снимается за счет того, что последнее условие может быть обеспечено не только большой величиной самого параметра λ , но и его соотношением с периодом воздействия, то есть $\lambda T \gg 1$. Физически это легко объяснимо: чем реже импульсы, тем дольше свободно движется изображающая точка, и тем лучше в промежутке между импульсами выполняется

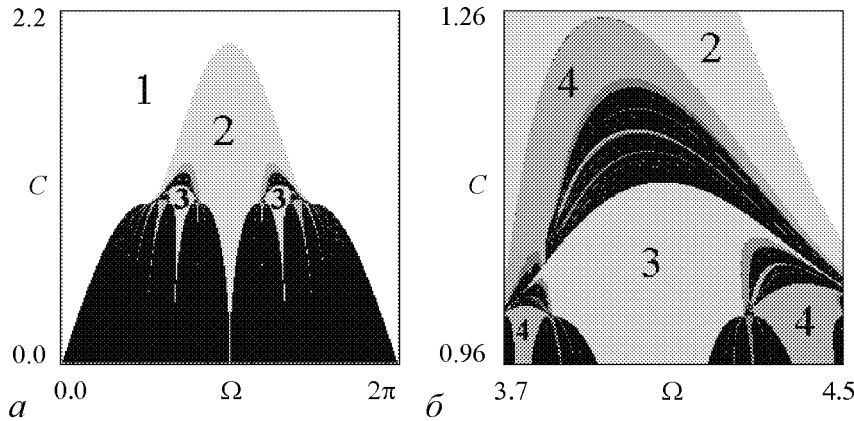


Рис. 3. Карта динамических режимов отображения Гласса (6); б – увеличенный фрагмент

нулю. В этом случае в соответствии с (2) и (3) набег фазы за время между импульсами равен просто T и не зависит от радиуса орбиты осциллятора. Последнее и определяет свойство изохронности системы.

Простейшая модель возбуждаемой импульсами изохронной системы получается из (4) при $\beta=0$ и имеет вид

$$\theta_{n+1} = \text{arctg}\left(\frac{\sin \theta_n + C}{\cos \theta_n}\right) - T. \quad (6)$$

Это отображение впервые, по-видимому, было получено Л. Глассом [7–9].

Для неизохронной системы, для которой параметр β отличен от нуля, при описании динамики фазы следует использовать обобщенное отображение окружности (4). Если неизохронность достаточно велика, а именно параметр β порядка или больше единицы, из (4) в случае небольших значений амплитуды воздействия C ($C \ll 1$) нетрудно получить стандартное синус-отображение окружности [1, 28] вида

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - 3\beta C \sin \theta_n. \quad (7)$$

Карта динамических режимов изохронного отображения Гласса (6) и ее увеличенный фрагмент показаны на рис. 3. Карта неизохронной системы (4) при $\beta = 1$ показана на рис. 2, а. Рядом, на рис. 2, б, в соответствующих масштабах показана карта динамических режимов для стандартного синус-отображения окружности (7). Таким образом, рис. 2 иллюстрирует эффективность последнего в области $C < 1$ в случае большой неизохронности.

Проведем краткое сравнение отображений для изохронной и неизохронной систем. Оба они выявляют систему языков синхронизации, в промежутках между которыми реализуются квазипериодические режимы. В обоих случаях возникает ситуация перекрытия языков: при $C = 1$ для изохронной системы, и при $C \approx 1/(3\beta)$ для неизохронной². Что касается внутреннего устройства языков синхронизации и

²Условие $C = 1$ имеет простой физический смысл – амплитуда импульса точно равна размеру предельного цикла автономной системы. С этим и связана особая роль данного условия. Оценку $C \approx 1/(3\beta)$ получаем из (7), приравняв единице множитель перед синусом.

области выше линии их перекрытия, то здесь имеют место существенные различия. Так, удвоения периода в изохронной системе реализуются при уменьшении амплитуды воздействия, а в неизохронной – наоборот, при ее увеличении. При этом для изохронной системы вдоль линии $C = 1$ отображение для фазы является кусочно-линейным, а для стандартного синус-отображения окружности линия начала перекрытия языков определяется условием появления кубической точки перегиба. Соответственно, закономерности лестницы чисел вращения на этой линии оказываются в этих случаях существенно разными. (Сравните соответствующее обсуждение изохронной системы в работах [10–12] и «классическое» ренормгрупповое описание для синус-отображения окружности [28, 29].) Другие детали, отличающие изохронные и неизохронные системы с импульсным возбуждением, можно найти в работе [20]. Обсуждение двумерной изохронной модели (2), а также целый ряд «тонкостей», связанных с ее предельным переходом к одномерному отображению (6), содержится в работе [7].

Таким образом, неизохронность играет важную роль в устройстве пространства параметров системы, причем именно для существенно неизохронных систем работоспособно традиционное синус-отображение окружности.

1.3. Эффект стабилизации неустойчивых предельных циклов. Свойство неизохронности обуславливает еще один интересный эффект в возбуждаемых импульсами системах. Обратимся к ситуации, когда в автономной системе имеет место субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. А именно, когда при $\lambda > 0$ фокус в начале координат из неустойчивого становится устойчивым и от него отделяется неустойчивый предельный цикл. Для этого рассмотрим следующую дифференциальную систему, которая возбуждается периодической последовательностью δ -импульсов:

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = B \sum \delta(t - nT); \quad (8)$$

(отличие от системы (1) состоит в смене знака перед диссипативным членом).

На рис. 4 показана карта динамических режимов системы (8) на плоскости параметров период T – амплитуда B внешнего воздействия для $\lambda = 1.2$. На этой карте доминируют области периода один и область убегания траекторий на бесконечность, показанная одним из оттенков серого цвета. Это физически совершенно естественно: при малых амплитудах воздействия изображающая точка приближается к устойчивому фокусу, при больших – импульсы «выбрасывают» ее за границы неустойчивого цикла, и точка уходит на бесконечность. Однако на карте, представленной на рис. 4, можно видеть и очень узкую полосу устойчивых режимов другого типа, разделяющую эти области. На рис. 4 приведен увеличенный фрагмент карты, на котором полоса устойчивых режимов показана более детально. Внутри нее наблюдаются квазипериодические режимы со встроенной системой языков синхронизации периода два, три и т.д. Для этих режимов представлены портреты аттракторов (рис. 4, *a–d*). На них хорошо видно, что траектория движется в окрестности неустойчивого предельного цикла автономной системы, при этом с течением времени она уходит от него, а внешний сигнал своими ударами возвращает траекторию в эту окрестность.

Однако одной «возвращаемости» траекторий недостаточно для стабилизации неустойчивости, поскольку две близкие траектории даже в этом случае могут

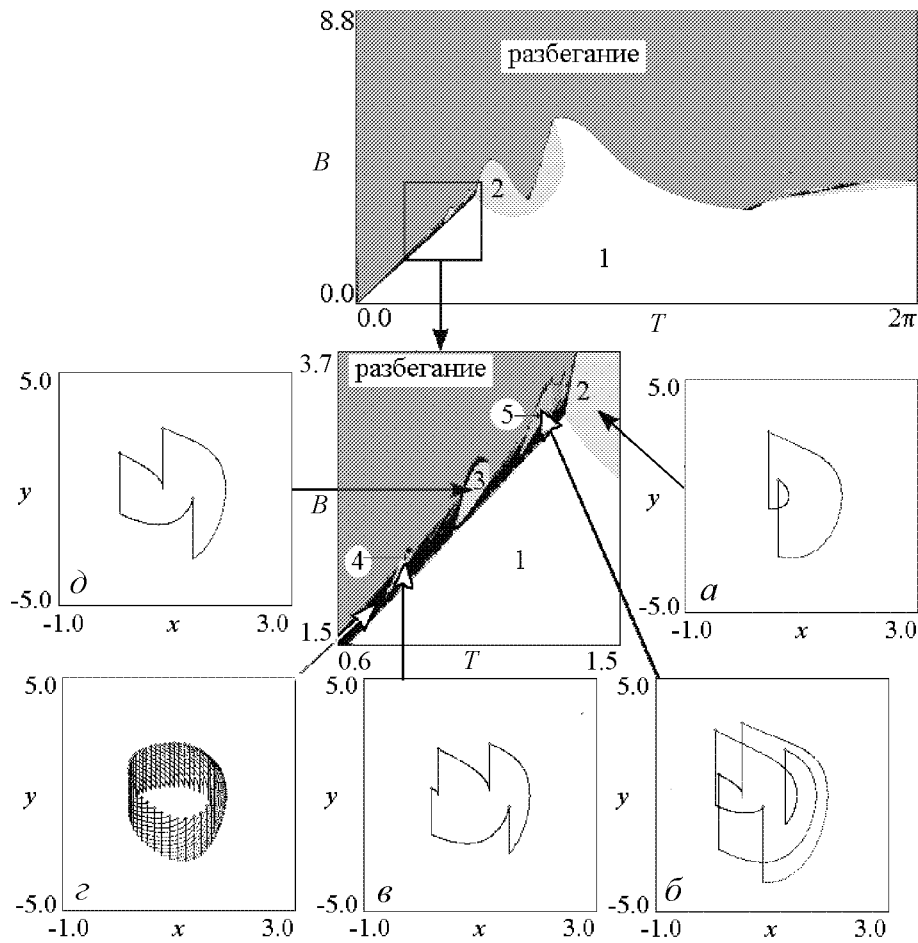


Рис. 4. Карта динамических режимов возбуждаемой импульсами системы с неустойчивым предельным циклом (8), ее увеличенный фрагмент и портреты аттракторов для языков синхронизации периодов: два (*a*), три (*д*), четыре (*в*), пять (*б*) и квазипериодического режима (*з*). Все иллюстрации построены для $\lambda = 1.2$, $\beta = 1$

расходиться. Принципиальную роль в этом процессе играет неизохронность. Этот факт иллюстрирует рис. 5, на котором показано по паре фазовых траекторий, стартовавших из близких точек в окрестности неустойчивого цикла. Рис. 5, *a* относится к случаю отсутствия неизохронности; *б* – к случаю сильно неизохронной системы. Хорошо видно, что траектории на рис. 5, *a* достаточно быстро расходятся, несмотря на наличие внешних импульсов.

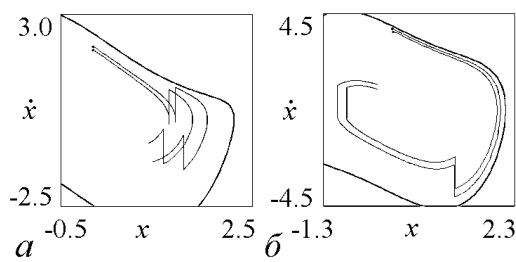


Рис. 5. Фазовые траектории, стартовые из близких точек в окрестности неустойчивого предельного цикла (показан жирной линией) для системы (8) в случае $\beta = 0$ (*a*) и $\beta = 1$ (*б*). Остальные параметры $\lambda = 1.2$, $T = 1.5$ и $B = 1.8$

В свою очередь, из рис. 5, *б* видно, что благодаря соответствующей зависимости угловой скорости от амплитуды изображающая точка, движущаяся по орбите большего радиуса, ускоряется. В результате расстояние между траекториями после двух

импульсов практически не изменилось. Другими словами, неизохронность (или фазовая нелинейность) компенсировала неустойчивость. Более детальное обсуждение стабилизации импульсами системы (8) с неустойчивым предельным циклом можно найти в работах [21, 22].

1.4. Синхронизация импульсами автогенератора с жестким возбуждением у порога исчезновения автоколебаний. Мы рассмотрели колебательные явления в возбуждаемых импульсами системах с устойчивым или неустойчивым предельными циклами. Однако интересные режимы при наличии импульсного возбуждения может демонстрировать и система, в которой сосуществуют оба эти цикла. Одна из таких возможных моделей рассмотрена, например, в [15]. Обратимся здесь к классической модели автогенератора с жестким возбуждением [4, 5], находящимся под воздействием периодической последовательности δ -импульсов³

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2 + kx^4)\dot{x} + x + \beta x^3 = B \sum \delta(t - nT). \quad (9)$$

Здесь по сравнению с (8) появился новый бифуркационный параметр k . При малых k в автономной системе (9) имеется неустойчивый предельный цикл, близкий к предельному циклу системы (8). Кроме того, имеется устойчивый предельный цикл

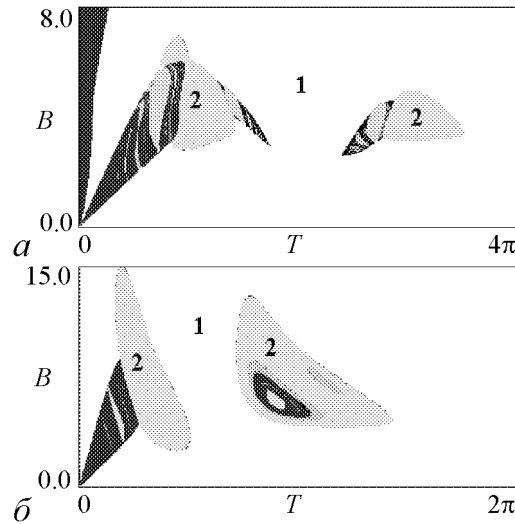


Рис. 6. Карты динамических режимов неавтономного автогенератора с жестким возбуждением (9) за порогом бифуркации слияния устойчивого и неустойчивого циклов: a – для изохронного случая ($\beta = 0, \lambda = 1.2, k = 0.11$) и b – для неизохронного ($\beta = 2, \lambda = 1.2, k = 0.165$)

и за ним, когда предельные циклы в автономной системе исчезли. В этом случае устойчивые режимы реализуются в окрестности «сгущения» фазовых траекторий, образовавшегося вблизи орбиты, отвечающей слиянию циклов. На карте хорошо видны как квазипериодические, так и синхронные режимы. При этом области устойчивых режимов на плоскости параметров период–амплитуда воздействия выглядят как острова квазипериодических режимов, которые пересекают окна периодических

большого радиуса. С ростом k предельные циклы сближаются и при некотором бифуркационном значении $k_{\text{биф}}$ сливаются и исчезают [2, 4–5]. С помощью квазигармонического приближения для бифуркационного значения параметра имеем оценку $k_{\text{биф}} = 1/(8\lambda)$ [5]. Как следствие, для $\lambda = 1.2$ (значение, которое будем использовать далее) оценка с помощью укороченного уравнения дает $k_{\text{биф}} \approx 0.10417$, а для дифференциальной системы (9) численно можно найти весьма близкое значение $k_{\text{биф}} = 0.10791$.

На рис. 6, a показана карта динамических режимов системы (9) в изохронном случае для значения параметра k немного больше бифуркационного. Можно констатировать, что устойчивые режимы сохраняются не только до порога бифуркации слияния циклов, но и

³Имеется обширная литература, относящаяся к такой системе под действием гармонического сигнала, начиная с классических работ Л.И. Мандельштама и Н.Д. Папалекси [30], в которых приближенными методами выявлена возможность режимов биений в ситуации, когда автоколебания в автономном режиме отсутствуют. Здесь мы ограничиваемся системами с импульсным возбуждением и не используем приближенных методов.

режимов. С ростом параметра k острова уменьшаются в размерах и поэтапно исчезают. При этом исчезают в первую очередь те из них, которые отвечают большим периодам воздействия. Это естественно – чем больше промежуток времени между импульсами, тем дальше движется изображающая точка, и тем ближе она оказывается к устойчивому фокусу в начале координат.

Учет неизохронности также заметно сказывается на характере наблюдаемых режимов. В случае сильно неизохронной системы острова устойчивых режимов за порогом бифуркации слияния циклов сохраняются, однако среди них начинают доминировать области удвоенного периода и хаоса, которые вытесняют квазипериодические режимы (рис. 6, б). Важно отметить и то, что с ростом неизохронности растет и бифуркационное значение $k_{\text{биф}}$.

2. Трехмерные системы

2.1. Зависимость картины синхронизации от направления импульсов.

Известно множество автоколебательных систем с трехмерным фазовым пространством: система Ресслера, генератор Анищенко–Астахова, генератор Кислова–Дмитриева и др. [1–2, 4, 28, 31]. В этих системах также возможна бифуркация Андронова–Хопфа. Поэтому, в силу универсальности этой бифуркации, на первый взгляд кажется, что картина синхронизации импульсами для таких систем должна укладываться в рамки картины, описанной в п. 1.1 и 1.2. Отличия могут наступать лишь в области, где существенно проявляется наличие третьего измерения в автономной системе: удвоения периода и хаос. Это оказывается, однако, не вполне так. Действительно, бифуркация Андронова–Хопфа универсальна. Однако в трехмерной системе она «разыгрывается», фактически, на некоторой поверхности, вложенной в трехмерное фазовое пространство. Поэтому действие импульсов в пределах этой поверхности дает описанную выше картину. Однако есть третье, трансверсальное к указанной поверхности направление. Картина синхронизации при действии импульсов в этом направлении вполне может оказаться иной. Это можно проиллюстрировать на примере системы Ресслера [28]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + py, \\ \dot{z} &= q + z(x - r),\end{aligned}\tag{10}$$

где x, y, z – динамические переменные; p, q, r – параметры системы. Положим значения параметров $p = 0.2, q = 0.1, r = 1.5$. В этом случае в автономной системе Ресслера реализуется устойчивый предельный цикл. Его особенность состоит в том, что он почти целиком располагается в плоскости (x, y) и лишь малая его часть «выступает» в направлении оси z . На рис. 7 показаны карты динамических режимов системы (10) с внешним импульсным воздействием на плоскости параметров период T – амплитуда B воздействия. Периоды режимов, отмеченных на карте, определялись в стробоскопическом сечении, проводимом через период воздействия.

Нетрудно видеть, что рис. 7, а вполне отвечает ситуации, рассмотренной в п. 1.1 и 1.2, и система языков синхронизации качественно близка случаю двумерных неизохронных систем и стандартному синус-отображению окружности. Однако имеется и отличие – в трехмерной системе появляется область убегания тра-

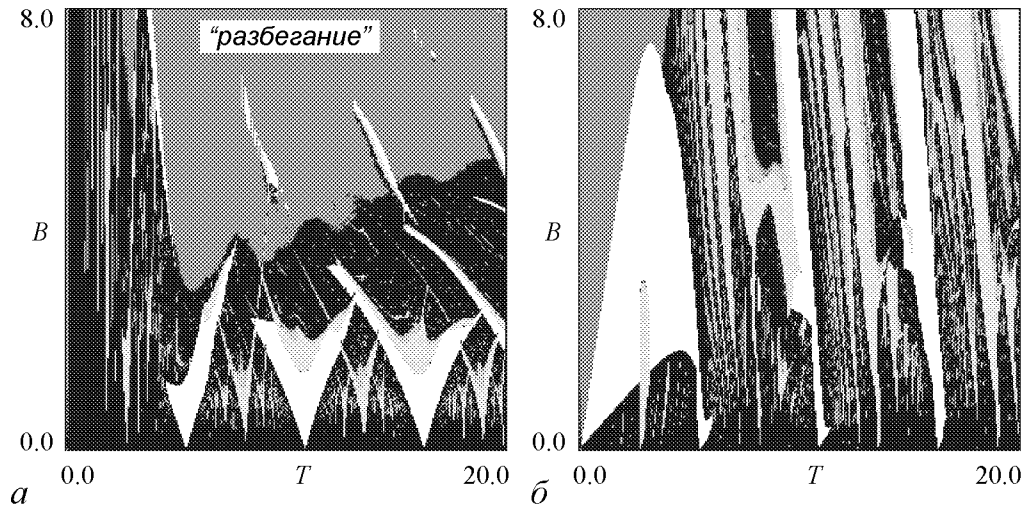


Рис. 7. Карты динамических режимов неавтономной системы Ресслера в случае воздействия импульсов вдоль оси x (а) и вдоль оси z (б)

ектории на бесконечность, отвечающая достаточно большой амплитуде импульсов. А вот рис. 7, б дает совершенно другую, специфическую картину языков синхронизации. Таким образом, картина синхронизации в трехмерных автоколебательных динамических системах может зависеть от направления действия импульса. Более подробное обсуждение этих вопросов и другие примеры (в частности, генератор Кислова–Дмитриева) можно найти в работах [24–26].

2.2. Стабилизация импульсами в режиме «убегающей» траектории.

В трехмерных динамических системах возможны и другие интересные колебательные режимы, инициированные внешним воздействием. Будем, например, уменьшать ответственный за бифуркацию Андронова–Хопфа основной управляющий параметр. Тогда предельный цикл будет уменьшаться в размере, пока не исчезнет. Оставшаяся устойчивая неподвижная точка также может исчезнуть в результате последующей седло-узловой бифуркации. Особенность трехмерных систем состоит в том, что неподвижные точки характеризуются не двумя, а тремя собственными числами. Поэтому в результате седло-узловой бифуркации могут слиться, например, устойчивый фокус и седло-фокус [2]. После слияния точек такого типа создается поток фазовых траекторий «с вращением», и у системы сохраняется некоторый внутренний ритм, хотя устойчивые и неустойчивые режимы в автономной системе отсутствуют. Такая ситуация не имеет аналога в двумерных системах и создает определенные предпосылки для возникновения синхронных и квазипериодических режимов.

Обсудим описанную ситуацию на примере системы Ресслера (10). Эта система имеет две неподвижные точки

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{r \mp \sqrt{r^2 - 4pq}}{2}, \\
 y_0 &= \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4pq}}{2p}, \\
 z_0 &= \frac{r \mp \sqrt{r^2 - 4pq}}{2p}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что седло-узловая бифуркация имеет место при условии $r^2 = 4pq$. Зафиксируем параметры $p = 0.2$, $q = 0.2$. Тогда седло-узловая бифуркация происходит при $r = 0.4$. Соответствующее характеристическое уравнение в этой точке имеет одно действительное и пару комплексно-сопряженных собственных чисел

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{2}. \quad (12)$$

Таким образом, можно оценить период внутреннего «ритма» системы как

$$T_{\text{вн}} = \frac{2\pi}{|\text{Im}\lambda_{2,3}|} = \sqrt{2}\pi \approx 4.5. \quad (13)$$

Понятно, что при некотором смещении от точки бифуркации период осцилляций несколько изменится, но не сильно. На рис. 8, *a* показана реализации $x(t)$ автономной системы Ресслера при $r = 0.2$, что отвечает отсутствию неподвижных точек в системе. Нетрудно видеть, что динамика переменной x действительно характеризуется наличием осцилляций, причем их период хорошо совпадает с оценкой, данной формулой (13). Динамика переменной $y(t)$ также характеризуется наличием осцилляций, на которые наложен медленный дрейф. Этот дрейф, в конечном итоге, и отвечает за убегание изображающей точки на бесконечность (рис. 8, *б*).

Добавим теперь в систему (10) внешнее импульсное воздействие следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z + B \sum \delta(t - nT), \\ \dot{y} &= x + py, \\ \dot{z} &= q + z(x - r). \end{aligned} \quad (14)$$

На рис. 8 вместе с реализациями автономной системы показаны и реализации возбуждаемой системы (14). Из рис. 8, *a* нетрудно видеть, что имеет место режим синхронизации с соотношением частот 1:4 по отношению к внутреннему ритму системы. Графики реализации $y(t)$ на рис. 8, *б* демонстрируют, как внешние толчки меняют скорость изменения переменной y и тем самым компенсируют дрейф, характерный для свободного движения.

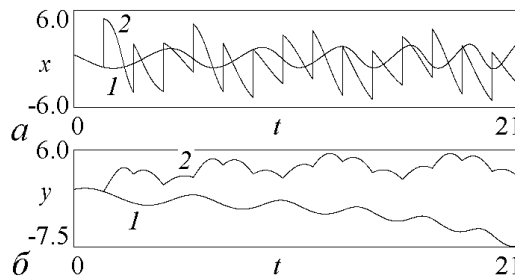


Рис. 8. Реализации автономной (1) и возбуждаемой импульсами (2) системы Ресслера $x(t)$ и $y(t)$ при $p = q = r = 0.2$. Импульсы включаются в момент времени $t = 1.4$

На рис. 9 показана карта динамических режимов системы (14) на плоскости параметров период – амплитуда внешнего воздействия в случае, когда в автономной системе вообще нет неподвижных точек. Тем не менее нетрудно видеть, что наряду с областью убегания траектории на бесконечность возможны и устойчивые режимы. Так, имеет место система языков синхронизации разной кратности. Внутри языков можно видеть области удвоенного периода. Вне языков реализуются квазипериодические режимы. Рядом с картой показаны фазовые портреты системы в режиме синхронизации 1:4 и в случае квазипериодических колебаний. На портретах аттракторов хорошо видны импульсы, действующие на систему в направлении оси x .

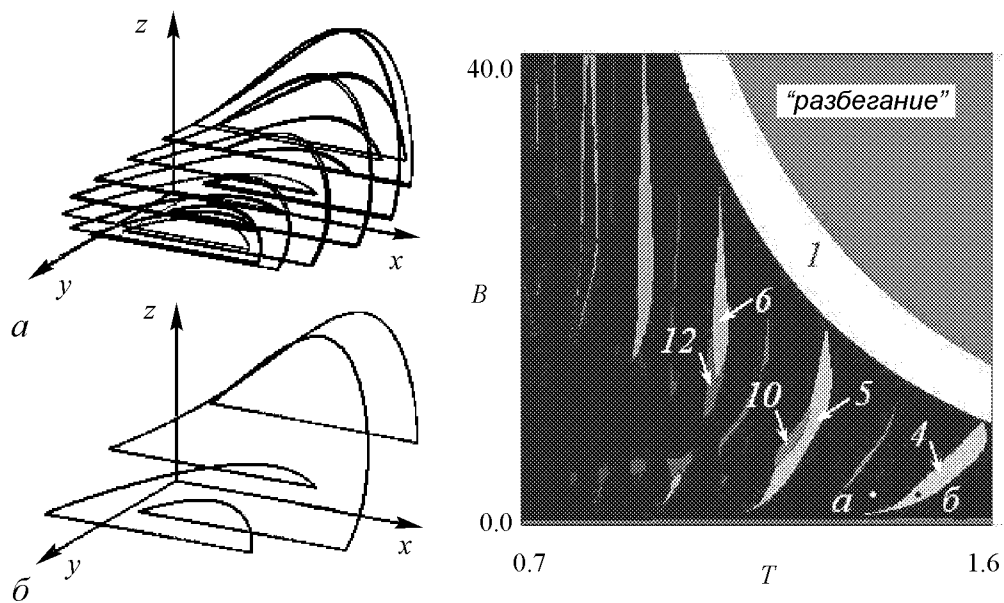


Рис. 9. Карта динамических режимов возбуждаемой импульсами системы Ресслера (14) и портреты аттракторов, отвечающих режиму периода 4 – точка \bar{b} ($T = 1.4$, $B = 6$) и квазипериодическому режиму – точка a ($T = 1.3$, $B = 6$)

Таким образом, особенности трехмерных динамических систем дают возможность наблюдать устойчивые синхронные режимы разной кратности и квазипериодические режимы даже в случае, когда в автономной системе отсутствуют неподвижные точки и аттракторы.

2.3. Удвоения торов в системе с «убегающей» траекторией. Возбуждаемая импульсами трехмерная динамическая система в режиме «убегающих» траекторий может демонстрировать еще один интересный тип поведения. Вновь обратимся к неавтономной системе Ресслера (14). При постепенном уменьшении периода воздействия при фиксированной амплитуде в системе (14) возрастает кратность языков синхронизации (рис. 9) и, соответственно, число импульсов, наблюдаемых на аттракторе. В этом случае удобно перейти от фазовых портретов типа рис. 9 к сечениям Пуанкаре. С этой целью в трехмерном пространстве (x, y, z) изображаем последовательно точки, отвечающие стробоскопическому сечению Пуанкаре, то есть «зафиксированные» через период внешнего воздействия T . Примеры таких иллюстраций даны на рис. 10. На нем можно видеть замкнутую инвариантную кривую, которая, в силу определения сечения Пуанкаре, отвечает квазипериодическому режиму.

Будем еще более уменьшать период воздействия. Если периоды воздействия будут совсем малыми, то возникает новый эффект. Инвариантная кривая становится «двухоборотной» (рис. 10, б). В нелинейной динамике принято называть такой тип перестройки удвоением тора [31]. При дальнейшем уменьшении периода воздействия происходит удвоение уже двухоборотной инвариантной кривой и т.д. (рис. 10, в, г).

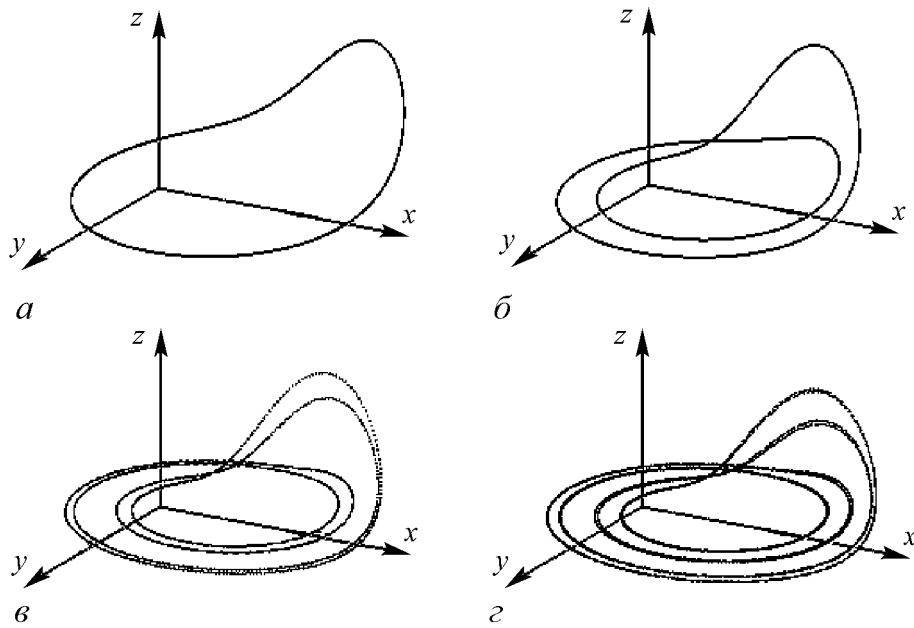


Рис. 10. Иницированные импульсами удвоения торов в системе Ресслера (14) в режиме «убегающей» траектории. Показаны траектории, отвечающие стробоскопическому сечению Пуанкаре через период внешнего воздействия. Параметры неавтономной системы выбраны следующие: $p = q = r = 0.2$; $B = 6$; $T = 0.5$ (а); 0.4 (б); 0.32 (в); 0.305 (г)

Итак, в трехмерной системе с «убегающими» в автономном режиме траекториями возможен каскад удвоения торов, реализующийся при уменьшении периода воздействия. При этом особенность данной задачи – большое число наблюдаемых удвоений торов, когда торы не разрушаются, что связано, надо полагать, с очень простой динамикой автономной системы.

3. Четырехмерные системы

3.1. Взаимная синхронизация неизохронных осцилляторов. Перейдем теперь к обсуждению свойств системы с четырехмерным фазовым пространством. Она может состоять из двух составляющих – самостоятельных двумерных автоколебательных систем, а значит, может наблюдаться «внутренняя», взаимная синхронизация. Теория взаимной синхронизации систем с предельными циклами – обширная область теории колебаний и нелинейной динамики, и ей посвящено значительное число работ (см., например [1–4, 32–44] и цитированную там литературу). Мы обсудим некоторые ее аспекты, не получившие пока достаточного освещения.

Классической моделью для изучения взаимной синхронизации может служить система связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)y + \beta y^3 + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь λ_1 и λ_2 – параметры, характеризующие степень превышения над порогом бифуркации Андронова–Хопфа в автономных осцилляторах; Δ – частотная расстройка

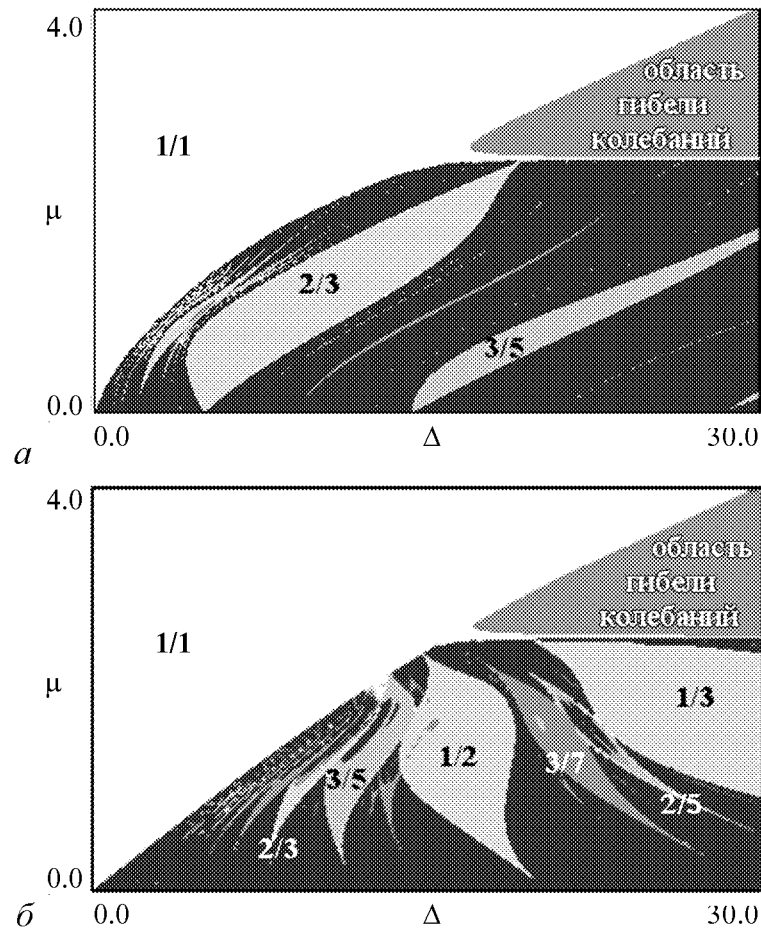


Рис. 11. Карты динамических режимов системы (15) в случае изохронных $\beta = 0$ (а) и неизохронных $\beta = 1$ (б) связанных осцилляторов. Управляющие параметры: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2.5$

второго осциллятора относительно первого; β – параметр неизохронности осцилляторов; μ – коэффициент диссипативной связи⁴.

Как мы видели при обсуждении режимов вынужденной синхронизации в п. 1.1 и 1.2, неизохронность оказывает заметное влияние на картину наблюдаемых режимов. Естественно ожидать, что неизохронность заметно скажется и на динамике системы (15). Показанные на рис. 11 карты динамических режимов (15) позволяют сравнить между собой изохронный (рис. 11, а) и неизохронный (рис. 11, б) случаи. Сделаем одно замечание, касающееся построения карт режимов для связанных систем. В этом случае нет воздействия с фиксированным периодом, поэтому построить стробоскопическое сечение Пуанкаре невозможно. Исследуемая система характеризуется четырехмерным фазовым пространством (x, \dot{x}, y, \dot{y}) . Поэтому в качестве сечения Пуанкаре будет выступать трехмерная гиперповерхность, заданная некоторым дополнительным условием, например, равенством нулю скорости второго осциллятора $\dot{y} = 0$. В этом случае определялось число точек n пересечений траектории и секущей. На картах цвет выбран в соответствии с периодом n .

⁴Мы ограничиваемся здесь случаем связи через скорости осцилляторов, то есть диссипативной связи.

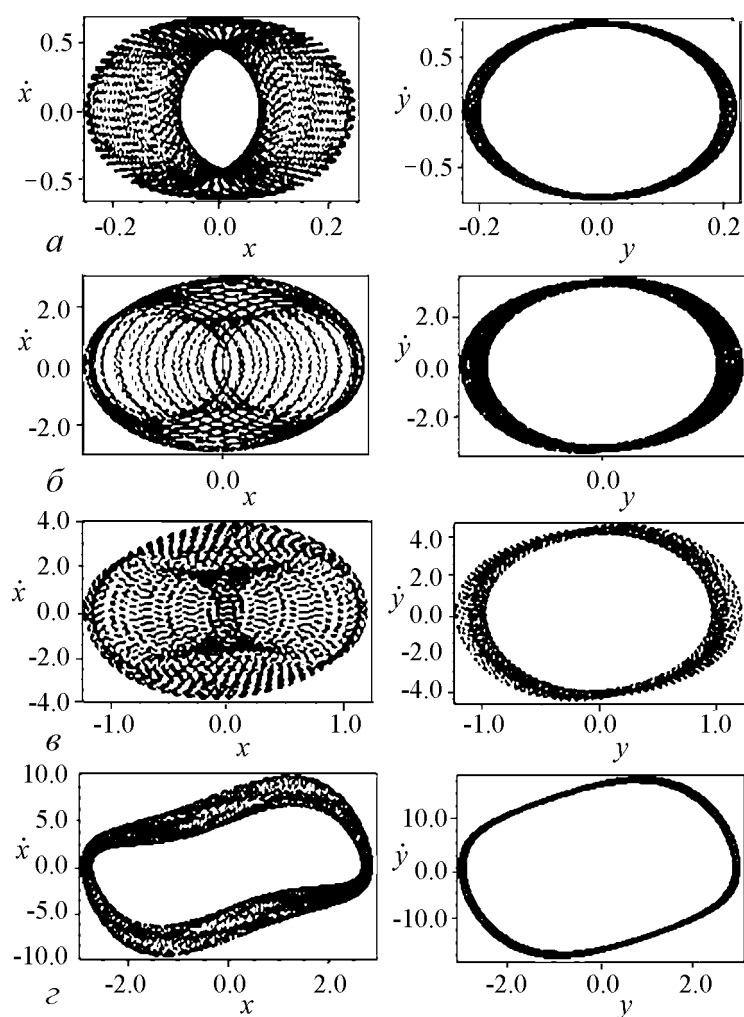


Рис. 12. Фазовые портреты квазипериодических режимов первого и второго связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга (15). (Здесь и далее первому осциллятору соответствует переменная x , второму y .) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2.5$, $\beta = 1$. Значения параметров: $\Delta = 19.82$, $\mu = 2.48$ (а); $\Delta = 19.82$, $\mu = 2.31$ (б); $\Delta = 19.82$, $\mu = 2.21$ (в); $\Delta = 26.97$, $\mu = 0.41$ (г)

На карте рис. 11, а обнаруживаются области квазипериодического поведения, языки синхронизации с разным соотношением захваченных частот и специфическая область эффекта «гибели колебаний» [1, 32], которому отвечает устойчивая неподвижная точка, расположенная в начале координат.

Сравнение рис. 11, а и б говорит о том, что при наличии неизохронности происходит смещение кратных языков синхронизации в сторону больших значений частотной расстройки. Языки заметно расширяются, так что можно видеть ситуацию перекрытия языков синхронизации, характерную для стандартного синусотображения окружности (6). Также изменяется внутреннее устройство языков: наблюдаются удвоения периода и возникновение областей хаотической динамики внутри самих языков синхронизации. С ростом параметра неизохронности β происходит рождение новых островов удвоенного периода. Визуально возникают две системы языков, вершины первой выстроены вдоль линии нулевой связи, а второй – вдоль

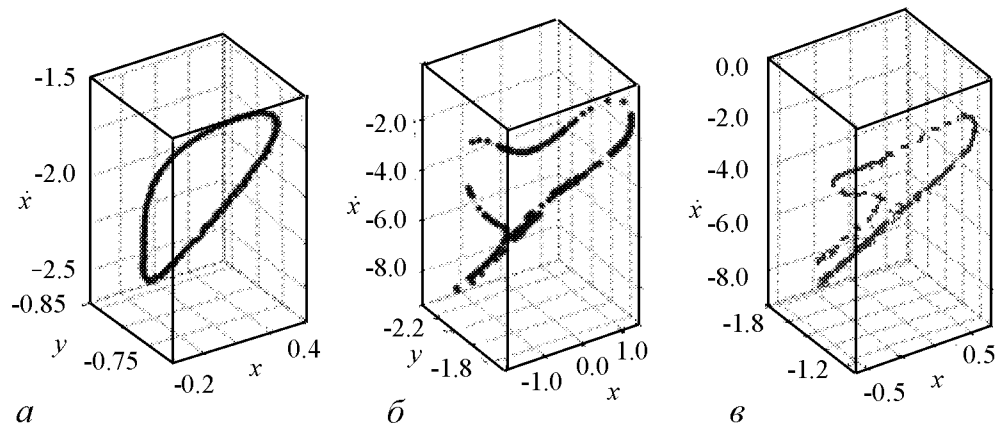


Рис. 13. Инвариантная кривая и ее разрушение в сечении Пуанкаре связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга (15). $\lambda_1 = \lambda_2 = 2.5$, $\beta = 1$. Отмечены точки, отвечающие стробоскопическому сечению через период воздействия. Значения параметров: $\Delta = 18.72$, $\mu = 2.33$ (а); $\Delta = 12.51$, $\mu = 1.63$ (б); $\Delta = 10.05$, $\mu = 1.56$ (в)

границы основной области синхронизации 1:1, которая, очевидно, является линией бифуркации Неймарка–Сакера. Область хаоса формируется в пространстве, разделяющем эти системы языков синхронизации.

На рис. 12 показано несколько характерных фазовых портретов первого и второго осциллятора системы (15) в квазипериодическом режиме. При небольшой связи портреты аттракторов представляют собой достаточно мало возмущенные предельные циклы индивидуальных осцилляторов. При этом изображающая точка никогда не посещает окрестность начала координат. С ростом связи траектории индивидуальных осцилляторов возмущаются все сильнее, и наступает момент, когда изображающая точка первого осциллятора может посещать и окрестность начала координат. Соответствующий фазовый портрет выглядит как полностью «замазанный» траекториями. Очевидно, что фаза этого осциллятора оказывается плохо определяемой. По мере приближения к области гибели колебаний происходит существенное уменьшение размера аттракторов (см. масштабы по осям координат). Изображающая точка вновь перестает посещать начало координат, но вид аттрактора отличается от случая малой связи.

На рис. 13 представлены некоторые трехмерные «сечения Пуанкаре», иллюстрирующие динамику системы связанных осцилляторов в областях квазипериодических режимов и вблизи порога хаоса. Напомним, что сечение Пуанкаре выбиралось в виде гиперповерхности $\dot{y} = 0$ в четырехмерном фазовом пространстве (x, \dot{x}, y, \dot{y}) . Таким образом, сечение Пуанкаре – это траектория системы в трехмерном пространстве (x, \dot{x}, y) , как и показано на рис. 13. Можно видеть, что фазовый портрет в таком сечении Пуанкаре представляют инвариантные кривые, что иллюстрирует квазипериодический характер динамики. При приближении к области хаоса кривые начинают деформироваться и разрушаются через потерю гладкости.

3.2. Синхронизация неидентичных осцилляторов. Широкополосная синхронизация. Мы рассмотрели случай синхронизации идентичных по управляющим параметрам осцилляторов $\lambda_1 = \lambda_2$. Стоит отметить, что это традиционное предположение, характерное почти для всех публикаций на данную тему. В то же время

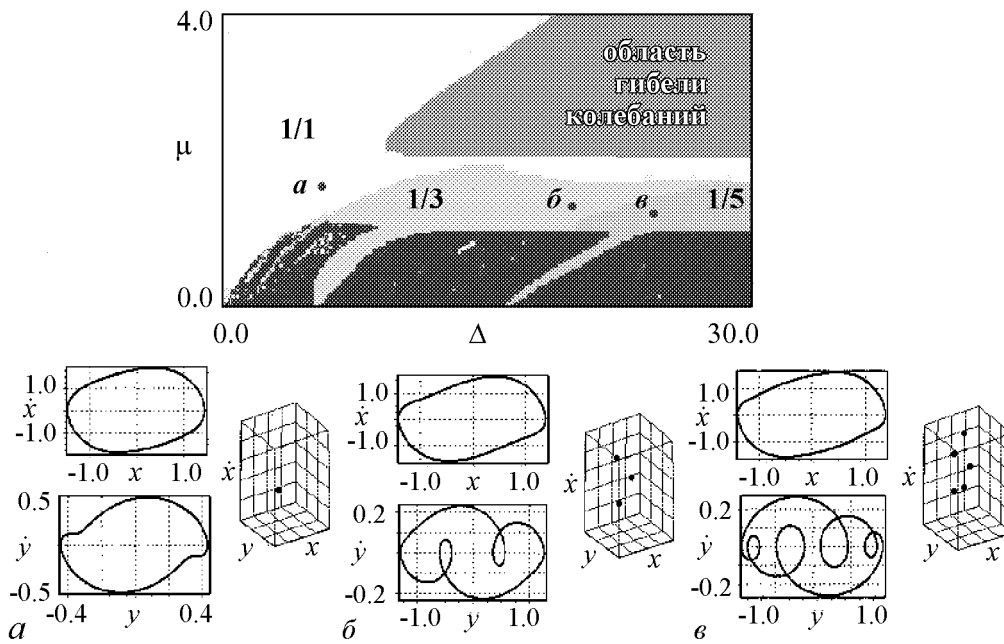


Рис. 14. Карта динамических режимов системы связанных неидентичных осцилляторов ван дер Поля (15) для $\lambda_1 = 2.0$, $\lambda_2 = 1.0$, $\beta = 0$ и характерные фазовые портреты первого и второго осцилляторов, а также трехмерные портреты аттракторов в сечении Пуанкаре, отвечающем пересечению поверхности $\dot{y} = 0$

случай неидентичных управляющих параметров выявляет интересные и существенные особенности картины синхронизации [40, 42–44]. На рис. 14 показана карта динамических режимов и характерные фазовые портреты осцилляторов в случае неидентичных параметров ($\lambda_1 = 2.0$, $\lambda_2 = 1.0$). Можно видеть, что неидентичность существенно сказалась на устройстве плоскости параметров. Область гибели колебаний и квазипериодических режимов оказалась разделенной узкой полосой синхронных периодических режимов. Размер этой полосы определяется по величине связи управляющими параметрами осцилляторов и задается неравенством $\lambda_1 < \mu < \lambda_2$.

По частотной же расстройке размер этой новой области ничем не ограничен. При продвижении внутри полосы на фазовом портрете второго осциллятора увеличивается число «петель», однако, сохраняются режимы взаимной синхронизации. Это хорошо видно также и на портретах в сечении Пуанкаре в пространстве (x, \dot{x}, y) . Мы видим небольшое число точек, что отвечает синхронным режимам, причем число пересечений с секущей поверхностью растет по мере продвижения вглубь выявленной области.

Таким образом, возникает ситуация, которую можно охарактеризовать как «широкополосная синхронизация» [43, 44]. Природа ее понятна: при условии $\lambda_2 < \mu < \lambda_1$ первый, более возбужденный осциллятор доминирует над вторым. Это находит свое воплощение в заметном уменьшении размеров предельного цикла второго осциллятора при увеличении частотной расстройки. (Обратите внимание на масштабы по осям координат на фазовых портретах.) Другие детали особенности динамики неидентичных по управляющему параметру осцилляторов можно найти в работах [40, 42–44].

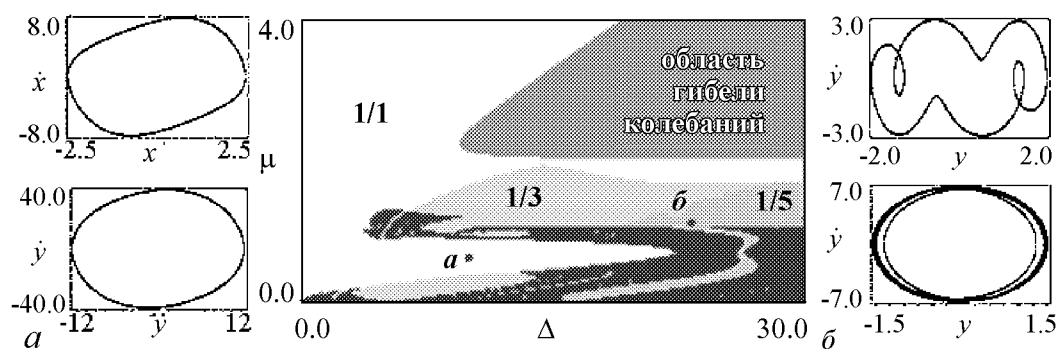


Рис. 15. Карта динамических режимов системы связанных неидентичных по управляющим параметрам и нелинейной диссипации осцилляторов ван дер Поля (16) для $\lambda_1 = 2.0$, $\lambda_2 = 1.0$, $\gamma = 0.01$, $\beta = 0$ и характерные фазовые портреты первого и второго осцилляторов в отмеченных на карте точках a и $б$

Можно, однако, при большой частотной расстройке добиться возникновения режимов синхронизации и в случае, когда осцилляторы равноправны. Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - \gamma y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)\dot{y} + \beta y^3 + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь введен дополнительный параметр γ , характеризующий нелинейную диссипацию второго осциллятора. С помощью квазигармонического приближения нетрудно получить оценки размеров предельных циклов в автономном случае: для первого осциллятора – это $\sqrt{\lambda_1}$, а для второго – $\sqrt{\lambda_2/\gamma}$. Таким образом, если использовать малые значения γ , можно заметно увеличить размер предельного цикла второго осциллятора.

Карта режимов для системы (16) при $\gamma = 0.01$, $\beta = 0$ и несколько характерных фазовых портретов показаны на рис. 15. Можно видеть, что в этом случае широкополосная синхронизация сохраняется, более того, у основного языка синхронизации появился дополнительный «отросток», в пределах которого осцилляторы теперь равноправны. (О «равноправности» или доминировании осциллятора судим по виду фазового портрета и размерам аттрактора.) В областях кратной синхронизации осцилляторы теперь могут быть как равноправными, так может произойти и смена «лидирующего» осциллятора, когда второй осциллятор доминирует.

3.3. Возбуждение импульсами диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов. Эффект «вымирания» островов квазипериодических режимов. Обратимся теперь к системе диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля, возбуждаемых внешними импульсами

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= B \sum \delta(t - nT), \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - \gamma y^2)\dot{y} + (1 + \Delta)\dot{y} + \beta y^3 + \mu(\dot{y} - \dot{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Интересным является вопрос: как проявится в динамике возбуждаемой системы возможность режима «гибели колебаний» связанных осцилляторов? Для ответа на него будем следить за устройством плоскости параметров период T – амплитуда

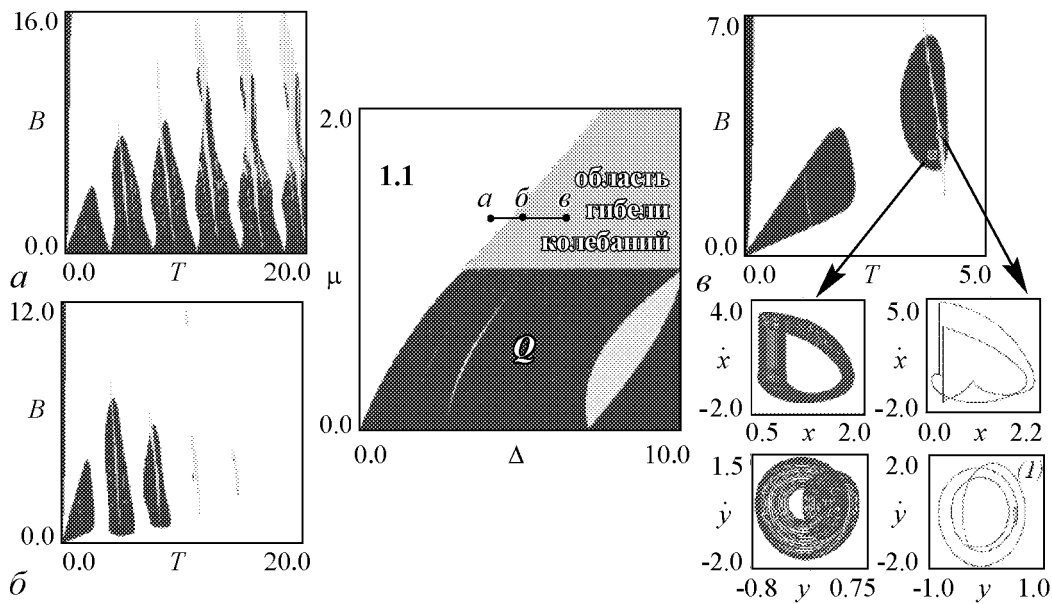


Рис. 16. Эволюция карты динамических режимов возбуждаемой импульсами системы диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля (17) при продвижении вглубь области «гибели колебаний» автономной системы: $\mu = 1.3$; $\Delta = 4(a), 5(б), 6(в)$. Фазовые портреты первого и второго осцилляторов в избранных точках «острова», отвечающих квазипериодическому режиму и режиму периода два

воздействия B , постепенно продвигаясь по плоскости параметров связанных осцилляторов вглубь области «гибели колебаний». С этой целью зафиксируем величину связи, и будем постепенно увеличивать частотную расстройку осцилляторов Δ .

На рис. 16 показаны характерные плоскости параметров воздействия (T, B) системы (17), отвечающие трем избранным точкам вблизи границы области гибели колебаний. Можно видеть, что колебательные режимы, причем достаточно разнообразные, сохраняются и внутри области гибели колебаний. В точке, отвечающей рис. 16, a , в автономной системе наблюдается захват частот колебаний осцилляторов с соотношением 1:1. В этом случае картина синхронизации в неавтономном режиме на плоскости (T, B) в значительной мере аналогична случаю воздействия импульсами на отдельный осциллятор ван дер Поля [19].

При продвижении вдоль выделенной горизонтальной линии в сторону области «гибели колебаний», однако, наблюдается существенное изменение картины. С ростом частотной расстройки Δ в момент перехода в режим гибели колебаний области квазипериодических режимов «отрываются» от оси нулевой амплитуды воздействия (переход от рис. 16, a к рис. 16, $б$). Теперь они отделены от оси областью периода 1. При этом области квазипериодических режимов образуют отдельные изолированные «острова». При дальнейшем увеличении частотной расстройки осцилляторов острова постепенно уменьшаются в размерах и поэтапно «вымирают». Наиболее долгоживущим является остров, отвечающий наименьшему периоду внешнего воздействия. При этом вымирание островов квазипериодических режимов происходит достаточно глубоко внутри области гибели колебаний системы связанных осцилляторов⁵. На рис. 16 представлены также два фазовых портрета осцилляторов, относящихся

⁵Нетрудно усмотреть здесь некоторую аналогию с механизмом исчезновения колебательных режимов в возбуждаемом импульсами автогенераторе с жестким возбуждением, см. п. 1.4.

к наиболее крупному «долгоживущему» острову. Можно видеть, что некоторые из областей периодических режимов, например, области периода 3 и 2, образуют очень узкие «окна», пересекающие остров.

Таким образом, при наличии большой диссипативной связи две связанные системы ван дер Поля ведут себя как затухающий осциллятор – демонстрируют режим «гибели колебаний». Однако внешнее импульсное воздействие даже в этом режиме выявляет присущие системе автоколебательные свойства, инициируя квазипериодическое поведение. Подчеркнем пороговый характер возникновения квазипериодических движений в режиме гибели колебаний автономных осцилляторов. А именно, для фиксированной частоты воздействия необходима некоторая минимальная величина импульсов, начиная с которой такой режим возможен.

Работа поддержана грантами РФФИ № 06-02-16773 и фонда «Династия».

Библиографический список

1. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация, фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
3. *Гласс Л., Мэки М.* От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. 248 с.
4. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, Физматлит, 1997. С. 247.
5. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. Сер. Современная теория колебаний и волн. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006.
6. *Arnold V.I.* Cardiac arrhythmias and circle mappings // *Chaos*. 1991. Vol. 1, № 1. P. 20.
7. *Glass L., Sun J.* Periodic forcing of a limit-cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations // *Phys. Rev.* 1994. Vol. 50, № 6. P. 5077.
8. *Glass L. et al.* Global bifurcations of a periodically forced biological oscillator // *Phys. Rev. A*. 1983. № 29. P. 1348.
9. *Keener J.P., Glass L.* Global bifurcation of a periodically forced nonlinear oscillator // *J. Math. Biology*. 1984. № 21. P. 175.
10. *Ding E.J.* Analytic treatment of periodic orbit systematics for a nonlinear driven oscillator // *Phys. Rev.* 1986. Vol. A34, № 4. P. 3547.
11. *Ding E.J.* Analytic treatment of a driven oscillator with a limit cycle // *Phys. Rev.* 1987 Vol. A35, № 6. P. 2669.
12. *Ding E.J. and Hemmer P.C.* Exact treatment of mode locking for a piecewise linear map // *Journal of Statistical Physics*. 1987. Vol. 46, № 1–2. P. 99.
13. *Ding E.J.* Structure of parameter space for a prototype nonlinear oscillator // *Phys. Rev.* 1987. Vol. A36, № 3. P. 1488.
14. *Ding E.J.* Structure of the parameter space for the van der Pol oscillator // *Physica Scripta*. 1988. Vol. 38. P. 9.
15. *Cecchi C., Keener J.P., Glass L.* Periodically kicked hard oscillators // *Chaos*. 1993. № 1. P. 51.

16. *Viana R.L. and Batista A.M.* Synchronization of coupled kicked limit cycle systems // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1998. Vol. 9, № 12. P. 1931.
17. *Ullmann K. and Caldas I.L.* Transitions in the parameter space of a periodically forced dissipative system // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1996. № 11. P. 1913.
18. *Campbell A. et al.* Isochrones and the dynamics of kicked oscillators // *Physica A*. 1989. № 155. P. 565.
19. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Осциллятор ван дер Поля с импульсным воздействием: От дифференциального уравнения к отображению // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2001. Т. 9, № 6. С. 69.
20. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация автоколебательной системы ван дер Поля–Дуффинга короткими импульсами // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2004. Т. 12, № 5. С. 16.
21. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация в системе с неустойчивым циклом, инициированная внешним сигналом // *Письма в ЖТФ*. 2003. Т. 29, вып. 8. С. 52.
22. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Инициированные короткими импульсами устойчивые квазипериодические и периодические режимы в системе с неустойчивым предельным циклом // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2006. Т. 14, № 1. С. 72.
23. *Айдарова Ю.С., Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Сравнительный анализ синхронизации гармоническим и импульсным сигналом на примере системы Лоренца // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2007. Т. 15, № 4. С. 55.
24. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Особенности картины синхронизации импульсами в автоколебательной системе с трехмерным фазовым пространством // *Письма ЖТФ*. 2006. Т. 32, вып. 8. С. 41.
25. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Особенности синхронизации импульсами в системе с трехмерным фазовым пространством на примере системы Ресслера // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2006. Т. 14, № 6. С. 43.
26. *Kuznetsov A.P., Stankevich N.V. and Turukina L.V.* Picture of pulsed synchronization in the Dmitriev–Kislov generator // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2007. № 4. P. 407.
27. *Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М.: МЦНМО, 2005. 415 с.
28. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
29. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1990. 240 с.
30. *Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д.* К теории асинхронного возбуждения // *Журнал технической физики*. 1934. Т. IV, вып. 1. С. 98.
31. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
32. *Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N.* Amplitude response of coupled oscillators // *Physica D*. 1990. Vol. 41. P. 403.
33. *Rand R., Holmes.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1982. Vol. 17. P. 143.

34. *Storti D.W., Rand R.H.* Dynamics of two strongly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1980. Vol. 15. P. 387.
35. *Chakraborty T., Rand R.H.* The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1988. Vol. 23, № 5/6. P. 369.
36. *Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W.* Chaos and nonisochronism in weakly coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A*. 1991. № 44. P. 3452.
37. *Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W.* Hysteresis of synchronous – asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators // *Phys. Rev. A*. 1991. № 43. P. 5638.
38. *Pastor I., Perez-Garcia V.M., Encinas-Sanz F., Guerra J.M.* Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E*. 1993. № 48. P. 171.
39. *Camacho E., Rand R.H., Howland H.* Dynamics of two van der Pol oscillators coupled via a bath // *Int. J. of Solids and Structures*. 2004. № 41. P. 2133.
40. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // *Physica D*. 2004. Vol. 189, № 1–2. P. 8.
41. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* О динамике двух осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга с диссипативной связью // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2003. Т. 11, № 6. С. 48.
42. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* Особенности устройства пространства параметров двух неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2005. Т. 13. № 4. С. 3.
43. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе связанных осцилляторов ван дер Поля, неидентичных по управляющему параметру // *Письма в ЖТФ*. 2007. Т. 33, вып. 15. С. 15.
44. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга. Широкополосная синхронизация // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2007. Т. 15, вып. 4. С. 3.

*Саратовский филиал ИРЭ РАН
Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 15.03.2008

PULSED SYNCHRONIZATION AND SYNCHRONIZATION IN COUPLED SYSTEMS: NEW ASPECTS OF CLASSICAL PROBLEM

A.P. Kuznetsov, Yu.P. Roman, N.V. Stankevich, L.V. Turukina

Different features of the pulsed synchronization of self-oscillatory systems are considered. Namely nonisochronous, stabilization of the unstable systems, synchronization of the coupled oscillators in the region of the «oscillatory death» and etc. Illustrations for the coupled nonisochronously oscillators and nonidentical (controlling parameter and nonlinear dissipation) oscillators are presented.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgnd.narod.ru



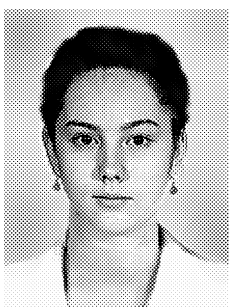
Роман Юлия Павловна – родилась в 1987 году. Окончила с золотой медалью Лицей прикладных наук города Саратова (2004). В настоящее время студентка 4 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Лауреат фонда поддержки фундаментальной физики «Династия». Опубликовала 2 статьи в научных журналах, участвовала во многих научных конференциях с публикацией тезисов докладов. E-mail: yuliaro@mail.ru



Станкевич Наталья Владимировна – родилась в 1985 году. С 2000 по 2002 год обучалась в Лицее прикладных наук. В 2002 году поступила в Саратовский госуниверситет на факультет нелинейных процессов. В 2007 году закончила университет с отличием. В настоящее время аспирант факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается исследованием особенностей синхронизации короткими импульсами в многомерных автоколебательных системах. Автор 15 публикаций, в том числе 5-ти статей в российских и международных журналах.



Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами посредством коротких импульсов. Автор более 50 научных публикаций, из них около 20 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов. E-mail: ludmila@forpost.ru



ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДИСКРЕТНЫХ БРИЗЕРОВ

О.И. Канаков, С. Флах, В.Д. Шалфеев

Дан обзор основ теории дискретных бризеров – пространственно локализованных колебательных решений в нелинейных решеточных системах. Приведены математические условия и физические предпосылки существования таких решений, описаны методы их исследования на примере одномерных решеток. Рассмотрены случаи бесконечного и конечного времени жизни локализованного решения. Включены некоторые новые результаты по проблемам генерации дискретных бризеров при разрушении бегущей волны и управления формированием вращательных бризерных решений с помощью внешнего воздействия.

Введение

Теория структурообразования в диссипативных системах в настоящее время относится к основным и наиболее развитым отраслям нелинейной динамики. Математическим образом диссипативной структуры является аттрактор – притягивающее множество в фазовом пространстве. Своим существованием такие структуры обязаны диссипации, приводящей к сокращению фазового объёма и «стягиванию» к аттрактору всех траекторий из его бассейна притяжения.

Консервативные системы отличаются от диссипативных свойством сохранения фазового объёма, что приводит к отсутствию аттракторов в фазовом пространстве, а значит, к принципиальной невозможности структурообразования в том смысле, в котором оно понимается в случае диссипативных систем. Невозможность наблюдения структур с бесконечным временем жизни в классической равновесной статистической системе следует также из принципа равномерного распределения энергии по степеням свободы, согласно которому средняя по статистическому ансамблю (или, для эргодических систем, по времени) кинетическая энергия каждой степени свободы и средняя потенциальная энергия каждой колебательной степени свободы составляет величину, одинаковую для всех степеней свободы системы.

В то же время эти соображения не отрицают существование структур, имеющих конечное время жизни, либо имеющих бесконечное время жизни, но при этом нулевую вероятностную меру соответствующего семейства решений в фазовом пространстве.

К таким разрешенным в консервативных системах структурам относятся *дискретные бризеры* – локализованные и не распространяющиеся в пространстве колебательные возбуждения в консервативных решеточных системах [1–3]. В зависимости от постановки задачи говорят о дискретных бризерах либо с бесконечным временем жизни (в этом случае решение всегда периодически во времени [4], а соответствующее семейство траекторий имеет нулевую меру), либо с конечным временем жизни (такие решения имеют ненулевую вероятностную меру и могут быть реализованы в физических системах или статистическом численном эксперименте).

Существуют экспериментальные свидетельства возникновения таких локализованных возбуждений в различных физических системах, включая решетки спинов в антиферромагнетиках [5], решетки связанных нелинейных оптических волноводов [6], ансамбли микромеханических осцилляторов [7]. Применение подобных систем в качестве элементной базы перспективных радиочастотных фильтров, магнетометров и других устройств [8] обуславливает не только фундаментальный, но и прикладной интерес к бризерным структурам.

В системах с периодическим потенциалом, где каждая координата имеет смысл фазы, помимо колебательных дискретных бризеров возможны также локализованные вращательные решения – *ротобризеры* [9]. Такие решения могут существовать не только в консервативных системах с периодическим потенциалом, но и в диссипативных системах при наличии внешнего момента – в этом случае им отвечают аттракторы вращательного типа. В частности, ротобризерные решения были детально изучены в решетках связанных джозефсоновских контактов – как теоретически [10], так и экспериментально [11]. Подобные решения представляют интерес при изучении динамики любых систем, описываемых уравнениями маятникового типа, например, ансамблей электрогенераторов, включенных в общую энергосеть [12], и сетей фазовой синхронизации [13].

Данная статья содержит обзор основных имеющихся в литературе результатов теории дискретных бризеров в нелинейных цепочках, а также некоторые новые результаты. Раздел 1 посвящен дискретным бризерам как периодическим во времени решениям. В разделе 2 рассматривается процесс формирования дискретных бризеров с конечным временем жизни при разрушении бегущей волны вследствие модуляционной неустойчивости. Раздел 3 охватывает вопросы формирования дискретных бризеров и ротобризеров в модели с периодическим потенциалом, включая консервативный и диссипативный случаи. В Заключении подводятся итоги и упоминаются некоторые вопросы теории дискретных бризеров, выходящие за рамки данной статьи.

1. Дискретные бризеры с бесконечным временем жизни: существование и основные свойства

Решения, локализованные в пространстве и периодические во времени, называемые бризерами, известны в некоторых пространственно-непрерывных моделях. Типичным примером является нелинейное уравнение синус Гордона

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u, \quad (1)$$

которое имеет семейство решений [4, 14]

$$u(x, t) = \pm 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{\alpha \sin \frac{t}{\sqrt{1 + \alpha^2}}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha x}{\sqrt{1 + \alpha^2}}} \right), \quad (2)$$

где α – действительный параметр.

Бризеры в непрерывных моделях структурно неустойчивы в том смысле, что малое изменение уравнений движения приводит к делокализации решения [15]. Таким образом, бризеры в непрерывных системах можно отнести к «редким» математическим объектам, что снижает интерес к ним с точки зрения физики.

Возможность долгоживущих локализованных колебательных решений в пространственно-дискретных системах была первоначально показана на примере двух связанных осцилляторов для классического и квантового случаев [16]. Такие решения были обнаружены в численных экспериментах [17, 18] и, по аналогии с бризерами в непрерывных системах, были названы дискретными бризерами [18]. Известны также другие наименования: *внутренне-локализованные моды* (intrinsic localized modes) – в физике твердого тела и *дискретные солитоны* – в нелинейной оптике.

Существование дискретных бризеров как периодических во времени решений, локализованных в дискретном пространстве, впервые было строго доказано в работе [4] для бесконечных цепочек локально диффузионно связанных нелинейных осцилляторов, описываемых гамильтонианом

$$H = \sum_n \left(\frac{p_n^2}{2} + U(x_n) + \frac{1}{2} \kappa (x_{n+1} - x_n)^2 \right), \quad (3)$$

где $U(x) \in C^2$ – нелинейный потенциал, $U'(0) = 0$, $U''(0) = \omega_0^2 > 0$; κ – параметр связи. Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}_n = -U'(x_n) + \kappa(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}). \quad (4)$$

В работе [4] был предложен конструктивный алгоритм построения дискретных бризеров в таких системах на основе метода непрерывного продолжения решения. В качестве продолжаемого рассматривается периодическое решение в бесконечной цепочке несвязанных осцилляторов ($\kappa = 0$), где один из осцилляторов совершает колебательное движение, а остальные находятся в покое. Было доказано, что такое решение может быть непрерывно продолжено в банаховом пространстве обратимых во времени периодических решений на некоторую область ненулевых значений параметра связи $\kappa \neq 0$ при выполнении условий ангармоничности (то есть ненулевой производной периода продолжаемой орбиты по энергии решения) и нерезонансности (то есть ни частота продолжаемой орбиты, ни какая-либо из ее гармоник не может быть кратна частоте малых колебаний парциального осциллятора ω_0). Эти условия носят достаточно общий характер. Системы, допускающие существование дискретных бризеров, вообще говоря, неинтегрируемы. Таким образом, дискретные бризеры, в отличие от бризеров в непрерывных системах, не являются «редкими», поэтому можно говорить о потенциальной важности этого класса решений в физике.

Была также показана устойчивость таких решений в линейном приближении¹ для некоторых систем в широком диапазоне параметров [19].

Заметим, что множество дискретных бризеров как точных периодических решений в фазовом пространстве решеточной системы имеет меру нуль, что означает нулевую вероятность реализации такого точного периодического решения в физической системе. Поэтому говорят также о дискретных бризерах в «физическом смысле» как о решениях, характеризующихся пространственной локализацией энергии, имеющей, в отличие от точных периодических решений, конечное время жизни.

На основе конструктивного алгоритма [4] и метода точечных отображений Пуанкаре для отыскания периодических орбит в работе [20] был построен численный метод отыскания дискретных бризеров с заданной точностью, а также приведены многочисленные примеры применения этого метода.

С физической точки зрения, условием локализации энергии в дискретном бризере является невозможность ее излучения на бесконечность в виде распространяющихся линейных волн. Поскольку амплитуда колебаний, по определению дискретного бризера, стремится к нулю с удалением от его центра, асимптотика «хвостов» дискретного бризера может быть описана с помощью дисперсионного соотношения для линеаризованных уравнений движения. Асимптотика определяется той из гармоник, которая характеризуется самым медленным спаданием амплитуды в пространстве. Если частота дискретного бризера вместе со всеми гармониками лежит за пределами линейного спектра решетки, то излучения энергии не происходит, и решение остается экспоненциально локализованным в пространстве.

Таким образом, физические предпосылки существования дискретных бризеров – это ограниченность линейного спектра (достигаемая за счет пространственной дискретности) и нелинейность парциального элемента. При выполнении этих условий частота решения вместе со всеми гармониками может лежать за пределами линейного спектра, что и обеспечивает пространственную локализацию.

Эти же соображения отрицают существование непериодических во времени локализованных решений с бесконечным временем жизни. В самом деле, непериодическое (например, многочастотное квазипериодическое) решение в нелинейной системе имеет всюду плотный спектр гармоник, что делает неизбежным резонанс с линейным спектром системы и излучение энергии на бесконечность.

Основные свойства сильно локализованного дискретного бризера можно оценить с помощью одночастичного приближения [21]. В рамках этого приближения все частицы, кроме одной, полагаются покоящимися в положении $x = 0$. Колебания частицы тогда описываются уравнением с одной степенью свободы

$$\ddot{x} = -U'(x) - 2\kappa x, \quad (5)$$

из которого следует зависимость частоты колебаний Ω от энергии частицы ε . Если частота Ω и ее гармоники $n\Omega$ лежат вне линейного спектра и достаточно далеко от его границ, то можно ожидать, что цепочечная система имеет пространственно локализованное решение с частотой Ω и полной энергией $E \approx \varepsilon$. Показатель локализации решения может быть выражен из дисперсионного соотношения. Условия

¹ что означает лишь отсутствие экспоненциального нарастания малых отклонений от решения и не означает, вообще говоря, ни орбитальной устойчивости, ни устойчивости по Ляпунову.

одночастичного приближения выполняются тем лучше и, значит, тем более точный результат дает приближение, чем сильнее локализовано решение.

Линеаризуя уравнения (4) и подставляя решение в виде гармонической волны

$$x_n(t) = Ae^{i(\omega t - kn)}, \quad (6)$$

получим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4\kappa \sin^2 \frac{k}{2}. \quad (7)$$

Спектр гармонических волн в линеаризованной системе занимает полосу частот от $\omega_1 = \omega_0$ до $\omega_u = \sqrt{\omega_0^2 + 4\kappa}$, называемую полосой пропускания или (в терминах физики твердого тела) фононной зоной.

Решения линеаризованной системы с частотами за пределами этой полосы имеют комплексное волновое число k , то есть не распространяются, а спадают в пространстве экспоненциально. Полагая в (7) $k = i\delta$, получим

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 4\kappa \operatorname{sh}^2 \frac{\delta}{2}, \quad (8a)$$

а для $k = \pi + i\delta$ имеем

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4\kappa \operatorname{ch}^2 \frac{\delta}{2}. \quad (8б)$$

Соотношения (8a, 8б) позволяют найти показатель пространственной локализации δ для частот ниже и выше линейного спектра, соответственно. Заметим, что показатель локализации увеличивается (то есть длина локализации уменьшается) при удалении от краев спектра. При этом для частот ниже ω_1 все частицы совершают колебания в фазе, а для частот выше ω_u соседние частицы колеблются в противофазе.

Рассмотрим в качестве примера дискретный аналог модели Клейна–Гордона, где потенциал $U(x)$ в (3) и (4) задается в виде четного полинома четвертой степени

$$U(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4, \quad (9)$$

здесь $\omega_0 = 1$.

Рассчитанная зависимость $\Omega(\epsilon)$ частоты колебаний от энергии дискретного бризера в рамках одночастичной модели (5) с потенциалом (9) при $\kappa = 0.1$, $\beta = 0.25$ показана на рис. 1 вместе с границами линейного спектра. Из этого расчета следует характерное значение энергии $\epsilon_{db} \approx 0.72$, определяемое из соотношения $\Omega(\epsilon_{db}) = \omega_u$. Для энергий выше ϵ_{db} следует ожидать существования хорошо локализованных дискретных бризеров с частотами выше ω_u . С увеличением энергии частота дискретного бризера должна увеличиваться, а локализация – усиливаться.

Отметим, что, согласно теоретическим результатам [22], в такой одномерной цепочке существуют дискретные бризеры с любыми ненулевыми энергиями, то есть отсутствует порог по энергии дискретного бризера. При стремлении энергии к нулю длина локализации дискретного бризера увеличивается, а его частота стремится к ω_u сверху [23]. Пересечение кривой $\Omega(\epsilon)$ с линейным спектром на рис. 1 означает, что в области $\epsilon < \epsilon_{db}$ перестает работать одночастичное приближение, так как дискретный бризер слабо локализован.

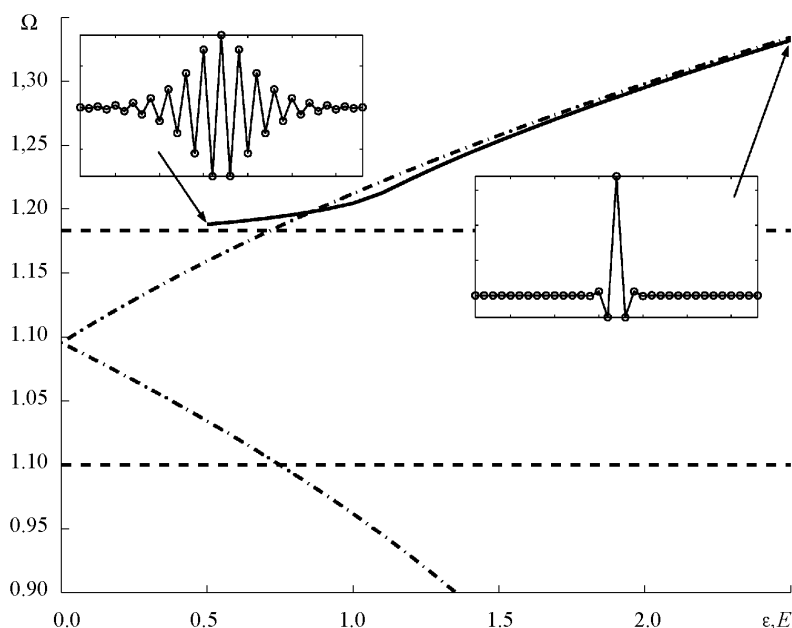


Рис. 1. Зависимость частоты дискретных бризеров от энергии. Штрихпунктирные кривые: одночастичное приближение для моделей Клейна–Гордона (вверху) и Такено–Пейрара (внизу). Сплошная кривая: численный расчет для цепочки Клейна–Гордона из $N = 33$ элементов. Врезки: вид дискретного бризера для $E = 0.5$ и 2.5 . Штриховые линии: границы линейного спектра

Для проверки выводов одночастичного приближения воспользуемся численным методом [20] отыскания периодических бризерных решений с заданной точностью. В цепочке из $N = 33$ элементов при $\kappa = 0.1$, $\beta = 0.25$ были рассчитаны бризерные решения, локализованные в центре цепочки, для энергий в диапазоне $0.5 < E < 2.5$. Ошибка (расстояние между последовательными пересечениями секущей Пуанкаре) не превышает 10^{-8} . На рис. 1 построена зависимость частоты решения от энергии, а также приведены профили пространственного распределения координат частиц в момент, когда скорости обращаются в нуль, для двух крайних значений энергии. Как и ожидалось, одночастичное приближение хорошо работает для энергий, существенно превышающих ϵ_{db} . С уменьшением энергии бризер деллокализуется. При этом частота его остается выше линейного спектра, а соседние частицы совершают колебания в противофазе.

Характерное значение энергии ϵ_{db} разделяет «слабо» и «сильно» локализованные дискретные бризеры. Как будет показано в следующем разделе, это значение имеет смысл при рассмотрении задач о формировании дискретных бризеров в физических процессах, например, вследствие модуляционной неустойчивости гармонических волн.

2. Дискретные бризеры с конечным временем жизни и модуляционная неустойчивость

Одним из возможных механизмов генерации дискретных бризеров с большим, но конечным временем жизни в физических процессах является разрушение гармонической волны вследствие модуляционной неустойчивости [24–28].

Переход к комплексным амплитудам в уравнении (4) в приближении их медленного изменения приводит к нелинейному дискретному уравнению Шредингера [25, 26, 28]. Линеаризация этого уравнения в окрестности решения вида гармонической бегущей волны дает область волновых чисел k , для которых волна неустойчива [25, 26]: $0 < k < \pi/2$ при $\beta < 0$ в потенциале (9) и $\pi/2 < k < \pi$ при $\beta > 0$.

В работах [25, 26] было проведено численное моделирование для случая $\beta < 0$ на временных масштабах порядка $1.5 \cdot 10^4$ периодов собственного колебания низшей частоты. Результаты [25, 26] показали, что модуляционная неустойчивость может служить эффективным механизмом локализации энергии и формирования долгоживущих дискретных бризеров, когда начальные условия заданы в форме слабозашумленной гармонической волны. На начальном этапе эволюции системы из таких начальных условий волна разбивается на отдельные волновые пакеты вследствие модуляционной неустойчивости. Образующиеся волновые пакеты имеют различную энергию и за счет этого слегка различную групповую скорость распространения. На следующем этапе, процессы в котором существенно нелинейны, многочисленные столкновения волновых пакетов приводят к обмену энергией между пакетами. В результате этого обмена энергия в некоторых пакетах может стать достаточной для возбуждения дискретного бризера. Аналогичный механизм реализуется и в других моделях.

Рассмотрим подробнее процесс формирования дискретных бризеров из бегущей волны в конечной цепочке, описываемой уравнениями (4), (9), с периодическими граничными условиями

$$x_0 = x_N, \quad x_{N+1} = x_1 \quad (10)$$

для случая $\beta = 0.25 > 0$, $\kappa = 0.1$, $N = 400$. С помощью численного моделирования исследуем зависимость процесса генерации дискретных бризеров от энергии начальной волны, а также характер эволюции системы на больших временах после формирования дискретных бризеров.

Зададим начальные условия в виде гармонической волны со слабым мультипликативным шумом

$$\begin{aligned} x_n(0) &= A(1 + \xi_n) \cos kn, \\ \dot{x}_n(0) &= \omega A(1 + \xi_n) \sin kn, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\omega^2 = 1 + 4\kappa \sin^2(k/2) + 3\beta A^2$, случайные величины ξ_n независимы и распределены равномерно на интервале $(0; 0.001)$. Используемое выражение для ω учитывает нелинейную поправку первого порядка к частоте в зависимости от амплитуды волны [26]. Выберем значение $k = 3\pi/4$, при котором волна модуляционно неустойчива (для $\beta > 0$). Символом $\bar{\epsilon}$ обозначим среднюю плотность энергии – полную энергию системы, деленную на число частиц.

В качестве основной наблюдаемой величины будем рассматривать дискретную плотность энергии ϵ_n , определяемую соотношением

$$\epsilon_n = \frac{\dot{x}_n^2}{2} + U(x_n) + \frac{1}{4}\kappa [(x_n - x_{n-1})^2 + (x_n - x_{n+1})^2]. \quad (12)$$

Энергия каждой связи при таком определении делится пополам между связанными частицами.

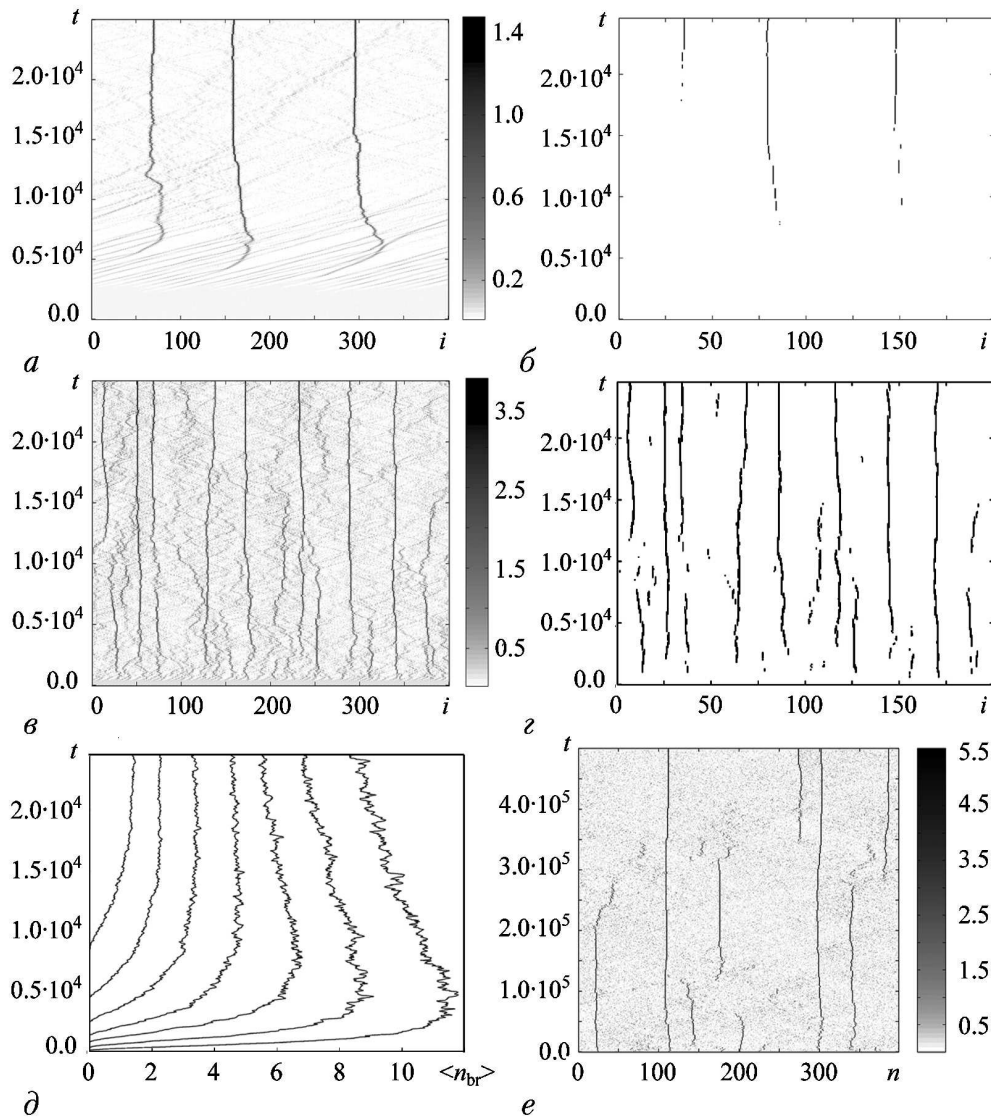


Рис. 2. Эволюция плотности энергии (*а, в*) и выделенные дискретные бризеры (*б, з*) в модели Клейна–Гордона. Зависимость усредненного по ансамблю из 99 реализаций количества дискретных бризеров от времени для различных значений амплитуды начальной волны (*д*). Эволюция плотности энергии на большом интервале времени (*е*)

Для интегрирования уравнений движения был использован метод Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом по времени $\Delta t = 0.01$. Ошибка численного счета в консервативных системах контролировалась по дрейфу полной энергии в системе. Относительное изменение энергии за время моделирования во всех расчетах не превышает 10^{-6} .

Было проведено моделирование динамики системы для 99 различных реализаций случайного шума ξ_n при амплитуде начальной волны A , принимающей значения от 0.1 до 0.5 с шагом 0.05 на временном отрезке длительностью $T = 2.5 \cdot 10^4$.

На рис. 2, *а, в* градациями серого отображена типичная эволюция плотности энергии в системе для одной из реализаций ξ_n в начальных условиях при $A = 0.2$

($\bar{\epsilon} = 0.027$) (а) и $A = 0.5$ ($\bar{\epsilon} = 0.18$) (б). По оси абсцисс откладывается дискретная координата, по оси ординат – время. На рисунках наглядно прослеживается сценарий локализации энергии и формирования дискретных бризеров [26], описанный в начале раздела.

Развитие неустойчивости приводит к существенному изменению групповых скоростей отдельных пакетов, вплоть до однократного или многократного изменения направления движения. Такие замедленные пакеты с высокой эффективностью поглощают энергию сталкивающихся с ними более быстрых пакетов [25, 26], что приводит к систематическому нарастанию их энергии. При превышении энергией пакета некоторого порога, близкого к характерному значению $\epsilon_{db} \approx 0.72$ (см. раздел 1.), возбуждение становится неподвижным, и формируется долгоживущий дискретный бризер, продолжающий взаимодействовать с распространяющимися пакетами.

Для количественного исследования процесса генерации дискретных бризеров необходимо ввести критерий дискретного бризера в численном эксперименте. Этот критерий должен учитывать такие свойства дискретного бризера, как неподвижность, высокую плотность энергии (по сравнению с движущимися возбуждениями) и большое время жизни (по сравнению, например, с периодом малых собственных колебаний). Исходя из этих соображений, сформулируем следующий критерий.

На элементе с индексом n в момент t регистрируется дискретный бризер, если плотность энергии $\epsilon_n(t)$, усредненная по M временным отсчетам, сделанным через время τ , превышает порог ϵ_{db} :

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \epsilon_n(t + m\tau) > \epsilon_{db}, \quad (13)$$

где выбраны значения $M = 10$, $\tau = 50.0$. Полное время усреднения тогда составляет $M \cdot \tau = 500.0$, то есть около 80 периодов собственного колебания низшей частоты $T_0 = 2\pi$.

Результаты применения этого критерия к случаям, изображенным на рис. 2, а, б, показаны на рис. 2, б, з, соответственно. Зарегистрированные дискретные бризеры отмечены черным цветом. Как видно из этих рисунков, выбранный критерий соответствует физическим представлениям о дискретном бризере.

В каждой реализации таким способом подсчитывается количество дискретных бризеров в зависимости от времени $n_{br}^v(t)$, где v – номер реализации. Затем результат усредняется по всем реализациям, в результате чего получается среднее по ансамблю количество бризеров в зависимости от времени

$$\langle n_{br}(t) \rangle = \frac{1}{R} \sum_{v=1}^R n_{br}^v(t), \quad (14)$$

где $R = 99$ в данном эксперименте.

Измеренные зависимости $\langle n_{br}(t) \rangle$ для $A = 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5$ ($\bar{\epsilon} = 0.015, 0.027, 0.043, 0.062, 0.085, 0.11, 0.14, 0.18$) изображены на рис. 2, д (слева направо). Для наглядности (для удобства сравнения с рис. 2, а–з) ось времени направлена вверх. При $A = 0.1$ ($\bar{\epsilon} = 0.0067$) дискретные бризеры на рассматриваемом промежутке времени зарегистрированы не были.

Как можно заключить из графиков, характерное время формирования первого дискретного бризера t_{br} быстро растет с уменьшением средней плотности энергии. За время порядка нескольких t_{br} количество дискретных бризеров достигает максимума, после чего начинается постепенное уменьшение их количества. Максимальное количество дискретных бризеров возрастающим образом зависит от энергии начальной волны.

Представляет интерес вопрос о дальнейшей эволюции системы на больших временах. Для выяснения этого вопроса в работе [29] было проведено моделирование для 40 различных реализаций ξ_n при $A = 0.5$ ($\bar{\epsilon} = 0.18$) на временном отрезке длительностью $T = 5 \cdot 10^5$ (что соответствует примерно 10^5 периодам собственного колебания низшей частоты).

Результат для одной из реализаций приведен на рис. 2, *e* [29]. Как видно из рисунка, имеет место распад большей части бризеров, сформировавшихся на начальной стадии. Отметим, что интервал времени на рис. 2, *e* в 20 раз больше, чем на рис. 2, *в*, построенном для того же значения средней плотности энергии, а верхняя граница тональной шкалы существенно выше. Это свидетельствует о дальнейшем нарастании энергии выживших бризеров.

В 29 из 40 реализаций наблюдалось формирование новых дискретных бризеров на больших временах после полного разрушения гармонической волны, то есть за рамками сценария [26]. В 11 из этих 29 реализаций такие бризеры имели времена жизни больше $5 \cdot 10^4$ (такой случай приведен на рис. 2, *e*). Это явление не объясняется напрямую модуляционной неустойчивостью. Однако можно предположить, что оно является следствием спонтанной локализации энергии в системе, которая связана с модуляционной неустойчивостью [29].

Для всех реализаций начальных условий наблюдались дискретные бризеры с временем жизни порядка времени моделирования. Этот факт, с одной стороны, не дает возможности достоверно определить максимальное время жизни дискретного бризера и, с другой стороны, свидетельствует о существенном влиянии, которое оказывают дискретные бризеры на процесс установления теплового равновесия в системе.

3. Дискретные бризеры и ротобризеры в модели Такено–Пейрара

В системах, описываемых гамильтонианом вида

$$H = \sum_n \left(\frac{p_n^2}{2} + U(x_n) + V(x_{n+1} - x_n) \right) \quad (15a)$$

и уравнениями движения

$$\ddot{x}_n = -U'(x_n) + V'(x_{n+1} - x_n) - V'(x_n - x_{n-1}), \quad (15б)$$

где потенциал парциального осциллятора $U(x)$ и потенциал взаимодействия $V(x)$ – периодические функции: $U(x + 2\pi) = U(x)$, $V(x + 2\pi) = V(x)$ (период без ограничения общности положим равным 2π), переменные состояния x_n имеют смысл

фаз, и наряду с колебательными возможны также вращательные движения. Соответственно, помимо колебательных локализованных возбуждений – дискретных бризеров, здесь возможны также локализованные вращательные решения – *ротобризеры* [9, 20].

В ротобризерном решении одна из фаз неограниченно нарастает со временем (элемент совершает вращение), а остальные колеблются с амплитудами, спадающими при удалении от вращающегося элемента. Такие решения наблюдались в численном эксперименте [9] в системе вида (15) с потенциалами

$$U(x) = 1 - \cos x, \quad V(x) = \kappa(1 - \cos x), \quad (16)$$

называемой по именам авторов [9] моделью Такено–Пейрара. Уравнения движения (15б) принимают вид

$$\ddot{x}_n = -\sin x + \kappa(\sin(x_{n+1} - x_n) - \sin(x_n - x_{n-1})). \quad (17)$$

Ротобризеры в [9] были получены при моделировании системы (17) в равновесии с термостатом, а также путем задания специальных начальных условий (на одном из элементов задается начальная скорость достаточно большой величины). Существование периодических во времени ротобризерных решений в моделях вида (15) было строго доказано в работе [20]. По аналогии с дискретными бризерами, говорят о ротобризерах как с бесконечным, так и с конечным временем жизни.

Покажем, что модуляционная неустойчивость гармонической волны может приводить к генерации как дискретных бризеров, так и ротобризеров в модели (17).

Характерные значения энергии, отвечающие обоим типам локализованных возбуждений, могут быть получены с помощью одночастичного приближения (см. разд. 1.). Зависимость частоты одночастичного бризера от энергии изображена на рис. 1 (нижняя штрихпунктирная кривая). Дисперсионное соотношение линеаризованной системы (17) совпадает с (7). Частота одночастичного бризера выходит из полосы линейного спектра для энергий, превышающих величину $\varepsilon_{\text{dB}} \approx 0.75$. В отличие от дискретной модели Клейна–Гордона, рассмотренной в предыдущем разделе, в данной модели допустимые частоты дискретных бризеров лежат *ниже* линейного спектра. При превышении величины $\varepsilon_{\text{rot}} \approx 2.4$ в одночастичной модели возникает вращательное движение. Заметим еще, что для дискретных бризеров в одночастичном приближении имеются запрещенные области энергий, для которых хотя бы одна гармоника основной частоты попадает в полосу линейного спектра.

Поскольку член третьей степени в дискретном нелинейном уравнении Шредингера, аппроксимирующем (17), имеет отрицательный знак, в этой системе модуляционно неустойчивы волны с волновыми числами $0 < k < \pi/2$ [25].

Было проведено численное моделирование системы (17) из $N = 400$ элементов, $\kappa = 0.1$. Граничные условия – периодические (10). Начальные условия имеют вид (11), где $k = \pi/4$, случайные величины ξ_n независимы и распределены равномерно на интервале $(0; 0.001)$. Были проведены расчеты для 10 различных реализаций начальных условий для каждого значения амплитуды исходной волны A .

На рис. 3, а приведены измеренные в соответствии с (14) зависимости среднего по ансамблю количества локализованных возбуждений от времени $\langle n_{\text{br}}(t) \rangle$ для

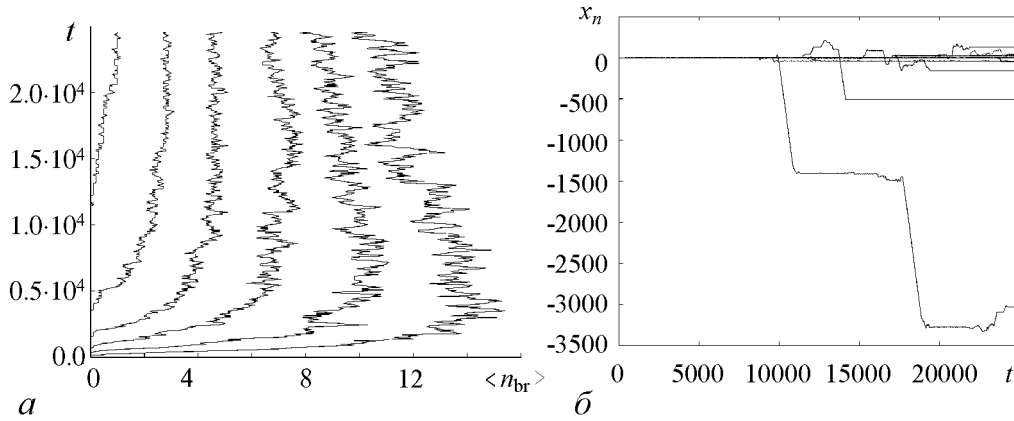


Рис. 3. Зависимость усредненного по ансамблю из 10 реализаций количества локализованных возбуждений от времени в модели Такено–Пейрара для различных значений амплитуды начальной волны (а). Эволюция координат всех частиц для одной из реализаций (б)

значений амплитуды $A = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ ($\bar{\epsilon} = 0.021, 0.047, 0.081, 0.12, 0.17, 0.23$), слева направо. Качественный характер кривых аналогичен результату для дискретной модели Клейна–Гордона (см. рис. 2, д). Это означает, что механизм локализации энергии, описанный в разделе 2, продолжает действовать и в данной системе.

Заметим, что измерение локальных плотностей энергии не позволяет отличить вращательные возбуждения от колебательных. На рис. 3, б построены зависимости координат всех частиц от времени $x_n(t)$ для одной из реализаций шума ξ_n в начальных условиях при $A = 0.7$ ($\bar{\epsilon} = 0.23$). Локализованные вращательные возбуждения – ротобризеры проявляются на рисунке в виде больших набегов фаз на некоторых элементах. При этом направление вращения каждого из таких возбуждений носит случайный характер, а время жизни (по сравнению с временем жизни колебательного возбуждения) невелико.

Рассмотрим обобщение модели (17), включающее внешний момент и диссипацию

$$\ddot{x}_n + \lambda \dot{x}_n = -\sin x + \kappa(\sin(x_{n+1} - x_n) - \sin(x_n - x_{n-1})) + \gamma_n. \quad (18)$$

Такая модель представляет интерес, например, с точки зрения моделирования динамики электрогенераторов, включенных в общую энергосеть [12].

Следует ожидать, что при $\lambda = 0$, $|\gamma_n| \ll 1$ и в отсутствие вращательных движений процесс разрушения бегущей волны и локализации энергии происходит аналогично рассмотренному выше случаю (17). Различие проявляется при возникновении вращательных движений. В силу наличия внешнего момента, во-первых, имеется выделенное направление вращения; во-вторых, вращательное движение инфинитно и сопровождается неограниченным нарастанием энергии.

Это рассуждение подтверждается численным моделированием. На рис. 4, а изображена эволюция плотности энергии в системе (18) для $\lambda = 0$, $\gamma_n = \gamma = 0.01$, $A = 0.7$ ($\bar{\epsilon} = 0.23$). Черный цвет соответствует инфинитному вращению элемента.

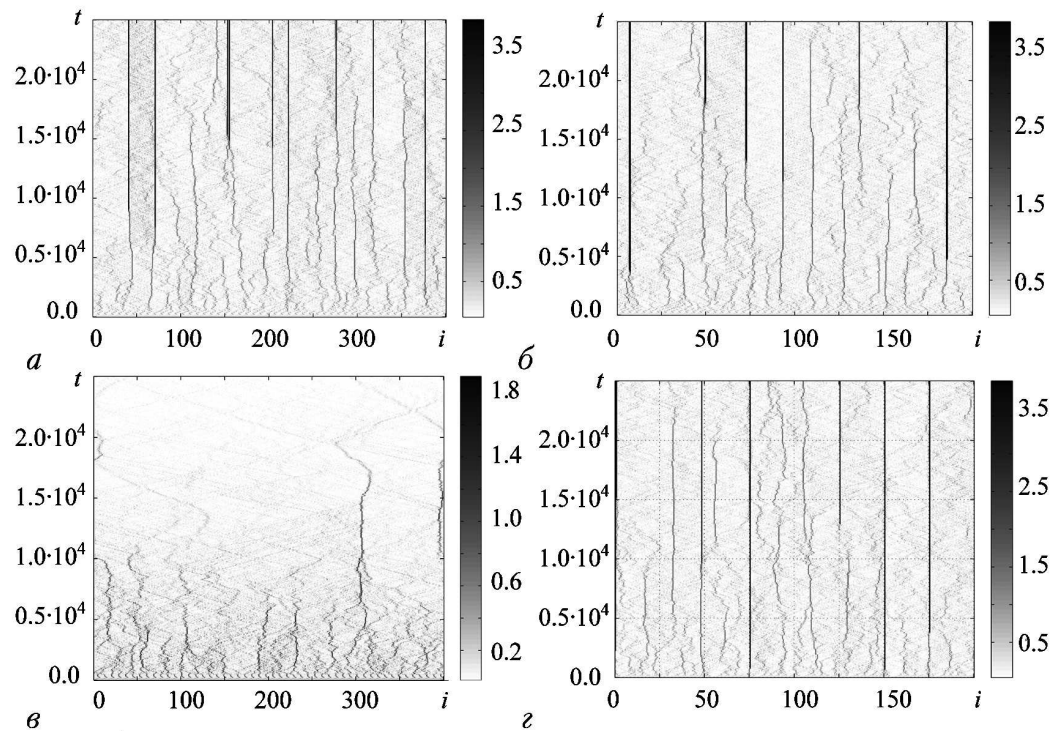


Рис. 4. Эволюция плотности энергии в модели Такено–Пейрара с внешним моментом без диссипации (а) и с диссипацией (б, в). Управление формированием роторбризеров с помощью пространственно-неоднородного внешнего момента (з)

Вертикальные черные линии, таким образом, соответствуют роторбризерам. Благодаря наличию внешнего момента, роторбризеры не разрушаются и неограниченно набирают энергию.

При наличии диссипации ($\lambda > 0$) возможность возбуждения роторбризера в системе зависит от соотношения двух противоположных факторов: нарастания плотности энергии в некоторых элементах вследствие локализации энергии – с одной стороны, и спадания полной энергии системы вследствие диссипации – с другой стороны. Роторбризер в диссипативной системе представляет собой вращательный предельный цикл. Если вращательное движение возникает, то нарастание его энергии ограничивается диссипацией, и в установившемся режиме имеет место баланс диссипации и подкачки энергии за счет внешнего момента.

Отметим, что за счет коллективной динамики, приводящей к локализации энергии, вращения в цепочечной системе могут возникать при значениях средней плотности энергии на порядки ниже величины порога выхода на вращательный режим в одиночном элементе.

Приведенные соображения иллюстрируются рисунками 4, б, в, где изображена эволюция плотности энергии в системе (18) при $\lambda = 1 \cdot 10^{-5}$ (б) и $\lambda = 1 \cdot 10^{-4}$ (в), значения остальных параметров те же, что и для рис. 4, а. При $\lambda = 1 \cdot 10^{-5}$ локализация энергии, преобладающая над диссипацией, приводит к повышению локальной плотности энергии до величины, достаточной для перехода на режим вращения, и возникают роторбризеры (см. рис. 4, б). При $\lambda = 1 \cdot 10^{-4}$ локализованные колебатель-

ные возбуждения возникают, однако, вследствие диссипации, их энергия оказывается недостаточной для перехода на режим вращения (см. рис. 4, в), и система эволюционирует к устойчивому состоянию равновесия.

Представляет также интерес вопрос о возможности управления процессом генерации роторизеров с помощью пространственно неоднородного внешнего воздействия. Было проведено моделирование системы (18) при $\lambda = 1 \cdot 10^{-5}$, $A = 0.7$ ($\bar{\epsilon} = 0.23$), с неоднородным распределением внешнего момента: $\gamma_n = 0.21$ для $n = 1.51, 101, \dots, 351$, на остальных элементах $\gamma_n = 0.01$ (рис. 4, з). Как видно из рисунка, роторизеры формируются преимущественно на элементах с повышенным значением внешнего момента, что подтверждает возможность управления их формированием.

Заключение

В статье были рассмотрены основные свойства и условия существования дискретных бризеров с бесконечным и конечным временем жизни в нелинейных цепочечных системах. Было показано, что модуляционная неустойчивость гармонической волны является достаточно универсальным механизмом формирования локализованных возбуждений с большим, но конечным временем жизни – как колебательных, так и вращательных, причем последних – как в консервативных, так и в диссипативных системах. Многие вопросы теории дискретных бризеров остались за пределами рассмотрения, среди которых отметим другие механизмы формирования локализованных возбуждений – например, в процессах теплопереноса [29–31]; взаимодействие дискретных бризеров и роторизеров с распространяющимися волнами [32, 33]; свойства дискретных бризеров в решетках размерности выше единицы [22, 34]; переход от классической задачи о дискретных бризерах к соответствующей квантовой [19, 35, 36].

Отметим также перспективное направление развития, которое теория дискретных бризеров получила в последнее время. Оказывается, идея построения локализованных решений может быть реализована не только в прямом пространстве решетки, но и во взаимном пространстве нормальных мод. При определенных условиях одномодовое периодическое решение линейной системы может быть продолжено на некоторую область ненулевых значений нелинейности. Такие продолженные решения характеризуются экспоненциальной локализацией в пространстве нормальных мод и, в силу аналогии с дискретными бризерами, были названы q -бризерами [37, 38]. Наряду с периодическими во времени решениями возможны также долгоживущие непериодические решения, локализованные в пространстве мод (в этом состоит известный результат Ферми–Паста–Улама). Свойствами q -бризеров могут быть качественно и количественно объяснены с единых позиций основные составляющие проблемы Ферми–Паста–Улама: возвращаемость траекторий, локализация в пространстве мод и пороговая зависимость этих эффектов от энергии системы [37, 38]. Концепция q -бризеров может найти применение в различных задачах, связанных с нелинейным взаимодействием мод, например, в теории теплопроводности.

Данная работа была выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 07-02-01404, 06-02-16499), а также Фонда некоммерческих программ «Династия».

Библиографический список

1. Flach S., Willis C.R. Discrete breathers // Phys. Reports. 1998. Vol. 295. P. 181.
2. Flach S., Gorbach A.V. Computational studies of discrete breathers – from basics to competing length scales // Int. J. Bif. Chaos. 2006. Vol. 16. P. 1645.
3. Flach S., Gorbach A. Discrete breathers: advances in theory and applications // принято к печати в Physics Reports, 2008.
4. MacKay R.S., Aubry S. Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators // Nonlinearity. 1994. Vol. 7. P. 1623.
5. Sato M., Sievers A.J. Direct observation of the discrete character of intrinsic localized modes in an antiferromagnet // Nature. 2004. Vol. 432. P. 486.
6. Fleischer J.W., Carmon T., Segev M., Efremidis N.K., Christodoulides D.N. Observation of discrete solitons in optically induced real time waveguide arrays // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90, № 2. P. 023902.
7. Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.J., Ilic B., Czaplowski D.A., Craighead H.G. Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90, № 4. P. 044102.
8. Zalalutdinov M.K., Baldwin J.W., Marcus M.H., Reichenbach R.B., Parpia J.M., Houston B.H. Two-dimensional array of coupled nanomechanical resonators // Applied Physics Letters. 2006. Vol. 88. P. 143504.
9. Takeno S., Peyrard M. Nonlinear modes in coupled rotator models // Physica D. 1996. Vol. 92. P. 140.
10. Miroshnichenko A., Flach S., Fistul M., Zolotaryuk Y., Page J.B. Breathers in Josephson junction ladders: resonances and electromagnetic waves spectroscopy // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 066601.
11. Binder P., Abraimov D., Ustinov A.V. Diversity of discrete breathers observed in a Josephson ladder // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 2. P. 2858.
12. Веников В.А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М.: Высшая школа, 1978.
13. Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: ИПФ АН СССР, 1989.
14. Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003. С. 359.
15. Denzler J. Nonpersistence of breather families for the perturbed sine Gordon equation // Commun. Math. Phys. 1993. Vol. 158. P. 397.
16. Овчинников А.А. Локализованные долгоживущие колебательные состояния в молекулярных кристаллах // ЖЭТФ. 1969. Т. 57, вып. 1(7). С. 263.
17. Takeno S., Kisoda K., Sievers A.J. Intrinsic localized vibrational modes in anharmonic crystals // Prog. Theor. Phys. Suppl. // 1988. Vol. 94. P. 242.
18. Campbell D.K., Peyrard M. Chaos and order in nonintegrable model field theories // CHAOS – Soviet-American Perspectives on Nonlinear Science / Ed. D.K. Campbell. New York: American Institute of Physics, 1990. P. 305.
19. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: existence, linear stability and quantization // Physica D. 1997. Vol. 103. P. 201.

20. *Marin J.L., Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: Numerical calculation from the anticontinuous limit // *Nonlinearity*. 1996. Vol. 9. P. 1501.
21. *Flach S., Willis C.R., Olbrich E.* Integrability and localized excitations in nonlinear discrete systems // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 49. P. 836.
22. *Flach S., Kladko K., MacKay R.S.* Energy thresholds of discrete breathers in one-, two- and three-dimensional lattices // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 1207.
23. *Косевич А.М., Ковалев А.С.* Самолокализация колебаний в одномерной ангармонической цепочке // *ЖЭТФ*. 1974. Т. 67. Вып. 5(11). С. 1793.
24. *Kivshar Yu.S., Peyrard M.* Modulational instabilities in discrete lattices // *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 46. P. 3198.
25. *Daumont I., Dauxois T., Peyrard M.* Modulational instability: first step towards energy localization in nonlinear lattices // *Nonlinearity*. 1997. Vol. 10. P. 617.
26. *Peyrard M.* The pathway to energy localization in nonlinear lattices // *Physica D*. 1998. Vol. 119. P. 184.
27. *Cretegnny T., Dauxois T., Ruffo S., Torcini A.* Localization and equipartition of energy in the beta-FPU chain: Chaotic breathers // *Physica D*. 1998. Vol. 121. P. 109.
28. *Johansson M., Morgante A.M., Aubry S., Kopidakis G.* Standing wave instabilities, breather formation and thermalization in a Hamiltonian anharmonic lattice // *Eur. Phys. J. B*. 2002. Vol. 29. P. 279.
29. *Ivanchenko M.V., Kanakov O.I., Shalfeev V.D., Flach S.* Discrete Breathers in Transient Processes and Thermal Equilibrium // *Physica D*. 2004. Vol. 198. P. 120.
30. *Tsironis G.P., Aubry S.* Slow relaxation phenomena induced by breathers in nonlinear lattices // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. P. 5225.
31. *Bikaki A., Voulgarakis N.K., Aubry S., Tsironis G.P.* Energy relaxation in discrete nonlinear lattices // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 59. P. 1234.
32. *Flach S., Miroshnichenko A.E., Fistul M.V.* Wave scattering by discrete breathers // *CHAOS*. 2003. Vol. 13. P. 596.
33. *Miroshnichenko A.E., Schuster M., Flach S., Fistul M.V., Ustinov A.V.* Resonant plasmon scattering by discrete breathers in Josephson junction ladders // *Phys. Rev. B*. 2005. Vol. 71. P. 174306.
34. *Flach S., Kladko K., Willis C.R.* Localized excitations in two-dimensional lattices // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 50. P. 2293.
35. *MacKay R.S.* Discrete breathers: classical and quantum // *Physica A*. 2000. Vol. 288. P. 174.
36. *Flach S., Fleurov V., Ovchinnikov A.A.* Tunneling of localized excitations: Giant enhancement due to fluctuations // *Phys. Rev. B*. 2001. Vol. 63. P. 094304.
37. *Flach S., Ivanchenko M.V., Kanakov O.I.* q -Breathers and the Fermi–Pasta–Ulam problem // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. P. 064102.
38. *Flach S., Ivanchenko M.V., Kanakov O.I., Mishagin K.G.* Periodic orbits, localization in normal mode space and the Fermi–Pasta–Ulam problem // *American Journal of Physics*. 2008. Vol. 76, № 4/5. P. 453.

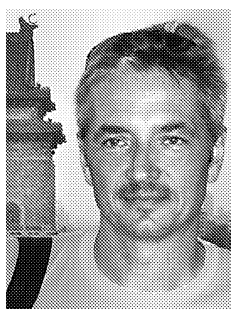
INTRODUCTION TO DISCRETE BREATHERS THEORY

O.I. Kanakov, S. Flach, V.D. Shalfeev

We make a basic review of the theory of discrete breathers – spatially localized solutions in nonlinear lattices. We describe the mathematical conditions and physical prerequisites of their existence and methods of their study by example of one-dimensional lattices. We consider localized solutions with infinite and finite lifetimes. We include some new results within the problems of discrete breather generation resulting from harmonic wave destruction and controlling the formation of rotational breather solutions by external forcing.



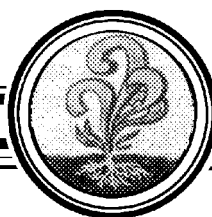
КанакOV Олег Игоревич – родился в 1981 году, окончил Нижегородский государственный университет в 2004 году. Старший преподаватель кафедры теории колебаний Нижегородского государственного университета, кандидат физико-математических наук. Область научных интересов: структуры и локализация энергии в нелинейных решеточных системах, моделирование динамики биологических сред. Награжден именными стипендиями некоммерческого фонда «Династия» и Президента Российской Федерации для аспирантов (2006). Соавтор 10 журнальных публикаций и 2 учебно-методических пособий.
E-mail: okanakov@rf.unn.ru



Флаx Сергей – родился в 1963 году, окончил Дрезденский технический университет в 1986 году. Руководитель отдела по работе с приглашенными специалистами Института сложных систем Общества Макса Планка (Max-Planck-Institut für Physik Komplexer Systeme), доктор наук (Habilitation: 1998, Faculty for Natural Sciences, TU Dresden). Лауреат премии Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна (1988), премии Стефаноса Пневматикоса (2002). Область научных интересов: образование структур, распространение волн, локализация и явления переноса в классических и квантовых решеточных системах, нелинейных, неоднородных и нестационарных средах. Член экспертного совета Энциклопедии нелинейных наук (The Encyclopedia of Nonlinear Science). Соавтор 7 обзоров и монографий, более 100 журнальных статей.
E-mail: flach@pks.mpg.de



Шалфеев Владимир Дмитриевич – родился в 1941 году, окончил Горьковский университет в 1963 году. Заведующий кафедрой теории колебаний Нижегородского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор, действительный член Академии инженерных наук РФ. Область научных интересов: динамика нелинейных систем, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структуры. Соавтор монографий «Системы фазовой синхронизации», «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации», «Динамический хаос в фазовых системах», «Нелинейная динамика систем фазирования в антенных решетках».
E-mail: shalfeev@rf.unn.ru



ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИОННОЙ ОБРАБОТКИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ГИРОТРОННЫХ КАТОДОВ

*О.И. Лукаша, Г.Г. Соминский, Д.Б. Самсонов,
G. Dammertz, B. Piosczyk, M.K. Thumm*

Разработана методика обработки гиротронных катодов потоками ионов калия и исследовано влияние ионной обработки на эмиссионные характеристики W-Ва и LaB₆ катодов. Выявлено влияние материала покрытия катода и его эмиссионной эффективности, а также энергии ионов на результаты ионной обработки. Показано, что ионная обработка может быть использована для повышения эмиссионной однородности катодов за счет увеличения эмиссионной активности участков W-Ва катода с наименьшей эмиссией и в результате дезактивировки участков LaB₆ катода, обеспечивающих наибольшие значения плотности тока эмиссии. Полученные данные свидетельствуют, что активировка W-Ва и дезактивировка LaB₆ катодов не связаны с оседанием калия на катоде и могут быть обусловлены десорбцией под действием ионной бомбардировки атомов с поверхности катодов и/или с реконструкцией этой поверхности.

Введение

Современные гиротроны обеспечивают рекордные (до 1–2 МВт) уровни мощности СВЧ-излучения миллиметрового диапазона длин волн в длинноимпульсном и квазинепрерывном режимах (см., например, [1–3]). Поэтому именно эти приборы используются для нагрева плотной высокотемпературной плазмы и управления током крупных термоядерных установок, а также для реализации ряда энергоемких технологических процессов. Однако эффективность гиротронов невысока и без рекуперации энергии не превышает обычно 40–45 %. Поэтому отыскание путей повышения их эффективности – весьма актуальная задача. Увеличение эффективности может быть достигнуто в результате повышения качества винтового электронного пучка (ВЭП) – своеобразной активной среды гиротронов, энергия которой преобразуется в СВЧ-излучение. Препятствует достижению нужного качества пучка и его эффективного взаимодействия с СВЧ-полями резонатора присущий ВЭП разброс электронов по скоростям.

Принципиально неустраним разброс электронов по скоростям, обусловленный полем пространственного заряда ВЭП. Однако существует ряд факторов, которые

ведут к дополнительному, и в некоторых случаях весьма существенному, дополнительному разбросу. Одна из важнейших причин дополнительного разброса может быть связана с неоднородностями эмиссии катода магнетронно-инжекторной пушки (МИП) [4–6]. Как правило, такие пушки работают в режиме температурного ограничения эмиссии. Поэтому неоднородности работы выхода и температуры должны приводить к неоднородному распределению плотности тока электронов в поперечном сечении ВЭП, что является причиной появления неоднородных полей, влияющих на скоростной разброс электронов. К сожалению, для гиротронных катодных систем, характеризующихся сложной формой и довольно большими размерами, еще не отработаны технологии их изготовления, обеспечивающие достаточно однородную эмиссию. Кроме того, эмиссионные неоднородности могут появиться и у исходно однородных эмиттеров в процессе эксплуатации катодов, например, под действием ионной и электронной бомбардировки их поверхности. Чрезвычайно важно поэтому выявить методы, которые могли бы быть использованы для повышения эмиссионной однородности гиротронных катодов в процессе их эксплуатации.

Известно, что потоки ионов применяются для очистки и модификации разных материалов (см., например, [7]). Представляется возможным применение ионной обработки и для повышения качества гиротронных катодов. Однако для принципиального решения этого вопроса необходимо получение информации о влиянии ионной бомбардировки на эмиссионные характеристики материалов, используемых для создания активирующих покрытий гиротронных катодов.

1. Методы исследования и аппаратура

В данной работе было изучено влияние обработки потоком ионов калия на эмиссионные характеристики металлопористого W-Ba и гексаборид-лантанового (LaB_6) катодов, наиболее часто используемых в современных мощных гиротронах миллиметрового диапазона.

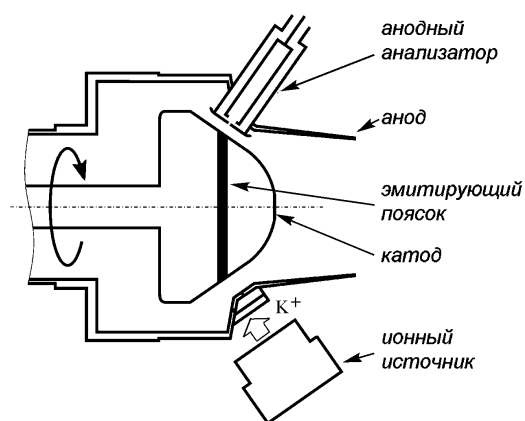


Рис. 1. Схематическое изображение сечения МИП с анодным анализатором и ионным источником

Для проведения экспериментов была создана высоковакуумная камера, оснащенная магнетронно-инжекторной пушкой (МИП) и источником ионов калия (рис. 1). Катод МИП был закреплен на подвижной подвеске и мог поворачиваться вокруг оси. Для выявления эмиссионных неоднородностей катода в разных азимутальных его положениях измерялись токи с катода I_a , проникающие в расположенный на неподвижном аноде анализатор, и определялись плотности потока электронов j_a в анализатор. Поток электронов с катода попадал на выполненный в виде цилиндра

Фарадея коллектор анализатора через отверстие входной диафрагмы под потенциалом анода. Подобная методика использовалась ранее для определения характеристик

электронных и ионных потоков с термокатода в электронно-оптических системах гиротронного типа [5, 8, 9]. Для контроля неоднородностей температуры катода в разных азимутальных положениях катода проводились также пирометрические измерения температуры T его поверхности. Для измерения характеристик теплового излучения с катода использовались отверстие в аноде и специальное окно в вакуумной камере.

Проводились измерения переходных характеристик – изменения во времени t после включения накала катода значений плотности тока j_a и температуры T . Переходные процессы завершались в течение 30–40 минут. После выхода в насыщение зависимостей $j_a(t)$ и $T(t)$ определялись азимутальные распределения установившихся значений плотности тока $j_{ay}(\theta)$ и температуры $T_y(\theta)$.

Размеры деталей МИП и анализатора указаны в таблице. Основные размеры МИП совпадали с размерами источника электронов экспериментального 4-мм гиротрона СПбГПУ, описанного в работе [9]. Расстояние между входной диафрагмой анализатора и катодом (4 мм) было существенно меньше расстояния между катодом и анодом (10.1 мм). Это позволяло реализовать на участке катода напротив анализатора режим температурного ограничения эмиссии при умеренных напряжениях больше 3 кВ, если плотность эмиссии с этого участка не превышала примерно 1 А/см^2 . В режиме температурного ограничения измеренное с помощью анализатора азимутальное распределение $j_{ay}(\theta)$ отражает распределение плотности тока эмиссии катода.

Таблица

Основные размеры деталей магнетронно-инжекторной пушки и анализатора

Средний радиус катода R_k	35 мм
Угол наклона поверхности катода относительно оси МИП ϕ_k	35 град
Ширина эмитирующего пояaska катода l_k	6.1 мм
Расстояние между поверхностью катода и анодом d_{k-a}	10.1 мм
Диаметр входного отверстия анализатора $D_{вх}$	1 мм
Расстояние между поверхностью катода и входной диафрагмой анализатора $d_{k-ан}$	4 мм

Использованный в работе источник ионов калия был подобен по своей конструкции источнику, разработанному ранее для обработки фуллереновых покрытий полевых эмиттеров [10]. Он включал стандартный накаливаемый источник атомов калия и систему накаленных вольфрамовых нитей, на которых происходила поверхностная ионизация атомов калия. Поток ионов калия с накаленных нитей фокусировался с помощью электронно-оптической системы типа пушки Пирса и направлялся к катоду через щель 2×8 мм в аноде, ориентированную своей длинной стороной перпендикулярно эмитирующему пояску катода. Ионы калия сначала ускорялись напряжением 40–300 В в пушке Пирса, а затем доускорялись в зазоре между катодом и анодом МИП напряжением до 12 кВ. Полную энергию ионов, бомбардирующих катод, можно было менять в пределах приблизительно от 40 эВ до 12 кэВ. В типичном режиме ионной обработки локальный участок поверхности катода, расположенный напротив щели в аноде, подвергался в течение одного часа бомбардировке потоком ионов калия плотностью $2.5 \cdot 10^{-7} \text{ А/см}^2$. Ионная обработка катодов осуществлялась при температурах катода $T_{обр}$ от комнатной приблизительно до 700°C .

При выключенном ионном источнике для получения дополнительной информации о неоднородностях потока электронов с катода можно было измерять азимутальные распределения установившихся значений плотности тока электронов $j_{щ\psi}(\theta)$, прошедших сквозь щель в аноде. В этом случае регистрировался ток на соединенные между собой электроды электронно-оптической системы источника ионов. Зависимости $j_{щ\psi}(\theta)$ отражают распределение по азимуту средних значений плотности тока с участка катода напротив анодной щели, если удастся и в данном случае реализовать режим температурного ограничения тока эмиссии с катода. Учитывая большое расстояние между катодом и анодом МИП (см. таблицу), осуществить такой режим можно при повышенных анодных напряжениях и/или при малых токах эмиссии с катода. В таких режимах сравнение зависимостей $j_{ay}(\theta)$ и $j_{щ\psi}(\theta)$ принципиально позволяет выявить неоднородности эмиссии по ширине эмитирующего пояса.

Измерение характеристик потока электронов с катода производилось в отсутствие магнитного поля при подаче на катод относительно заземленного анода разовых импульсов отрицательной полярности, длительностью 10 мкс. Обработка катода потоком ионов калия осуществлялась в непрерывном режиме. Основные измерения выполнены при давлениях остаточного газа в вакуумной камере примерно 10^{-7} Торр при исследовании W-Wa катода и примерно 10^{-6} Торр в экспериментах с LaB₆ катодом.

2. Экспериментальные результаты

2.1. Исследование характеристик W-Wa катода. Металлопористый W-Wa катод был изучен наиболее детально. Исследования проводились с эмиссионно неоднородным катодом, который был ранее использован в экспериментах с 4-мм гиротроном СПбГПУ. На рис. 2 показаны азимутальные распределения установившихся значений плотности тока эмиссии и температуры для этого катода. Оценки, сделанные на основании полученных данных о локальных значениях плотности тока

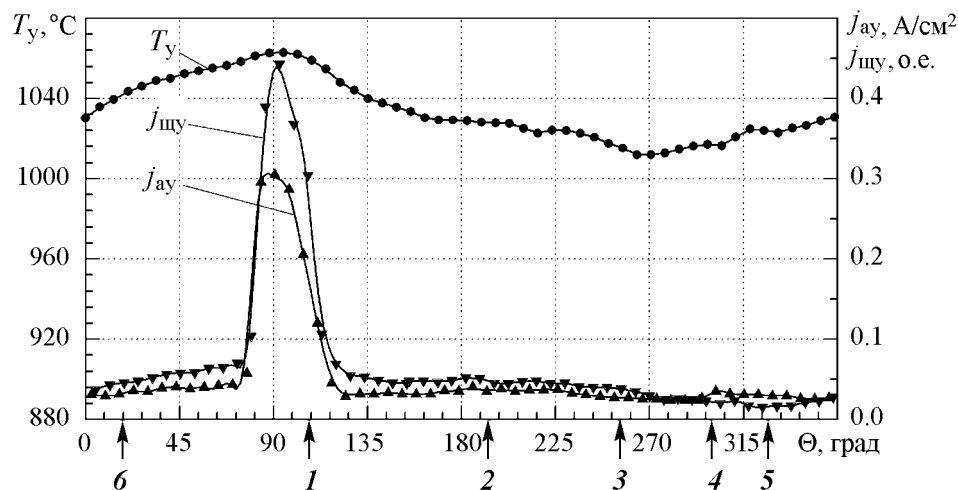


Рис. 2. Азимутальные распределения установившихся значений плотности тока эмиссии $j_{ay}(\theta)$ и $j_{щ\psi}(\theta)$, а также установившихся значений температуры катода $T_y(\theta)$, измеренные в МИП с W-Wa катодом. Анодное напряжение – 8 кВ. Области катода, обработанные потоком ионов, пронумерованы и обозначены стрелками

эмиссии и температуры, свидетельствуют, что максимальный перепад работы выхода по поверхности катода достигал при измерении характеристик рис. 2 значений примерно 0.2 эВ. При существующих изменениях температуры $T_y(\theta)$ максимально активен был участок катода в области максимума азимутального распределения j_{ay} .

Исследуя воздействие ионной бомбардировки на участках поверхности этого катода, отличающихся эмиссионной активностью, можно было выяснить влияние исходной активности на результаты ионной бомбардировки. В экспериментах было изучено влияние на результаты ионной обработки не только начальной эмиссионной активности обрабатываемого участка катода, но и энергии $W_{и}$ ионов. На рис. 2 обозначены стрелками и пронумерованы области катода, которые обрабатывались потоком ионов калия.

Для получения информации о процессах, происходящих на катоде под действием ионной бомбардировки, сразу после ее окончания включался накал и температура катода повышалась от значения $T_{обр}$, при котором производилась ионная обработка катода, до рабочего значения примерно 1030°C . В процессе подъема температуры регистрировались изменения плотности тока с катода в области, подвергнутой бомбардировке. На рис. 3 показаны типичные изменения во времени температуры и плотности тока $j_{ш}$, регистрируемого через щель в аноде, расположенную непосредственно над участком 2 катода (рис. 3, а) с невысоким уровнем эмиссионного тока и над участком 1 (рис. 3, б), где ток эмиссии существенно больше. Обращает на себя внимание, что на участке 2 при монотонном повышении темпера-

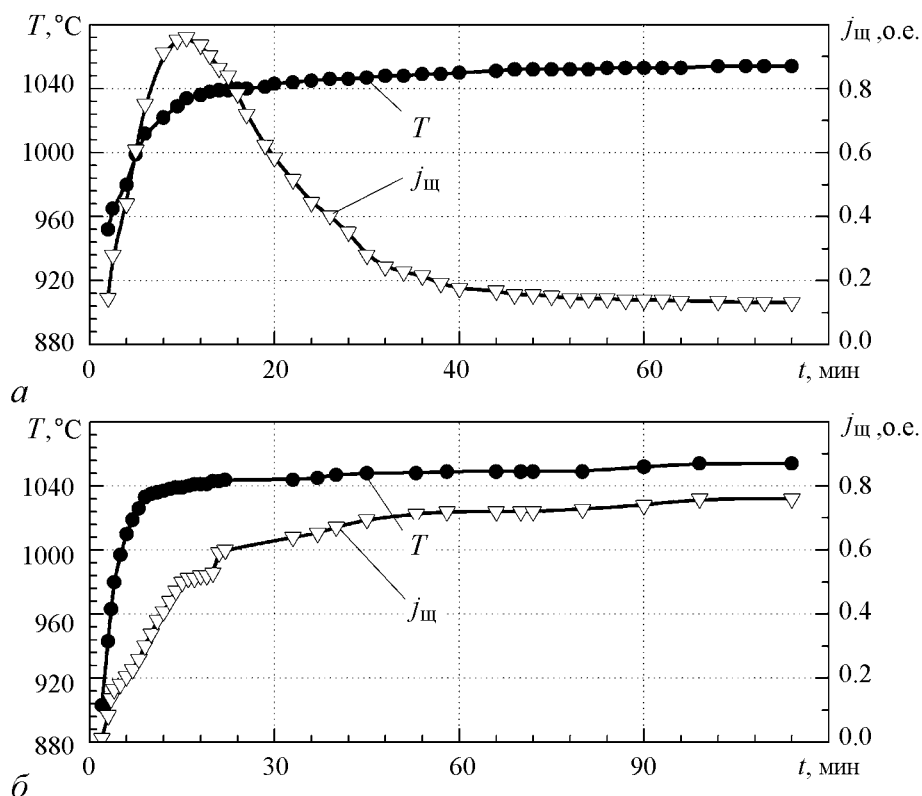


Рис. 3. Изменения во времени t температуры T и плотности тока эмиссии $j_{ш}$, измеренной для участков 2 (а) и 1 (б) W-Ва катода при анодном напряжении 8 кВ

туры катода плотность тока эмиссии сначала нарастает, а затем быстро (за интервал времени примерно 20 мин.) падает. Только после этого характеристика $j_{\text{ш}}(t)$ выходит в насыщение, достигая своего установившегося значения $j_{\text{ш}}^*$. Одновременно с этим достигает установившегося значения j_{ay} и плотность тока, зарегистрированного анодным анализатором. Начальный быстрый рост плотности эмиссионного тока связан, с нашей точки зрения, не только с повышением температуры, но и с тем, что работа выхода данного участка была понижена в процессе ионной бомбардировки из-за осаждения на его поверхности слоя атомов калия. Спад тока при увеличении температуры, очевидно, обусловлен испарением калия. Зависимости величины $j_{\text{ш}}$ от времени t для наиболее эффективного участка катода **1** не имеют описанной особенности (см. рис. 3, б). Величина $j_{\text{ш}}$ на этом участке монотонно увеличивается и выходит в насыщение. Такое отличие обусловлено, видимо, тем, что напыление калия слабо меняет здесь исходно малую работу выхода поверхности катода. Но следует думать, что и на этом участке уже в процессе подъема температуры калий с поверхности катода испаряется. Установившиеся значения $j_{\text{ш}}^*$ и j_{ay} плотности тока с катода зависят от эмиссионной активности данного участка катода и от энергии ионов, которыми он был обработан.

Было обнаружено, что ионная бомбардировка ведет к увеличению эмиссионной активности поверхности W-Ва катода, причем не только участка, подвергнутого бомбардировке, но и ближайших окрестностей. Иллюстрируют сказанное рис. 4 и рис. 5. На рис. 4 сравниваются азимутальные распределения установившихся значений плотности тока эмиссии $j_{\text{ay}}(\theta)$, полученные с помощью анодного анализатора в области участка **1** катода до и после его обработки потоком ионов с энергией 9 кэВ. Аналогичные зависимости для участка **2**, измеренные по току через щель ионного источника $j_{\text{ш}}(\theta)$, приведены на рис. 5. В обоих случаях изменение эмиссионного тока максимально под серединой щели анода, однако ощущается не только в зоне ионной бомбардировки под щелью шириной 2 мм (соответствует приблизительно 3.2 градуса азимутальных координат), но и в более широкой области эмиттера.

Влияние энергии ионов на качество обработки поверхности катода можно охарактеризовать величиной коэффициента $K = j_y/j_{y0}$, определяемого увеличением установившихся значений плотности тока эмиссии в середине зоны ионной обработки. В выражении для этого коэффициента j_{y0} и j_y есть соответственно уста-

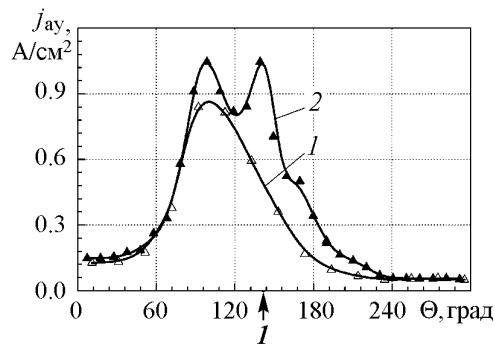


Рис. 4. Азимутальные распределения установившихся значений плотности тока эмиссии $j_{\text{ay}}(\theta)$, измеренные до (кривая 1) и после (кривая 2) обработки участка **1** (см. рис. 2) W-Ва катода потоком ионов с энергией 9 кэВ

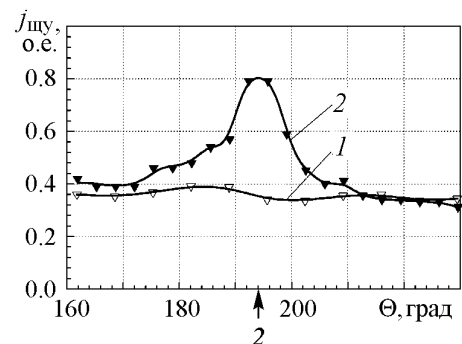


Рис. 5. Азимутальные распределения установившихся значений плотности тока эмиссии $j_{\text{ш}}(\theta)$, измеренные до (кривая 1) и после (кривая 2) обработки участка **2** (см. рис. 2) W-Ва катода потоком ионов с энергией 9 кэВ

новившиеся значения плотности тока эмиссии для данного участка катода перед ионной обработкой и после ее проведения. Измерения показали, что происходящие под действием ионной бомбардировки относительные изменения плотности эмиссионного тока в середине зоны ионной обработки были приблизительно одинаковы на всех исследованных участках катода, но изменялись при варьировании энергии ионов $W_{и}$. На рис. 6 показана зависимость коэффициента K от величины $W_{и}$. Полученные данные свидетельствуют, что ионная бомбардировка практически не меняет установившиеся значения плотности тока эмиссии с обработанного участка, если энергия ионов меньше приблизительно 5 кэВ. Максимально же ее влияние при энергии ионов $W_{и} \approx 9$ кэВ. Уровень активировки, достигнутый при обработке катодов ионами с энергиями $W_{и} > 5...6$ кэВ, в МИП с накалившимся W-Ва катодом практически не менялся при неизменной температуре катода, по крайней мере, в течение нескольких десятков часов. Не менялся достигнутый уровень активировки и после длительной (в течение двух недель) выдержки катода при комнатной температуре в атмосфере остаточных газов при давлении приблизительно 10^{-7} Торр.

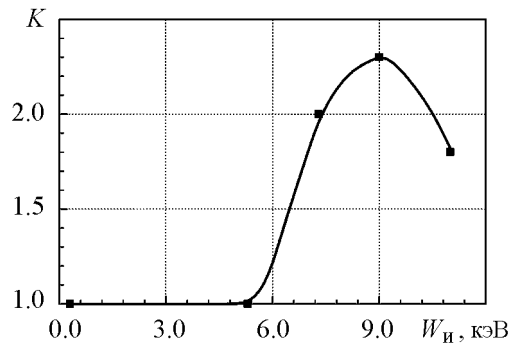


Рис. 6. Зависимость коэффициента K увеличения плотности тока эмиссии от энергии ионов $W_{и}$, полученная в МИП с W-Ва катодом. Анодное напряжение при измерении тока эмиссии – 8 кВ

Для получения дополнительной информации о влиянии нагрева на эмиссионные характеристики катода измерялись азимутальные распределения плотности тока эмиссии при повышенных температурах катода вплоть приблизительно до 1200°C . Измерения проводились при анодном напряжении 14 кВ, чтобы обеспечить режим эмиссионного ограничения тока с катода в исследованном интервале температур, во всяком случае, на участке катода напротив входной диафрагмы анализатора. На рис. 7 показаны азимутальные распределения установившихся значений плотности

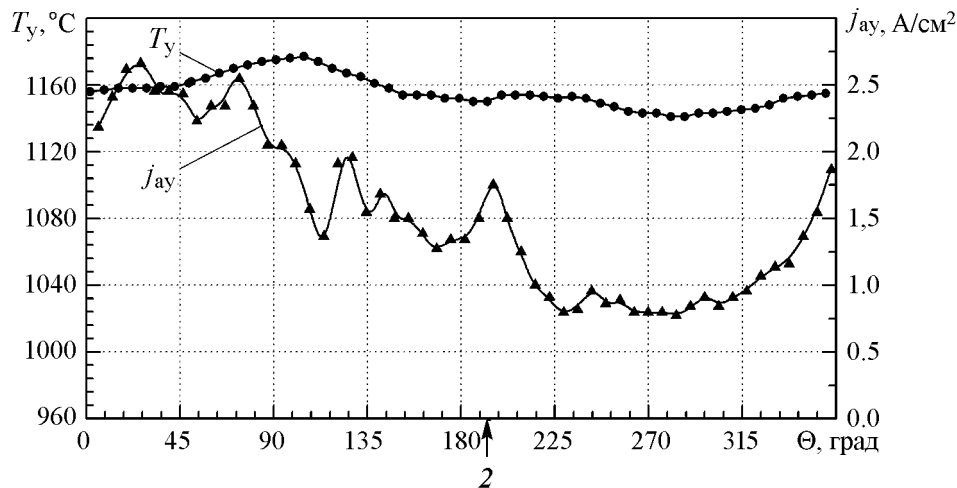


Рис. 7. Азимутальные распределения установившихся значений плотности тока эмиссии $j_{ay}(\theta)$ и температуры катода $T_y(\theta)$, измеренные в МИП с W-Ва катодом. Анодное напряжение – 14 кВ. Область катода, обработанная потоком ионов, обозначена стрелкой

тока анализатора $j_{ay}(\theta)$ и температуры катода $T_y(\theta)$, полученные при наибольшем накали катода после обработки участка 2 (см. рис. 2) его поверхности потоком ионов

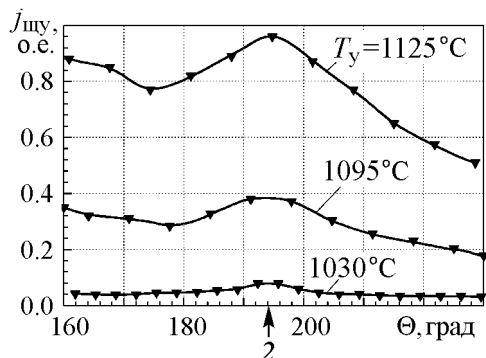


Рис. 8. Азимутальные распределения установившихся значений плотности тока эмиссии $j_{щщ}(\theta)$, измеренные при разных значениях температуры T_y после обработки участка 2 (см. рис. 2) W-Ва катода потоком ионов с энергией 9 кэВ

с энергией 9 кэВ. Участок 2 отмечен на рисунке стрелкой. На рис. 8 показаны изменения азимутального распределения $j_{щщ}(\theta)$, измеренные в окрестности этого участка при меньших температурах катода. Значения температуры T_y , указанные на рис. 8, соответствуют центру области ионной обработки ($\theta \approx 194$ град).

Полученные данные свидетельствуют, что увеличение накала ведет к возрастанию плотности тока эмиссии на всей поверхности катода и к некоторому сглаживанию его распределения (см. рис. 7). Такие изменения эмиссионных

характеристик обусловлены, видимо, активировкой катода, при повышенных накалах подогревателя. После выдержки катода при повышенных температурах перепад работы выхода по его поверхности уменьшился по сравнению с начальным, вычисленным на основании данных рис. 2. При измерении характеристик рис. 7 он не превышал примерно 0.1 эВ. Однако, несмотря на произошедшие изменения эмиссионных характеристик катода, пик повышенной эмиссии на обработанном ионами участке 2 сохраняется во всем исследованном интервале температур.

Завершая изучение W-Ва катода, мы исследовали влияние повышенного давления остаточного газа на распределение плотности тока эмиссии с поверхности обработанного потоком ионов катода. Давление в камере было увеличено приблизительно до $1 \cdot 10^{-3}$ Торр. Катод находился при таком давлении в течение 1 часа при комнатной температуре. Затем камера была откачана до давления $1 \cdot 10^{-7}$ Торр и было измерено азимутальное распределение плотности тока эмиссии катода. Проведенные измерения показали, что повышение давления не оказывает существенного влияния на вид азимутального распределения плотности тока эмиссии с катода.

Таким образом, полученные данные свидетельствуют о возможности использования ионной обработки для повышения эмиссионной однородности W-Ва катодов. Как следует из проведенных измерений, повысить однородность катодов можно, обрабатывая участки катода с аномально малой эмиссионной активностью потоком ионов калия с энергиями 9–10 кэВ.

2.2. Исследование характеристик LaB₆ катода. На рис. 9 показаны типичные азимутальные распределения установившихся значений плотности тока эмиссии и температуры, полученные в МИП с LaB₆ катодом при пониженной, по сравнению с рабочей (примерно 1600°C), средней температуре катода примерно 1300°C и анодном напряжении 8 кВ. Учитывая тот факт, что при такой температуре максимальная плотность тока эмиссии с катода мала и не превышала $5 \cdot 10^{-2}$ А/см², в данном случае можно было определять азимутальные распределения, измеряя изменения с азимутальной координатой не только тока в анализатор, но и тока через

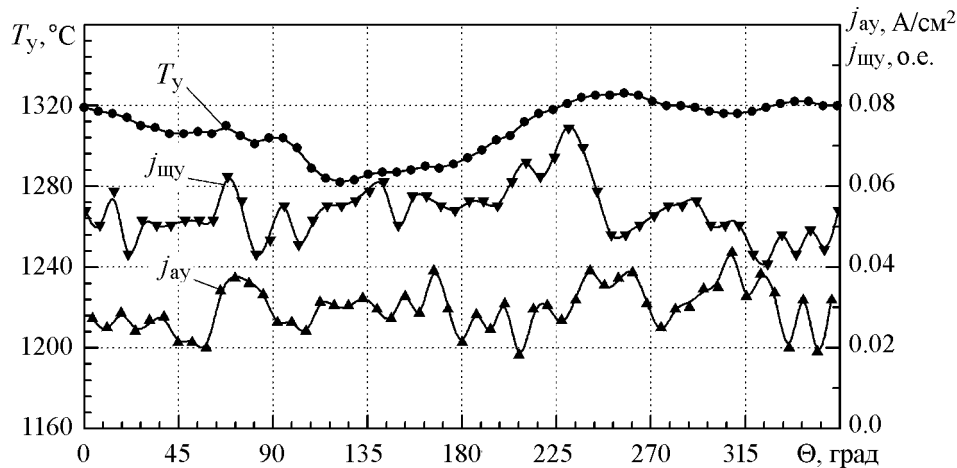


Рис. 9. Азимутальные распределения установившихся значений плотности тока эмиссии $j_{ay}(\theta)$ и $j_{шy}(\theta)$, а также установившихся значений температуры катода $T_y(\theta)$, измеренные в МИП с LaB_6 катодом. Анодное напряжение – 8 кВ

щель ионного источника. Различия в характеристиках $j_{ay}(\theta)$ и $j_{шy}(\theta)$ могут быть объяснены с учетом неоднородного распределения тока эмиссии по ширине эмитирующего пояска. Сфотографированное изображение участка накаливаемого катода (рис. 10) демонстрирует типичный вид неоднородностей его поверхности.

Воздействие ионной бомбардировки было исследовано для локальных участков поверхности LaB_6 катода. Переходные характеристики, полученные в процессе его нагрева после окончания ионной бомбардировки, были подобны аналогичным характеристикам W-Ва катода, изображенным на рис. 3, а. Отсюда следует, что в процессе бомбардировки LaB_6 катода, как и в случае W-Ва катода, происходила сначала активировка катода, связанная с осаждением калия на его поверхность, но при нагреве катода в связи с испарением калия плотность тока эмиссии уменьшалась и

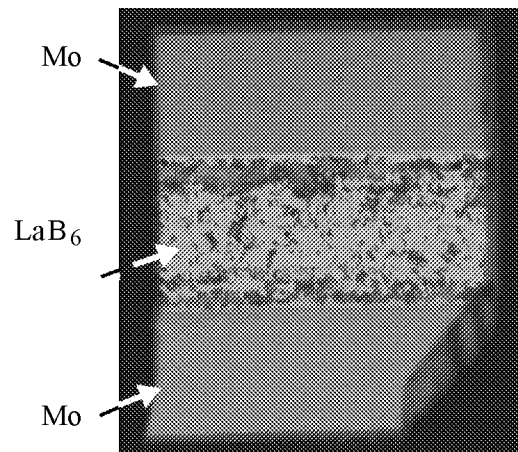


Рис. 10. Фотография участка накаливаемого LaB_6 катода

принимала свое установившееся значение $j_{шy}$. При малых энергиях бомбардирующих катод ионов $W_{и} < 4$ кэВ эта величина практически не отличалась от исходного значения плотности тока эмиссии. При значениях энергии $W_{и} > 4...5$ кэВ установившиеся значения плотности тока эмиссии были меньше исходных, то есть происходила дезактивировка LaB_6 катода, достигался эффект, обратный тому, который имел место для W-Ва катода. Так, при энергии ионов 9 кэВ установившиеся значения плотности тока эмиссии получались на 20–25% меньше, чем до обработки катода потоком ионов. Изменения эмиссионной активности были достаточно стабильны и практически не менялись после прекращения ионной бомбардировки при работе МИП с накаливаемым катодом.

Таким образом, полученные данные свидетельствуют о возможности использования ионной обработки для повышения эмиссионной однородности не только W-Ва, но и LaV₆ катодов. Как следует из проведенных измерений, повысить однородность LaV₆ катодов можно, обрабатывая участки катода с аномально высокой эмиссионной активностью потоком ионов калия с энергиями примерно 9 кэВ.

Заключение

Подытоживая, отметим важнейшие результаты работы.

- Разработана методика обработки гиротронных катодов потоками ионов калия.
- Исследовано влияние ионной обработки на эмиссионные характеристики W-Ва и LaV₆ катодов.
- Выявлено влияние материала покрытия катода и эмиссионной его эффективности, а также энергии ионов на результаты ионной обработки.
- Получены данные, свидетельствующие о том, что активировка W-Ва и дезактивировка LaV₆ катодов в установившемся режиме не связаны с оседанием калия на катоде. Отсюда следует возможность обработки гиротронных катодов не только ионами калия, но и другими ионами.
- Результаты работы свидетельствуют, что ионная обработка может быть использована для повышения эмиссионной однородности катодов за счет увеличения эмиссионной активности участков W-Ва катода с наименьшей эмиссией и в результате дезактивировки участков LaV₆ катода, обеспечивающих наибольшие значения плотности тока эмиссии.

Имеющихся данных пока недостаточно для однозначного и непротиворечивого определения механизмов воздействия ионной бомбардировки. Однако, учитывая тот факт, что воздействие ионной бомбардировки заметно только при достаточно больших энергиях ионов, можно предположить, что изменения эмиссионной активности катодов должны быть связаны с десорбцией под действием ионной бомбардировки атомов с поверхности покрытия катодов и/или с реконструкцией этой поверхности.

Данная работа финансировалась Исследовательским центром г. Карлсруе, Германия (контракт №320/20359213/ИИМ), а также из средств гранта РФФИ №08-02-00324.

Библиографический список

1. Gaponov-Grekhov A.V., Granatstein V.L. Applications of high power microwaves. Boston, MA: Artech House, 1994.
2. Nusinovich G.S. Introduction to the physics of gyrotrons. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 2004.
3. Thumm M. State-of-the-art of high power gyro-devices and free electron masers Update 2005. Karlsruhe: Forschungszentrum Karlsruhe, 2006.
4. Tsimring Sh.E. Gyrotron electron beams: velocity and energy spread and beam instabilities // Int. J. Infrared Millimeter Waves. 2001. Vol. 22(10). P. 1433.

5. *Louksha O.I., Sominski G.G., Kas'yanenko D.V.* Experimental study and numerical modeling of the electron beam formed in the electron-optical system of a gyrotron // *J. Comm. Tech. Electron.* 2000. Vol. 45(suppl. 1). P. S71.
6. *Glyavin M.Yu., Goldenberg A.L., Kuftin A.N., Lygin V.K., Postnikova A.S., Zapevalov V.E.* Experimental studies of gyrotron electron beam systems // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 1999. Vol. 27(4). P. 474.
7. *Аброян И.А., Андронов А.Н., Титов А.И.* Физические основы электронной и ионной технологии. М.: Высшая школа, 1984.
8. *Лушка О.И., Цыбин О.Ю.* Исследование эмиссии атомных частиц с поверхности термокатода электронной пушки // *ЖТФ.* 1992. Т. 62(10). С. 154.
9. *Louksha O.I., Piosczyk B., Sominski G.G., Thumm M.K., Samsonov D.B.* On potentials of gyrotron efficiency enhancement: measurements and simulations on a 4-mm gyrotron // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2006. Vol. 34(3). P. 502.
10. *Тумарева Т.А., Соминский Г.Г., Бондаренко А.К., Веселов А.А., Светлов И.А.* Активирование фуллереновых покрытий полевых эмиттеров потоками атомов и ионов калия // *ЖТФ.* 2006. Т. 76(7). С. 81.

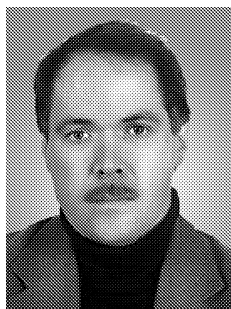
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Россия
Research Center Karlsruhe, Germany
Institute for Pulsed Power and Microwave Technology at
Forschungszentrum Karlsruhe, Germany

Поступила в редакцию 26.03.2008

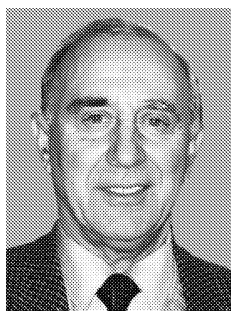
INVESTIGATION OF POSSIBILITY TO USE ION TREATMENT FOR ENHANCEMENT OF GYROTRON CATHODE QUALITY

*O.I. Louksha, G.G. Sominski, D.B. Samsonov,
G. Dammertz, B. Piosczyk, M.K. Thumm*

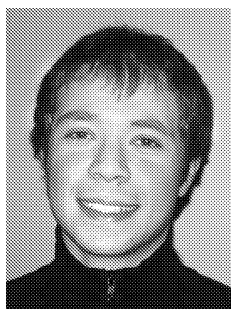
A method for gyrotron cathode treatment by flow of potassium ions has been developed, and the effect of ion bombardment on the emission characteristics of W-Ba and LaB₆ cathodes has been investigated. The influence of cathode surface material, cathode emission activity and ion energy on the result of ion treatment was revealed. It was shown that ion bombardment can be used for the increase of cathode emission uniformity due to the activation of the W-Ba cathode areas with low electron emission and due to the deactivation of the LaB₆ cathode areas with high electron emission. The obtained data demonstrate that the activation of the W-Ba cathode and the deactivation of the LaB₆ cathode are not connected with the potassium deposition on the cathode but can be caused by desorption of atoms from the cathode surface and/or by reconstruction of this surface.



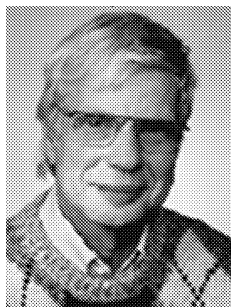
Лушкин Олег Игоревич – родился (1961) в Ленинграде, окончил (1984) Ленинградский политехнический институт (ныне Санкт-Петербургский государственный политехнический университет). После окончания института работает на кафедре физической электроники СПбГПУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (СПбГПУ, 1992). В настоящее время область научных интересов – экспериментальные исследования и численное моделирование физики процессов в устройствах гиротронного типа. Автор более 50 научных публикаций.



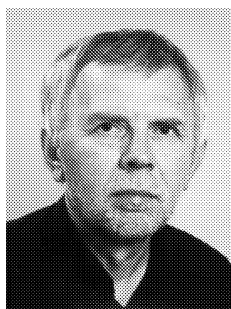
Соминский Геннадий Гиршевич – родился (1935) в Ленинграде. Окончил Ленинградский политехнический институт (1960). Защитил кандидатскую диссертацию (1967) и диссертацию на соискание ученой степени д. ф.-м. н. (1984). Докторская диссертация была посвящена исследованию мощных СВЧ устройств со скрещенными полями. С 1960 года по настоящее время работает на кафедре физической электроники СПбГПУ, профессор (с 1991). В 1968 году организовал на кафедре лабораторию сильноточной и СВЧ электроники и руководит ею по настоящее время. Область основных научных интересов – процессы в пространственном заряде и их влияние на работу сильноточных электронных устройств. Кроме того, занимается исследованием и разработкой полевых эмиттеров для формирования интенсивных электронных потоков. Автор более 200 печатных работ и 17 изобретений.



Самсонов Дмитрий Борисович – родился (1982) в Ленинграде, окончил Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, радиофизический факультет (2005) и продолжает обучение в аспирантуре по направлению физическая электроника. В настоящее время участвует в исследованиях физических процессов в гиротроне. Опубликовал в соавторстве 11 научных работ.



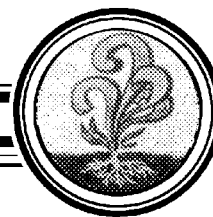
Günter Dammertz – was born in Moers, Germany, on March 3, 1942. He studied physics at the Rheinische Friedrich Wilhelm University, Bonn, Germany, and got his diploma by a work on electron-gamma-angle- correlation. In 1972, he received the Dr. rer. nat. degree in physics with a work on superconducting RF structures from University of Karlsruhe, Karlsruhe, Germany. In 1968, he joined the Research Center (Forschungszentrum) Karlsruhe. He was involved in the development of superconducting RF accelerators and particle separators, in the development of high current neutral beam sources, and in the investigation of a spallation source. Since 1984, he has been working in the development of high-power gyrotrons, especially in the experimental program and in technical investigations.



Bernhard Piosczyk – received the Dipl. Ing. degree in physics in 1969 from the Technical University of Berlin, Germany and the Dr. rer. nat. degree in 1974 from the University of Karlsruhe, Germany. Since 1970 he is working at the Research Center (Forschungszentrum) Karlsruhe, first in the field of RF-superconductivity for accelerator application, then in the development of CW, high current H^+ and H^- ion sources and since 1987 in the development of high power gyrotrons. He is responsible for the development work on the coaxial cavity gyrotron.

Manfred Thumm – was born in Magdeburg, Germany, on August 5, 1943. He received the Dipl. Phys. and Dr. rer. nat. degrees in physics from University of Tübingen, Germany, in 1972 and 1976, respectively. At the University of Tübingen he was involved in the investigation of spin-dependent nuclear forces in inelastic neutron scattering. From 1972 to 1975 he was Doctoral Fellow of the Studienstiftung des Deutschen Volkes. In 1976 he joined the Institute for Plasma Research in the Electrical Engineering Department of the University of Stuttgart, Germany, where he worked on RF production and RF heating of toroidal pinch plasmas for thermonuclear fusion research. From 1982 to 1990 his research activities were mainly devoted to electromagnetic theory in the areas of component development for the transmission of very high power millimeter waves through overmoded waveguides and of antenna structures for RF plasma heating with microwaves. In June 1990 he became a Full Professor of the Institute for High-Frequency Techniques and Electronics at the University of Karlsruhe, Germany, and Head of the Gyrotron Development and Microwave Technology Division, Institute for Technical Physics, Research Center Karlsruhe, Forschungszentrum Karlsruhe (FZK). Since April 1999, he has been the Director of the Institute for Pulsed Power and Microwave Technology at FZK, where his current research projects are the development of high power gyrotrons, dielectric vacuum windows, transmission lines and antennas for nuclear fusion plasma heating, and industrial materials processing. He has authored/coauthored three books, 9 book chapters, 180 research papers in scientific journals, and approx. 800 conference proceedings articles. He holds 10 patents on active and passive microwave devices. He is vice chairman of Chapter 8.6 (Vacuum Electronics and Displays) of the Information Technical Society in German VDE and a member of the German Physical Society. In 2006 he has been appointed to be a member of the IEEE EDS Vacuum Devices Technical Committee. He has been awarded with the Kenneth John Button Medal and Prize 2000, in recognition of outstanding contributions to the Science of the Electromagnetic Spectrum. In 2002, he was awarded the title of Honorary Doctor, presented by the St. Petersburg State Technical University, for his outstanding contributions to the development and applications of vacuum electron devices.





РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЛБВ И ЛОВ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДАХ С КАТОДНЫМ ФИЛЬТРОМ-МОДУЛЯТОРОМ

А.А. Кураев, И.В. Луцицкая, Т.Л. Попкова, А.О. Рак, А.К. Синицын

Приведены результаты развития нелинейной теории релятивистских ЛБВ и ЛОВ на нерегулярных полых волноводах с катодным фильтром-модулятором с учетом как распространяющихся, так и закрытых волн. Приведены результаты оптимизации по КПД вариантов релятивистских черенковских генераторов. На основе строгой теории возбуждения электродинамической системы решена задача определения профиля выходного рупора черенковских генераторов, обеспечивающего необходимый модовый состав в раскрыве и оптимальную характеристику направленности.

Введение

Электродинамические системы современных мощных и сверхмощных электронных приборов СВЧ (гиротронов, релятивистских ламп бегущей и обратной волны – ЛБВ и ЛОВ), включая вводы и выходы энергии, представляют собой отрезки нерегулярных волноводов [1–5]. Причем режим этих волноводов оказывается чаще всего многоволновым [6, 7]. Улучшение характеристик указанных сверхмощных приборов СВЧ связано прежде всего с оптимизацией профиля их электродинамических систем [8, 9]. Это, в свою очередь, требует развития адекватной теории и методов расчета произвольно-нерегулярных волноводов [10–13].

На рис. 1 изображен один из вариантов схемы черенковского генератора. На вход области взаимодействия в виде отрезка полого цилиндрического гофрированного волновода 5 подается электронный поток 3, сформированный электронной пушкой 1, 2. В области взаимодействия 5 реализуются условия синхронизма электронного потока с одной из пространственных гармоник возбуждаемого электромагнитного поля. Вывод СВЧ-мощности производится через выходной рупор 6. Отработавший электронный поток осаждается на стенку волновода сразу за областью взаимодействия. Резонансная канавка 4 играет роль как заграждающего катод фильтра для E_{0z} – волны, так и создает условия для начальной модуляции электронного пучка, образуя совместно с областью 5 и участком дрейфа двухкаскадный генератор с обратной связью по отраженной волне.

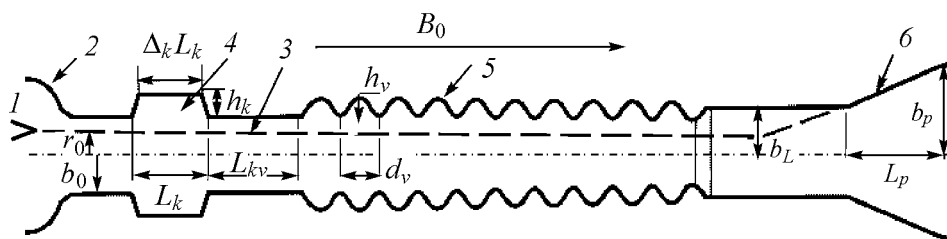


Рис. 1. Схема черенковского генератора: 1, 2 – катод и анод, формирующие трубчатый электронный поток 3; 4 – модулирующая канавка; 5 – периодическая замедляющая гребенка; 6 – выходной рупор

В черенковских генераторах, реализуется довольно сложный комбинированный ЛБВ–ЛОВ–О и гирорезонансный механизм, при котором несколько гармоник поля как синхронных, так и несинхронных участвуют во взаимодействии направляемого магнитостатическим полем B_0 релятивистского электронного потока с возбуждаемым ВЧ-электромагнитным полем. При этом обратная связь осуществляется как на обратной (минус первой) гармонике, так и за счет отражения части СВЧ-мощности от нерегулярных участков волновода и обратного излучения электронов пучка. Ввиду этого модель возбуждения должна учитывать полное возбуждаемое поле [8, 9].

Наиболее эффективной процедурой при расчете нерегулярных волноводов как с вычислительной стороны, так и в отношении физической интерпретации представляется метод, основанный на отображении произвольно-нерегулярной внутренней поверхности волновода на регулярный цилиндр, коаксиал и т.д. с круговым или прямоугольным сечением [10–13]. В преобразованной (косоугольной) системе координат решение представляется в виде связанных нормальных волн с использованием проекционной процедуры. При этом амплитуды связанных волн определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, вид которых определяется профилем неоднородного волновода. Граничные условия к этой системе ставятся в начальном и конечном сечении отрезка нерегулярного волновода (двухточечная задача). Решение этой задачи традиционными методами не встречает затруднений, если рассматриваются только распространяющиеся волны. Как показано ниже, для точного расчета волновода необходим учет наряду с распространяющимися закритическими волн, существенно меняющих характеристики волновода. Однако для закритических волн численное решение граничной (двухточечной) задачи с использованием традиционных методов (пошаговых методов типа Рунге–Кутты или Хемминга) невозможно из-за быстрой расходимости (из-за малых ошибок появляются резко возрастающие решения). Для решения такой задачи использован устойчивый метод блочной матричной прогонки [8, 9].

1. Двумерные самосогласованные уравнения нелинейной модели релятивистских ЛОВ и ЛБВ–О с замедляющей системой в виде гофрированного волновода

Теория релятивистских ЛБВ и ЛОВ с электродинамической системой в виде нерегулярного гофрированного волновода на основе метода преобразования координат развита в [10–24]. Для ЛБВ и ЛОВ с рабочей волной E_{0i} полого нерегулярного

волновода в двумерном приближении она приводит к следующей системе самосогласованных нелинейных уравнений [8, 9, 24].

Уравнения для расчетных амплитуд возбуждаемых волн

$$\frac{d\dot{A}_{mi}}{dz} = \left(mW\dot{V}_{mi} + v_{0i}\dot{C}_{mi} \right) + (1-j)2S_\sigma \frac{\sqrt{1+(db/dz)^2}}{b} \sum_k \dot{V}_{mk} \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0i})}, \quad (1)$$

$$\dot{C}_{mi} = -\frac{v_{0i}\dot{V}_{si}}{mWb^2} + \frac{\partial b}{b\partial z} \left(-\frac{\dot{A}_{mi}}{v_{0i}} + \sum_{k \neq i} \frac{2v_{0i}}{v_{0k}^2 - v_{0i}^2} \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0i})} A_{mk} \right) -$$

$$-\frac{jG_0}{mW \cdot e_{0i}b^2} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N J_0 \left(v_{0i} \frac{r_l}{b} \right) e^{-jmW\theta_l},$$

$$\frac{dV_{mi}}{dz} = -mW \left\{ \dot{A}_{mi} + \left(\frac{\partial b}{\partial z} \right)^2 \left[\dot{A}_{mi} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{v_{0i}^2} \right) + \sum_{k \neq i} \frac{4(v_{0i}^2 + v_{0k}^2)}{(v_{0i}^2 - v_{0k}^2)^2} \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0i})} \dot{A}_{mk} \right] - \right.$$

$$\left. -b \frac{\partial b}{\partial z} \left(-\frac{\dot{C}_{mi}}{v_{0i}} + \sum_{k \neq i} \frac{2v_{0k}}{v_{0i}^2 - v_{0k}^2} \frac{J_1(v_{0k})}{J_1(v_{0i})} \dot{C}_{mk} \right) \right\} +$$

$$+\frac{G_0}{e_{0i}b} \left(\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N J_1 \left(v_{0i} \frac{r_l}{b} \right) \left(\frac{\beta_{rl}}{\beta_{zl}} - \frac{r_l}{b} \frac{\partial b}{\partial z} \right) \right) j e^{-jmW\theta_l},$$

где v_{0i} – i -й корень $J_0(x)$, $b(T) = k_0 b'(T)$, $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega_0/c$, $b'(T)$ – внутренний радиус волновода (штрихом помечены размерные величины имеющие одинаковое обозначение с безразмерными); $W = \omega/\omega_0$, ω – рабочая частота; ω_0 – базовая частота; i – радиальный индекс волны; m – номер гармоники ω ; β_{rl} ; β_{zl} – радиальная и продольная нормированные скорости; $G_0 = 2eI_0/\varepsilon_0 m_0 c^3$, I_0 – ток пучка; $\dot{A}_{mi} = (b' \dot{E}'_{rmi} e)/(m_0 c^2)$; $\dot{C}_{mi} = (\dot{E}_{zmi} e)/(\omega_0 m_0 c)$; $\dot{V}_{mi} = (b' \dot{B}_{\varphi mi} e)/(m_0 c)$; \dot{E}_{rmi} , \dot{E}_{zmi} , $\dot{B}_{\varphi mi}$ – амплитуды компонент волны; e , m_0 – заряд и масса покоя электрона; c – скорость света в пустоте; r_l – радиус движения l -го электрона; $r_l = k_0 r'_l$; $\theta_i = \omega t_i$; $z = z' k_0$; $S_\sigma = \sqrt{\pi W/\sigma \lambda_0 \mu_a c}$; σ – удельная проводимость стенки; μ_a – ее магнитная проницаемость; $e_{0i} = 0.5 J_1^2(v_{0i})$.

Уравнения движения крупных частиц

$$\begin{cases} \frac{dP_{rl}}{dz} = \frac{1}{\beta_{zl}} \left(\frac{\gamma_l \beta_{\varphi l}^2}{r_l} - E_r - \beta_{\varphi l} F_z + \beta_{zl} B_\varphi \right), \\ \frac{dP_{\varphi l}}{dz} = \frac{1}{\beta_{zl}} \left(\frac{\gamma_l \beta_{rl} \beta_{\varphi l}}{r_l} - \beta_{zl} F_r + \beta_{rl} F_z \right), \\ \frac{dP_{zl}}{dz} = \frac{1}{\beta_{zl}} (-E_z - \beta_{rl} B_\varphi + \beta_{\varphi l} F_r), \\ \frac{dr_l}{dz} = \frac{\beta_{rl}}{\beta_{zl}}, \quad \frac{d\theta_l}{dz} = \frac{1}{\beta_{zl}}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\vec{P}_l = \gamma_l \vec{\beta}_l, \quad \gamma_l = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}_l^2}} = \sqrt{1 + P_{rl}^2 + P_{\varphi l}^2 + P_{zl}^2}.$$

Выражение физических ВЧ-полей через расчетные амплитуды с учетом полей пространственного заряда

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = -\frac{1}{b} \sum_m \sum_{i=1}^M J_1 \left(\nu_{0i} \frac{r_l}{b} \right) \operatorname{Re} \left(\dot{A}_{mi} e^{jmW\theta_l} \right) - \frac{G_0}{2r_l} \left(\frac{1}{\beta_{z0}} - \beta_{z0} \right), \\ E_z = \operatorname{Re} \left[\sum_m \sum_{i=1}^M J_0 \left(\nu_{0i} \frac{r_l}{b} \right) \dot{C}_{mi} e^{mjsW\theta_l} + \frac{r_l \partial b}{b^2 \partial z} \sum_m \sum_{i=1}^M J_1 \left(\nu_{0i} \frac{r_l}{b} \right) \dot{A}_{mi} e^{jmW\theta_l} \right], \\ B_\varphi = \frac{1}{b} \sum_m \sum_{i=1}^M J_1 \left(\nu_{0i} \frac{r_l}{b} \right) \operatorname{Re} \left(-j \dot{V}_{mi} e^{jmW\theta_l} \right). \end{array} \right.$$

Магнитоэстатическое фокусирующее поле

$$\left\{ \begin{array}{l} F_r = -\frac{1}{2} r_l \frac{\partial F_0(z)}{\partial z} + \frac{1}{16} r_l^3 \frac{\partial^3 F_0(z)}{\partial z^3}, \\ F_z = F_0(z) - \frac{1}{4} r_l^2 \frac{\partial^2 F_0(z)}{\partial z^2}, \quad F_0 = \frac{B_0(z)e}{m_0 \omega_0}, \quad B_0(z) - \text{поле вдоль оси.} \end{array} \right.$$

Заметим, что уравнения возбуждения (1) включают как вихревую, так и потенциальную («поле пространственного заряда») составляющие полного поля на частоте $m\omega_0 W$.

Граничные условия к системе (1), (2) могут быть сформулированы таким образом. На границах сопряжения нерегулярной области взаимодействия с регулярным волноводом выполняется условие $db(0)/dz = db(L)/dz = 0$ и имеют место следующие соотношения:

для распространяющихся E_{0i} -волн

$$\begin{aligned} W \dot{A}_{mi}(0) + j k_{mi}^e \dot{V}_{mi}(0) &= j k_{mi}^e W 2b(0) \dot{e}_{mi}^+, \\ -W \dot{A}_{mi}(L) + j k_{mi}^e \dot{V}_{mi}(L) &= j k_{mi}^e W 2b(L) \dot{e}_{mi}^-; \end{aligned} \quad (3)$$

для закритических E_{0m} -волн

$$\begin{aligned} W \dot{A}_{mi}(0) + k_{mi}^e \dot{V}_{mi}(0) &= k_{mi}^e W 2b(0) \dot{e}_{mi}^+, \\ -W \dot{A}_{mi}(L) + k_{mi}^e \dot{V}_{mi}(L) &= k_{mi}^e W 2b(L) \dot{e}_{mi}^-; \end{aligned} \quad (4)$$

для немодулированного на входе области взаимодействия электронного потока

$$W\theta_l(0) = \frac{2\pi}{N}(l - 0.5), \quad l = 1 \dots N, \quad \beta_l(0) = \beta_0, \quad r_l(0) = r_0. \quad (5)$$

Таким образом, для системы уравнений для амплитуд (1) поставлена краевая задача, а для уравнений движения крупных частиц (2) сформулирована задача Коши. Совместное решение получается в результате итерационной процедуры.

Эффективность взаимодействия определяется следующими соотношениями:
1) через мощность возбужденных потоком волн («волновой» КПД)

$$\eta_{mi}^v(z) = e_{0i} \frac{\text{Im} \left[\dot{A}_{mi}(z) \dot{V}_{mi}^*(z) - \dot{A}_{mi}(0) \dot{V}_{mi}^*(0) \right]}{(\gamma_0 - 1) G_0}, \quad \eta^v = \sum_i \sum_m \eta_{mi}^v; \quad (6)$$

2) через потерю кинетической энергии электронным потоком («электронный» КПД)

$$\eta^e(z) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \frac{\gamma_0 - \gamma_l(z)}{\gamma_0 - 1}. \quad (7)$$

Фазовую группировку электронов на частоте mW определяет функция группировки G_r

$$G_{rm}(z) = \frac{1}{N} \left[\left(\sum_{i=1}^N \cos mW\theta_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N \sin mW\theta_i \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (8)$$

При малом энергообмене группировка $G_{rm}(z)$ близка к относительной первой гармонике тока в пучке в сечении z .

Задача (1) – (5) с указанной целевой функцией $\max F_c(\vec{g}(z))$ (обычно $F_c = \eta^e$) представляет собой задачу оптимального управления, в которой в качестве искомого управления $\vec{g}(z)$ выступают нормированный профиль волновода $b(z)$ и профиль фокусирующего магнитного поля $F(z)$. При аппроксимации управлений использовались сплайны третьей и пятой степени.

Профиль нерегулярного гофрированного волновода задавался как

$$b(T) = b_0 + h_v(T) \sin^2[n_v \pi(T + D_v(T))]. \quad (9)$$

Здесь $T = (z - z_0)/L_v$, где z_0 и L_v – начало и длина нерегулярного участка; n_v – количество периодов; $h_v(T)$ – глубина гофра; $D_v(T)$ – функция ($D_v(0) = D_v(1) = D_v'(0) = D_v'(1) = D_v''(0) = D_v''(1) = 0$), задающая изменение периода; если $D_v(T) = 0$, период постоянный и равен в принятых единицах $d = k_0 L_v / n_v$.

Функции $h_v(T)$ и $D_v(T)$ аппроксимировались в виде разложений по сдвигам стандартной финитной функции $\varphi_3(x)$, представляющей В-сплайн третьей степени,

$$h_v(T) = \sum_{k=1}^K h_k^y \varphi_3[T(K-3) - k + 2], \quad D_v(T) = \sum_{k=1}^K d_k^y \varphi_3[T(K+3) - k - 1], \quad (10)$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 2 \text{ и } (2-x)^3/6, \quad 1 \leq x \leq 2, \\ [1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3]/6, & 0 \leq x \leq 1, \\ \varphi_3(-x), & x \leq 0. \end{cases}$$

В расчетах использовалась аппроксимация с $K = 5 \dots 8$.

Сопряжение регулярных участков волновода с разными радиусами b_1, b_2 задавалось как $b = b_1 + (b_2 - b_1)P_5(T)$, $T = (z - z_0)/L_c$, где z_0, L_c – начало и длина

участка сопряжения. Полином пятой степени

$$\begin{aligned}
 P_5(T) &= T^3(10 - 15T + 6T^2), \\
 \frac{\partial P_5}{\partial T} &= 30T^2(1 - T)^2, \\
 \frac{\partial^2 P_5}{\partial T^2} &= 60T(1 - 3T + 2T^2)
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

обеспечивает непрерывность первой и второй производной в точках сопряжения.

С использованием таких сопряжений на профиле волновода моделировались резонансные канавки и выступы определенной конфигурации, моделировались замедляющие квазипериодические меандровидные структуры, преобразователи мод и рупорные выводы.

2. Расчет и оптимизация релятивистских ЛБВ-, ЛОВ-генераторов на гофрированном волноводе

Используя самосогласованную систему (1), (2), (11) и граничные условия к ней (3), (4), (5), на основе метода блочной матричной прогонки были получены следующие варианты генераторов.

1. Вариант 4-миллиметрового одноволнового генератора. Рабочая частота $f = 73.17$ ГГц, выбранная опорная частота ω_0 соответствует $\lambda_0 = 4.084$ мм. Напряжение пучка $V_0 = 205$ кВ, ток $I_0 = 900$ А, величина фокусирующего магнитного поля $B_0 = 7.5$ Тл. Регулярный гофрированный участок имеет $n_v = 12$ периодов, $d_v = 5.385$, $h_v = 2.308$, $b_0 = 4.615$ (3.5 мм, 1.5 мм, 3 мм). Ширина, высота модулирующей канавки и ее расстояние от начала гребенки $L_1 = 11.17$, $h_1 = 3.14$, $L_{1v} = 2.2$ (7.26 мм, 2.04 мм, 1.43 мм), $\Delta_1 = 0.8$. Радиус пучка $r_0 = 4.04$ (2.62 мм). Достигнутый КПД составил 10%. Анализ показал, что реализован синхронизм на минус второй гармонике вблизи границы прозрачности 2π -вида. Характеристики этого варианта представлены на рис. 2.

2. Вариант 8-миллиметрового одноволнового генератора. Рабочая частота $f = 37.96$ ГГц, выбранная опорная частота ω_0 соответствует $\lambda_0 = 7.99$ мм. Напряжение пучка $V_0 = 212$ кВ, ток $I_0 = 600$ А, величина фокусирующего магнитного поля $B_0 = 5$ Тл. Регулярный гофрированный участок имеет $n_v = 12$ периодов, $d_v = 2.756$, $h_v = 1.18$, $b_0 = 2.3615$ (3.5 мм, 1.5 мм, 3 мм). Радиус волновода на конце $b_L = 2.952$ (3.75 мм). Ширина, высота модулирующей канавки и ее расстояние от начала гребенки $L_1 = 4.72$, $h_1 = 1.46$, $L_{1v} = 5.51$ (6 мм, 1.86 мм, 7 мм), $\Delta_1 = 0.8$. Радиус пучка $r_0 = 2.06$ (2.62 мм). Достигнутый КПД составил 36%. Анализ показал, что реализован синхронизм на минус первой гармонике вдали от границы полосы прозрачности. При внутреннем радиусе $b_0 = 2.36$ волновод является закритическим, поэтому для вывода СВЧ-мощности сразу за гофрированным участком радиус волновода увеличен. Характеристики этого варианта представлены на рис. 3.

3. Вариант 3-сантиметрового двухволнового генератора. Рабочая частота $f = 9.97$ ГГц, выбранная опорная частота ω_0 соответствует $\lambda_0 = 3.2$ см. Напря-

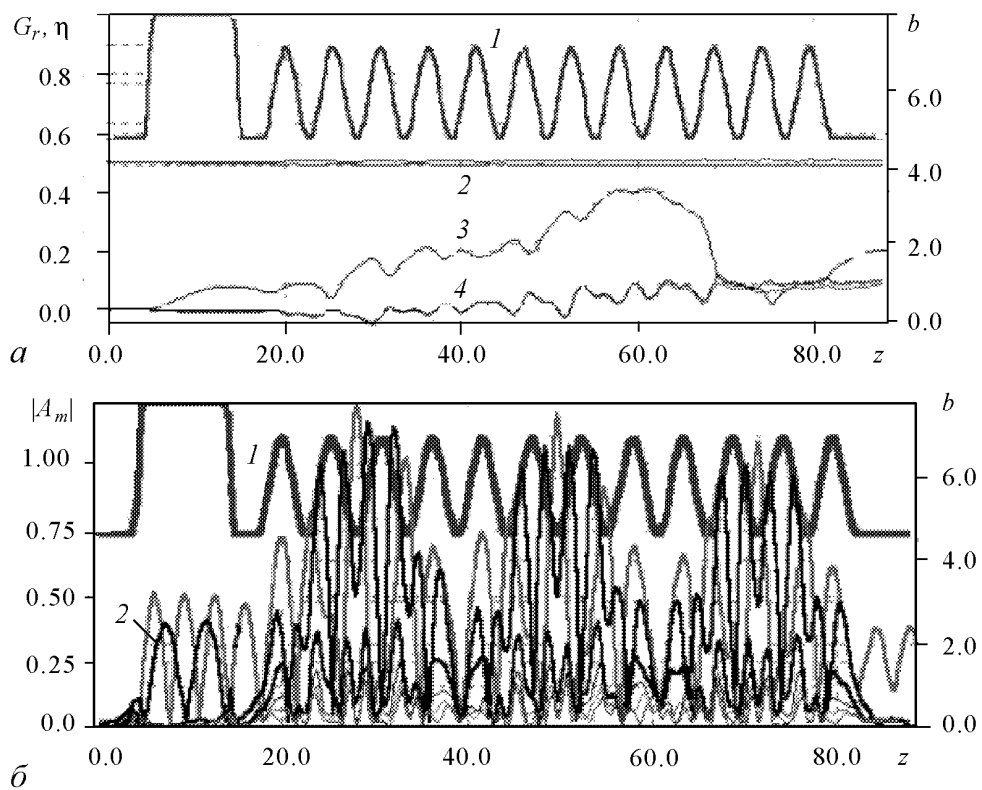


Рис. 2. Характеристики варианта 4-миллиметрового генератора: a – кривые 1 – $b(z)$, 2 – r_{max} , r_{min} , 3 – G_{r1} , 4 – η^e , $-\eta^v$; δ – кривые 1 – $b(z)$, 2 – A_m

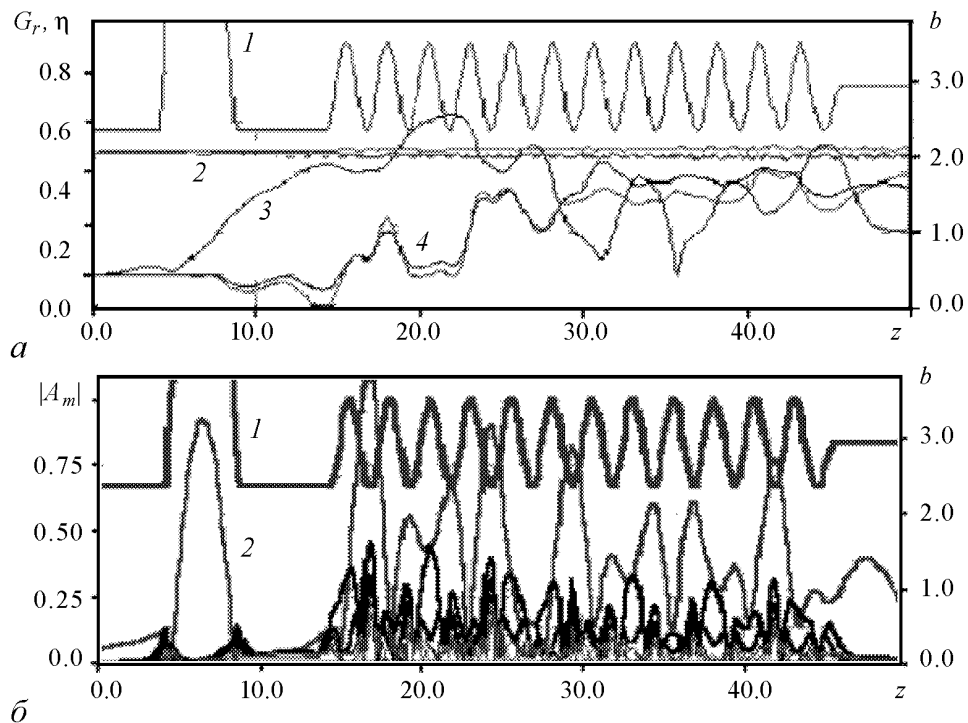


Рис. 3. Характеристики варианта 8-миллиметрового генератора: a – кривые 1 – $b(z)$, 2 – r_{max} , r_{min} , 3 – G_{r1} , 4 – η^e , η^v ; δ – кривые 1 – $b(z)$, 2 – A_m

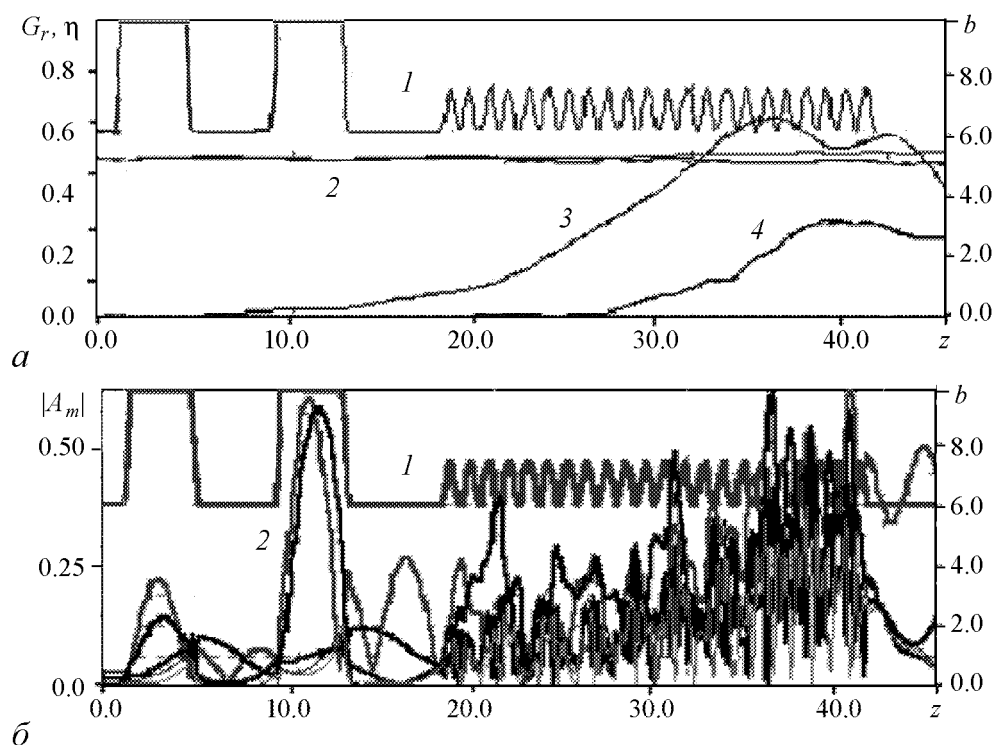


Рис. 4. Характеристики варианта 3-сантиметрового генератора: *a* – кривые 1 – $b(z)$, 2 – r_{max} , r_{min} , 3 – G_{r1} , 4 – η^e , η^v ; *b* – кривые 1 – $b(z)$, 2 – A_m

жение пучка $V_0 = 265$ кВ ($\beta_0 = 0.753$), ток $I_0 = 800$ А, величина фокусирующего магнитного поля $B_0 = 0.35$ Тл. Регулярный гофрированный участок имеет $n_v = 20$ периодов, $d_v = 1$, $h_v = 1.42$, $b_0 = 6$ (0.5 см, 0.71 см, 3 см). Ширина, высота двойной модулирующей канавки и ее расстояние от начала гребенки $L_1 = L_{12} = L_2 = 3.89$, $h_{1,2} = 3.8$, $L_{2v} = 4.716$ (1.945 см, 1.9 см, 2.36 см), $\Delta_{1,2} = 0.8$. Радиус пучка $r_0 = 5$ (2.5 см). Достигнутый КПД составил 30%. Анализ показал, что реализован синхронизм на основной гармонике вдали от границы полосы прозрачности. Характеристики этого варианта представлены на рис. 4.

3. Оптимизация профиля рупора на симметричных *E*-волнах по характеристике направленности

Основное назначение рупора состоит в том, чтобы согласовать волновод с открытым пространством, что достигается за счет плавного увеличения радиуса волновода до значения, при котором фазовая скорость основной волны приближается к скорости света в свободном пространстве. При этом условии отражение от открытого конца волновода практически отсутствует и реализуется идеальная для данного типа волны диаграмма направленности излучения.

Однако проблема реализации такого рупора заключается в том, что при необходимом для идеального сопряжения выходном радиусе в рупоре возбуждаются выс-

шие типы волн, которые имеют фазовую скорость, большую скорости света в открытом пространстве, что приводит как к рассогласованию и, следовательно, к увеличению коэффициента отражения, так и к ухудшению диаграммы направленности.

Как показывают расчеты, за счет увеличения длины рупора с плавным увеличением радиуса эти негативные факторы хотя и возможно уменьшить, однако, лишь до определенного и не всегда приемлемого уровня. Наиболее радикальный путь улучшения характеристик рупора – подбор закона изменения профиля, при котором высшие типы волн на его выходном сечении отсутствуют и при этом коэффициент отражения из-за их возбуждения минимален.

В работах [9, 25] такая оптимизационная задача решается для рупора, представляющего преобразователь сопротивления для симметричной E_{01} -волны. Найдены и исследованы оптимальные варианты профилей рупора, в котором возможно возбуждение двух или трех распространяющихся волн. Следует отметить, что в таком рупоре кроме распространяющихся возбуждается также ряд ближайших закрытых для текущего сечения волн. Чтобы обеспечить их отсутствие на выходном сечении (после которого они становятся распространяющимися), рупор имеет достаточно протяженный регулярный выходной участок. В [9, 25] задача оптимизации решается для одночастотного режима; она весьма актуальна в настоящее время для расчета и оптимизации профиля выходного рупора излучателя релятивистской ЛБВ-О с рабочим типом волны E_{01} .

При оптимизации нерегулярный участок профиля рупора $b_v(T)$ задавался следующей многопараметрической функцией:

$$b_v = b_L + (b_p - b_L)P_5(T) + D_v(T). \quad (12)$$

Полином пятой степени $P_5(T)$ (11) задает плавный монотонный переход с радиуса b_L на b_p и обеспечивает непрерывность первой и второй производной в точках сопряжения с регулярными участками. Функция $D_v(T)$ определяет отклонение профиля от монотонного и задается в виде (10). Параметры d_k^v ($k = 1...6$) функции $D_v(T)$ подбирались из условия минимума амплитуд высших мод. Для сравнения рассчитывались характеристики рупора с монотонным изменением профиля ($D_v(T) = 0$).

На рис. 5 приведены характеристики рупора с плавным изменением профиля при $b_L = 3$ (входное сечение нерегулярной части), $b_p = 8$ (выходное сечение нерегулярной части), $L_p = 10$ (длина нерегулярной части). На рис. 5, а представлены: 1 – профиль $b_v(T)$, 2, 3, 4, ... – нормированные амплитуды волн соответственно $E_{01}, E_{02}, E_{03}, E_{04}, \dots$, которые учитывались в расчетах. Как видно из рис. 5, а, на выходе рупора велика амплитуда волны E_{02} : она равна амплитуде E_{01} -волны. В результате функция $G(\vartheta)$ оказывается многогорбой (рис. 5, б).

На рис. 6 приведены аналогичные результаты для тех же заданных параметров b_L, b_p, L_p при минимизации $\sum_{m=2}^8 |A_m(z_p)|$, z_p – координата выходного сечения рупора (рис. 6, а). Характеристика направленности $G(\vartheta)$ существенно улучшается (рис. 6, б).

Увеличение выходного сечения и длины нерегулярной части рупора должно приводить к улучшению (сжатию) функции $G(\vartheta)$. Для подтверждения этого был рассчитан и оптимизирован вариант рупора с $b_L = 3$, $b_p = 10$, $L_p = 14.07$. На

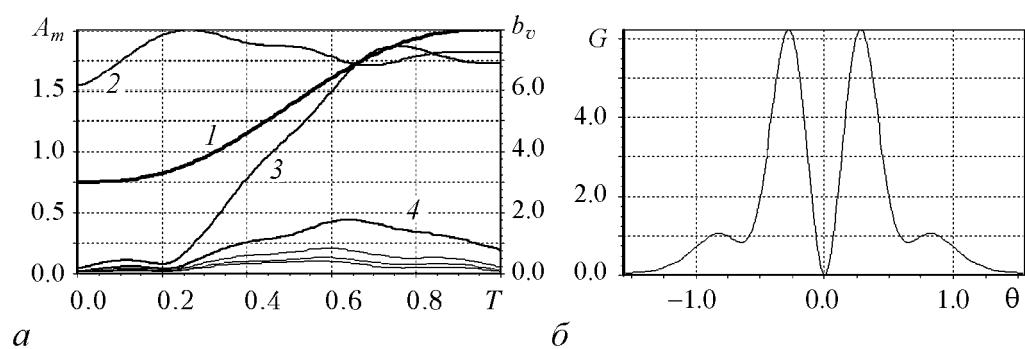


Рис. 5. Характеристики рупора с плавным изменением профиля

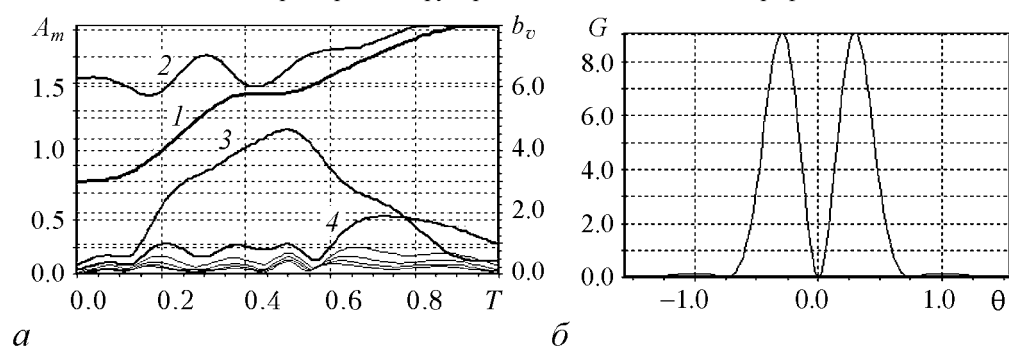


Рис. 6. Характеристика рупора с профилем, оптимизированным по минимуму амплитуды высших мод

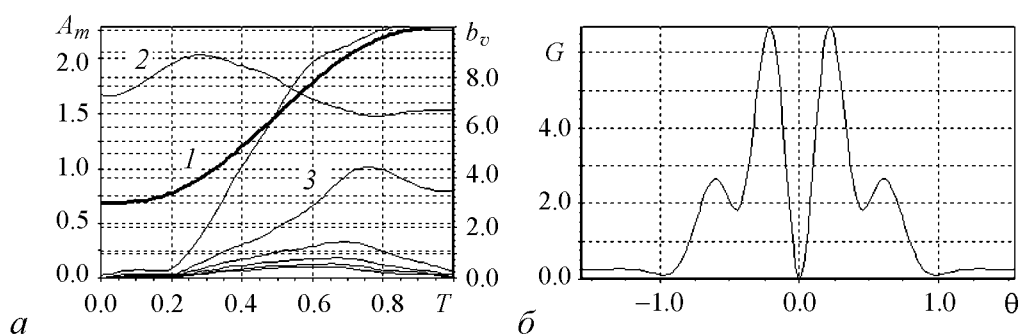


Рис. 7. Характеристика рупора с монотонным профилем и увеличенным раскрытием

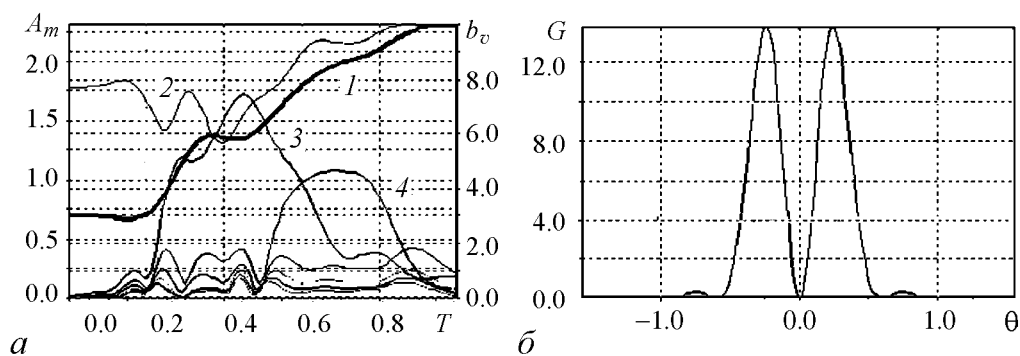


Рис. 8. Характеристика рупора с оптимизированным профилем

рис. 7 представлены характеристики этого варианта с плавным изменением профиля; на рис. 8 – с профилем, оптимизированным по минимуму модового состава на выходе. Очевидны улучшения $G(\vartheta)$ в том и другом случаях. В оптимальном варианте $G_{\max} = 13.5$. Во всех вариантах отраженная мощность (P_{01}^-) не превосходит 0.2% от P_{01}^+ .

Приведенные результаты указывают на эффективность предложенного метода оптимизации профиля нерегулярного рупора на E_{0m} -волнах круглого волновода. Одновременно следует отметить существенную роль высших мод в формировании диаграммы направленности рупора. Управление модовым составом на выходе рупора позволяет существенно улучшить характеристику направленности $G(\vartheta)$ рупора.

В заключение обратим внимание на следующее обстоятельство. В обзоре приведены данные расчетов и оптимизации релятивистских черенковских приборов с учетом только первой гармоники поля. Основанием для этого служат результаты исследования влияния высших гармонических составляющих сигнала в релятивистских ЛБВ-О на гофрированном волноводе в работе [16]. В этой работе показано, что из-за сильной дисперсии в гофрированном волноводе влияние высших гармонических составляющих, возбуждаемых негармоническим электронным потоком в электродинамической системе ЛБВ, на процесс взаимодействия в ней ничтожно мало.

Библиографический список

1. *Зайцев Н.И., Ковалев Н.Ф., Кораблев Г.С., Кулагин И.С.* Релятивистский карсинотрон с длиной волны 3 см и длительностью импульса 0.4 мкс // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7, № 14. С. 879.
2. *Братман В.Л., Денисов Г.Г., Коровин С.Д., Офицеров М.М., Полевин С.Д., Ростов В.В.* Релятивистские генераторы диапазона миллиметровых волн // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький: ИПФ АН СССР, 1984. Вып. 4. С. 119.
3. *Иванов В.С., Ковалев Н.Ф., Кремнецов С.И., Райзер М.Д.* Релятивистский карсинотрон миллиметрового диапазона // Письма в ЖТФ. 1978. Т. 4, № 14.
4. *Климов А.И., Коровин С.Д., Ростов В.В., Тотменинов Е.М.* Релятивистский черенковский СВЧ-генератор без внешнего магнитного поля // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, вып. 3.
5. *Коровин С.Д., Куркан И.К., Ростов В.В., Тотменинов Е.М.* Релятивистская ЛОВ с сосредоточенным резонансным рефлектором // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. XLII, № 12.
6. *Бугаев С.П., Канавец В.И., Климов А.И., Кошелев В.И., Черепенин В.А.* Релятивистский многоволновой черенковский генератор // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9, № 22. С. 1385.
7. *Бугаев С.П., Канавец В.И., Климов А.И., Кошелев В.И., Черепенин В.А.* Релятивистская высокочастотная электроника. Горький: ИПФ АН СССР, 1984. Вып. 4. С. 79.

8. Батура М.П., Кураев А.А., Сеницын А.К. Моделирование и оптимизация мощных электронных приборов СВЧ. Мн.: БГУИР, 2006.
9. Батура М.П., Кураев А.А., Сеницын А.К. Основы теории, расчета и оптимизации современных приборов СВЧ. Мн.: БГУИР, 2007.
10. Кураев А.А. Возбуждение продольно-нерегулярных волноводов с круглым сечением // Известия АН БССР. Сер. ФТН. 1979. № 1. С. 121.
11. Кураев А.А. Уравнения возбуждения продольно-нерегулярного коаксиального волновода // Весці НАН Беларусі. Сер. ФТН. 1999. № 4. С. 60.
12. Колосов С.В., Кураев А.А. Волны в периодических продольно-нерегулярных волноводах // Электромагнитные волны и электронные системы. 1999. Т. 4, № 3. С. 44.
13. Кураев А.А., Сеницын А.К. Нерегулярные волноводы с прямоугольным сечением. Теория и приложения // Электромагнитные волны и электронные системы. 2002. Т. 7, № 3. С. 12.
14. Закалюкин А.Б., Кураев А.А., Попкова Т.Л. Высокоэффективные релятивистские черенковские генераторы на гофрированном волноводе // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1992. № 2. С. 66.
15. Кураев А.А., Попкова Т.Л., Сеницын А.К. Моделирование и оптимизация релятивистской ЛБВ-О с замедляющей системой в виде нерегулярного волновода // Радиотехника. 1997. № 9. С. 13.
16. Гуринович А.Б., Кураев А.А., Сеницын А.К. Электродинамическая теория ЛБВ-О на гофрированном волноводе с учётом высших гармонических составляющих сигнала // Электромагнитные волны и электронные системы. 2000. Т. 5, № 6. С. 11.
17. Кравченко В.Ф., Кураев А.А., Попкова Т.Л., Сеницын А.К. Оптимизация по КПД релятивистской ЛБВ-О с использованием атомарных функций // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 2000. № 10. С. 58.
18. Закалюкин А.Б., Кураев А.А. Оптимальные по КПД релятивистские ЛБВ-О с замедляющимся периодом и глубиной канавки // Радиотехника и электроника. 2000. Т.45, № 4. С. 499.
19. Кураев А.А., Попкова Т.Л. Электродинамическая нелинейная теория релятивистской ЛБВ-О с замедляющей системой в виде нерегулярного волновода // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 10. С. 1256.
20. Кураев А.А., Попкова Г.Л. Электродинамическая нелинейная теория релятивистской ЛБВ-О с замедляющей системой в виде нерегулярного гофрированного волновода // Электромагнитные волны и электронные системы. 1997. Т. 2, № 4. С. 67.
21. Закалюкин А.Б., Кравченко В.Ф., Кураев А.А. Оптимизация по КПД профиля нерегулярной замедляющей системы релятивистской ЛБВ-О с использованием атомарных функций // Электромагнитные волны и электронные системы. 1998. Т. 3, № 3. С. 93.
22. Кравченко В.Ф., Кураев А.А., Пустовойт В.И., Сеницын А.К. Нерегулярные

- волноводы в электронике СВЧ // Электромагнитные волны и электронные системы. 2005. Т. 10, № 8. С. 51.
23. *Попкова Т.Л.* Трехгигаватная релятивистская ЛОВ с комбинированным профилем электродинамической системы // Электромагнитные волны и электронные системы. 2002. Т. 7, № 3. С. 37.
24. *Батура М.П., Кураев А.А., Луцицкая И.В., Синицын А.К.* Оптимизация релятивистских черенковских генераторов на нерегулярных гофрированных волноводах с учётом закритических мод // Доклады БГУИР. 2004. № 4. С. 26.
25. *Кураев А.А., Синицын А.К.* Нелинейная теория релятивистских черенковских генераторов на нерегулярных гофрированных волноводах с учетом закритических мод // Электромагнитные волны и электронные системы. 2005. Т. 10, № 3. С. 43.
26. *Кравченко В.Ф., Кураев А.А., Пустовойт В.И., Синицын А.К.* Нелинейная теория релятивистских черенковских генераторов на нерегулярных волноводах с учетом конечной проводимости стенок // Доклады РАН. 2007. Т. 412, № 6. С. 759.
27. *Кравченко В.Ф., Кураев А.А., Синицын А.К.* Нелинейная теория релятивистских черенковских генераторов на нерегулярных волноводах с учетом конечной проводимости стенок // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. № 10. С. 6.
28. *Кураев А.А., Синицын А.К.* Оптимизация профиля рупора на симметричных E -волнах по характеристике направленности // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 4. С. 397.

*Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники*

Поступила в редакцию 3.03.2008

RELATIVISTIC TWT AND BWO ON IRREGULAR WAVEGUIDES WITH CATHODE FILTER-MODULATOR

A.A. Kurayev, I.V. Lushchitskaya, T.L. Popkova, A.O. Rak, A.K. Sinitsyn

Results of development of the nonlinear theory of relativistic TWT and BWO on irregular hollow waveguides with cathode filter-modulator with the account as propagating, and beyond cut-off waves are given. The results of optimization on efficiency of variants relativistic Cherenkov oscillators are given. The rigorous theory of excitation of an irregular electrodynamic system is used to solve the problem of determining the profile of output horn of Cherenkov oscillators that provides a required mode structure at the output and an optimum directivity pattern.



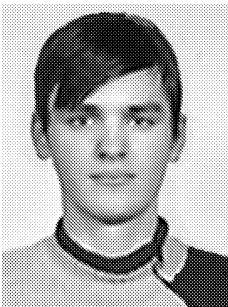
Кураев Александр Александрович (1937) – доктор физико-математических наук, профессор, Заслуженный деятель науки Беларуси, заведующий кафедрой «Антенны и устройства СВЧ» Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. Область научных интересов: физическая электроника, радиофизика, вычислительные методы.



Луцицкая Ирина Владимировна (1980) – ассистент кафедры «Вычислительные методы и программирование» Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. Область научных интересов: радиофизика.



Попкова Татьяна Леонидовна (1961) – кандидат физико-математических наук, доцент, начальник управления подготовки научных кадров высшей квалификации Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. Область научных интересов: радиофизика.



Рак Алексей Олегович (1984) – инженер-электроник кафедры «Антенны и устройства СВЧ» Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. Область научных интересов: радиофизика, телекоммуникации.



Синицын Анатолий Константинович (1948) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительные методы и программирование» Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. Область научных интересов: компьютерное моделирование электровакуумных приборов СВЧ.



ТЕРАГЕРЦОВЫЕ ГИРОТРОНЫ НА ВЫСОКИХ ЦИКЛОТРОННЫХ ГАРМОНИКАХ

*И.В. Бандуркин, В.Л. Братман, Ю.К. Калынов,
В.Н. Мануилов, А.В. Савилов и С.В. Самсонов*

Обсуждаются результаты первых экспериментов и перспективы освоения субтерагерцового и терагерцового частотного диапазона автогенераторами, излучающими на высоких циклотронных гармониках, а также гироумножителями. Для обеих разновидностей гиротронов селективное возбуждение высоких гармоник упрощается при использовании пучков электронов, движущихся по винтовым траекториям с ведущими центрами вблизи оси резонатора (конфигурация гиротрона с большой орбитой). В гироумножителях дополнительные селективные свойства обеспечиваются навязыванием частоты и структуры поля либо входным низкочастотным сигналом, либо – в случае самовозбуждающегося умножителя – сигналом, возбуждаемым тем же самым электронным пучком, который используется в качестве нелинейной среды для умножения частоты. В последнем случае для терагерцового диапазона привлекательны схемы, в которых возбуждение низкочастотного и высокочастотного излучения происходит в одном объеме.

Введение

Гиротроны [1–3] являются наиболее распространенной и эффективной разновидностью широкого класса электровакуумных приборов – мазеров на циклотронном резонансе (МЦР) [1]. Действие этих приборов основано на использовании индуцированного циклотронного излучения пучков электронов, движущихся в однородном магнитостатическом поле. Отличительной особенностью гиротронов является то, что в них для уменьшения влияния скоростного разброса частиц на доплеровское уширение линии циклотронного резонанса используется взаимодействие электронов с волнами, распространяющимися почти поперек поступательного движения частиц. Благодаря сильной связи с такими волнами на основном циклотронном резонансе в гиротронах удается селективно работать в открытых резонаторах очень большого объема. В результате, в миллиметровом диапазоне длин волн гиротроны обеспечивают намного большие выходные мощности, чем любые другие приборы.

Переход в субмиллиметровый и терагерцовый диапазоны приводит к необходимости обеспечения в гиротронах очень сильных магнитных полей: например, при частоте генерации 1 ТГц – более 36 Тл при работе на основном циклотронном резонансе и более 18 Тл на второй циклотронной гармонике. Лучшие (и довольно

дорогие) современные криомагниты обеспечивают в необходимом объеме магнитные поля с индукцией примерно до 20 Тл (до 10–15 Тл в «сухих» криомагнитах), а импульсные соленоиды – более 40 Тл в разовых импульсах. Первый субмиллиметровый гиротрон был реализован еще в начале 1970-х годов [4]. Этот генератор на второй гармонике на базе криомагнита обеспечивал на частоте 330 ГГц мощность 1.5 кВт в непрерывном режиме генерации. Затем субмиллиметровые гиротроны с криомагнитами и импульсными солеоидами развивались в ряде лабораторий России, США, Японии и Австралии [5–7]. Недавно в гиротроне на основном циклотронном резонансе с импульсным соленоидом [8] и в гиротроне на второй гармонике с криомагнитом [9] был преодолен частотный рубеж 1 ТГц. Однако из-за необходимости использования очень сильных магнитных полей субмиллиметровые гиротроны до сих пор являются уникальными устройствами. Ситуация могла бы существенно упроститься, если бы удалось создать приборы на высоких ($s > 2$, s – номер гармоники) циклотронных гармониках, для которых требуются более низкие поля. Однако в традиционных гиротронах работа на высоких гармониках практически невозможна из-за густого спектра мод и возникающей вследствие этого конкуренции со стороны низких гармоник [10, 11]. Ситуация усугубляется тем, что для приемлемых напряжений гиротронов 10–100 кВ и достижимых при этом вращательных скоростях частиц связь электронов с модами резонатора довольно быстро ослабляется с номером циклотронной гармоники [1–3]. Поэтому возбуждение высоких гармоник затруднительно и само по себе и требует, по крайней мере, высокой добротности резонатора; тем более им трудно выиграть соревнование у низких гармоник. Следует также иметь в виду осложняющее обстоятельство в виде значительного увеличения роли омических потерь и снижения добротности резонаторов в субмиллиметровом диапазоне [12].

Из сказанного ясно, что для ослабления указанных факторов и получения терагерцовой генерации на высоких гармониках необходимы дополнительные меры электродинамической и/или электронной селекции мод. В качестве более селективных систем в данной статье обсуждаются два известных, но недостаточно развитых типа приборов: гиротроны с большой орбитой (ГБО) [13–16] и гироумножители [1, 13, 17– 22]. В ГБО благодаря использованию пучка электронов, движущихся по винтовым траекториям с осями, охватывающими ось электродинамической системы (приосевой пучок), удастся повысить связь электронов с волнами на высоких гармониках, а также значительно проредить спектр потенциально возбуждаемых мод. В гироумножителях навязывание электронам частоты модулирующего низкочастотного сигнала позволяет добиться селективности на высокой гармонике этого сигнала, которая резонансно взаимодействует с электронами на высокой циклотронной гармонике. Для повышения селективности гироумножителей в них также целесообразно использовать приосевые электронные пучки.

1. Резонанс на циклотронных гармониках

Пусть электрон вращается с циклотронной частотой $\omega_B = eB_0/m_e\gamma$ по ларморовской окружности $x = r \cos \omega_B t$, $y = r \sin \omega_B t$ в однородном магнитном поле B_0 (рис. 1, а). Здесь e , m_e , $r = v/\omega_B$ и $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ – заряд, масса, ларморовский радиус и Лоренц-фактор электрона; $v = \beta c$ – его вращательная скорость; c – ско-

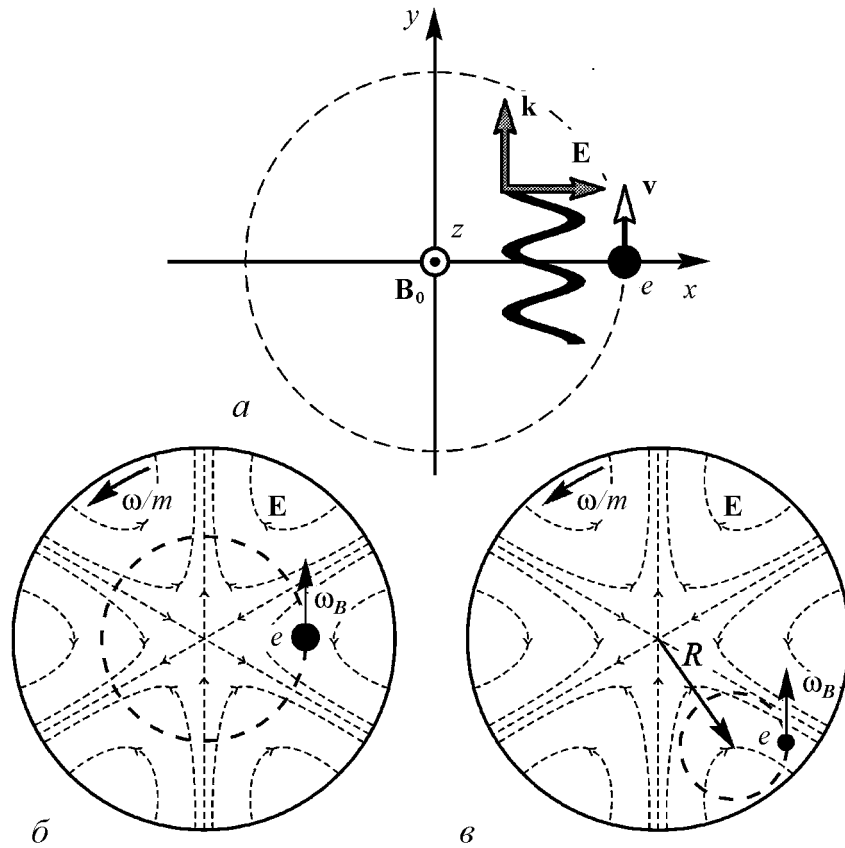


Рис. 1. Взаимодействие вращающегося электрона с СВЧ-волной на высокой циклотронной гармонике: неоднородное на траектории частицы поле плоской волны (а); мода $TE_{3,1}$ круглого волновода – синхронно вращающийся полевой секступоль (излучение только на третьей гармонике) для электрона, вращающегося вокруг оси волновода (б); весь набор полевых мультиполей (излучение на любой гармонике) для смещенного от оси центра вращения электрона (в)

рость света. Рассмотрим воздействие на электрон слабой монохроматической волны, распространяющейся в плоскости вращения частицы с вектором электрического поля $iE_0 e^{i(\omega t - ky)}$, лежащем в этой же плоскости. Пространственная неоднородность волны e^{-iky} на траектории колеблющегося электрона приводит к появлению в силе гармоник, кратных циклотронной частоте,

$$E_x = iE e^{i\omega t} \sum J_s(kr) e^{-is\omega_B t}, \quad (1)$$

где J_s – функция Бесселя s -го порядка. Вследствие этого резонансное воздействие возможно не только при совпадении частот волны и вращения электрона (основной циклотронный резонанс), но и на всех циклотронных гармониках

$$\omega = s\omega_B, \quad s = 1, 2, \dots \quad (2)$$

При резонансе на s -й гармонике работа поля над частицей за период ее обращения $T = 2\pi/\omega_B$ равна $eEvJ'_s T$, где $J'_s(kr)$ – производная функции Бесселя. Таким образом, для амплитуды вращающегося полевого мультиполя, резонансно воздействующего на частицу на s -й гармонике, имеем $E_s = EJ'_s(s\beta)$, где учтено также,

что $kr = s\beta$. При малой скорости частицы ($\beta \ll 1$) эта величина быстро убывает с ростом номера гармоники

$$E_s \approx \frac{(s\beta)^{s-1}}{2^s s!}. \quad (3)$$

Для взаимодействия электрона не с плоской, а с бегущей по азимуту поперечно-электрической волной $TE_{m,p}$ ($m \neq 0$) цилиндрического резонатора гиротрона (рис. 1, б) поле вблизи оси совпадает с полем единственного $2m$ -поля, вращающегося с угловой частотой $\Omega = \omega/m$. Поэтому при вращении частицы точно вокруг оси волновода резонансное взаимодействие возможно лишь с волной попутного вращения и на единственной циклотронной гармонике $s = m$. Электрическое поле резонансного мультиполя имеет такую же зависимость от расстояния до центра вращения, что и в случае плоской волны: $E_\varphi \sim J'_m(m\beta)$ (ρ, φ – полярные координаты с центром на оси волновода).

Если центр вращения электрона отстоит от оси резонатора на расстояние R (рис. 1, в), то, как и в плоской волне, в волне $TE_{m,p}$ содержится весь ряд полевых мультиполей, вращающихся вокруг центра вращения электрона. Действительно, с помощью теоремы сложения для бесселевых функций мембранная функция $\Pi_{m,p}(\rho, \varphi) = J_m(v_p \rho/a) e^{im\varphi}$, описывающая поперечную структуру моды, может быть представлена в виде

$$\Pi_{m,p}(\rho, \varphi) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} C_s \Pi_{s,p}(\rho_e, \varphi_e), \quad (4)$$

где ρ_e, φ_e – полярные координаты с началом в центре электронной орбиты,

$$C_s = (-1)^m J_{m-s}(v_p R/a) e^{i(m-s)\psi}, \quad (5)$$

ψ – азимут ведущего центра электрона в координатах ρ, φ ; v_p – p -й положительный корень функции Бесселя J_m ; a – радиус волновода. Из (4), (5) ясно, что при $R \neq 0$ электрон может резонансно взаимодействовать на гармонике s с модой, имеющей любой азимутальный индекс m , если только отличен от нуля структурный фактор C_s (знак m определяет направление вращения мультиполя). Для вращающейся точно вокруг оси волновода ($R = 0$) частицы, как и ранее, убеждаемся, что резонансное взаимодействие возможно только при совпадении номера циклотронной гармоники с азимутальным индексом моды. Это правило запрещает возбуждение большого числа мод в гиротроне с приосевым пучком (электронная селекция мод). Ясно также, что для такого пучка достигается максимальная связь с гармоникой. Эти свойства следовали уже из работы [23], а затем были независимо использованы в гиротронах с большой орбитой [13].

2. Гиротроны с большой орбитой

В традиционных гиротронах на основной и второй циклотронных гармониках, как правило, используются развитые в поперечном направлении пучки электронов, движущихся по винтовым траекториям, оси которых смещены относительно

оси цилиндрического резонатора (поливинтовые, а точнее, – полиосевые пучки). Такие пучки формируются сравнительно простыми и хорошо развитыми магнетронно-инжекторными пушками [24]. При резонансном магнитном поле полиосевой пучок, в принципе, способен возбуждать на любой гармонике любую моду резонатора гиротрона. Однако, поскольку связь с гармониками убывает с ростом их номера, для возбуждения высоких гармоник требуются большие токи. Поэтому вплоть до очень больших размеров пучка и резонатора удастся обеспечивать селективное возбуждение мод на основном резонансе и получать высокие мощности выходного излучения и КПД. При меньших поперечных сечениях и более редком спектре мод полиосевой пучок обеспечивает также селективное и эффективное возбуждение на второй гармонике. Однако при попытке возбуждения таким пучком третьей гармоники из-за ослабления связи и густого спектра паразитных мод, резонансных с электронами на низких гармониках, ситуация становится сложной даже на миллиметровых волнах, где для сужения полосы циклотронного резонанса и увеличения добротности относительно просто изготовить длинный резонатор. Тем более это сложно в субмиллиметровом диапазоне, где велики требования к точности изготовления и где к тому же добротность резонатора существенно ограничена омическими потерями. Использование приосевых пучков позволяет существенно проредить спектр резонансных мод и добиться селективного возбуждения высоких гармоник.

Взаимодействие приосевого пучка с модой $TE_{m,p}$ в условиях резонанса на m -й гармонике происходит аналогично тому, как это имеет место в обычном гиротроне. На входе в пространство взаимодействия электроны равномерно распределены на ларморовской окружности по фазам вращения. При этом равное число частиц находится в тормозящих и ускоряющих фазах вращающегося $2m$ -поля, соответствующего рабочей моде (рис. 2, а). Поле волны модулирует энергии частиц, после чего, вследствие релятивистской зависимости циклотронной частоты электрона от его энергии, частицы, находящиеся в тормозящих (ускоряющих) фазах волны, начинают вращаться быстрее (медленнее). В результате происходит азимутальная группировка частиц и на ларморовской окружности образуется m электронных сгустков (рис. 2, б). Для того, чтобы сгустки эффективно отдавали энергию волне, они должны образовываться недалеко от центров тормозящих фаз. Это достигается, когда частота вращения мультиполя слегка превышает циклотронную частоту: $\omega_B \leq \Omega$ (рис. 2, в). В этом случае оптимальное смещение сгустков относительно волны на длине взаимодействия L определяется оценкой

$$\frac{(\Omega - \omega_B)L}{v_z} \sim \frac{\pi}{s}, \quad (6)$$

где v_z – скорость электронов вдоль оси резонатора. Это соотношение определяет также и ширину линии циклотронного резонанса

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim \frac{1}{sN}, \quad (7)$$

где $N = \omega_B L / 2\pi v_z$ – число вращений электрона в пространстве взаимодействия.

Согласно расчетам, эффективность гиротронов на высоких гармониках, в принципе, может быть сравнимой с эффективностью гиротронов на основном резонансе, но реализация подобных систем, как правило, сопряжена с более значительными

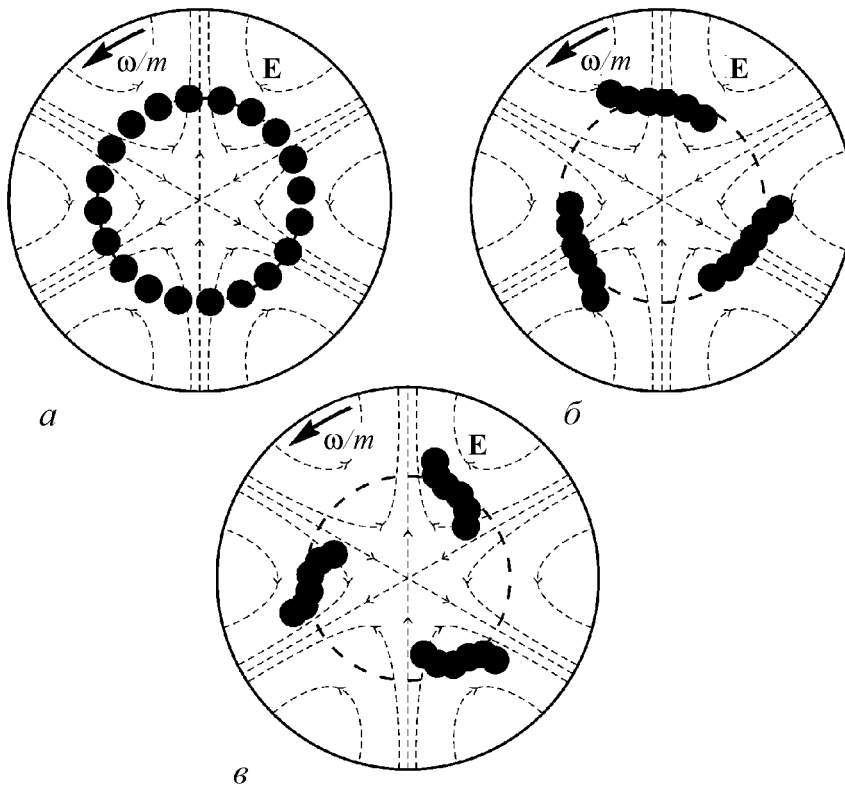


Рис. 2. Фазовая группировка приосевого электронного пучка в ГБО на третьей циклотронной гармонике: равномерное распределение электронов по фазам относительно волны на входе (а), образование электронных сгустков на границе ускоряющей и тормозящей фаз (б), смещение сгустков в тормозящую фазу волны (в)

трудностями. Как уже отмечалось, для возбуждения гармоник требуются более высокие добротности резонаторов и большие электронные токи. Действительно, с учетом формулы (3) для амплитуды полевого мультиполя, а также выражения для электронного КПД в приближении малого сигнала (см., например, [2, 3]) из уравнения баланса мощностей получаем следующую функциональную зависимость стартового тока гиротрона на произвольной циклотронной гармонике от основных параметров:

$$I_{st} \propto \frac{1}{G_{m,s} \beta_{\perp}^{2s} (L/\lambda)^2 Q}. \quad (8)$$

Здесь L и Q – длина и полная добротность резонатора (с учетом дифракционных и омических потерь),

$$G_{m,s} = \frac{J_{m-s}^2(v_p R/a)}{(v_p^2 - m^2) J_m^2(v_p)} \quad (9)$$

– фактор возбуждения моды $TE_{m,p}$ пучком с радиусом R на s -й циклотронной гармонике. Возрастание тока (8) из-за убывания амплитуды мультиполя (3) с ростом номера гармоники может частично компенсироваться ростом дифракционной добротности резонатора фиксированного размера. Эта возможность ограничена, однако, омическими потерями, некоторого уменьшения которых можно добиться при работе на модах резонатора с высокими радиальными индексами p .

Используя приосевые пучки, мы получили в ГБО на третьей циклотронной гармонике излучение на наиболее высоких частотах 0.37–0.41 ТГц с мощностью 10–20 кВт в импульсах микросекундной длительности [25]. При этом в качестве электродинамической системы использовался традиционный гиротронный резонатор в виде участка слабонерегулярного цилиндрического волновода, ограниченного с катодного конца запердельным для рабочей волны сужением и с коллекторного конца – плавным расширением в сторону выходного волновода (рис. 3, *a*). Поскольку приосевые пучки не могут быть получены в аксиально-симметричных магнетронно-инжекторных пушках традиционных гиротронов, при реализации ГБО центр тяжести проблемы перемещается на создание электронно-оптических систем, способных формировать приосевые пучки с достаточно большими токами и вращательными скоростями частиц при малом разбросе их скоростей и ведущих центров. В предыдущих, сравнительно длинноволновых и высоковольтных ГБО [25, 26], для этой цели использовались квазипирсовская пушка, формирующая тонкий прямолинейный пучок электронов, и кикер в виде токовых катушек, помещенных в область относительно слабого поля основного соленоида и создающих поперечное магнитное поле, которое сообщает электронам первоначальную вращательную скорость. Затем вращательная скорость частиц адиабатически увеличивалась до рабочего значения при их движении в нарастающем магнитном поле. В идеале подобная система формирует пучок в виде ларморовской спирали малой толщины, но из-за разброса скоростей частиц пучок принимает в рабочем пространстве не менее приемлемую для работы ГБО форму ларморовской трубки.

Описанная выше система (Pierce-kicker gun) обладает очевидными недостатками, связанными с отсутствием аксиальной симметрии поля кикера и излишней первоначальной плотностью пучка, что приводит к дополнительному разбросу ча-

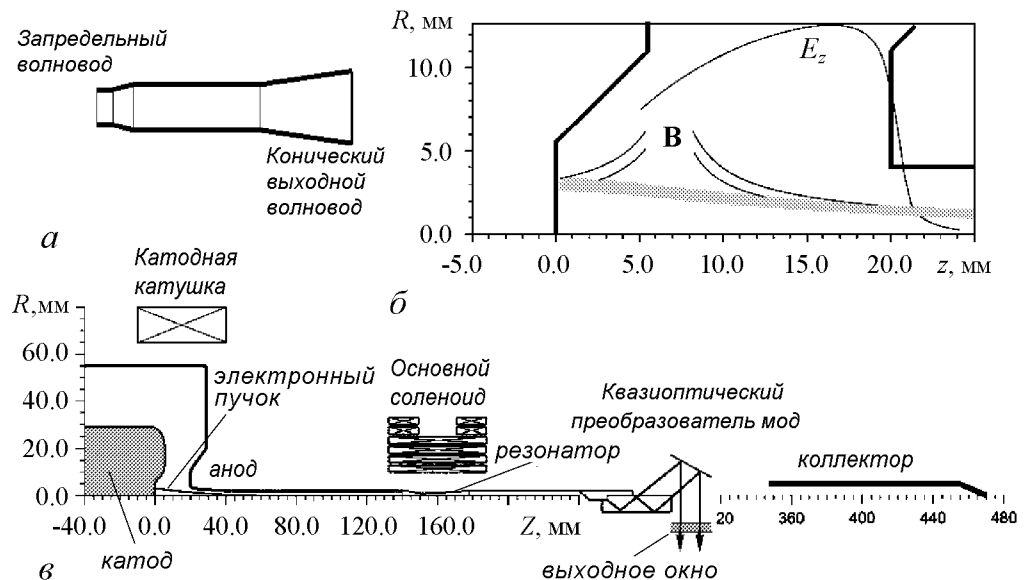


Рис. 3. Терагерцевый ГБО на третьей циклотронной гармонике: резонатор (*a*); пушка с каспом магнитного поля – профиль продольного электрического поля, магнитные силовые линии и электронные траектории (*б*); общая схема генератора (*в*)

стиц. Такую систему трудно реализовать в непрерывном режиме и, кроме того, в силу трехмерности она сложна для расчета. Указанные проблемы усугубляются по мере увеличения частоты и снижения напряжения. Поэтому в исследуемом в настоящее время новом, сравнительно низковольтном (80 кВ) ГБО на третьей гармонике, рассчитанном на достижение частоты 1 ТГц, использован другой тип электронно-оптической системы, а именно, пушка с каспом магнитного поля в прикатодной области [27, 28]. В такой системе диодная пушка с кольцевым эмиттером, помещенным в продольное магнитное поле, формирует тонкий полый пучок (рис. 3, б). Затем электроны попадают в расположенную вблизи катода область каспа, где поле резко спадает до нуля и затем меняет свое направление на противоположное. Проходя через касп, частицы приобретают азимутальные скорости и начинают вращаться вокруг общей оси. Тем самым сразу формируется пучок в виде соосного резонатору цилиндра, состоящего из многих спиралей. При дальнейшем движении частиц к резонатору в нарастающем магнитном поле их вращательная скорость адиабатически увеличивается, а радиус вращения уменьшается.

Исследуемый в настоящее время терагерцовый ГБО на третьей гармонике (рис. 3, в) рассчитан на работу при напряжении 80 кВ, токе пучка 0.7 А, длительности импульсов 10 мкс и частоте повторения импульсов до 1 Гц. Магнитное поле в резонаторе равно 13.7 Тл, а на катоде 4.5 мТл. Таким образом, перемагничивание достигает величины 3000, что позволяет при сравнительно невысокой плотности эмиссии 4 А/см² получать необходимую для терагерцового диапазона очень высокую плотность тока в резонаторе. Для уменьшения омических потерь выбрана рабочая мода TE_{3,7} с большим радиальным индексом, для которой диаметр резонатора равен 2.3 мм. Для возбуждения выбранной моды необходимы достаточно большие питч-фактор 1.5 и длина резонатора 7.2 мм, когда число вращений электронов в резонаторе $N = 30$ в три раза больше, а полоса циклотронного резонанса уже, чем в эксперименте [25]. Благодаря этому мода TE_{3,7} не должна подавляться модой TE_{2,5} (рис. 4). Следует отметить, что изготовление резонатора с необходимой точностью, особенно когда использование импульсного магнитного поля ограничивает допустимую толщину стенки, представляет значительные сложности. Расчет показывает, что на рабочей моде возможно достижение на частоте 1 ТГц довольно высокого электронного КПД 10%, что с учетом омических потерь дает, однако, для полного КПД лишь 1.3% и для мощности выходного излучения около 0.7 кВт.

К настоящему времени электронно-оптическая система ГБО испытана в моделирующем режиме с очень малым током. В зависимости от величины и полярности магнитного поля на катоде и соответствующего его распределения в анодно-

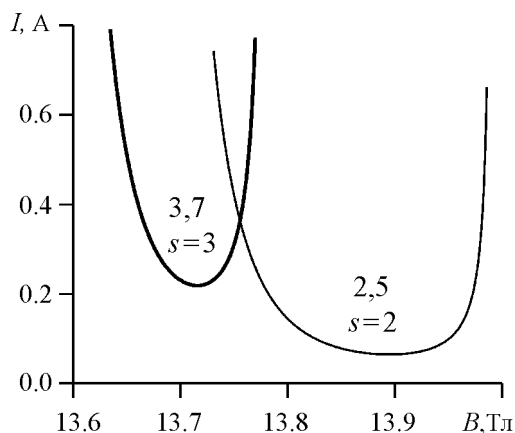


Рис. 4. Расчетные стартовые токи терагерцового ГБО для рабочей моды TE_{3,7} на 3-й гармонике и паразитной моды TE_{2,5} на 2-й гармонике (питч-фактор $g = 1.5$, скоростной разброс $\Delta V_{\perp}/V_{\perp} = 0.25$)

катодном промежутке в эксперименте наблюдались три режима с характерными структурами свечения на люминофоре, нанесенном на кварцевую мишень (рис. 5). В соответствии с теоремой Буша, ларморовский радиус электрона после прохождения резкого скачка магнитного поля определяется в одноэлектронном приближении выражением

$$r = r_c \frac{B_2 - B_1}{2B_2}, \quad (10)$$

где r_c – радиус точки старта электрона с эмиттера, $B_{1,2}$ – поля на катоде и в области после скачка. В первом режиме, когда поле катодной катушки сонаправлено полю соленоида и касп отсутствует, на мишени наблюдается след в виде кольца. В этом режиме формируется полиосевой трубчатый пучок. Уменьшение поля B_1 ведет к увеличению ларморовских радиусов и приближению ведущих центров к центру пучка, что сопровождается уменьшением внутреннего просвета на изображении пучка. При нулевом поле на катоде наблюдается второй режим с большими вращательными скоростями частиц и ведущими центрами, находящимися примерно на расстоянии ларморовского радиуса от центра пучка; орбиты заполняют все сечение, а след пучка представляет собой сплошной круг. В третьем режиме (с каспом), когда B_1 отрицательно, при увеличении $|B_1|$ ларморовский радиус за каспом увеличивается, а радиус ведущего центра уменьшается. Соосный оси винтовой пучок получается при симметричном каспе: $|B_1| = B_2$. В реальной системе с размытым скачком поля это условие выполняется лишь приближенно. В эксперименте смещение ведущих центров с оси почти вдвое меньше ларморовского радиуса частиц. Проведенные измерения хорошо совпадают с расчетами и позволяют рассчитывать на получение в рабочем режиме пучка с необходимыми параметрами.

Расчеты и эксперименты в миллиметровом диапазоне показывают, что при повышении питч-фактора электронов напряжение ГБО может быть значительно умень-

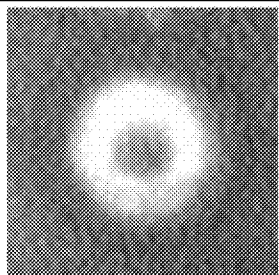
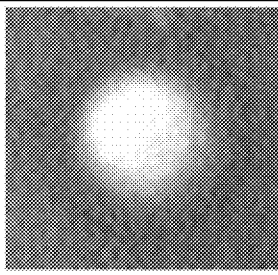
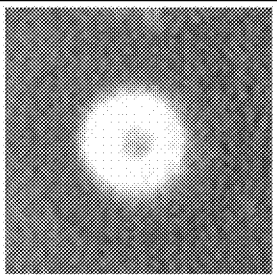
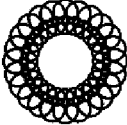
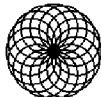

магнитное поле на катоде	$B_1 > 0$	$B_1 = 0$	$B_1 < 0$
след на мишени			
расчет			

Рис. 5. Следы пучка на сцинтиляторе (диаметр темной окружности 1 мм) и расчетные электронные траектории для положительного, нулевого и отрицательного (касп) магнитных полей на катоде

шено. Так, например, весьма привлекательно выглядит ГБО на третьей гармонике с напряжением 30 кВ и током 1 А, рассчитанный на генерацию на частоте 0.4 ТГц в непрерывном режиме при использовании компактного криомагнита с полем 4.5 Тл. В качестве рабочей может быть выбрана та же мода $TE_{3,7}$, которая при низком напряжении еще более изолирована от моды $TE_{2,5}$. Согласно расчетам [29], пушка с каспом способна сформировать пучок с необходимыми параметрами. При длине резонатора 15 мм расчетная выходная мощность ГБО составляет 1 кВт при эффективности 3.5%.

3. Гирумножители на высоких гармониках

Дополнительным способом повышения селективности на высоких гармониках может быть синхронизация излучения низкочастотным источником. В гирумножителе для этого используется модуляция электронов на низкой циклотронной гармонике. При этом из-за нелинейности восприимчивости пучок группируется не только на частоте модуляции, но и на всех ее гармониках, а излучению вблизи высокой циклотронной гармоники навязывается частота ω , точно кратная частоте сигнала ω_1 ,

$$\omega = n\omega_1. \quad (11)$$

Высокая селективность умножителя связана не только с жесткой синхронизацией частот, но и с навязыванием волне определенной пространственной структуры, при которой излучение от электронов, колеблющихся на частоте ω , складывается в фазе (конструктивная интерференция). Так, в аксиально-симметричной системе азимутальные индексы и номера резонансных циклотронных гармоник связаны соотношениями

$$m = nm_1, \quad s = ns_1. \quad (12)$$

Используя (11) и (12) и общие условия циклотронного резонанса электронов с волнами, имеющими произвольные групповые скорости $\beta_g = h/k$ и $\beta_{g1} = h_1/k_1$, когда в отличие от (2), вообще говоря, важна доплеровская поправка к частоте

$$\omega \approx s\omega_B + hv_z, \quad \omega_1 \approx s_1\omega_B + h_1v_z, \quad (13)$$

можно получить также соотношение и для продольных волновых чисел h и h_1 . Неточное выполнение условия резонанса в (13) связано с ограниченностью длины взаимодействия (в автогенераторе этому соответствует ненулевая отстройка резонанса (6)). Для постоянного вдоль резонатора магнитного поля имеем

$$h \approx nh_1. \quad (14)$$

Отсюда следует, например, что для близкого к отсечке ($h_1 \ll k_1$) модулирующего сигнала взаимодействие на гармонике также должно происходить с квазикритической волной ($h \ll k$). Это условие может быть нарушено в неоднородном поле.

Модуляция пучка в гирумножителе может осуществляться внешним сигналом (который, в принципе, способен сообщать электронам и вращательную скорость [13, 19]) или сигналом, возбуждаемым тем же пучком, что и поле на высокой гармонике. В первом случае гирумножитель близок к обычному гироклистрону. Согласно

расчетам [18], по сравнению с автогенератором на гармонике, в гиromножителе с внешним сигналом возможно достижение более высокой селективности и КПД. Однако оптимальный ток близок к стартовому току автогенератора, и поэтому достижение такого режима на высоких частотах и при низких рабочих напряжениях возможно лишь при сравнительно небольших коэффициентах умножения. Если же, как это обычно имеет место на высоких частотах, доступный электронный ток значительно меньше оптимального, то КПД умножителя пропорционален току и значительно меньше, чем в автогенераторе.

Несмотря на привлекательность, гиromножители исследовались до сих пор лишь в небольшом количестве экспериментальных работ. Их реализации мешает, в частности, паразитное возбуждение выходного резонатора на частоте внешнего сигнала, возникающее даже при большой отстройке от собственной частоты выходного резонатора. Дело в том, что для таких колебаний из-за предварительной группировки пучка отсутствует стартовый ток, а амплитуда тока больше, чем на высокой гармонике. Использование полиосевого пучка в экспериментально реализованных умножителях приводило к слабой связи с высокой гармоникой и к большому радиусу участка дрейфа, что делало возможным возбуждение паразитных низкочастотных колебаний не только в коротких отдельных резонаторах, но и на всей большой длине взаимодействия.

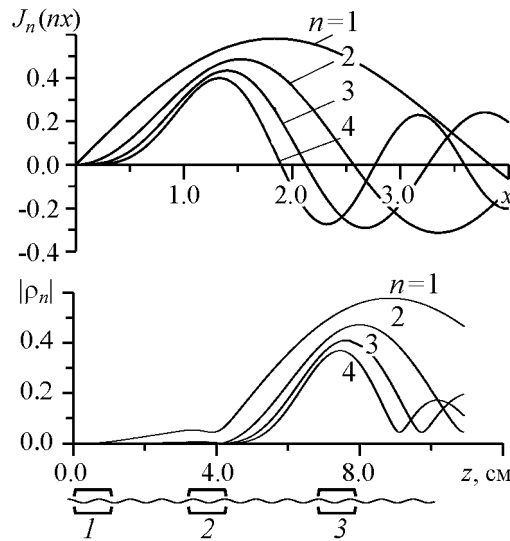


Рис. 6. Гиromножители клистронного типа: *a* – зависимость гармоник тока от продольной координаты в пространстве дрейфа в приближении короткого входного резонатора; *b* – результаты расчета трехрезонаторной схемы – показано расположение резонаторов и распределение гармоник тока; положение последнего резонатора соответствует максимуму 4-й гармоники тока

Для подавления паразитной генерации в ряде теоретических работ [21, 30, 31] исследуются возможности повышения амплитуды тока

$$\rho_n = \langle e^{in\theta} \rangle \quad (15)$$

на высокой гармонике и подавления группировки на низких гармониках. В (15) θ – фаза электрона относительно модулирующего сигнала, а угловыми скобками обозначено усреднение по всему электронному ансамблю. Для равномерного распределения частиц по фазам на интервале $[0, 2\pi]$ $\rho_n = 0$, а максимально компактному сгустку соответствует $|\rho_n| = 1$. При коротком модулирующем резонаторе показатели группировки гармоник ведут себя в пространстве дрейфа в соответствии с клистронной формулой

$$|\rho_n(z)| = J_n(n\chi z), \quad (16)$$

где параметр χ пропорционален амплитуде модулирующего сигнала (рис. 6, *a*). Как и в обычном клистроне, в выходном резонаторе плотность тока на гармонике может быть увеличена путем введения в пространство дрейфа дополнительных резонаторов, настроенных на высокую или на одну из низких гармоник и корректирующих

модуляцию пучка [21, 30]. При соответствующей настройке можно увеличить амплитуду высокой гармоники при сильном подавлении группировки на частоте модуляции [30]. В [31] предложен способ создания такой продольной структуры поля в первом резонаторе, которая без дополнительных резонаторов приводит к группировке только на выделенных гармониках.

В гирумножителях, как и в ГБО, дополнительные преимущества дает использование приосевого электронного пучка, одновременно максимизирующее связь с сигналом и с его гармоникой и, кроме того, позволяющее сильно сузить пространство дрейфа и электродинамически изолировать резонаторы в рабочем диапазоне частот. По сравнению с ГБО в гирумножителе облегчается также формирование приосевого пучка с малым скоростным разбросом, поскольку сгруппированный пучок возбуждает настроенный выходной резонатор при сколь угодно малом токе.

Рассмотрим пример субтерагерцового трехрезонаторного гирумножителя (рис. 6, б) со слаботочным (0.1 А) слаборелятивистским (30 кВ) пучком с питч-фактором 1.2 и непрерывным маломощным источником входного сигнала с частотой 150 ГГц и мощностью 100 мВт (например, оротроном [32]). Возбуждающаяся в первом резонаторе мода $TE_{1,3,1}$ модулирует пучок на основном циклотронном резонансе. Во втором (промежуточном) резонаторе частично сгруппированный пучок возбуждает такую же моду $TE_{1,3,1}$, которая дополнительно модулирует частицы, ускоряет их группировку и тем самым позволяет сократить длину дрейфового пространства. Выходной резонатор возбуждается одной из гармоник высокочастотного тока. Согласно расчетам, такая схема может обеспечить достаточную для значительного числа приложений мощность 1.0 и 0.1 Вт при умножении частоты в 4 и 5 раз – до 0.6 и 0.75 ТГц, соответственно.

Другой схемой, особенно привлекательной в терагерцовом диапазоне, является самовозбуждающийся гирумножитель, в котором низкочастотный сигнал возбуждается тем же пучком, что и сигнал на высокой гармонике. В подобной системе модулирующий резонатор заменен на автогенератор (например, на гиротрон или гиру-ЛОВ). Важно, что подобная схема может работать лишь при небольшом превышении над стартовым током входного резонатора, так как в ней, аналогично тому, как это происходит в клистроне (см. рис. 6, а), высокие гармоники быстрее, чем низкие, нарастают по длине системы и, достигнув насыщения в первом резонаторе, имеют слишком малую амплитуду во втором резонаторе. Эксперимент с самовозбуждающимся гирумножителем был проведен в ИПФ РАН [33]. Поливинтовой электронный пучок с параметрами 24 кВ и 0.3 А возбуждал два гиротронных резонатора, взаимодействуя с их полями на первой и на третьей циклотронных гармониках, соответственно. При этом для возбуждения второго резонатора было необходимо наличие первого резонатора. Выходная мощность составляла около 30 Вт на частоте 285 ГГц. Сравнительно низкий КПД, возможно, связан с невысоким качеством группировки электронов во втором резонаторе.

Кроме проблем с группировкой во втором резонаторе, схема с двумя гиротронами требует очень высокой точности согласования частот высокочастотных резонаторов

$$\frac{\omega - n\omega_1}{\omega} < \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_1},$$

где Q_1 и Q – добротности первого и второго резонаторов. Ситуация осложняется

еще и тем, что необходимо совмещать «горячие» частоты, которые из-за влияния электронного пучка отличаются от «холодных» собственных частот резонаторов.

Одним из решений описанных проблем может быть совмещение областей низкочастотной и высокочастотной генерации в одном резонаторе [34]. Это позволяет, во-первых, использовать для генерации гармоники оптимально сгруппированный пучок. Во-вторых, соотношение резонансных частот в одном резонаторе более устойчиво к погрешностям изготовления. В этом случае задача сводится к созданию условий, при которых в одном объеме возможно резонансное возбуждение двух мод с кратными частотами. В однородном магнитном поле при этом должны быть выполнены все условия (11)–(13), что накладывает довольно жесткие ограничения на выбор рабочих мод. Так, например, неэквидистантность спектра критических частот наиболее удобного волновода круглого сечения приводит к тому, что работа на паре гиротронных мод или на модах с небольшим числом продольных вариаций в резонаторе возможна только для выделенных коэффициентов умножения n . Если оба резонатора работают в режиме гиротрона, минимальным коэффициентом является довольно большое число $n = 5$ [35]. Для сближения «холодных» частот мод длина резонатора должна быть близкой к стартовой для низкочастотных колебаний, а совмещение «горячих» частот возможно лишь в очень узком (доли процента) диапазоне значений магнитного поля.

Несколько проще преобразовать гиротронную моду в волну, имеющую небольшую групповую скорость. Такая возможность возникает, во-первых, благодаря возможности отстройки от точного резонанса в условии (14) (электронные сгустки на гармонике имеют ограниченную длину вдоль оси), а также в связи с тем, что при самовозбуждении низкочастотного гиротрона группирующиеся частицы должны испытывать кинематическое смещение по фазе, из-за чего их пространственная структура (спираль, а не прямолинейный отрезок) соответствует излучению бегущей волны на гармонике. В соответствии с (6) это тем более верно, чем меньше длина резонатора. В то же время разница в групповых скоростях волн позволяет запереть низкочастотную волну, слегка сузив выход из резонатора, так что в выходном волноводе будет присутствовать только сигнал на умноженной частоте. Этот прием позволяет также нагрузить низкочастотную волну на омические потери и значительно сократить длину резонатора без увеличения стартового тока. В такой схеме возможны коэффициенты умножения $n = 2$ и $n = 6$, причем случай удвоения частоты более привлекателен, чем в схеме с внешним источником, поскольку и низкочастотный гиротрон можно возбудить на высокой – по крайней мере, на второй гармонике ($s_1 = 2$). При этом выходной сигнал излучается на циклотронной гармонике с номером $2s_1$. Преимуществом этой схемы является более простая настройка, связанная с меньшей эффективной добротностью секции с бегущей волной, а недостатком – более сильная чувствительность к скоростному разбросу частиц.

Профилирование магнитного поля позволяет отказаться от условия (14) и получить умножение в произвольное число раз [34]. Меняя поле вдоль пространства взаимодействия, можно попеременно создавать резонансные условия то для одной, то для другой волны. В частности, используя двухступенчатый профиль, согласно расчетам, можно реализовать «клистронное» взаимодействие для низкочастотной волны, когда она находится в резонансе с пучком только в начале и конце резонатора (рис. 7). Первый участок соответствует модулирующему резонатору клистрона,

а на втором происходит отбор энергии у электронов. При этом средний участок, соответствующий пространству дрейфа клистрона, может служить для генерации гармоники.

Другим методом, позволяющим получить произвольный коэффициент умножения, является деформация поперечного сечения резонатора, например, в виде периодической $2m$ -заходной азимутальной гофрировки стенок. Подбирая глубину гофра, можно добиться выполнения условий (11)–(13) для низкочастотной и одной из расщепившихся высокочастотных волн (правда, это достигается ценой двукратного ослабления связи электронов с полем на гармонике). Используя разницу критических частот круглого и гофрированного волноводов, легко запретить низкочастотный сигнал внутри резонатора и выводить только высокочастотное излучение.

Таким образом можно модифицировать описанную выше схему удвоения частоты, чтобы взаимодействие на высокой гармонике происходило не с бегущей, а с квазикритической волной, что позволяет повысить эффективность генерации. В ИПФ РАН в настоящее время проводится моделирующий эксперимент с подобным умножителем, в котором рабочими являются вторая и четвертая циклотронные гармоники (длины волн 8 и 4 мм). Восьмизаходная азимутальная гофрировка резонатора не затрагивает структуру низкочастотной вращающейся моды $TE_{2,2}$, но снимает частотное вырождение двух поляризаций высокочастотной рабочей моды $TE_{4,3}$ (рис. 8, а). Радиус выходного круглого волновода подобран так, что в него излучается только

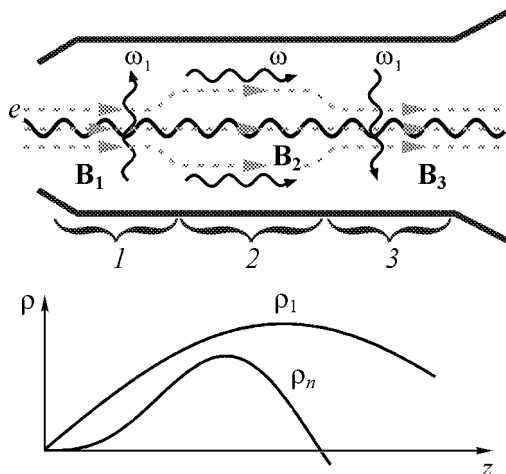


Рис. 7. Схема однорезонаторного гироумножителя с профилированным магнитным полем

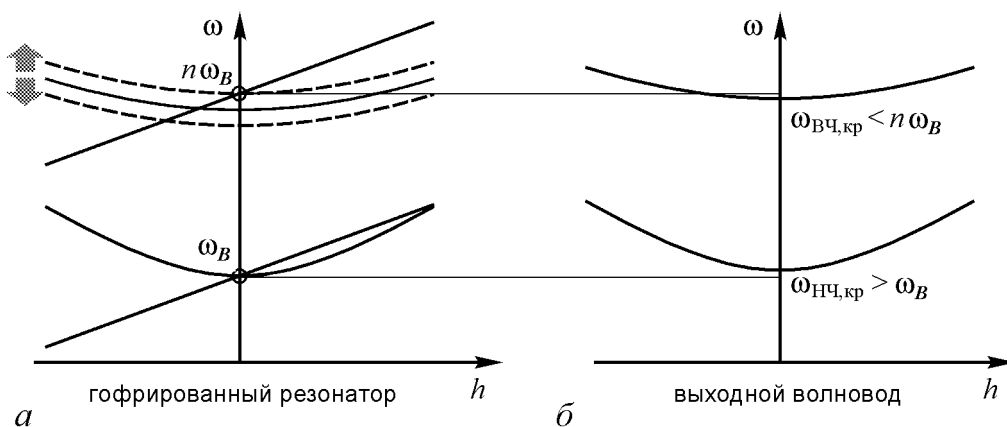


Рис. 8. Дисперсионные диаграммы для самовозбуждающегося однорезонаторного гироумножителя с $2m$ -заходной гофрировкой стенки: расщепление моды $TE_{m,p}$ делает возможным резонансное излучение модулированного пучка на высокой циклотронной гармонике (а); выбор радиуса выходного волновода позволяет запретить низкочастотную волну внутри резонатора (б)

высокочастотная волна (рис. 8, б). В эксперименте в пушке с каспом получен приосевой электронный пучок с параметрами 60 кВ и 5 А, питч-фактором 1, который эффективно возбуждает круглый резонатор на второй циклотронной гармонике. Согласно расчетам, в гофрированном резонаторе совместная генерация двух мод должна обеспечить мощность 5 кВт на четвертой гармонике.

В случае успеха принцип совместной генерации гармоник в одном объеме будет использован на более высоких частотах. Например, для пучка терагерцового ГБО, описанного в разделе 2, подходит резонатор шестиугольного сечения, в котором в качестве рабочей моды на третьей циклотронной гармонике используется одна из расщепившихся мод $TE_{3,7}$. При такой форме сечения удастся подобрать длину резонатора (5 мм), при которой частота моды $TE_{3,7,1}$ точно в три раза превышает частоту моды $TE_{1,3,2}$ с двумя продольными вариациями поля. Небольшой стартовый ток низкочастотной моды (менее 0.1 А) позволяет рассчитывать на ее стабильное возбуждение. Преимуществами такого самовозбуждающегося гироумножителя перед ГБО являются более низкий ток и меньшая критичность к качеству и юстировке пучка.

Заключение

Попытки снижения величины магнитного поля в гиротроне при работе на высоких ($s > 2$) циклотронных гармониках показали, что получение селективного возбуждения в этом случае возможно, как правило, только при использовании дополнительных мер электродинамической и/или электронной селекции мод по сравнению с методами, используемыми в традиционных гиротронах на основной и второй гармониках. В настоящей работе обсуждается возможность улучшения связи электронов с волнами на высоких гармониках при использовании приосевых электронных пучков в гиротронах с большой орбитой. Для получения таких пучков требуются новые конструкции электронно-оптических систем. В терагерцовом диапазоне и особенно при работе в непрерывном режиме генерации для этой цели наиболее адекватной представляется осесимметричная пушка с каспом. Такие пушки были ранее реализованы в миллиметровом диапазоне, а недавно подобная система, но со много раз более высокой степенью последующей компрессии пучка (до 3000) успешно испытана в моделирующем режиме для импульсного ГБО с частотой генерации 1 ТГц. Расчеты показывают, что ГБО со сравнительно низковольтными электронными пучками и сравнительно доступными магнитными полями 4–15 Тл, работающие на третьей или даже, возможно, на четвертой гармонике могут обеспечить в терагерцовом диапазоне мощность порядка $10\text{--}10^3$ Вт.

Большей селективности, чем в ГБО, можно добиться в гироумножителях, если решить для них такие традиционные проблемы, как возбуждение выходного резонатора на частоте модулирующего сигнала и точная подстройка частот. Использование приосевых пучков позволяет и в этом случае добиться еще большей селективности, увеличивает связь электронов с гармониками и позволяет электродинамически развязать резонаторы умножителя. В терагерцовом диапазоне, где возникают проблемы с источниками модулирующего сигнала, привлекательны самовозбуждающиеся гироумножители, особенно такие, в которых и низкочастотный, и высокочастотный

сигналы возбуждаются одним и тем же электронным пучком. При близких токах гироумножители способны обеспечить тот же уровень мощности, что и автогенераторы, но в отличие от последних из-за отсутствия стартового тока для высокочастотной моды они способны работать и при значительно меньших электронных токах и мощностях высоковольтных источников.

Следует иметь в виду, что из-за омических потерь и конкуренции со стороны низких гармоник без использования специальных мер эффективность терагерцовых автогенераторов и умножителей, работающих на высоких циклотронных гармониках, значительно ниже, чем эффективность традиционных гиротронов на основной и второй гармониках. Однако это обстоятельство не фатально для многих приложений терагерцового излучения – таких, например, как спектроскопия и диагностика различных сред. Важно подчеркнуть, что, как и в случае ряда других электронных генераторов с малым электронным КПД, для гиротронов на гармониках довольно эффективна рекуперация неистраченной энергии электронного пучка, которая позволит значительно ослабить коллекторные проблемы и использовать высоковольтные источники с меньшими напряжениями. Анализ показывает, что рассмотренные гироприборы являются перспективными источниками когерентного терагерцового излучения, которые могут быть доступными многим лабораториям.

Авторы благодарны И.Г. Гачеву, М.Ю. Глявину, Г.Г. Денисову, Т. Идехаре и Г.С. Нусиновичу за обсуждение проблем, изложенных в статье.

Работа по данной тематике поддержана грантами РФФИ 05-02-16852, 06-02-91176, 06-02-16782 и 08-02-0068, а также Программой Президиума РАН «Электромагнитные волны терагерцового диапазона».

Библиографический список

1. Гапонов А.В., Петелин М.И., Юлпатов В.К. Индуцированное излучение возбужденных классических осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 9–10. С. 1414.
2. Гиротрон. Сборник статей / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова. Горький: ИПФ АН СССР, 1981.
3. Nusinovich G.S. Introduction to the Physics of Gyrotrons. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2004.
4. Zaitsev N.I., Pankratova T.P., Petelin M.I., Flyagin V.A. Millimeter- and submillimeter-wave gyrotrons // Radio Eng. and Electronic Phys. 1974. Vol. 19, № 5. P. 103.
5. Flyagin V.A., Luchinin A.G., Nusinovich G.S. A submillimeter-wave gyrotrons – theory and experiment // Int. J. Infrared Millimeter Waves. 1983. Vol. 4. P. 629.
6. Spira-Hakkarainen S., Kreischer K.E., Temkin R.J. Submillimeter-wave harmonic gyrotron experiment // IEEE Trans. Plasma Sci. 1990. Vol. 18. P. 334.
7. Idehara T., Brand G.F. Submillimeter wave gyrotron development and applications. Fucui University, printed by EXIT Co., LTD, 1995.
8. Glyavin M.Yu., Luchinin A.G. and Golubiatnikov G.Yu. Generation of 1.5-kW, 1-THz coherent radiation from a gyrotron with a pulsed magnetic field // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 100. P. 015101.

9. *Idehara T., Saito T., Mori H. et al.* Long pulse operation of the THz gyrotron with a pulse magnet // *Int. J. Infrared and Millimeter Waves*. 2008. Vol. 29. P. 131.
10. *Запевалов В.Е., Зарницына И.Г., Нусинович Г.С.* О возбуждении паразитных мод, резонансных с первой гармоникой циклотронной частоты, в гиротроне, работающем на моде, резонансной со второй гармоникой // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1979. Т. 22, № 3. С. 367.
11. *Антаков И.И., Запевалов В.Е., Панкратова Т.Б., Цимринг Ш.Е.* Гиротроны на гармониках гирочастоты // *Гиротрон. Сборник статей / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова*. Горький: ИПФ АН СССР. 1981. С. 192.
12. *Нусинович Г.С., Панкратова Т.Б.* Теория гиротронов субмиллиметрового диапазона длин волн // *Гиротрон. Сборник статей / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова*. Горький: ИПФ АН СССР. 1981. С. 169.
13. *Jory H.* Investigation of electronic interaction with optical resonators for microwave generation and amplification // *R&D Tech. Report, Varian Associates, Paolo Alto, CA, ECOM-01873-F*, 1968.
14. *McDermott D.B., Luhmann N.C., Kupiszewski A.Jr. and Jory H.R.* Small-signal theory of a large-orbit cyclotron resonance harmonic maser // *Phys. Fluids*. 1983. Vol. 26. P. 1936.
15. *Lawson W., Destler W.W., and Striffler C.D.* High-power microwave generation from a large-orbit gyrotron in vane and hole-and-slot conducting wall geometries // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 1985. Vol. 13. P. 444.
16. *Bratman V.L., Fedotov A.E., Kalynov Y.K. et al.* Moderately relativistic high-harmonic gyrotrons for millimeter/submillimeter wavelength band // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 1999. Vol. 27. P. 456.
17. *Жураховский В.А.* Нелинейные колебания электронов в магнитонаправляемых потоках. Киев: Наук. думка, 1972. С. 303.
18. *Белоусов В.И., Ергаков В.С., Мусеев М.А.* Двухрезонаторный МЦР на гармониках циклотронной частоты электронов // *Электронная техника. Сер. I. Электроника СВЧ*. 1978. № 9. С. 41.
19. *Hirshfield J.L.* Coherent radiation from spatiotemporally modulated gyrating electron beams // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 44. P. 6845.
20. *Guo H., Chen S.H., Granatstein V.L. et al.* Operation of highly overmoded harmonic-multiplying gyrotron amplifier // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. P. 515.
21. *Nusinovich G.S., Dumbrajs O.* Two-harmonic prebunching of electrons in multicavity gyrodevices // *Phys. of Plasmas*. 1995. Vol. 2. P. 568.
22. *Александров А.Ф., Власов А.Н., Галузо С.Ю. и др.* Релятивистские доплеровские СВЧ-умножители частоты // *Релятивистская высокочастотная электроника: Вып. 3*. Горький: ИПФ АН СССР, 1983. С. 96.
23. *Антаков И.И., Гапонов А.В., Юлпатов В.К.* // *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника*. 1965. № 12. С. 33.
24. *Гольденберг А.Л., Петелин М.И.* Формирование винтовых электронных пучков в адиабатической пушке // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1973. Т. 16, № 1. С. 141.
25. *Братман В.Л., Калынов Ю.К., Мануилов В.Н., Самсонов С.В.* Субмиллиметро-

- вый гиротрон с большой орбитой // Изв. вузов. Радиофизика. 2005. № 10–11. С. 823.
26. *Братман В.Л., Калынов Ю.К., Мануилов В.Н., Самсонов С.В.* Электронно-оптическая система гиротрона с большой орбитой // ЖТФ. 2005. Т. 75, № 12. С. 76.
 27. *Rhee M.J. and Destler W.W.* Relativistic electron dynamics in a cusped magnetic field // The Physics and Fluids. 1974. Vol. 17. P. 1574.
 28. *Gallagher D., Barsanti M., Scafuri F., Armstrong C.* High-power cusp gun for harmonic gyro-device applications // IEEE Trans. on Plasma Sci. 2000. Vol. 28, № 3. P. 695.
 29. *Bratman V.L., Idehara T., Kalynov Yu.K. et al.* Design of a powerful and compact THz oscillator // Int. J. Infrared Millimeter Waves. 2006. Vol. 27, № 8. P. 1063.
 30. *Бандуркин И.В., Савилов А.В.* Подавление группировки на низких гармониках в гироумножителях частоты клистронного типа // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, вып. 18. С. 76.
 31. *Bandurkin I.V., Savilov A.V.* High-harmonic electron bunching in the field of a signal wave and the use of this effect in cyclotron masers with frequency multiplication // Phys. Rev. ST Accel. Beams. 2005. Vol. 8. P. 010702.
 32. *Братман В.Л., Гинцбург В.А., Гришин Ю.А. и др.* Импульсные широкодиапазонные оротроны миллиметровых и субмиллиметровых волн // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 11. С. 958.
 33. *Antakov I.I., Gachev I.G., Denisov G.G. et al.* Development and experimental study of a two-cavity 285 GHz CW gyrotron-multiplier // Proc. 6th Int. Workshop "Strong Microwave in Plasmas", N. Novgorod, 2006, P. 162.
 34. *Бандуркин И.В., Братман В.Л., Савилов А.В.* Умножение частоты в автогенераторах гиротронного типа // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 2. С. 72.
 35. *Bandurkin I.V., Bratman V.L., Denisov G.G., Savilov A.V.* Frequency multiplication in gyro-oscillators // Proc. 6th Int. Workshop «Strong Microwave in Plasmas». N. Novgorod, 2006. P. 156.

*Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского
Институт прикладной физики РАН*

Поступила в редакцию 6.05.2008

TERAHERTZ GYROTRONS AT HIGH CYCLOTRON HARMONICS

*I.V. Bandurkin, V.L. Bratman, Yu.K. Kalynov,
V.N. Manuilov, A.V. Savilov, and S.V. Samsonov*

The results of first experiments and future trends in advancing to sub-THz and THz frequency ranges with self-oscillators working at high cyclotron harmonics and gyromultipliers are discussed. In both varieties of gyrotrons, selective excitation of high harmonics can be simplified by the use of electron beams describing helical trajectories

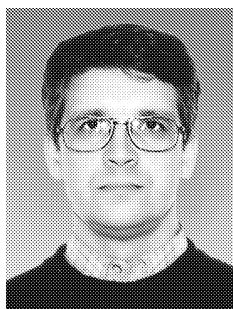
whose centers are close to the cavity axis (the configuration of Large Orbit Gyrotron). In gyromultipliers, the additional selective properties are provided due to obtrusion of frequency and spatial field structure from the relatively low-frequency signal, which may be either inserted from the outside, or excited by the same electron beam used for nonlinear frequency conversion. In the latter case, the most attractive schemes for THz range are those where excitation of low- and high-frequency radiation takes place in a single volume.



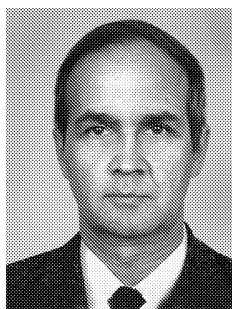
Бандуркин Илья Владимирович – родился в 1980 году в Горьком, окончил Нижегородский государственный университет (Высшая школа общей и прикладной физики) в 2003 году. После окончания университета работает в ИПФ РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИПФ РАН (2007) в области физической электроники. Соавтор около десяти научных статей по данному направлению.



Братман Владимир Львович – родился в 1945 году, окончил Горьковский (ныне Нижегородский) государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1967). После окончания аспирантуры работал в НИИ «Салют», Научно-исследовательском радиофизическом институте и с 1977 года – в ИПФ РАН. Защитил кандидатскую (1977) и докторскую (1992) диссертации в области электроники. В настоящее время заведует отделом высокочастотной релятивистской электроники ИПФ РАН, профессор Нижегородского университета. Соросовский профессор, Лауреат Государственной премии РФ. Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Радиофизика».



Калынов Юрий Константинович – родился в 1963 году в Горьком, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1985). После окончания работал в Горьковском НИИ «Салют», с 1993 года работает в ИПФ РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (ИПФ РАН, 2001) в области физической электроники. Опубликовал около 40 научных работ по указанному направлению.



Мануилов Владимир Николаевич – родился в 1952 году, окончил Горьковский (ныне Нижегородский) государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1974). После окончания университета работает на кафедре электроники радиофизического факультета ННГУ. Защитил кандидатскую (1985) и докторскую (2000) диссертации в области электроники. В настоящее время – профессор Нижегородского университета. Соросовский доцент.



Савилов Андрей Владимирович – родился в 1968 году в Рязанской обл., окончил с отличием Нижегородский государственный университет (Высшая школа общей и прикладной физики) в 1992 году. После окончания университета работает в ИПФ РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИПФ РАН (1997) и доктора физико-математических наук (2005) в области физической электроники, физики плазмы и релятивистских электронных пучков. Опубликовал более 100 научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Премии и Медали РАН для молодых ученых (2000).



Самсонов Сергей Викторович – родился в 1966 году в Арзамасе-16 (Саров). Окончил Горьковский политехнический институт (1989), защитил диссертации на соискание кандидата (1996) и доктора (2007) физико-математических наук по специальности физическая электроника. С 1989 года работает в Институте прикладной физики РАН в области вакуумной СВЧ-электроники больших мощностей. В 2000 году удостоен Медали РАН с премией для молодых ученых (в области общей физики и астрономии) за цикл работ «Теоретическое и экспериментальное исследование мощных мазеров на свободных электронах».



ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА МОДЕЛИ ХАНТА – ИСКУССТВЕННО СКОНСТРУИРОВАННОЙ ПОТОКОВОЙ СИСТЕМЫ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ АТТРАКТОРОМ

Ю.С. Айдарова, С.П. Кузнецов

Исследуется численно хаотическое поведение, обусловленное присутствием гиперболического странного аттрактора типа Плыкина в модели Ханта – искусственно сконструированной динамической системе с непрерывным временем. Приводятся портреты аттрактора, графики реализаций порождаемого системой хаотического сигнала, иллюстрируется присущая хаосу чувствительная зависимость траекторий от начальных условий. Представлены также количественные характеристики аттрактора – показатели Ляпунова и оценка размерности. Обсуждается символическая динамика на аттракторе, найдены и проанализированы некоторые неустойчивые периодические орбиты, принадлежащие аттрактору.

Введение

В математической теории динамических систем вводится в рассмотрение класс *однородно гиперболических хаотических аттракторов* [1–9]. В таком аттракторе все траектории являются седловыми, обладают устойчивыми и неустойчивыми многообразиями, размерность которых одна и та же для всех точек на аттракторе, и эти устойчивые и неустойчивые многообразия не имеют касаний между собой. Динамика на странном гиперболическом аттракторе демонстрирует сильные хаотические свойства и допускает подробный математический анализ. Такие аттракторы обладают свойством грубости или структурной устойчивости, которое заключается в нечувствительности устройства аттрактора по отношению к вариациям функций и параметров в определяющих уравнениях. Основные положения соответствующей математической теории были сформулированы около 40 лет назад, однако до последнего времени считалось, что однородно гиперболические странные аттракторы не характерны для реальных систем со сложной динамикой. В учебниках и монографиях в качестве примеров традиционно фигурируют искусственные математические конструкции, такие как аттрактор Плыкина и соленоид Смейла–Вильямса. Названные примеры относятся к системам с дискретным временем – итерируемым отображениям специального вида. Аттрактор Смейла–Вильямса получается при отображении тороидальной области в себя в фазовом пространстве с размерностью 3 или более. Аттрактор Плыкина имеет место в некотором сложно организованном отображении, которое определено в ограниченной области на плоскости с тремя дырками.

В прикладных дисциплинах, физике и технике чаще всего приходится иметь дело с системами, функционирующими в непрерывном времени.

Переход от системы с дискретным временем, описываемой отображением $x_{n+1} = f(x_n)$, к системе с непрерывным временем – потоковой системе, или просто потоку, математики называют *надстройкой* (suspension) [2–7]. К набору переменных x , определяющих состояние исходной системы, добавляется еще одна переменная t , отвечающая непрерывному времени, и вводится расширенное фазовое пространство $\{x, t\}$. Далее строится векторное поле v , зависящее от исходных переменных x и дополнительной переменной t . При этом за некоторый определенный интервал времени $\Delta t = T$ состояние, эволюционирующее в соответствии с дифференциальным уравнением $\dot{x} = v(x, t)$, должно претерпевать трансформацию, в точности соответствующую применению отображения $x_{n+1} = f(x_n)$. За пределами интервала T векторное поле $v(x, t)$ считается периодической функцией времени. Процедура применима, если отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ обратимое. С физической точки зрения, это следует трактовать как построение неавтономной системы, в которой за один период внешнего воздействия T реализуется преобразование состояния, заданное исходным отображением [8–12].

Недавно предложена и исследована, в том числе экспериментально, система с аттрактором, который отвечает надстройке над соленоидом Смейла–Вильямса [13, 14]. Система конструируется на основе двух неавтономных осцилляторов ван дер Поля, которые становятся активными попеременно и передают возбуждение друг другу так, что преобразование фазы колебаний за полный цикл описывается растягивающим отображением окружности (отображение Бернулли). Результаты проверки на компьютере условий теоремы, гарантирующей существование гиперболического аттрактора, представлены в работах [15, 16]. Другие варианты подобных схем на основе неавтономных и автономных осцилляторов обсуждаются в работах [17–19].

Для аттрактора Плыкина пока не известны конкретные физически реализуемые примеры, хотя в работе [20] аргументируется возможность существования такого аттрактора в отображении Пуанкаре автономной трехмерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих модель нейрона. С другой стороны, сконструированный в явном виде пример динамической системы, реализующей надстройку над аттрактором типа Плыкина¹⁾, был представлен в диссертации Т. Ханта [21], выполненной в Кембриджском университете под руководством профессора Роберта Мак Кэя. Модель Ханта описывается достаточно громоздкими выражениями, которые различаются в зависимости от рассматриваемой области фазового пространства, она содержит также множество искусственно введенных сглаживающих функций, и не является аналитической. (Построенный поток принадлежит классу C^1 , то есть решения непрерывны вместе с первыми производными.) Довольно трудно се-

¹⁾Как сейчас известно, можно сконструировать множество различных примеров гиперболических странных аттракторов в ограниченной двумерной области с дырками, отличающихся друг от друга по топологической структуре. Поскольку лежащая в основе идея принадлежит Плыкину, представляется правомерным допустить двойное употребление термина «аттрактор Плыкина» – в широком смысле, в отношении гиперболических аттракторов указанного типа в двумерном фазовом пространстве, и в узком смысле, когда имеется в виду конкретный пример из его исходной работы [22]. Объект, реализующийся в сечении Пуанкаре модели Ханта, может быть назван аттрактором Плыкина в широком смысле. Далее, для краткости мы будем пользоваться указанным термином без дополнительных оговорок.

бе представить, чтобы эту модель можно было реализовать физически, например, в виде радиотехнической схемы.

Тем не менее разработку модели Ханта как системы с непрерывным временем следует приветствовать как определенный шаг в направлении построения примеров реальных систем с гиперболическим странным аттрактором. В данной работе мы намерены воспроизвести конструкцию Ханта и выполнить численное исследование динамики этой системы с привлечением арсенала хорошо отработанных методов нелинейной динамики, включая построение фазовых портретов, анализ реализаций, вычисление показателей Ляпунова и размерностей. Одна из главных целей состоит в том, чтобы отладить методику и накопить опыт обращения с гиперболическими аттракторами, в том числе в отношении применения численной процедуры проверки гиперболичности, основанной на выполнении определенных условий вложения растягивающихся и сжимающихся конусов в пространстве векторов возмущения (касательном пространстве).

1. Качественное описание модели Ханта

Модель Ханта представляет собой неавтономную систему, описываемую дифференциальными уравнениями относительно двух переменных x и y , с правыми частями, зависящими от x , y и времени t :

$$dx/dt = f_*(x, y, t), \quad dy/dt = g_*(x, y, t). \quad (1)$$

Фигурирующие здесь функции f_* и g_* непрерывные и дифференцируемые и имеют период 2π по аргументу t . Формальное описание модели Ханта и математические соотношения для вычисления функций f_* и g_* приведены в Приложении А.

На рис. 1, а на плоскости (x, y) показана начальная (при $t = 0$) конфигурация области, динамика точек которой отслеживается в рамках предлагаемой конструкции. Эта область U содержит три подобласти U_i , в которых определены специальные криволинейные системы координат $(r, \theta)^i$, $i = 1, 2, 3$ (соответствующие семейства координатных линий приведены на рисунке). По ходу эволюции во времени положение точек, представляющих начала отсчета этих специальных координат, определенным образом изменяется, а сами области и координатные линии непрерывно деформируются.

Динамика переменных x, y на интервале времени 2π рассматривается на трех последовательных стадиях, протяженность каждой из которых $2\pi/3$. На первой стадии область U претерпевает вертикальное сжатие и горизонтальное растяжение, как показано на рис. 1, б. (Говоря более аккуратно, сжатие и растяжение осуществляется по координатным линиям введенных криволинейных координат, соответственно, по линиям $\theta = \text{const}$ и $r = \text{const}$.) На второй стадии расположенная в правой части фигуры трансформированная подобласть U_2 плавно изгибается вверх, влево и вниз (рис. 1, в), так что в итоге оказывается расположенной вдоль границы области U_3 (рис. 1, г). На третьей стадии подобласть U_1 в левой части фигуры претерпевает аналогичную деформацию, изгибаясь вверх, вправо и вниз (рис. 1, д), так что в итоге ее нижняя граница располагается по краю преобразованной на предыдущей стадии области U_2 (рис. 1, е). Фигура воспроизводит по форме исходную область,

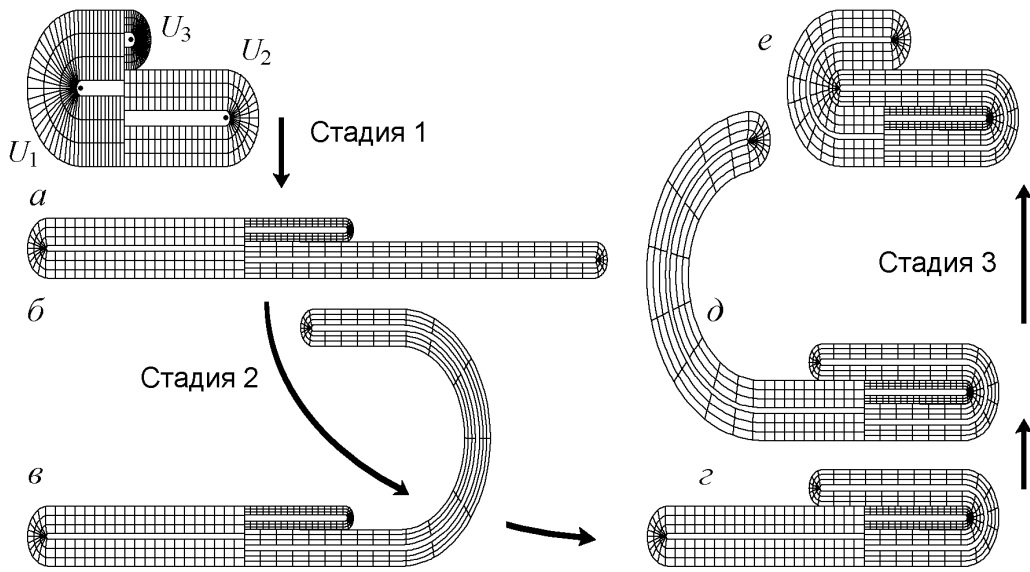


Рис. 1. Эволюция области $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ на плоскости x, y за период $\Delta t = 2\pi$ в модели Ханта. Жирные точки на диаграмме (а) отвечают точкам начала отсчета специальных криволинейных координат

причем координатные линии $\theta = \text{const}$ и $r = \text{const}$ в их новом положении направлены вдоль исходных координатных линий криволинейных координат. Описанная деформация составляет, так сказать, основное содержание динамики. Кроме того, в модель заложены дополнительные модификации, благодаря которым точки начала отсчета криволинейных координат становятся отталкивающими, а поперечное сжатие элементов фигуры несколько более сильным, так что в итоге трансформации она оказывается внутри исходной области (при совпадении нижних границ исходной области и ее образа). Степень сглаживания определяется параметром, величина которого в описанных ниже расчетах принята равной $\varepsilon = 0.17$. Также в модели предусмотрено определение векторного поля, отвечающего правым частям уравнений (1), за пределами деформирующейся области $U(t)$.

2. Аттрактор модели Ханта и его свойства

Если задать начальные условия $x_0 = (x_0, y_0)$ и проинтегрировать уравнения (1) на временном интервале $\Delta t = 2\pi$, то получим новый вектор состояния $x_1 = (x_1, y_1)$, который можно трактовать как результат применения некоторого отображения \mathbf{T} к исходному вектору x_0 . Это отображение Пуанкаре или стробоскопическое отображение для построенного потока. При задании начального вектора в области U образ также попадает в U . Иными словами, образ $\mathbf{T}(U)$ принадлежит U , а аттрактор отображения \mathbf{T} можно определить как пересечение множеств, получаемых многократным применением отображения: $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathbf{T}^k(U)$. Для системы с дискретным временем, заданной отображением \mathbf{T} , это гиперболический странный аттрактор Плыкина [1–7, 22] (см. сноску 1). В контексте конкретной анализируемой модели, математическое обоснование свойства гиперболичности аттрактора представлено в

работе Ханта. Альтернативный подход к проверке этого свойства на основе компьютерных вычислений рассматривается в Приложении В.

Для численного решения уравнений мы использовали метод Рунге–Кутты 4-го порядка. Поскольку функции, фигурирующие в определении модели (1), не относятся к классу гладких с большим числом производных, метод высокого порядка неизбежно теряет в точности. Тем не менее эмпирически получаемые результаты с применением данного метода лучше, чем при использовании методов более низкого порядка. Если требовалась повышенная точность, это достигалось уменьшением шага интегрирования.

На рис. 2 показан портрет аттрактора в сечении Пуанкаре, полученный для модели Ханта в результате численного решения уравнений (1). Это набор точек представительной траектории на аттракторе в моменты времени, кратные 2π , в достаточно большом количестве (несколько десятков тысяч). Аттрактор характеризуется присутствием поперечной фрактальной структуры. Хорошо видны несколько первых уровней этой структуры – объект как бы составлен из полосок, каждая из которых содержит полоски следующего уровня, и так до бесконечности.

Поскольку основной мотив разработки модели Ханта заключался в построении системы с непрерывным временем, имеющей гиперболический аттрактор, естественно обратиться к иллюстрациям, которые передавали бы именно отличительные особенности потоковой системы.

На рис. 3 показан аттрактор потоковой системы в проекции на плоскость (x, y) . Интересно, что, подобно аттрактору Лоренца, он составлен из двух «крыльев бабочки», которые, однако, асимметричны. За формирование этих «крыльев» отвечают вторая и третья стадия построения динамики модели Ханта, когда осуществляется деформация поворота боковых подобластей (см. рис. 1). На рис. 4 показаны зависимости переменных x и y от времени. Отметим нерегулярное поведение этих зависимостей при наблюдении на достаточно больших временах, что свидетельствует о хаотической динамике. Зависимости непрерывные, но на каждом периоде протяженностью 2π характеризуются присутствием стыкованных друг с другом участков разного поведения – горизонтальных плато и резких всплесков. В этом выражается специфика модели Ханта, динамика которой строится в виде последовательных стадий.

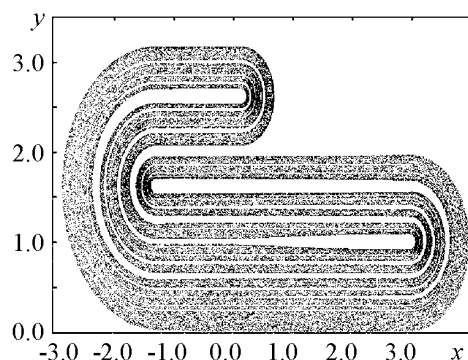


Рис. 2. Аттрактор модели Ханта в сечении Пуанкаре

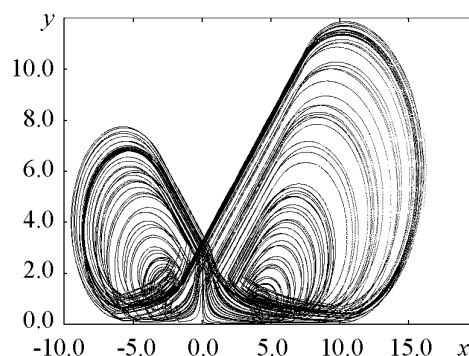


Рис. 3. Портрет аттрактора модели Ханта в проекции на плоскость x, y

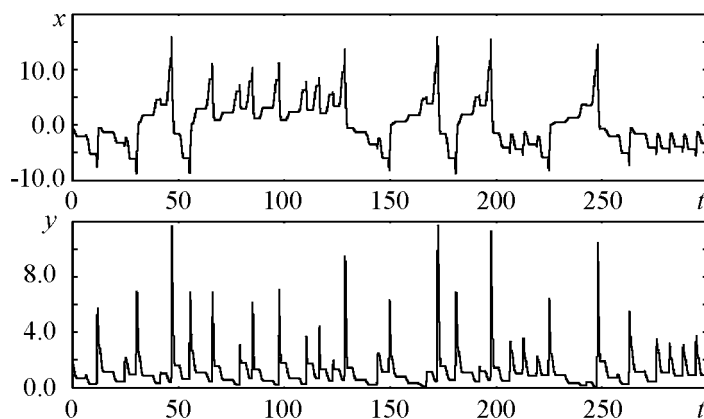


Рис. 4. Зависимости динамических переменных x и y от времени в модели Ханта

На рис. 5 приведен спектр мощности сигнала для переменной x при динамике на аттракторе в модели Ханта. По оси ординат использован логарифмический масштаб. В соответствии с рекомендациями теории численного спектрального анализа случайных процессов [23], имеющаяся реализация разбивалась на отрезки протяженностью T_0 , на каждом отрезке производилось умножение на функцию $\sin^2(\pi t/T_0)$ (так называемое «окно»), после чего выполнялось преобразование Фурье, и результат усреднялся по всем отрезкам реализации. Величина $\Delta\omega \cong \pi/T_0$ определяет разрешающую способность анализа. Чем больше количество имеющихся в наличии отрезков разбиения, тем меньше среднеквадратичная погрешность оценки спектральной плотности мощности.

Реализация была представлена выборкой отсчетов сигнала с шагом $\Delta t = 2\pi/120$, каждый отрезок T_0 содержал 2^{13} отсчетов, усреднение проведено по 64 отрезкам. Из графика видно, что спектр сплошной, то есть имеет такой же характер, как спектр стационарного случайного процесса. Присутствующие пики на частотах 1, 2, 3... связаны с присущей модели Ханта периодичностью во времени правых частей определяющей системы дифференциальных уравнений.

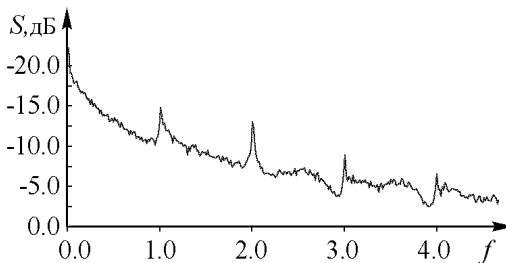


Рис. 5. Спектр Фурье сигнала, порождаемого динамикой модели Ханта на аттракторе

Как известно, один из главных атрибутов динамического хаоса – неустойчивость фазовых траекторий или наличие высокой чувствительности движения по отношению к малым вариациям начальных условий. Для демонстрации этого свойства применительно к модели Ханта проводилось многократное численное решение уравнений (1) при задании в качестве начальных условий каждый раз некоторой определенной точки на аттракторе с малой случайной добавкой к координатам x и y . Полученные результаты представлены в виде наложения 20 реализаций на одном графике на рис. 6. Как видно из рисунка, на начальном участке реализации повторяют друг друга с высокой степенью точности, но с течением времени, ближе к право-

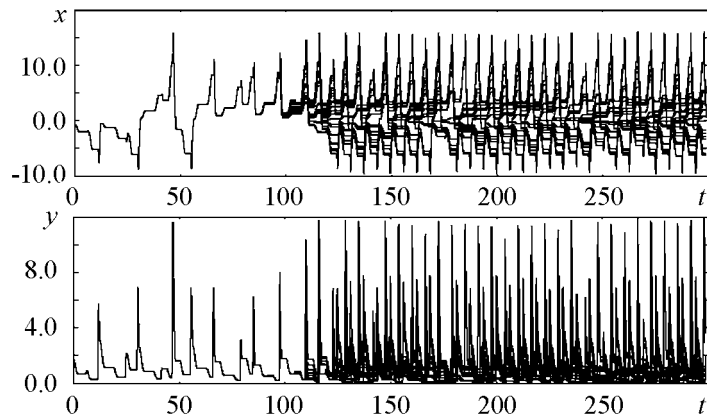


Рис. 6. Иллюстрация неустойчивости траекторий на аттракторе модели Ханта по отношению к малому возмущению начальных условий. На графике показаны наложенные друг на друга зависимости динамических переменных от времени для 20 реализаций со слегка различающимися начальными условиями

му краю диаграммы, они расходятся друг относительно друга все сильнее, и картина «замазывается». Сохраняющаяся на этом фоне периодическая структура всплесков обусловлена уже упоминавшейся спецификой модели Ханта как неавтономной динамической системы с периодическими во времени правыми частями уравнений.

Для количественной характеристики присущей хаосу неустойчивости траекторий используются показатели Ляпунова. В нашем случае имеется два нетривиальных показателя, один из которых, положительный, отвечает за неустойчивость движения на аттракторе, а другой, отрицательный – за приближение траекторий к аттрактору.

Для расчета показателей Ляпунова был применен алгоритм Бенеттина [24, 12]. Из-за сложности формального определения модели Ханта, выбрана версия алгоритма, не требующая вывода уравнений в вариациях. Производилось численное решение трех комплектов уравнений (1). Один из них отвечал движению изображающей точки по основной траектории, а два других – по близким возмущенным траекториям с фиксированной начальной нормой вектора возмущения $\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} = \varepsilon_0 \ll 1$, где $i = 1, 2$. В конце каждого временного интервала протяженностью 2π проводилась ортогонализация и перенормировка векторов возмущения, с тем чтобы нормы снова равнялись ε_0 . Показатели Ляпунова определялись как средние (за достаточно большое количество этих интервалов) скорости нарастания для накапливающихся сумм логарифмов отношения норм возмущений в конце и начале интервала. В результате усреднения по 22 реализациям длительностью 1000 периодов 2π получены следующие значения показателей: $\lambda_1 = 0.1532 \pm 0.0002$, $\lambda_2 = -0.1930 \pm 0.0020$, где в качестве погрешности указана величина среднеквадратичного отклонения. Показатели Ляпунова для отображения T определяются как $\Lambda_{1,2} = 2\pi\lambda_{1,2}$, и составляют, соответственно, $\Lambda_1 = 0.9625$, $\Lambda_2 = -1.213$. Заметим, что больший показатель хорошо согласуется с оценкой $\Lambda \cong \ln[(3 + \sqrt{5})/2] = 0.9624$, которая получается при описании динамики на аттракторе с использованием одномерного отображения (см. раздел 3). Сумма показателей Ляпунова отрицательная. Это выражает то обстоятельство, что в процессе динамики с выходом на аттрактор облака начальных точек его объем убывает во времени экспоненциально и стремится в итоге к нулю.

Оценка размерности аттрактора в сечении Пуанкаре по формуле Каплана–Йорке дает $d_L = 1 + \lambda_1/|\lambda_2| \approx 1.793$. Для аттрактора как объекта в расширенном фазовом пространстве размерность на единицу больше.

3. Символическая динамика и периодические орбиты

Обратимся к подходу, известному как *символическая динамика*. Для этого область в сечении Пуанкаре, посещаемую траекториями, разобьем определенным образом на подобласти, и каждую траекторию будем кодировать последовательностью символов, приписанных этим подобластям. Доказано, что применительно к гиперболическому аттрактору разбиение можно построить так, чтобы имело место взаимно однозначное соответствие между траекториями на аттракторе и множеством бесконечных символических последовательностей, составленных по некоторым правилам из набора имеющихся символов (так называемое *марковское разбиение*).

Для аттрактора модели Ханта разбиение области U , введенной в рассмотрение в разделе 1, показано на рис. 7. Напомним, что область U есть объединение трех областей U_1, U_2, U_3 . Подобласть U_1 разбивается на три элемента p, a, q . Они определены так, что образы точек из p и q при однократном применении отображения Пуанкаре $T(x)$ попадают снова в U_1 , тогда как образы точек, принадлежащих a – в область U_3 . Границы определяются координатными линиями криволинейной системы координат в области U_1 (см. определение (A.1) в Приложении А), а именно уравнениями $\theta^{(1)} = \pm(X_1 + \pi)(1 - 2/\lambda)$. Подобласть U_2 разбита на три элемента x, c, y . Образы точек из x и y при действии отображения Пуанкаре $T(x)$ попадают в U_2 , а точек из элемента c – в область U_1 . Границы заданы уравнениями

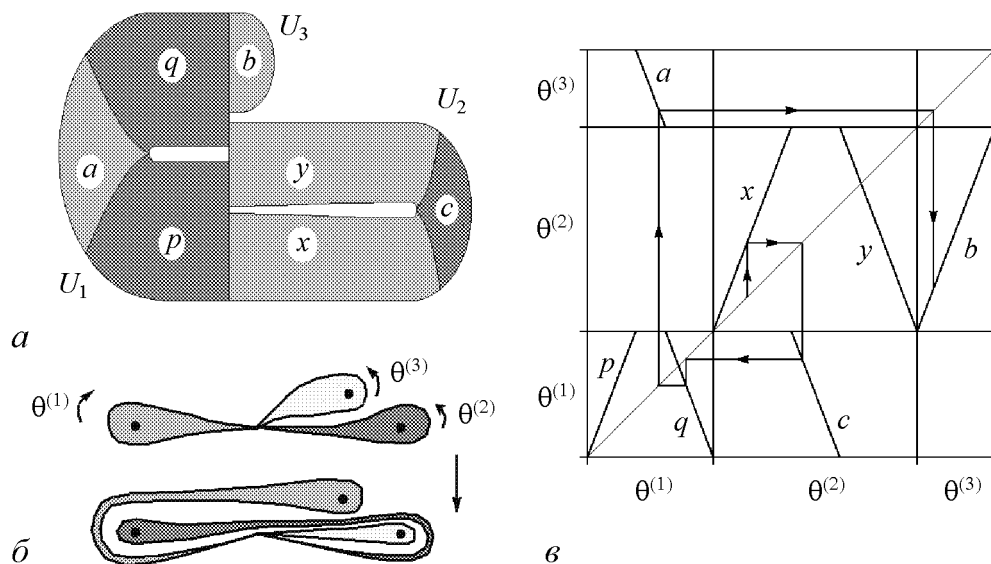


Рис. 7. Марковское разбиение области, в которой расположен аттрактор в сечении Пуанкаре (а). Представление динамики с использованием разветвленного одномерного многообразия (б), где на двух диаграммах, отвечающих исходному объекту и его трансформации, внутренность соответствующих друг другу петель закрашена одинаковым образом. Представление динамики на разветвленном одномерном многообразии с помощью итерационной диаграммы (в). Показан участок траектории с кодом $xcqab\dots$

$\theta^{(2)} = \pm(X_2 + \pi)(1 - 2/\lambda)$ и отвечают координатным линиям криволинейной системы координат в области U_2 . Наконец, область U_3 состоит из одного элемента b . Последовательности, кодирующие принадлежащие аттрактору траектории, строятся из семи символов (p, a, q, x, c, y, b) с применением правила, сформулированного ниже.

Полезное представление динамики получается, если принять соглашение не различать точки, которые в одной и той же области U_i имеют одинаковую координату $\theta^{(i)}$. Модель Ханта устроена так, что в сечении Пуанкаре их образы будут оставаться на общей координатной линии θ и в процессе последующих итераций. В такой трактовке фазовое пространство выступает как одномерное: его можно мыслить как резиновую нить с тремя петлями, натянутую на три гвоздика, как показано на рис. 7, б (так называемое *разветвленное одномерное многообразие*). Одна итерация отображения Пуанкаре соответствует тому, что мы определенным образом деформируем эту нить и вновь натягиваем ее на те же гвоздики.

Графически динамику можно иллюстрировать с помощью диаграммы, показанной на рис. 7, в. На каждой из координатных осей выделены три отрезка, в пределах каждого из которых отсчитывается координата $\theta^{(i)}$ для $i = 1, 2, 3$. Итерации представляются в виде традиционной «лесенки Ламерея», причем посещение того или иного куска графика отвечает определенному символу в последовательности, кодирующей данную траекторию. (Отображение выглядит разрывным, но это дефект представления: на разветвленном многообразии оно на самом деле непрерывное.) Заметим, что все ветви графика имеют одинаковый наклон, выражающийся по абсолютной величине константой $\lambda = (3 + \sqrt{5})/2$. Отсюда можно заключить, что отображение Пуанкаре должно иметь показатель Ляпунова, равный $\ln[(3 + \sqrt{5})/2] = 0.9624$.²⁾

Из рассмотрения диаграммы на рис. 7, в видно, что «грамматика» символического описания траекторий выражается следующими правилами:

$$\begin{aligned} p \rightarrow p, a, q; \quad a \rightarrow b; \quad q \rightarrow p, a, q; \quad x \rightarrow x, c, y; \\ c \rightarrow p, a, q; \quad y \rightarrow x, c, y; \quad b \rightarrow x, c, y, \end{aligned} \quad (2)$$

где для каждого символа указаны символы, которые после него разрешается ставить.

Периодические символические последовательности ассоциируются с периодическими орбитами или циклами на аттракторе модели Ханта. Используя правила (2), можно перечислить циклы всевозможных периодов. В частности, имеется три цикла периода 1 (коды p, q, y), два цикла периода 2 (коды pq, xy), пять циклов периода 3 (коды ppq, pqq, abc, xxy, xyy). Имеется десять циклов периода 4 (коды $pppq, ppqq, pqqq, rabc, qabc, xxxy, xxyy, xyyy, xsab, ysab$), двадцать четыре цикла периода 5, пятьдесят циклов периода 6 и т.д.

Поскольку аттрактор странный гиперболический, все эти циклы неустойчивы. Чтобы их найти в численных расчетах, приходится использовать специальные процедуры поиска. Один возможный подход состоит в том, чтобы итерировать представленное на рис. 7, в одномерное отображение в обратном времени, выбирая на каждом шаге нужную ветвь в соответствии с заданной заранее периодической символической последовательностью. Полученное в результате значение θ дополняется

²⁾Разумеется, это только один, наибольший по величине из двух показателей. Второй при переходе к описанию динамики на одномерном разветвленном многообразии из рассмотрения исключается.

произвольно выбранным начальным значением r , и производится решение уравнений (1) в прямом времени за период цикла. Далее найденная точка на цикле уточняется, например, по методу Ньютона.

На рис. 8 показаны фазовые портреты некоторых циклов модели Ханта с периодами от 2 до 8 в проекции на плоскость (x, y) . Для каждого цикла указана соответствующая ему символическая последовательность. Ее можно восстановить, внимательно рассматривая рисунок: жирные точки на фоне изображенного серым фоном

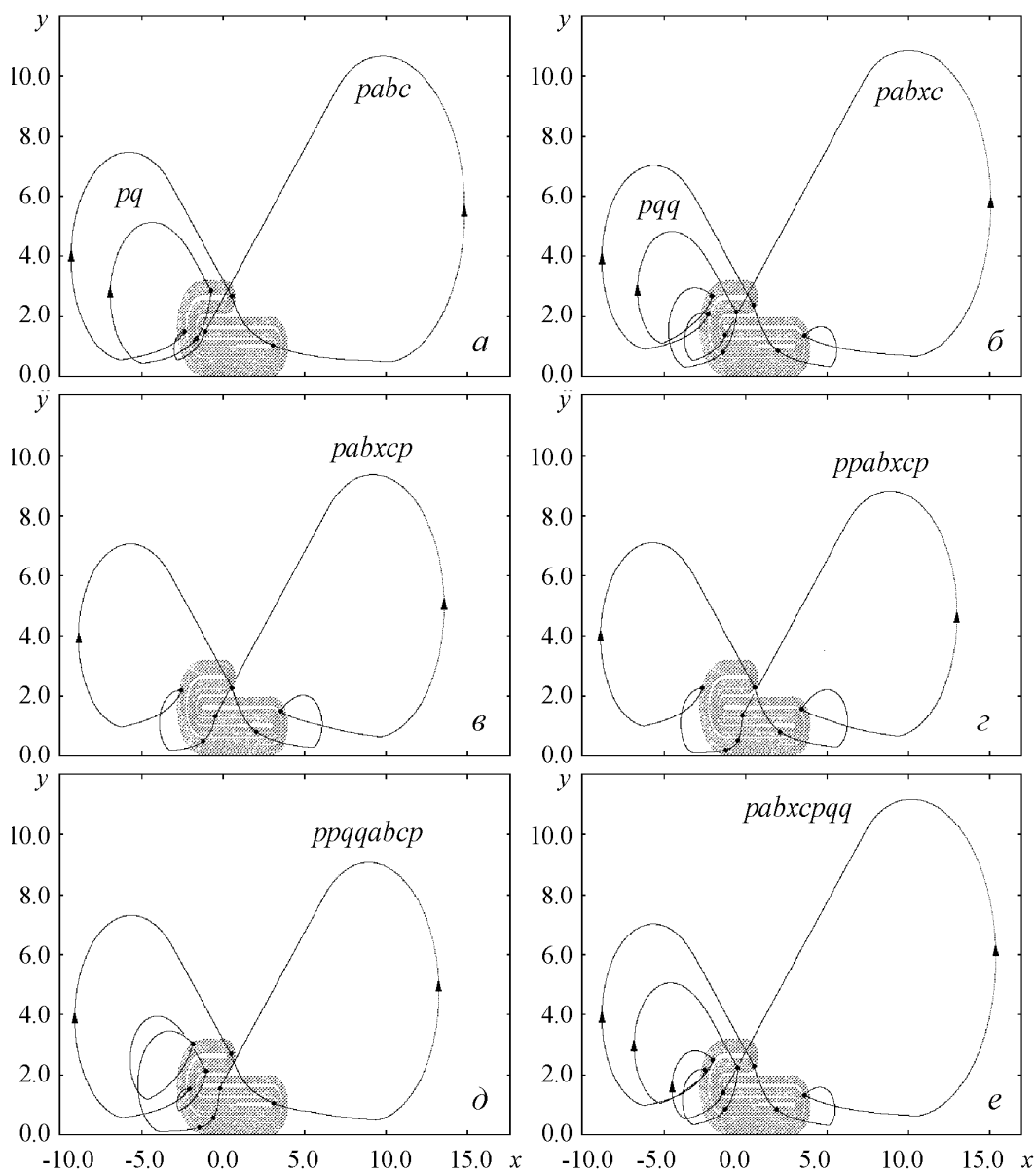


Рис. 8. Фазовые портреты неустойчивых циклов для модели Ханта в проекции на плоскость (x, y) . Стрелкой показано направление движения по траекториям. Жирные точки на траектории отвечают моментам времени $t = 2\pi n$, где n – целое, то есть сечению Пуанкаре. Серым изображен аттрактор в сечении Пуанкаре. Для каждого цикла указан соответствующий ему символический код, количество символов которого есть период цикла в единицах 2π

Таблица

Символические коды, мультипликаторы и показатели Ляпунова для некоторых периодических орбит модели Ханта с периодами от 2 до 9

Период	Код	μ_1	μ_2	Λ_1	Λ_2
2	<i>pq</i>	-6.857	-0.1456	0.9626	-0.9634
3	<i>pqq</i>	17.928	0.04953	0.9621	-1.0017
4	<i>abc</i>	46.977	0.004880	0.9624	-1.3307
4	<i>ppqq</i>	47.061	0.004976	0.9628	-1.3258
5	<i>pqqpp</i>	123.17	0.0004596	0.9627	-1.5370
5	<i>abcpr</i>	123.11	0.002027	0.9626	-1.2403
5	<i>abxc</i>	122.89	0.003478	0.9623	-1.1323
6	<i>ppqqq</i>	322.27	0.0008787	0.9626	-1.1728
6	<i>abcqq</i>	321.90	0.0005048	0.9624	-1.2652
6	<i>abxcp</i>	322.09	0.001021	0.9625	-1.1478
7	<i>ppqqabc</i>	844.70	0.0001869	0.9627	-1.2264
7	<i>ppabxcp</i>	845.55	0.0001006	0.9629	-1.3149
8	<i>ppqqabcpr</i>	2203.1	0.00001750	0.9622	-1.3695
8	<i>abxcpqq</i>	2201.8	0.0001814	0.9621	-1.0768
9	<i>ppqqabyuc</i>	5777.9	0.00002745	0.9624	-1.1670
9	<i>abcprppq</i>	5763.7	0.00002374	0.9621	-1.1831
9	<i>ppabxyucp</i>	5802.6	0.00001318	0.9628	-1.2486

аттрактора в сечении Пуанкаре располагаются как раз в областях, определенных как на рис. 7, а.

Для этих же и некоторых других циклов в таблице приводятся рассчитанные численно мультипликаторы – собственные числа матриц, описывающих преобразование вектора малого возмущения за период цикла в линейном приближении. Видно, что для каждого цикла из двух мультипликаторов один по модулю всегда больше единицы, а другой меньше. Так что эти циклы, в самом деле, неустойчивые, притом седловые, как это и должно быть для всех траекторий, принадлежащих гиперболическому странному аттрактору. В таблице приводятся также показатели Ляпунова, вычисленные для этих циклов. Большой показатель практически одинаков для всех циклов, и с точностью до погрешности вычислений совпадает с величиной $\Lambda = \ln[(3 + \sqrt{5})/2] = 0.9624$. Второй показатель для разных циклов варьируется в некоторых пределах, но всегда отрицателен, притом по абсолютной величине превышает Λ .

Заключение

В данной работе мы воспроизвели построение искусственной модельной системы Ханта с непрерывным временем, обладающей странным аттрактором гиперболического типа. Было предпринято достаточно подробное численное исследование динамики этой системы, включая построение фазовых портретов, анализ реализаций, вычисление показателей Ляпунова и размерностей, спектра Фурье. Представлены результаты проверки в численных расчетах условий теоремы, гарантирующей гиперболическую природу аттрактора, что позволило устранить допущенную в ра-

боте Ханга неточность. Полученные результаты могут использоваться в учебном процессе в качестве примера динамики на гиперболическом странном аттракторе, и как иллюстрация соответствующей общей математической теории. Выполнение данного исследования способствовало накоплению опыта работы с гиперболическими аттракторами, что становится актуальным по мере появления примеров физически реализуемых систем, имеющих аттракторы подобного типа. Одним из интересных вопросов для дальнейших исследований остается поиск или конструирование реальных систем с аттракторами типа Плыкина, поскольку модель Ханга сама по себе вряд ли допускает реализацию в силу сложности и громоздкости соотношений, положенных в ее основу.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-02-16619).

Приложение А

Формальное описание динамики модели Ханга

Динамика переменных x, y на временном интервале $\Delta t = 2\pi$ рассматривается на трех последовательных стадиях, протяженность каждой из которых $2\pi/3$. При формулировке соотношений используется фиктивное время s , которое в пределах каждой стадии меняется от 0 до 1. С целью обеспечить гладкость потока, связь между s и t выбирается так, чтобы на стыках стадий скорость движения изображающей точки на плоскости x, y обращалась в ноль.

При описании потока используются три специальных криволинейных системы координат $(r, \theta)^i$, $i = 1, 2, 3$, связанных с прямоугольными координатами x, y соотношениями

$$\begin{aligned} x &= X + S_i(\pi/2 - |\theta|), & y &= Y + r \operatorname{sgn} \theta, & |\theta| &\geq \pi/2, \\ x &= X + S_i r \cos f_r(\theta), & y &= Y + r \sin f_r(\theta), & |\theta| &< \pi/2, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

где $f_r(\theta) = 2\pi^2 r \theta / [\pi^2(r+1) + 4(r-1)\theta^2]$, $S_1 = -1$ и $S_{2,3} = 1$. Величины X и Y определяют положение центра i -й системы в исходных прямоугольных координатах. Для краткости переход к новым координатам и обратно обозначим, соответственно, $(r, \theta)^i = (R(x, y, X, Y, S_i), \Theta(x, y, X, Y, S_i))$ и $(x, y) = (F^i(r, \theta, X, Y, S_i), G^i(r, \theta, X, Y, S_i))$. Явные выражения для функций R, Θ, F^i, R^i легко выводятся из формул (A.1).

Положим $\lambda = (3 + \sqrt{5})/2$ и $\mu = (3 - \sqrt{5})/2$. Введем, кроме того, константы, определяющие геометрическое расположение элементов конструкции на плоскости (x, y) :

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{4} (6\sqrt{5} - 6 - (3 - \sqrt{5})\pi), & X_2 &= 3, & X_3 &= \frac{1}{4} (18 - 6\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1)\pi), \\
Y_1 &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), & Y_2 &= 1, & Y_3 &= \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}), \\
R_1 &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), & R_2 &= 1, & R_3 &= \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).
\end{aligned} \tag{A.2}$$

1. На первой стадии $t \in [0, 2\pi/3]$ полагаем $s = \sin^2((3/4)t)$. Точки начала отсчета специальных координат перемещаются в зависимости от s в соответствии с уравнениями

$$X_{i1}(s) = \lambda^s(X_i + \pi/2) - \pi/2, \quad Y_{i1} = \mu^s Y_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{A.3}$$

Кроме того, полагаем $R_{i1}(s) = \mu^s R_i$. Задавшись определенными значениями s, x, y , находим векторное поле $\mathbf{f}(x, y, s) = (f(x, y, s), g(x, y, s))$ посредством следующей процедуры.

а. Если $x \leq 0$, выполняем переход в систему координат с индексом 1

$$(r, \theta)_1 = (R(x, y, -X_{11}(s), Y_{11}(s), -1), \Theta(x, y, -X_{11}(s), Y_{11}(s), -1)) \tag{A.4}$$

и, обозначая точкой производную по s , полагаем

$$\dot{\theta} = (\ln \lambda)\theta, \quad \dot{r} = (\gamma(\theta, X_{11}(s))h_{12}(r, R_{11}(s)) + (1 - \gamma(\theta, X_{11}(s)))) (\ln \mu)r. \tag{A.5}$$

Здесь введены функции

$$\gamma(\theta, X) = \begin{cases} 1, & |\theta| \leq \frac{\pi}{2}, \\ \cos^2\left(\frac{1}{4}\pi(2|\theta| - \pi)X^{-1}\right), & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + X, \\ 0, & |\theta| \geq \frac{\pi}{2} + X, \end{cases} \tag{A.6}$$

$$h_{12}(r, R) = \begin{cases} \cos(\pi(1 - r/\varepsilon)), & r < \varepsilon, \\ 1, & \varepsilon \leq r \leq R - \varepsilon, \\ \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{1}{2\varepsilon}\pi(r - R)\right), & |r - R| < \varepsilon, \\ \frac{3}{2}, & r \geq R + \varepsilon. \end{cases}$$

Далее находим компоненты векторного поля (f_1, g_1) в прямоугольных координатах согласно формуле

$$\begin{aligned}
f_i &= \begin{cases} \dot{X} - S \operatorname{sgn}(\theta) \dot{\theta}, & |\theta| \geq \pi/2, \\ \dot{X} + S \dot{r} \cos f_r(\theta) - S r \sin f_r(\theta) \left(\dot{r} \partial f_r(\theta) / \partial r + \dot{\theta} \partial f_r(\theta) / \partial \theta \right), & |\theta| \leq \pi/2, \end{cases} \\
g_i &= \begin{cases} \dot{Y} + \operatorname{sgn}(\theta) \dot{r}, & |\theta| \geq \pi/2, \\ \dot{Y} + \dot{r} \sin f_r(\theta) + r \cos f_r(\theta) \left(\dot{r} \partial f_r(\theta) / \partial r + \dot{\theta} \partial f_r(\theta) / \partial \theta \right), & |\theta| \leq \pi/2, \end{cases}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

где следует положить $i = 1$, $S = S_1 = -1$, $\dot{X} = -(\ln \lambda)(X_{11} + \pi/2)$, $\dot{Y} = (\ln \mu)Y_{11}$.

б. Если $x > 0$, то аналогичные вычисления выполняем в системах координат 2 и 3. Находим сначала

$$(r, \theta)_2 = (R(x, y, X_{21}(s), Y_{21}(s), 1), \Theta(x, y, X_{21}(s), Y_{21}(s), 1)). \tag{A.8}$$

Полагаем

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= (\ln \lambda)\theta, \\
\dot{r} &= (\gamma(\theta, X_{21}(s) - X_{31}(s))h_{12}(r, R_{21}(s)) + (1 - \gamma(\theta, X_{21}(s) - X_{31}(s)))) (\ln \mu)r
\end{aligned} \tag{A.9}$$

и по формуле (A.7), в которой нужно принять $i = 2$, $S = S_2 = 1$, $\dot{X} = (\ln \lambda)(X_{21} + \pi/2)$, $\dot{Y} = (\ln \mu)Y_{21}$, находим компоненты векторного поля (f_2, g_2) .

Далее вычисляем

$$(r, \theta)_3 = (R(x, y, X_{31}(s), Y_{31}(s), 1), \Theta(x, y, X_{31}(s), Y_{31}(s), 1)) \tag{A.10}$$

и полагаем

$$\dot{\theta} = (\ln \lambda)\theta, \quad \dot{r} = (\gamma(\theta, X_{31}(s))h_3(r, R_{31}(s)) + (1 - \gamma(\theta, X_{31}(s)))) (\ln \mu)r, \tag{A.11}$$

где

$$h_3(r) = \begin{cases} \cos \pi(1 - r/\varepsilon), & r < \varepsilon, \\ 1, & r \geq \varepsilon. \end{cases} \tag{A.12}$$

По формуле (A.7), в которой нужно взять $i = 3$, $S = S_3 = 1$, $\dot{X} = (\ln \lambda)(X_{31} + \pi/2)$, $\dot{Y} = (\ln \mu)Y_{31}$, находим компоненты векторного поля (f_3, g_3) .

в. Определим теперь векторное поле

$$\tilde{\mathbf{f}}(x, y, s) = \begin{cases} (f_1, g_1), & x \leq 0, \\ w(d_3, d_2) \cdot (f_2, g_2) + w(d_2, d_3) \cdot (f_3, g_3), & x > 0, \end{cases} \tag{A.13}$$

где введена функция

$$w = w(u, v) = \sin^2 \left(\frac{1}{2} \pi u(u + v)^{-1} \right), \tag{A.14}$$

а ее аргументы определены как $d_\alpha = \max \{R^\alpha(x, y, X_{\alpha 1}(s), Y_{\alpha 1}(s)) - \mu^s R_\alpha, 0\}$, $\alpha = 2, 3$.

г. В качестве заключительного шага вычислений на стадии 1 положим

$$\mathbf{f}(x, y, s) = \tilde{\mathbf{f}}(x, y, s) + \sum_{i=1}^3 \beta(\|\mathbf{x} - \mathbf{X}_{i1}\|) \cdot \left(\dot{\mathbf{X}}_{i1}(s) - \tilde{\mathbf{f}}(x, y, s) + (\ln \lambda)(\mathbf{x} - \mathbf{X}_{i1}) \right). \quad (\text{A.15})$$

Здесь $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{X}_{i1}(s) = (S_i X_{i1}, Y_{i1})$, $\dot{\mathbf{X}}_{i1}(s) = (S_i \dot{X}_{i1}, \dot{Y}_{i1})$, и введена функция

$$\beta(\rho) = \begin{cases} 1, & \rho \leq \varepsilon/4, \\ \cos^2(\pi(2\rho/\varepsilon - 1/2)), & \varepsilon/4 < \rho < \varepsilon/2, \\ 0, & \rho \geq \varepsilon/2. \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Примечание. В этом месте в работе Ханта имеется неточность. В то время как определения в тексте его диссертации соответствуют формулам (A.15) и (A.16), в коде программы в среде «Mathematica» в качестве аргумента функции β фигурирует квадрат нормы $\|\mathbf{x} - \mathbf{X}_{i1}\|^2$. Наши расчеты с использованием процедуры, описанной в Приложении В, показали, что это момент принципиальный: при подстановке квадрата нормы гиперболичность аттрактора нарушается! С другой стороны, если следовать определениям (A.15) и (A.16), то аттрактор действительно гиперболический. Однако при выбранной у Ханта слишком малой величине $\varepsilon = 0.05$ фрактальная поперечная структура аттрактора в исправленной версии модели оказывается плохо различимой на иллюстрациях. Поэтому при вычислениях, представленных в настоящей статье, мы берем увеличенное значение $\varepsilon = 0.17$, оставаясь в то же время внутри указанного в работе Ханта допустимого интервала.

2. На второй стадии $t \in [2\pi/3, 4\pi/3]$ полагаем $s = \sin^2((3/4)t - (1/2)\pi)$. Берем за начало отсчета специальных координат точку

$$\begin{aligned} X_{22}(s) &= X_2 + (1 - s)D, \\ Y_{22}(s) &= Y_2 + (1 - s)D, \\ D &= (\lambda - 1)(X_2 + \pi/2) + \mu R_2. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Задавшись мгновенными значениями (x, y) , перейдем к новым координатам

$$(r, \theta) = (R(x, y, X_{22}(s), Y_{22}(s)), 1), \quad \Theta(x, y, X_{22}(s), Y_{22}(s), 1) \quad (\text{A.18})$$

и примем, что

$$\dot{r} = -D, \quad \dot{\theta} = D. \quad (\text{A.19})$$

Производим обратный переход к прямоугольным координатам согласно формуле (A.7), где полагаем $S = 1$, $\dot{X} = -D$, $\dot{Y} = -D$, и находим компоненты векторного поля (f_0, g_0) . Окончательно принимаем

$$\mathbf{f}(x, y, s) = w(a_2, b_2) \cdot (f_0, g_0), \quad (\text{A.20})$$

где функция w определена формулой (A.13), а ее аргументы выражаются формулами

$$a_2 = \max\{R(x, y, X_{22}(s), \frac{1}{2}(Y_2 + Y_{22}(s)), 1) - \frac{1}{2}(-Y_2 + Y_{22}(s)) - \mu R_3, 0\}, \quad (\text{A.21})$$

$$b_2 = \max\{Y_{22}(s) - 2R_2\mu - R(x, y, X_{22}(s), Y_{22}(s), 1), 0\}.$$

3. На третьей стадии $t \in [4\pi/3, 2\pi]$ полагаем $s = \sin^2(\frac{3}{4}t - \pi)$. Берем за начало отсчета специальных координат точку

$$X_{13}(s) = X_1 + (1 - s)D,$$

$$Y_{13}(s) = Y_1 + (1 - s)D, \quad (\text{A.22})$$

$$D = (\lambda - 1)(X_1 + \pi/2) + \mu R_1.$$

Задавшись исходными значениями (x, y) , выполним переход к координатам (r, θ)

$$(r, \theta) = (R(x, y, -X_{13}(s), Y_{13}(s), -1), \Theta(x, y, -X_{13}(s), Y_{13}(s), -1)). \quad (\text{A.23})$$

Далее, определяем поток формулой (A.19) и производим переход к прямоугольным координатам согласно (A.7), считая, что $S = -1$, $\dot{X} = -D$, $\dot{Y} = -D$. Полагаем

$$\mathbf{f}(x, y, s) = w(a_3, b_3) \cdot (f_0, g_0), \quad (\text{A.24})$$

где функция w дается выражением (A.14), и

$$a_3 = \max\{R(x, y, -X_{13}(s), \frac{1}{2}(Y_1 + Y_{13}(s)), -1) - \frac{1}{2}(-Y_1 + Y_{13}(s)) - \mu R_2, 0\},$$

$$b_3 = \max\{Y_{13}(s) - 2R_1\mu - R(x, y, -X_{13}(s), Y_{13}(s), -1), 0\}.$$

4. В итоге, имея в виду, что $\mathbf{f}(x, y, s) = (f(x, y, s), g(x, y, s))$, получаем уравнения, описывающие динамику модели с непрерывным временем на всех трех стадиях, в виде

$$dx/dt = \frac{3}{4}|\sin \frac{3}{2}t|f(x, y, s(t)), \quad dy/dt = \frac{3}{4}|\sin \frac{3}{2}t|g(x, y, s(t)), \quad (\text{A.25})$$

где в правых частях учтен множитель $s'(t) = (3/4)|\sin(3/2)t|$, возникающий при переходе от фиктивного времени s к естественному времени t .

Приложение В

Достаточные условия гиперболичности и методика их проверки

В основу проверки гиперболичности аттрактора положим известную из математической литературы теорему [1–7, 21]. Нам достаточно сформулировать ее применительно к диффеоморфизму класса C^1 в двумерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^2

$\{x_1, x_2\}$, в качестве которого будет выступать отображение Пуанкаре модели Ханта $\mathbf{T}(\mathbf{x})$. При введении малого возмущения исходного состояния $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ преобразование вектора возмущения при действии отображения $\mathbf{x}' = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ дается в линейном приближении соотношением $\delta\mathbf{x}' = \mathbf{DT}_\mathbf{x}\delta\mathbf{x}$, где $\mathbf{DT}_\mathbf{x}$ – матрица Якоби, вычисленная в точке \mathbf{x} . Обозначение $\mathbf{DT}_\mathbf{x}^{-1}$ отвечает матрице производных обратного отображения $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x})$.

Теорема [1–7, 21]. Пусть A есть подмножество пространства \mathbb{R}^2 , инвариантное по отношению к действию диффеоморфизма \mathbf{T} , отображающего ограниченную область $U \subset \mathbb{R}^2$ в себя. Множество $A \subset \text{Int } U$ будет однородным гиперболическим, если существует некоторая константа $\gamma > 1$ и выполнены следующие условия:

1) Для каждой точки $\mathbf{x} \in A$ в пространстве $\mathbb{V}_\mathbf{x}$ 2-мерных векторов $\delta\mathbf{x}$ определены расширяющийся и сжимающийся конусы, соответственно, $S_\mathbf{x}^\gamma$ и $C_\mathbf{x}^\gamma$ такие, что $\|\mathbf{DT}_\mathbf{x}\mathbf{u}\| \geq \gamma\|\mathbf{u}\|$ для всех $\mathbf{u} \in S_\mathbf{x}^\gamma$, и $\|\mathbf{DT}_\mathbf{x}^{-1}\mathbf{v}\| \geq \gamma\|\mathbf{v}\|$ для всех $\mathbf{v} \in C_\mathbf{x}^\gamma$, причем для всех $\mathbf{x} \in A$ выполнено $S_\mathbf{x}^\gamma \cap C_\mathbf{x}^\gamma = \emptyset$ и $S_\mathbf{x}^\gamma + C_\mathbf{x}^\gamma = \mathbb{V}_\mathbf{x}$.

2. Конусы $S_\mathbf{x}^\gamma$ инвариантны по отношению к действию \mathbf{DT} , а $C_\mathbf{x}^\gamma$ по отношению к действию обратного отображения \mathbf{DT}^{-1} , то есть для всех $\mathbf{x} \in A$ $\mathbf{DT}_\mathbf{x}(S_\mathbf{x}^\gamma) \subset S_{\mathbf{T}(\mathbf{x})}^\gamma$ и $\mathbf{DT}_\mathbf{x}^{-1}(C_\mathbf{x}^\gamma) \subset C_{\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x})}^\gamma$.

Определение расширяющихся и сжимающихся конусов, вообще говоря, зависит от системы координат. Их невыполнение при попытке проверить условия теоремы может быть связано не с нарушением гиперболичности, а с неудачным выбором координат. Для модели Ханта неподходящими в этом смысле оказываются прямоугольные координаты (x, y) , тогда как к успеху приводит использование криволинейных координат $(\theta, r)^i$, введенных в Приложении А, см. формулы (А.1). Заметим, что эти координаты заданы по-своему в каждой из подобластей U_i , $i = 1, 2, 3$, составляющих вместе область U .

Процедура проверки условий вложения для расширяющихся конусов состоит в следующем. Сначала, задавшись начальной точкой $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in U_i$, определим ее координаты $(\theta_0, r_0)^i$. Кроме того, возьмем точки $\mathbf{x}_1 = (\theta_0 + h, r_0)^i$ и $\mathbf{x}_2 = (\theta_0, r_0 + h)^i$, где $h \ll 1$, и вычислим для них согласно (А.1) прямоугольные координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) .

Выполним на интервале времени t от 0 до 2π численное решение уравнений (4) с начальными условиями (x_k, y_k) , $k=0,1,2$. Результирующие векторы состояния обозначим $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_0, \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2$, и пусть $\mathbf{x}'_0 \in U^j$. Перейдя к криволинейным координатам, найдем $(\theta_k, r_k)^j$, $k=0,1,2$, вычислим нормированные на h компоненты возмущения и составим матрицу

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\theta'_1 - \theta'_0)h^{-1} & (\theta'_2 - \theta'_0)h^{-1} \\ (r'_1 - r'_0)h^{-1} & (r'_2 - r'_0)h^{-1} \end{pmatrix} \approx \mathbf{DT}_\mathbf{x}. \quad (\text{B.1})$$

Аналогичным образом при старте из точки $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_0$, получаем матрицу $\mathbf{U}' \approx \mathbf{DT}_{\mathbf{x}'}$.

Условие, что вектор $\mathbf{u} = (\xi, \eta)$ принадлежит конусу $\mathbf{T}(S_\mathbf{x}^\gamma)$, можно представить в виде неравенства $\|\mathbf{u}\| \geq \gamma\|\mathbf{U}^{-1}\mathbf{u}\|$ или

$$\xi^2 + \eta^2 \geq \gamma^2[(\bar{u}_{11}\xi + \bar{u}_{12}\eta)^2 + (\bar{u}_{21}\xi + \bar{u}_{22}\eta)^2], \quad (\text{B.2})$$

где \bar{u}_{ij} – элементы матрицы $\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{12} \\ \bar{u}_{21} & \bar{u}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{22}D^{-1} & -u_{12}D^{-1} \\ -u_{21}D^{-1} & u_{11}D^{-1} \end{pmatrix}$,
 $D = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}$. Это можно переписать в виде

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \leq 0, \quad (\text{B.3})$$

где $a = \bar{u}_{11}^2 + \bar{u}_{21}^2 - \gamma^{-2}$, $b = \bar{u}_{11}\bar{u}_{12} + \bar{u}_{21}\bar{u}_{22}$, $c = \bar{u}_{12}^2 + \bar{u}_{22}^2 - \gamma^{-2}$. Условие, что тот же вектор принадлежит конусу $S_{\mathbf{T}(\mathbf{x})}^\gamma$, представляется неравенством $\|\mathbf{U}'\mathbf{u}\| > \gamma\|\mathbf{u}\|$. Его можно переписать в виде

$$(u'_{11}\xi + u'_{12}\eta)^2 + (u'_{21}\xi + u'_{22}\eta)^2 \geq \gamma^2(\xi^2 + \eta^2) \quad (\text{B.4})$$

или

$$a'\xi^2 + 2b'\xi\eta + c'\eta^2 \geq 0, \quad (\text{B.5})$$

где $a' = u'_{11}{}^2 + u'_{21}{}^2 - \gamma^2$, $b' = u'_{11}u'_{12} + u'_{21}u'_{22}$, $c' = u'_{12}{}^2 + u'_{22}{}^2 - \gamma^2$.

Как устанавливается в ходе вычислений, для всех точек на аттракторе при надлежащем выборе константы γ (из некоторого ограниченного интервала (γ_1, γ_2) , где $\gamma_1 < 1$ и $\gamma_2 > 1$), справедливы неравенства $a < 0$, $c > 0$ и $a' > 0$, $c' < 0$, а также $b^2 - ac > 0$ и $b'^2 - a'c' > 0$. При этом соотношение (B.3) выполняется, если

$$k^{(1)} \leq \eta/\xi \leq k^{(2)}, k^{(1,2)} = -b/c \pm \sqrt{(b/c)^2 - a/c},$$

что определяет на плоскости (ξ, η) конус $\mathbf{DT}(S_{\mathbf{x}}^\gamma)$. С другой стороны, неравенство (B.5) имеет место, если

$$l^{(1)} \leq \eta/\xi \leq l^{(2)}, l^{(1,2)} = -b'/c' \pm \sqrt{(b'/c')^2 - a'/c'},$$

что определяет конус $S_{\mathbf{T}(\mathbf{x})}^\gamma$. Выполнение вложения $\mathbf{DT}_{\mathbf{x}}(S_{\mathbf{x}}^\gamma) \subset S_{\mathbf{T}(\mathbf{x})}^\gamma$ гарантировано, если $l^{(1)} < k^{(1)}$ и $l^{(2)} > k^{(2)}$. Достаточным условием этого служит неравенство, проверка которого и проводилась в ходе вычислений:

$$H > Q, \quad (\text{B.6})$$

где

$$H = \sqrt{(b'/c')^2 - a'/c'} - \sqrt{(b/c)^2 - a/c}, \quad Q = |b'/c' - b/c|. \quad (\text{B.7})$$

Можно показать, что при выборе $\gamma < 1$ та же процедура, выполняемая для точек на аттракторе, обеспечивает проверку условия для сжимающихся конусов с параметром $\gamma' = 1/\gamma > 1$: $\mathbf{DT}_{\mathbf{x}}^{-1}(C_{\mathbf{x}}^{1/\gamma}) \subset C_{\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x})}^{1/\gamma}$. Это связано с тем, что конусы S^γ и $C^{1/\gamma}$ являются друг для друга дополнениями, то есть $S^\gamma \cup C^{1/\gamma} = \mathbb{V}$.³⁾

Описанные расчеты были выполнены для множества из 20000 точек в сечении Пуанкаре аттрактора модели Ханга при $\varepsilon = 0.17$.

³⁾При одном и том же γ конусы S^γ и C^γ имеют общую границу только при $\gamma = 1$, тогда как при $\gamma > 1$ они не пересекаются: $S_x^\gamma \cap C_x^\gamma = \emptyset$, как и требуется условием теоремы.

Для $\gamma^2 = 2$ обнаружено, что $\max a \approx -0.304 < 0$, $\min c \approx 3.96 > 0$, $\min(b^2 - ac) \approx 1.898 > 0$, $\min a' \approx 3.337 > 0$, $\max c' \approx -0.311 > 0$, $\min(b'^2 - a'c') \approx 1.827 > 0$, $1.1 < H < 4.4$, $\max Q/H \approx 0.359 < 1$. Для $\gamma^2 = 1/2$ найдено, что $\max a \approx -0.294 < 0$, $\min c \approx 3.85 > 0$, $\min(b^2 - ac) \approx 1.932 > 0$, $\min a' \approx 3.346 > 0$, $\max c' \approx -0.322 > 0$, $\min(b'^2 - a'c') \approx 1.731 > 0$, $1.1 < H < 4.4$, $\max Q/H \approx 0.300 < 1$.

Таким образом, проведенные вычисления свидетельствуют, что для значений γ , равных $\sqrt{2}$ и $1/\sqrt{2}$, предполагаемые неравенства действительно выполнены на аттракторе отображения Пуанкаре. Поэтому справедливы и соответствующие условия вложения для расширяющихся и сжимающихся конусов, откуда вытекает заключение о гиперболической природе аттрактора.

Библиографический список

1. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // В кн. *Нелинейные волны* / Ред. А.В. Гапонов–Грехов. М.: Наука, 1979. С. 192.
2. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления* // Итоги науки и техники. Т. 2 / Под ред. Р.В. Гамкрелидзе. М.: Изд. ВИНТИ АН СССР, 1985.
3. *Eckmann J.-P. and Ruelle D.* Ergodic theory of chaos and strange attractors // *Rev. Mod. Phys.* 1985. Vol. 57. P. 617.
4. *Devaney R.L.* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison–Wesley, New York, 1989.
5. *Shilnikov L.* Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics: A Tutorial // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353.
6. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. Пер. с англ. М.: Изд. «Факториал», 1999, 768 с.
7. *Afraimovich V. and Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 28, American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA, 2003.
8. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984, 432 с.
9. *Анищенко В.С. и др.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Институт Компьютерных исследований. Москва – Ижевск, 2003.
10. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981, 568 с.
11. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972, 472 с.
12. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006.
13. *Kuznetsov S.P.* Example of a Physical System with a Hyperbolic Attractor of the Smale–Williams Type // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. P. 144101.
14. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со страным аттрактором типа Смейла–Вильямса // *ЖЭТФ.* 2006. Vol. 129, № 2. P. 400.

15. Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 5. С. 3.
16. Kuznetsov S.P. and Sataev I.R. Hyperbolic attractor in a system of coupled non-autonomous van der Pol oscillators: Numerical test for expanding and contracting cones // Physics Letters A. 2007. Vol. 365, № 1–2. P. 97.
17. Isaeva O.B., Jalnina A.Yu. and Kuznetsov S.P. Arnold's cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74. P. 046207.
18. Kuznetsov S.P. and Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // Physica D. 2007. Vol. 232. P. 87. Grants of DFG and RFBR 04-02-04011 and 06-02-16619.
19. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В. Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 6. P. 75.
20. Belykh V., Belykh I. and Mosekilde E. The hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, № 11. P. 3567.
21. Hunt T.J. Low Dimensional Dynamics: Bifurcations of Cantori and Realisations of Uniform Hyperbolicity. PhD Thesis, Univ. of Cambridge (2000).
22. Плыкин Р.В. Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей // Матем. сб. 1974. Т. 94(136), № 2(6). С. 243.
23. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Изд-во «Наука», Глав. ред. физ.-мат. лит., 1968.
24. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I: Theory. Part II: Numerical application. Meccanica, 15, 1980, 9–30.

*Саратовский филиал Института
радиотехники и электроники РАН
Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 19.05.2008

CHAOTIC DYNAMICS OF HUNT MODEL – ARTIFICIALLY CONSTRUCTED FLOW SYSTEM WITH A HYPERBOLIC ATTRACTOR

Yu.S. Aidarova, S.P. Kuznetsov

We study numerically chaotic behavior associated with the presence of a hyperbolic strange attractor of Plykin type in the model of Hunt, that is an artificially constructed dynamical system with continuous time. There are presented portraits of the attractor, plots of realizations for chaotic signal generated by the system, illustrations of the sensitive dependence on initial conditions for the trajectories on the attractor. Quantitative characteristics of the attractor are estimated, including the Lyapunov exponents and the attractor

dimension. We discuss the symbolic dynamics on the attractor, find out and analyze some unstable periodic orbits belonging to the attractor.



Айдарова Юлия Сериковна – родилась в Саратове (1983), окончила Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (2006). В данное время является аспирантом кафедры динамических систем на факультете нелинейных процессов. Является соавтором нескольких научных статей.



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем СГУ. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 150 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены семь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994-1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».
E-mail: spkuz@rambler.ru



ДУАЛИЗМ КОНЦЕПТОВ – НА СЛУЖБУ СИНЕРГИИ «ДВУХ СИНЕРГЕТИК»

Б.Н. Поизнер

Миссия и стратегия синергетики – интеграция «наук о природе» с «науками о духе». Не противоречит ли им ситуация «двух синергетик»: аутентичной и метафорической (по В.Г. Буданову)? Показано, что наличие «двух культур», осознанное ещё Дж. Вико, обусловлено дуализмом концептов, то есть единиц коллективного (со)знания. Одни концепты аккумулируют научные обобщения, другие – ценности. Автор выдвигает концептологическую задачу синергетики: сделать средством полидисциплинарной консолидации составление Словаря концептов синергетики; развивать синергию «двух синергетик», используя фонд концептов как основу компаративного исследования. Рассмотрен концепт *истина* (этимология слова в различных языках и его толкования). По мнению автора, можно объединить эвристические потенциалы глобального эволюционизма, синергетики, теории знаковых систем, фрактальной семиотики В.В. Тарасенко, аттрактив-анализа А.И. Сосланда, концепта *репликация*, разрабатывая обсервационный аспект поиска истины.

Я верю, что я призван искать истину и утверждать найденное мною, несмотря на весь связанный с этим риск.

М. Полани

Введение. Дуализм познания и двойственность синергетики

Д.И. Трубецков [1, 2] и ряд других творцов, методологов, критических апологетов синергетики выдвигают на передний план её экстраординарную миссию *системного интегратора* двух сфер знания: «наук о духе» и «наук о природе». Сферы эти сегодня сохраняют заметную изолированность из-за различия их методов. Однако много столетий истолкование действительности – будь то стихия или действия людей – было единым, а магистральным способом понимания мира служил мимесис (др.-греч. μιμησις – подражание, воспроизведение). Изучая его на примере изображения действительности западноевропейской литературой (1945), Э. Ауэрбах напоминает, что Платон («Государство», книга X) в контексте познания ставит μιμησις на

третье место после категории *истина* [3, с. 545]. (Особенности соотношения между мимесисом и моделированием в искусстве [4] мы не затрагиваем.)

С 1600-х годов начинается этап, названный А. Койре (1939) научной революцией XVII в., поскольку особую роль получают опытное знание и придание физике математического характера [5, с. 8–9]. Подчеркнём: новая математика (в лице Р. Декарта, Г.В. Лейбница, Ис. Ньютона) более или менее сознательно стремится обосновать свои аксиомы с помощью глобальных метафизических постулатов – «архитектонических начал человеческого знания»: принципов непрерывности, достаточного основания, законопостоянства. Они устанавливали взаимное соответствие между реальностью и математическими конструкциями, сыграв «фундаментальную конститутивную и эвристическую роль при построении новых математических областей» [6, с. 5]. В конкурентной борьбе с античной и эзотерической трактовками назначения математики победила стратегия математического моделирования. На успех её повлияла, в частности, высокая скорость передачи и воспроизводства алгоритмов [7].

Кому же принадлежит идея противопоставления двух комплексов наук? По видимому, Дж. Вико (1668–1744), неаполитанскому профессору риторики, основателю философии истории и психологии народов. Его прославило сочинение «Основания Новой науки об общей природе наций» (1725), где предложена циклическая модель истории в целом и развития каждого народа в отдельности. Размышляя о принципах построения всеобщей истории, Дж. Вико полагает их качественно иными, чем в естествознании. Он исходит из критики антропоморфизма (от др.-греч. *ανθρωπος* человек + *μορφή* вид, форма), то есть уподобления природных явлений человеку: «если люди не знают естественных причин и не могут их объяснить подобными им вещами, то они приписывают им свою собственную природу<....>» [8, с. 83]. А сферу социального и исторический процесс он считает чем-то рукотворным, вследствие чего – принципиально познаваемым, но при условии соблюдения правил логики, как это делают математики, опирающиеся на аксиомы: «<....> ведь Мир Наций был, безусловно, сделан людьми <....>, и поэтому способ его возникновения нужно найти в модификациях нашего собственного Человеческого Сознания; а где творящий вещи сам же о них и рассказывает, там получается наиболее достоверная история». Дж. Вико убеждён, что история культуры («наша Наука») «продвигается совершенно так же, как Геометрия <....>, но в наших построениях настолько больше реальности, насколько более реальны законы человеческой деятельности, чем точки, линии, поверхности и фигуры» [8, с. 118]. (Кстати говоря, труд Дж. Вико перевёл на немецкий (1925) Э. Ауэрбах [3, с. 5].)

Методологическую трещину в храме познания, разделяющую «науки о духе» и «науки о природе», констатировали – вслед за Г.В.Ф. Гегелем, Дж.С. Миллем, Г.Л.Ф. Гельмгольцем – В. Дильтей (1883, 1905–1910) [9], Г. Коген (1871, 1885), Г. Риккерт (1896–1902, 1899–1910) [10; 11, с. 44–129]. В. Дильтей подчёркивал системность и многомерность культуры [9, с. 213–224], Г. Риккерт делал акцент на системе ценностей (как фундаменте культуры) и в этом контексте ввёл понятие *открытая* система (1914), утверждая: «идея законченной системы содержит в себе прямое противоречие» [11, с. 364]). Опасные – для гуманизма – последствия, вытекающие из разобщённости «наук о духе» и «наук о природе», стали предметом анализа и дискуссии в конце 1960-х у сэра Ч.П. Сноу («две культуры»), в 1974-м

у сэра Ис. Берлина («разрыв между естественными и гуманитарными науками») и у других.

С синергетикой связывают надежды на повышение «степени самопонимания» (термин Ис. Берлина [12, с. 411]) человека, истории и форм его культуры, приблизившейся к тревожному рубежу «сильной нелинейности» и неустойчивости. На этой позиции – несмотря на идущие споры о предмете, границах, методологических полномочиях, терминологии синергетики – стояли многие учёные 1980–1990-х годов: А.И. Аршинов, В.Г. Буданов, В. Вайдлих, Ю.А. Данилов, Ю.Л. Климонтович, Е.Н. Князева, С.П. Курдюмов, П.С. Ланда, Г.Г. Малинецкий, Ю.И. Неймарк, И. Пригожин, М.И. Рабинович, А.П. Руденко, А.Л. Санин, В.С. Стёпин, Д.И. Трубецков, Г. Хакен, Д.С. Чернавский, В. Эбелинг, М. Эйген. В последнее время этим проблемам посвящены, скажем, работы [13–17]. Да, чрезвычайно сложно прекратить «великий спор, конца которому не видно» [12, с. 410] и который не даёт восстановить – на новом уровне – целостность (по)знания. Например, В.Г. Буданов по поводу трансляции междисциплинарной методологии в сообщество гуманитариев указывает на «проблему двух культур в духе Чарльза Сноу» [15, с. 25]. В качестве шага к восстановлению целостности знания и налаживанию междисциплинарной коммуникации он предлагает делить синергетику на *аутентичную* (от др.-греч. αὐθεντίας – собственной рукою совершённый) и *метафорическую* (от др.-греч. μεταφέρω – переносить), признав методологическую легальность обеих. Первая («концептуальный геном синергетики» [15, с. 19]) зиждется и развивается на пересечении, конструктивном синтезе трёх начал: нелинейного моделирования, практической философии и предметного знания. Во второй же термины синергетики (бифуркация, самоорганизация и т.д.) употребляются в переносном значении. Это нередко имеет место в гуманитарной среде и околонучных кругах [15, с. 16–21]. Заметим, что в контексте исследования, мышления, моделирования правомерно толковать метафору как особый вид мимесиса.

Означает ли наличие «двух синергетик», логично обоснованное В.Г. Будановым, проявлением того дуализма (по)знания, который исследовали Дж. Вико и философы XIX века? Не ставит ли это под сомнение интегративные запросы и возможности синергетики?

Дуализм концептов – благо для синергетики?

Поиски ответа, очевидно, следует вести в рамках компетенции аутентичной синергетики, исходя из её состава. Целесообразно привлечь тот раздел практической философии, который тесно соприкасается с *когнитивистикой* (от лат. cognitio – познание, восприятие). Она изучает и моделирует феномены разума, мышления, ментальных (от лат. mentis – ум, рассудок) процессов, принципы организации и функционирования соответствующих естественных и искусственных систем. Когнитивистика возникла на рубеже 1950–1960-х годов в США, благодаря трудам Дж. Миллера и Дж. Брунера. Сегодня она объединяет когнитивную психологию, культурную антропологию, моделирование искусственного интеллекта, нейронауку, когнитивную лингвистику [18, с. 7]. Когнитивистика нам интересна потому, что для «самопонима-

ния» культуры (в смысле Ис. Берлина) требуется раскрыть взаимоотношения между видами деятельности человека и языком. В этом плане истолкование действительности – продукт взаимодействия трёх уровней психического отражения: чувственного восприятия, формирования обобщений и абстракций, речемыслительных процессов. В итоге представление о мире организуется как система *концептов* [18, с. 10], или *универсалий* культуры [19].

Концепт (от лат. *conceptus* – зачатие, плод < *concipere* – собирать, схватывать, задумывать, начинать) в русском языке имеет своим синонимом *понятие*, но противопоставляется ему на шкале знания как «сущностное» и «поверхностное» [20, с. 12]. Согласно Фр. Ницше, «философы должны не просто принимать данные им концепты, чтобы чистить их и наводить на них лоск; следует прежде всего самим их производить, творить, утверждать и убеждать людей ими пользоваться. До сих пор каждый доверял своим концептам, словно это волшебное приданое, полученное из столь же волшебного мира» (цит. по [21, с. 14]). Концепт толкуется как «принадлежность сознания человека, глобальная единица мыслительной деятельности, квант структурированного знания» [22, с. 7]. Концепт – единица коллективного (со)знания (отправляющая к высшим духовным ценностям), имеющая языковое выражение и отмеченная этнокультурной спецификой [20, с. 219]. «Концепты, которыми мы живём», по известной формуле Дж. Лакоффа и М. Джонсона, управляют мышлением людей, структурируют человеческие ощущения, поведение, отношение к другим, влияют на повседневную деятельность – вплоть до тривиальных деталей. Наша концептуальная система в значительной степени метафорична, но этот факт обычно не сознаётся [23, с. 25]. Некоторые классификации предлагают такую иерархию: *суперконцепты* (скажем, время, число), *макроконцепты* (стихии), *базовые* концепты (родина, дом), *микроконцепты* (пляска) [18, с. 16].

Чтобы определить суть концепта, Ю.С. Степанов выбирает метафору «тонкая плёнка цивилизации» (вроде кожуры яблока; физик здесь, наверное, вспомнил бы поверхностные квантовые состояния) и добавляет: когда концепты «складываются в мозаику, рождается *Новая всеобщая антропология*» [24, с. 18]. И это – не просто намёк на параллели с «Новой наукой» Дж. Вико. Ю.С. Степанов обосновывает дуализм концептов, вводя их базовую синонимию: концепт как «общечеловеческое, внациональное» тяготеет к «научному»; концепт как «национальное» столь же естественно тяготеет к «художественному». Он поясняет, что в своей книге [24] «Научное» излагает *соединения концептов*, «Художественное» – *неповторимые несоединимые* концепты [24, с. 23].

Специфику и роль последних помогает установить следующее разделение: «Лингвокультурные концепты относятся к числу единиц ментальности / ментальности». Через эти категории описывают этнический характер. Ментальность – способ видения мира вообще, а менталитет – набор специфических когнитивных, эмоциональных, поведенческих стереотипов, свойственных нации. «Особенно существенно влияние на национальный характер "дублетных лингвокультурных концептов", не находящихся аналогов в других языках, таких как *правда и истина, совесть и сознание, воля и свобода*» [22, с. 11]. Не забудем, однако, о готовности концепта служить словесной тарой для чрезвычайно широкого по смыслу наполнения. Такие универсалии Б. Гройс называет *джокерами*, намекая, что они – подобно карточной фигуре

Joker – способны иметь любую семантику. По этому поводу М.Н. Эпштейн пишет, что в отличие от терминов-понятий науки и лозунгов-оценок идеологии, концепты-джокеры «обладают пустотной, чисто потенциальной формой значимости». Их выявление и эффективное использование связаны с осмыслением советской абсурдной социальности. Оно отличает творчество литераторов Л. Рубинштейна, Д.А. Пригова, Вл. Сорокина, художников И. Кабакова, В. Комара и А. Меламида, В. Бахчаняна etc. [25, с. 178–179]. Когда В.Г. Буданов и его коллеги указывают на производство «негативных метафор» [15, с. 12], которое влечёт семантическое загрязнение метафорической синергетики, угрожая её развитию, речь идёт, фактически, о пустотных формах значимости. Вот так на наших глазах *джокер* ведёт себя именно как Joker: из специального термина – скачком – в концепт! Математическую концептуализацию *джокера* предпринял в конце 1990-х годов Г.Г. Малинецкий, применяя идеи маломодовой нелинейной динамики к анализу сложных систем высокой размерности [26, с. 302].

Концептология (наука о концептах, их содержании и отношениях концептов внутри концептосферы [22, с. 7]) стремится выразить в понятиях трудноопределимый «дух народа» (Folksggeist, по В. фон Гумбольдту), то есть национальную специфику представления знания в языке. О молодости концептологии свидетельствует конкуренция неологизмов, развернувшаяся в 1990-е годы в отечественной лингвистической литературе. С термином *концепт* состязались новообразования: «лингвокультурема», «мифологема», «логоэпистема». Слово *концепт* сегодня намного опережает соперников по частоте употребления [20, с. 41]. Конкуренция эта показательна с точки зрения синергетики. Ведь концепт, как и любое слово, – частный случай *репликатора*, то есть самовоспроизводящейся (в подходящей среде), самодостаточной, устойчивой и способной к изменчивости информационной целостности. В ситуации «порядок из хаоса» репликатор служит агентом, инициатором самоорганизации [27].

Подчеркнём ещё раз: создатели концептологии предлагают различать «категории, составляющие предельный уровень научного обобщения» и «ценности, находящиеся во владении каждого – константы культуры» [28, с. 12–13]; делить концепты по их тяготению к сфере «научного» либо «художественного» [24, с. 23]; считать, что от «известных ментальных единиц, используемых в различных областях науки (например, когнитивный концепт, фрейм, сценарий скрипт, понятие, образ, архетип, гештальт, мнема, стереотип)» лингвокультурный концепт отличается тем, что его «центром всегда является ценность» [22, с. 12]. (Обычно под ценностью подразумевают: 1) значимость (положительную либо отрицательную) – для человека и общества – объектов нашего мира, которая обусловлена не их свойствами самими по себе, но их вовлечённостью в сферу жизнедеятельности людей, потребностей, социальных отношений; 2) критерии и способы оценки этой значимости, выраженные в нравственных нормах, идеалах, целях etc.)

Значит, противопоставление наук, идущее от Дж. Вико, находит оправдание в выводах когнитивистики о двойственности массива концептов: одни из них аккумулируют научные обобщения, другие (то есть «константы мировой культуры» [28]) хранят ценности. Истоки дуализма познавательной деятельности – в функциональной асимметрии головного мозга человека [29]. По-видимому, в этом – ещё один

аргумент, чтобы делить синергетику на аутентичную и метафорическую [15, с. 19]. Уже цитировался тезис о том, что метафоры, которыми мы живём, есть концепты [23, с. 25–58]. Дуализм концептов, бесспорно, важен для развития дискуссии о границах и возможностях интегративной функции синергетики [13–16].

На наш взгляд, полезно – как со стороны аутентичной, так и метафорической синергетики – обратиться и к категориям, составляющим «предельный уровень научного обобщения», и к «константам культуры». Логично ожидать, что при таком внимании исследователей концепты способны служить посредниками, помощниками не только в кооперации «двух синергетик», но также «наук о духе» и «наук о природе», то есть «двух культур». Не вернуться ли к идее составления словаря концептов синергетики (1997) [30]?

Так, Ю.С. Степанов, указывая на конкретные стороны явлений самоорганизации и автопойесиса (от др.-греч. *αυτος* сам + *ποιος* делание, произведение), приводит ряд понятий: самосозидание, самоконфигурация, саморегуляция, самоуправление, самоподдерживание, само(вос)производство, самоотнесённость [24, с. 59–61]. Отражение синергетики в зеркале понятия самоорганизации проясняет и «самоприменимость» синергетики (термин В.Г. Буданова [15, с. 12]), и общую тенденцию культуры: от знания самоорганизации – к самоорганизации знания [31, с. 107]. Осознав факт «вечной самоорганизации науки», Ю.С. Степанов обращается к «великому концепту "Вечность": *Самоорганизация неотъемлема от вечности и молодости*». И даёт комментарий: индоевропейское слово *вечное* значит вечномолодое (древнегреческое *αιων* (эон), то есть век, вечность, английское *young*, русское *юный*) [24, с. 62]. Согласно Т.В. Гамкрелидзе и Вяч.Вс. Иванову, к основным индоевропейским обозначениям базовых религиозных понятий принадлежит слово **aiu-* жизненная сила, вечность, продолжительность жизни. Согласно их реконструкции, оно выражало «понятие некоторой циклической силы, которая переходила от одной жизни к другой и с которой была связана идея вечности». От **aiu-* происходят: древнеиндийское, авестийское *ауи-* и древнегреческое *αιων* жизненная сила, продолжительность жизни; латинское *aevus*, *aevum* время жизни, век, вечность, *aeternus* вечный; немецкое *ewig* вечный. От основы **aiu-* образовалось индоевропейское название юноши, самого молодого, а затем древнеиндийское *уавистха* самый молодой; латинское *iuuenis* молодой, полный сил [32, с. 802].

Сошлёмся ещё на опыт изучения когнитивного концепта *репликация* (*само(вос)производство*, в терминологии Ю.С. Степанова), употребление которого особенно органично в рамках описания механизма самоорганизации. Выявлен методологический парадокс: несмотря на то, что феномен самовоспроизводства информационной целостности универсален, *репликация* – концепт, можно сказать, потаённый, трудно различимый под покровом синонимов, то есть специальных терминов, используемых в десятках наук [33].

Но если разобщённость «двух культур», то есть «разрыв между естественными и гуманитарными науками», проявляется даже на генетическом уровне («когнитивные концепты» versus «константы мировой культуры»), то к числу задач синергетики прибавляется новая – концептологическая? Вероятно, предстоит очертить круг концептов обоих родов, продуктивных для успешного выполнения синергетикой интегративной функции; провести их анализ, причём как с позиций аутентичной, так

и метафорической синергетики; сформировать, условно говоря, «Открытый Концептуарий синергетики», видя в нём средство консолидации – на уровне концептов – представителей различных областей знания, а также вспомогательный инструмент для образования. Если двойственность синергетики (аутентичная & метафорическая [15, с. 11–12, 17–20]) считать объективной, то есть выражением «двухполушарности» культуры, то нельзя ли извлечь из этого методологическую прибыль? Нельзя ли обогатить тот компонент адаптивного ресурса синергетики, который назван [15, с. 12] философской диалогичностью и рефлексивностью? Мы предлагаем ревизию фонда концептов, выполняемую представителями «двух синергетик» как *сравнительное* исследование. Известно, что метод компаративистики имеет широкое поле приложений: сравнительная эмбриология и анатомия, сравнительное литературоведение и языкознание и т.п., – сошлёмся на одну из книг Г. Гачева, подвергнувшего сравнению ментальности [35]. А здесь предмет компаративного анализа – сети концептов, которыми живут аутентичная и метафорическая синергетика, а также сопредельные им науки. Разумеется, в замысле Концептуария неизбежен утопический элемент. Но раз «синергетика может рассматриваться и как социальный мегапроект, объединяющий своей методологией представления различных аспектов бытия культуры» [15, с. 21], то в предлагаемом своде концептов правомерно видеть когнитивную репрезентацию этого бытия. Вдохновляющий прецедент здесь – «Проективный философский словарь» (2003). Кстати говоря, в нём М.Н. Эпштейн предлагает концепт *концептивизм* – «это философская деятельность смыслопорождения, организации смысловых событий» [25, с. 173]. Войдёт ли в состав замышляемого Концептуария *истина*? Исходя из гипотетической возможности этого, мы предприняли попытку её беглого анализа.

Пример. Истина: этимология и синонимы

Выясним родословную понятия, обратившись сначала к мёртвым языкам. Семантический словарь общеиндоевропейского языка помещает истину среди терминов ритуально-правового характера, выраженных производными от корня **es-* быть. К ним относится индоевропейское **s(o)nt*^[h] – истинный, действительно совершивший, отсюда определение: виновный. Далее Т.В. Гамкрелидзе и Вяч. Вс. Иванов строят древо слов: хеттское *ašant-* правильный, истинный; древнеиндийское *sant-, sat-* истинный, сущий и *satya-* истина; авестийское *hant, hat-* истинный, верный; древнегреческое *τα οντα* истина, действительность, имущество; древневерхненемецкое *sand* истинный; древнесаксонское *soð* истинный, чья вина несомненна; древнеанглийское *soð* истинный; готское *sunya* истина, древнеанглийское *synn* грех [32, с. 810]. У древних греков был синоним *αληθεια* истина, правда; справедливость; правдивость; действительность (по известной реконструкции Б.А. Успенского, корнем является *ληθη* забвение, отсюда имя Леты, реки мёртвых). Другой синоним – *этимон* (*ετιμον* правда; действительно, истинно; *το ετιμον* истинное значение слова, основанное на производстве его от корня); есть ещё форма *ετιμα* правда. В некоторых контекстах в близком значении античные греки использовали понятие *акрибия* (*ακριβεια* величайшая точность, тщательность, основательность, подробность, аккуратность). Обратим

внимание и на специальный термин ακριβολογια точность или тщательность в речи, изложении, исследовании (!); ему соответствует глагол ακριβολογεομαι [34, с. 44, 45, 52, 539, 759]. Кроме того, слову *правда* соответствует δικαιοσυνη справедливость, законность, правосудие [36, с. 191].

Древнееврейское слово *āmāt* (*эмет*) обычно имеет смысл: истина, полученная мистическим путём [37, с. 465]. Оно употребляется в древних текстах в значении установленного правила, и, вероятно, предпочтительнее перевести его на русский словом *правда* [38, с. 57].

В латинском языке *verum* истина; *veritas* истинность; действительность, сущность (в противоположность понятиям *imitatio* подражание, *opinio* мнение (субъективное), *fama* молва, слух); истина, правда (в противоположность понятию *mendacium* ложь, неправда) [39, с. 247, 293, 435, 686]. Значение справедливости в латинском выражает ещё и знакомое русскому слуху слово *justitia*, чей корень *jus* право [40, с. 23, 307]. Э. Бенвенист считает, что *ius* (в нотации через *i-*) с тем же значением имеет соответствия в индоиранском языке: ведийское *yoh* (пожелание целостности, физического совершенства) и авестийское слово *yaos̥* (означающее состояние, которое предстоит достичь) обнаруживают ту же форму. В ходе реконструкции доистории латинского слова *ius* Э. Бенвенист раскрывает его первоначальный смысл: формула, предписывающая поведение, которого присягающий будет придерживаться, и правило, которому он подчинится. Учёный находит предка *ius* в индоевропейском слове **yous* – состояние регулярности, нормальности, достигнутое по ритуальным правилам [41, с. 307]. Латинский термин *veritas*, как и древнееврейский *āmāt*, выражает соответствие закону, но у римлян подразумевается человеческий закон, то есть право, а у евреев – Закон Божий [38, с. 56].

В Словаре Даля *истина* – «всё что верно, подлинно, точно, справедливо, что есть». В подстрочной сноске он выдвигает предположение: «Всё что *есть*, то *истина*; не одно ль и то же *есть* и *естина*, *истина*?» [42, с. 140]. Казалось бы, гипотеза В.И. Даля согласуется со смыслом общеиндоевропейского корня **es-* быть, к которому восходит прилагательное **s(o)nt^[h]*- истинный. Словарь Дьяченко толкует слово *истина* как справедливость, верность, а его древнегреческим эквивалентом считает αληθεια [43, с. 230]. Словарь Фасмера связывает древнерусское и старославянское слово *истина* с древнепольским *iscina* – истина, капитал, наличные деньги. Корнем слова *истина* служит прилагательное *истый*, *истовый* (от др.-русск. *исто* капитал; ст.-слав. *истъ*, *истовъ* истинный, сущий). От него же происходит юридический термин *истец* (от др.-русск. *истецъ* собственник, законный владелец), то есть проситель, податель жалобы, а в первоначальном значении – тот самый, именно тот. Согласно В.Н. Топорову, славянское *istъ* (тот же самый) является местоименным образованием **is-to-*, аналогичным латинскому *iste* (этот, тот) [44, с. 142, 144].

В Концептуарии Степанова этимология, предложенная В.И. Далем (*истина* = *естина*), считается маловероятной. Наиболее убедительной полагается версия А.И. Соболевского (1891), по которой древнерусское, старославянское прилагательное *истъ* составляет параллель латинскому *iustus* – справедливый, добросовестный, честный, законный. Его корнем является *ius*, *iuris* – справедливость, законное право, право. Тогда *истъ* первоначально означало: соответствующий определённому ритуалу (религиозному или правовому); по правилам сказанный или совершённый; со-

ответствующий порядку и закону. Ю.С. Степанов показывает, что понятие *истина*, «универсальное и единое для всех индоевропейских народов, возникает на различных путях, но все они ведут к одной и той же, как бы заранее predetermined цели» [45, с. 321, 323, 325].

Правда или истина сильнее?

Смысловое соотношение между концептами *истина* и *правда*, их ранг в русском языковом сознании в ходе культурной эволюции изменяется. В современном словоупотреблении, по наблюдениям лингвиста Н.Д. Арутюновой, «*правда* и *истина* более определённо разграничили свои понятийные горизонты». А именно «*Правда* даёт истинностную оценку конкретным утверждениям о жизни людей, *истина* – общим суждениям о Вселенной и религиозным представлениям о сущности мира <...>» (цит. по: [46, с. 276]). Согласно Ю.С. Степанову, концепт *истина* выражает порядок вещей в мире, закономерность, закон, а *правда* – конкретный случай. Поэтому *истина* выражает общие суждения, правила, а *правда* – частные суждения, обычно о событиях и фактах [45, с. 321, 323, 325]. Так, А. Эткинд выбрал своей «книге отзывов» [47] заголовок «Non-fiction по-русски правда».

Но в текстах Ветхого Завета всё иначе. Так, в Псалтыри читаем: «Милость и истина сретятся, правда и мир облобызаются. Истина возникнет из земли, и правда приникнет с небес; <...>» (Пс 84, 11–12). В Словаре Даля это отличие в семантике иллюстрирует пословица, воспроизводящая зеркальную композицию стиха 12 из Псалма 84: «*Истина от земли*, достояние разума человека, а *правда с небес*, дар благодости. Истина относится к уму и разуму, а добро или благо к любви, праву и воле» [42, с. 140]. Смысловая асимметрия весьма сильна: Показательно, что В.И. Даль приводит лишь несколько пословиц об истине; напротив, пословиц о правде у русских выявлено до 200 [18, с. 248]! Историческая причина этой асимметрии понятна в свете русских этимологических мотиваций, восстановленных Б.А. Успенским. «Слово *правда* этимологически связано с корнем **prav-*; соответственно, *правда* может выступать в таких значениях, как "обет", "обещание", "присяга", "заповедь", "правило", "договор", "закон" – в основе семантики этого слова лежит представление о божественном миропорядке? – пишет он. – <...> Отсюда *правда* может "пониматься как договор между человеком и Богом <...> слово *истина* образовано от местоимений **is-to* и таким образом соотносится с латинским *iste* "тот, этот" <...> Итак, если *истина* соответствует реально переживаемой действительности, то *правда* соответствует высшей духовной действительности <...>» [36, с. 191, 192].

А.Д. Шмелёв также подчёркивает, что в древнерусских памятниках (как и в современном языке) слово *истина* предполагает соответствие действительности и принадлежность миру человека. Напротив, *правда* ориентирована на соответствие идеалу, имеющему божественное происхождение. В современных словах *правда* и *истина* сохранилось древнее противопоставление источников истины, но представление о носителе истины – для каждого из этих слов – изменилось. Современное русское понятие *истина* предполагает соответствие действительности, порой недоступной человеческому знанию, но Бог-то её может знать. Трактовка действитель-

ности (а не закона) как источника истины роднит современное русское понимание *истины* с древнегреческим (*αληθεια*), приписывание же Богу (а не человеку) роли носителя истины сближает с древнееврейским (*āmāt*) [38, с. 56–57]. В древнерусских текстах антоним *правды* – *мечта*, то есть призрачная, а не подлинная «реальность божественного мира» [36, с. 192]. Очевидно, что в нынешнем светском сознании антонимом *истины* (как действительности, *αληθεια*) выступает *виртуальная реальность*. С.С. Хоружий определяет её весьма выразительно и тонко: она не род, но недо-род бытия [48, с. 41].

В высокой русской традиции концепт *правда* несёт максимальную ценностную нагрузку. В материалах для философского словаря К. Исупов посвящает ей много места: «*Правда* – истинностная адекватность события информации о нём. Восходит к славянской антитезе "правда / кривда"; через архаические оппозиции "правого / левого" закрепились как языческий рудимент в составе кардинальных национально-христианских представлений (праведное / грешное, православие; ср. "Русская правда"), сакральных формул клятвы ("ей-Богу, правда", "святая правда"), в теологии (о-правда-ние), юридической (право, правительство) терминологии. Древнейший хронотоп дольней горизонтали (правда взыскуется в пути; см. тему странников-правдоискателей в фольклоре и литературе) усложнён горней вертикалью молитвенного диалога с Богом как Сущей Правдой бытия. На правду перенесена божественная апофатическая атрибутика: *правда* несказанна, неподсудна, безначальна, вневременна, провиденциальна, прикровенна. В аспекте катафатики *правда* всеблага, богооткровенна, софийна, субстанциональна, неделима, спасительна, всечеловечна, конкретна, совершенна» [49, с. 211]. (В христианской теологии апофатика, апофатический (от др-греч. *αλοφασις* отрицание) – определение Бога через полное отсутствие свойств, например, непостижимый разумом; напротив, катафатика, катафатический (от др-греч. *καταφασις* утверждение), определение через максимальную степень свойств, например, всеблагой.) К. Исупов уточняет, что сакрально-мирская фактура *правды* и её промыслительно-дольняя событийная природа породила укоренённую в падшем сознании антитезу «правда / истина» [49, с. 211]. Ю.С. Степанов подчёркивает, что у других европейских наций расщепления правда / истина нет. Для обозначения понятия, более или менее близкого к нашей *истине*, они используют одно слово, например *truth* (англ.), *verite* (фр.), *Wahrheit* (нем.) [45, с. 318].

Знаменательно, что «в своих истоках и свидетельствах правда осуществляется в приоритетном высказывании пророка, младенца, старца или юрода в рамках внебытовой речи или вовсе за пределами слова (от "языка богов" до молчания)». Естественно, «сакральное знание жреца о вышних замыслах избывается его жертвенной судьбой (светский вариант – гонимый поэт-пророк, непонятый мыслитель-изгой)». По формуле К. Исупова, «*правда* Писания приходит на чужом языке и приносит с собой властные структуры как хозяйски организованную информацию. Мифология власти рождается на импорте сакральной *правды* и социального авторитета вождя. Поэтому становится возможной и мифология потребной *правды*, то есть истины (ср. догмат и ересь)». В свете этих обобщений понятно, почему харизматические лидеры всегда заигрывают с правдой либо спекулируют ею: «*Правда* проясняет лицо мира сего и подьмлет его из тварного подобия к первообразу Лица, «обличает» его, то есть освобождает от личин лжи и греховной полуправды». Наконец, в житей-

ской плоскости для человека «в правде есть безысходность последнего знания» [49, с. 211–212].

Таким образом, генезис понятия истины и родственных слов свидетельствует, что этот термин имеет широкое семантическое поле и древние экономико-юридические коннотации.

О концепте истина

Его неохватное содержание – по-прежнему объект споров. Характерен вопрос, сделанный заголовком статьи «Истина: свойство, оператор, событие?» (2008) [50]. Обычно истину трактуют как культурную универсалию субъект-объектного ряда, чьё содержание – оценка знания в плане его соотношения с предметной сферой и со сферой процессуального мышления [51, с. 287]. Дж. Лакофф и М. Джонсон предупреждают: «В культуре, которой присущ миф объективизма и в которой истина всегда абсолютна, определение того, что считать абсолютно или относительно истинным, зависит от людей, навязывающих свои метафоры культуре» [23, с. 187]. Н.Д. Арутюнова видит функцию истины в том, чтобы «свести множественность к единичности» [52, с. 5]. Но такова же и функция науки. Постмодернистская философия (в особенности – французская) отрицает истину, сводя её к персональному убеждению [19, с. 946]. Обозреть эту грандиозную дискуссию у нас нет возможности. Ограничимся общими соображениями, выдвинутыми Н.Д. Арутюновой. 1) Концепт *истина* фундаментален для всех сфер знания и для обыденного сознания. 2) Он закреплён во всех языках. 3) Он служит объектом двух метанаук: философии и логики. 4) Тема истины составляет сквозной сюжет (со)знания, языка, веры, восприятия и интуиции человека. 5) У истины презумптивный статус (от лат. *praesumptio* – предположение, основанное на вероятности < *praesumptum* – наперёд представлять себе). 6) Тезис о непреложности существования истины – ключевая предпосылка развития научного знания. 7) Вопрос о концептуальном фоне истины, в частности, о природе познающего субъекта и его сознания разработан ещё недостаточно [52, с. 3–4]. Последнее особенно важно в контексте методологии синергетики.

Данные этимологии и толкования слов *истина*, *правда* и их аналогов в других языках позволяют (развивая схему А.Д. Шмелёва [38, с. 56–57]) выделить три рабочих понятия. Во-первых, *собственник истины* (оборот речи подсказан статьёй Г.Г. Шпета «Сознание и его собственник», 1916), то есть реальный либо воображаемый субъект, открывающий людям истину. Во-вторых, две фундаментальные функции истины: а) *когнитивная модель* бытия (включая природу); б) модель «правильного» поведения человека и его отношений с другими, с миром, то есть регламент жизнедеятельности общества. Как толковать пункт б) с позиций теории эволюции и синергетики? На наш взгляд, это *кодификация* того, что А.В. Подлазов называет *жизнесберегающими технологиями* [53, с. 330]. К ним относятся практическая этика и мораль, психология межличностных отношений, юриспруденция, медицина, диетология, предписания техники безопасности, ритуалы, а также изучаемые синергической антропологией С.С. Хоружего [48] молитвенные, аутопсихотерапевтические и коллективные психотерапевтические практики etc. Тройка рабочих понятий поз-

Понятия, выражающие отношения между собственником истины, моделью реальности и регулятивом человеческой активности

Собственник истины	Две фундаментальные функции: истина как модель бытия и как способ обращения с ним	
	Модель (когнитивная) действительности: организации и динамики физического, биологического, социального миров	Модель (нормативная) поведения и взаимоотношений людей
	Науки о природе и науки о духе	Жизнесберегающие технологии
Человек – искатель, открыватель истины, а также сообщество – хранитель и транслятор истины	Др.-инд. <i>sant-, sat-, satya</i> ; авест. <i>hant, hat-</i> ; др.-гр. τα οντα, αληθεια, ακριβεια; лат. <i>verum, veritas</i> ; англ. <i>truth</i> ; фр. <i>verite</i> ; нем. <i>Wahrheit</i> ; русск. <i>истина</i> (от ст.-слав. <i>истъ, истовъ</i> сущий)	И.-е. *s(o)nt ^[1] ; хет. <i>aš ant-</i> ; др.-гр. τα οντα, αληθεια, ετυμα, δικαιοσυνη; др.-в.-нем. <i>sand</i> ; др.-сакс. <i>sođ</i> ; др.-англ. <i>sođ</i> ; гот. <i>sunya</i> , др.-англ. <i>synn</i> ; лат. <i>verum, veritas, justitia</i> (корень <i>jus = ius</i> от и.-е. <i>*yous</i>); русск. <i>истина</i> (от др.-русс. <i>исто</i> капитал) и <i>правда</i> (современное)
Сверхъестественное начало – даритель истины	Русск. <i>истина</i> (в современном понимании – соответствие действительности, не зависящей от её явленности человеку, то есть то, что «одному Богу известно»)	Др.-евр. <i>āmāt</i> (<i>эмет</i>); русск. <i>правда</i> (в древних текстах, то есть соответствие неземному идеалу)

воляет упорядочить этимологический материал в виде таблицы. Она иллюстрирует со(противо)поставление собственников истины и функций истины в науках о природе и в науках о культуре.

Видимость истины?

Обычно естественно-научное знание получают в процессе *наблюдения*, слежения за некоторым реальным объектом либо его моделью – материальной (в эксперименте) или идеальной (логическая модель, математическая модель, компьютерная симуляция). И ключевой метафорой в познавательной ситуации служит глагол *видеть*, то есть принципиален момент видения истины. Чем оправдан этот – «обсервационный» – подход? Пожалуй, – глубокой и поэтической мыслью, относящейся к древней традиции гностиков, которая приписывает истине подчёркнуто иконический характер. В числе рукописей Мёртвого моря, найденных вблизи Наг-Хаммади, известно апокрифическое «Евангелие от Филиппа». В нём (67. 9) искателю истины объявляется: «Истина не пришла в мир обнажённой, но она пришла в знаках и образах. Он не получит её по-другому» (цит. по [54, с. 381]). Роль наблюдателя в ситуации искания истины давно подчёркивают методологи (пост)неклассической науки.

Так, А. Бергсон, отвергая веру в «ретроспективную значимость истинного суждения», писал: «Предметы и события имеют место в определённые моменты; суждение, констатирующее появление какого-то предмета или события, может быть высказано только задним числом; следовательно, у него есть конкретная дата. Но она тут же исчезает, в силу принципа, укоренённого в нашем интеллекте и гласящего, что всякая истина вечна. Если суждение истинно в настоящем, оно должно, кажется

нам, быть таковым всегда. <...> Всякому истинному утверждению мы приписываем, стало быть, обратную силу, или, скорее, сообщаем ему возвратное движение. Как будто бы суждение могло существовать раньше, чем составляющие его термины!» (1934) [55, с. 131].

В нелинейной динамике распространён зрительный анализ фигур (часто двухмерных), и визуальный компонент методологии синергетики оказывается едва ли не лидирующим. А компьютерные программы позволяют скрупулёзно изучать мельчайшие детали графических форм, при необходимости производимых огромными сериями. Согласно обобщениям Н.Д. Арутюновой, именно зрительному восприятию сопутствуют такие ментальные операции, как классификация, распознавание, интерпретация, выявление импликаций (то есть логических связок типа *если А, то В*), опирающиеся на знание причинных связей. Язык «устроен» так, что предикат *видеть* способен к «переключению» в когнитивный план, переходу от модуса восприятия к ментальному (цит. по [56, с. 156]).

Обсервацию проводит человек (непосредственно или через аппаратуру). Естественно, существенны взаимосвязи содержания истины с характеристиками наблюдателя и условий, в которых он действует. В каких сюжетах универсального эволюционизма и синергетики первостепенна когнитивная сторона наблюдения? В теориях динамических систем, автопойесиса [56], фракталов. Но истину добывает не столько одинокий наблюдатель, сколько сообщество коллег, то есть «наблюдателей за наблюдателем». Значит, нельзя не привлечь учения о знаковых системах – семиотику (от др.-греч. *σημα, σημεῖον* – знак, сигнал) и аттрактив-анализа А.И. Сосланда [58]. А сферами пересечения указанных направлений исследования оказывается фрактальная семиотика В.В. Тарасенко [59] и репликационный аспект самоорганизации [33]. Тогда открывается простор для компаративного анализа – кооперацией «двух синергетик» – представлений о поисках истины человеком и её признании / отторжении людьми.

Resume

Дуализм (по)знания выражается не только в разобщённости «наук о природе» и «наук о духе». Он – в наличии «двух синергетик»: аутентичной и метафорической (по В.Г. Буданову). Как возможна их синергия? Попробуем обратиться к когнитивистике. Согласно ей, наше представление о мире организовано как сеть концептов – единиц коллективного (со)знания. Дуализм концептов состоит в том, что одни аккумулируют научные обобщения, другие – ценности. Следовательно, встаёт концептологическая задача синергетики. Целесообразно составить Словарь её концептов как инструмент консолидации наук и провести ревизию фонда концептов (силами «двух синергетик») как базу компаративного исследования. В качестве рабочего примера рассмотрен концепт *истина* (этимология слова в различных языках и его толкования). Можно объединить эвристические потенциалы: глобального эволюционизма, синергетики, теории знаковых систем, фрактальной семиотики, аттрактив-анализа, концепта *репликация*, – разрабатывая обсервационный аспект поиска истины.

Библиографический список

1. *Трубецков Д.И.* Колебания и волны для гуманитариев: Учебное пособие для вузов. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997.
2. *Трубецков Д.И.* Две культуры не по Чарльзу Сноу (о преподавании курса «Концепции современного естествознания» в СГУ) // Изв. Сарат. ун-та: Новая серия. 2003. Т. 3, Вып. 2. С. 66.
3. *Ауэрбах Э.* Мимесис. М.: Прогресс, 1976.
4. *Фарыно Е.* Динамика миметическая и динамика моделирования // Художественный текст как динамическая система: Материалы международной научн. конф., посвящ. 80-летию В.П. Григорьева (19–22 мая 2005 г., Москва) / Отв. ред. Н.А. Фатеева. М.: Азбуковник, 2006. С. 115.
5. *Кирсанов В.С.* Научная революция XVII века. М.: Наука, 1987.
6. *Катасонов В.Н.* Метафизическая математика XVII века. М.: Наука, 1993.
7. *Пойзнер Б.Н., Ситникова Д.Л.* Big bifurcation: рождение математического моделирования // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 5. С. 82.
8. *Вико Дж.* Основания Новой науки / Пер. и коммент. А.А. Губера; вступ. ст. М.А. Лифшица. М.– Киев: Refl-book–ИСА, 1994.
9. *Дильтей В.* Собр. соч.: В 6 т. Т. 3. Построение исторического мира в науках о духе / Пер. под ред. В.А. Куренного. М.: Три квадрата, 2004.
10. *Риккерт Г.* Границы естественнонаучного образования понятий. Логическое введение в исторические науки / Общ. ред. и предисл. Б.В. Маркова. СПб.: Наука, 1997.
11. *Риккерт Г.* Науки о природе и науки о культуре / Общ. ред. и предисл. А.Ф. Зотова; сост. А.П. Полякова, М.М. Беляева. М.: Республика, 1998.
12. *Берлин Ис.* Разрыв между естественными и гуманитарными науками // Берлин Ис. Подлинная цель познания: Избранные эссе / Пер. с англ. и коммент. В.В. Сапова. М.: Канон+, 2002. С. 369.
13. *Астафьева О.Н.* Синергетический подход к исследованию социокультурных процессов: возможности и пределы: Монография. М.: Изд-во МГИДА, 2002.
14. *Безручко Б.П., Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Путь в синергетику: Экскурс в десяти лекциях. М.: КомКнига, 2005.
15. *Буданов В.Г.* Методология синергетики в постнеклассической науке и образовании. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
16. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Синергетика: нелинейность времени и ландшафты эволюции. М.: КомКнига, 2007.
17. *Хайтун С.Д.* От эргодической гипотезы к фрактальной картине мира: Рождение и осмысление новой парадигмы. М.: КомКнига, 2007.
18. *Маслова В.А.* Введение в когнитивную лингвистику: Уч. пособие. М.: Флинта: Наука, 2006.
19. *Неретина С., Огурцов А.* Пути к универсалиям. СПб.: РХГА, 2006.

20. *Воркачев С.Г.* Счастье как лингвокультурный концепт. М.: ИТДГК «Гнозис», 2006.
21. *Делёз Ж., Гваттари Ф.* Что такое философия? / Пер. и послесл. С.Н. Зенкина. М.: Ин-т эксперимент. социологии; СПб.: Алетейя, 1998.
22. Антология концептов / Под ред. В.И. Карасика, И.А. Стернина. М.: Гнозис, 2007.
23. *Лакофф Дж., Джонсон М.* Метафоры, которыми мы живём / Под ред. и с предисл. А.Н. Баранова. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
24. *Степанов Ю.С.* Концепты: Тонкая плёнка цивилизации. М.: Языки славянских культур, 2007.
25. Проективный философский словарь: Новые термины и понятия / Под ред. Г.Л. Тульчинского, М.Н. Эпштейна. СПб.: Алетейя, 2003.
26. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
27. *Пойзнер Б.Н.* Репликатор – посредник между человеком и историей // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 6. С. 83.
28. *Степанов Ю.С., Проскурин С.Г.* Константы мировой культуры. Алфавиты и алфавитные тексты в периоды двоеверия. М.: Наука, 1993.
29. *Иванов Вяч.Вс.* Нечет и чёт // Иванов Вяч.Вс. Избр. тр. по семиотике и истории культуры. Т. 1. М.: Языки русской культуры, 1999. С. 381.
30. *Мелик-Гайказян И.В., Пойзнер Б.Н.* Словарь концептов синергетики – междисциплинарный проект исследователей и педагогов // Математика. Компьютер. Образование: Труды 4-й Междунар. конф. (29 января–3 февраля 1997 г., Пушкино). М., 1997. С. 224.
31. *Пойзнер Б.Н.* Бытие становления как объект познания // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 3-4. С. 100.
32. *Гамкрелидзе Т.В., Иванов Вяч.Вс.* Индоевропейский язык и индоевропейцы: Реконструкция и историко-типологический анализ праязыка и протокультуры. В двух частях. Ч. 2. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984.
33. *Пойзнер Б.Н.* Репликация – латентный трансдисциплинарный концепт? // Новые идеи в аксиологии и анализе ценностного сознания: Коллективная монография. Вып. 4. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 220.
34. *Вейсман А.Д.* Греческо-русский словарь. Репринт V-го издания 1899 г. М.: Греко-латинский кабинет Ю.А. Шичалина, 1991.
35. *Гачев Г.* Национальные образы мира: Космо-Психо-Логос. М.: ИГ «Прогресс»–«Культура», 1995.
36. *Успенский Б.А.* Краткий очерк истории русского литературного языка (XI – XIX вв.). М.: Гнозис, 1994.
37. *Шодем Г.* Основные течения еврейской мистики. М.–Иерусалим: Мосты культуры, 2004.
38. *Шмелёв А.Д.* Правда vs. истина в диахроническом аспекте // Логический анализ языка: Истина и истинность в культуре и языке. М.: Наука, 1995. С. 55.

39. *Петрученко О.* Латинско-русский словарь. М.; Пг.; Харьков: Т-во «В.В. Думнов, Наследники Бр. Салаевых», 1918.
40. *Подосинов А.В., Белов А.М.* Lingua Latina. Русско-латинский словарь. М.: Флинта: Наука, 2000.
41. *Бенвенист Э.* Словарь индоевропейских социальных терминов. М.: Прогресс, Универс, 1995.
42. *Даль В.* Толковый словарь живого великорусского языка / Под ред. И.А. Бодуэна де Куртенэ: Т. 1–4: Т. 2: И?О. М.: Прогресс, Универс, 1994.
43. *Дьяченко Г.* Полный церковно-славянский словарь: репринтное воспроизведение издания 1900 г. М.: Изд. отдел Моск. Патриархата, 1993.
44. *Фасмер М.* Этимологический словарь русского языка. В 4-х томах. Т. 2. М.: Прогресс, 1986.
45. *Степанов Ю.С.* Константы. Словарь русской культуры. Опыт исследования. М.: Школа «Языки русской культуры», 1997.
46. *Яковлева Е.С.* Фрагменты русской языковой картины мира (модели пространства, времени и восприятия). М.: Гнозис, 1994.
47. *Эткинд А.* Non-fiction по-русски правда. Книга отзывов. М.: Новое лит. обозрение, 2007.
48. *Хоружий С.С.* Очерки синергийной антропологии. М.: Ин-т философии, теологии и истории св. Фомы, 2005.
49. *Исупов К.* Материалы для философского словаря // Ступени: Петербургский альманах. 2000. № 1. С. 199.
50. *Соболева М.Е.* Истина: свойство, оператор, событие? // Вопросы философии. 2008. № 2. С. 117.
51. Новейший философский словарь / Сост. А.А. Грицанов. Минск: Изд. В.М. Скакун, 1998.
52. *Арутюнова Н.Д.* От редактора // Логический анализ языка: Истина и истинность в культуре и языке. М.: Наука, 1995. С. 3.
53. *Подлазов А.В.* Теоретическая демография. Модели роста народонаселения и глобального демографического перехода // Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. М. Наука, 2002. С. 324.
54. *Трофимова М.К.* Древний гнозис и размышления Марселя Пруста о художественном творчестве // Текст и комментарий: Круглый стол к 75-летию Вяч.Вс. Иванова. М.: Наука, 2006. С. 368.
55. *Бергсон А.* Введение к сборнику «Мысль и движущееся». Часть первая. Возрастание истины. Возвратное движение истины // Вопросы философии. 2007. № 8. С. 125.
56. *Кустова Г.И.* Вид, видимость, сущность (о семантическом потенциале слов со значением зрительного восприятия) // Сокровенные смыслы: Слово. Текст. Культура: Сб. ст. в честь Н.Д. Арутюновой / Отв. ред. Ю.Д. Апресян. М.: Языки славянской культуры, 2004. С. 155.
57. *Матурана У., Варела Фр.* Дерево познания / Пер. Ю.А. Данилова. М.: Прогресс-Традиция, 2001.

58. *Сосланд А.И.* Антиванитатизм: Концепт системы аттрактив-анализа // Русская антропологическая школа. Труды. Вып. 1. М.: РГГУ, 2004. С. 138.
59. *Тарасенко В.В.* Фрактальная семиотика: наблюдатель в масштабах языка // Синергетическая парадигма. Человек и общество в условиях нестабильности. М.: Прогресс-Традиция, 2003. С. 490.

*Томский государственный
университет*

Поступила в редакцию 27.03.2008

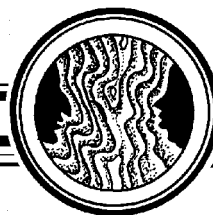
TO PLACE CONCEPTS DUALISM AT THE SERVICE OF «TWO SYNERGETICSSES» SYNERGY

B.N. Poizner

Integration of «natural history» with «the humanities» is mission and strategy of Synergetics. Whether the situation of «two Synergeticses» («authentic» and «metaphorical», on V.G. Budanov) contradicts them? The author shows that presence «of two Cultures» realized still by G.B. Vico is stipulated by concepts dualism. Concepts are units of collective knowledge and perception. Some of concepts accumulate scientific generalizations, other keep human values. The author puts forward a conceptological task of Synergetics: to assemble a Dictionary of Synergetics concepts as an instrument of interdisciplinary consolidation; to develop synergy of «two Synergeticses» using the concepts fund as a basis of a comparative research. Concept of truth is considered (etymology of the word in various languages and explanations). Under the author judgement it is possible to join heuristic potentials of Evolution doctrine, Synergetics, Semiotics, Fractal Semiotics (V.V. Tarasenko), Attractive-analysis (A.I. Sosland), concept of replication, developing an observation aspect of truth search.



Пойзнер Борис Николаевич – родился в Томске (1941), окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию по теории колебаний и волн (1970), доцент кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Читает лекции по нелинейной оптике, физике, физике лазеров, принципам управления лазерным излучением, основам синергетики. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Имеет много статей по указанной тематике. Инициатор подготовки и редактор семи библиографических указателей (в том числе «Синергетика и сопредельные науки», «Университетское образование и его социальная роль», «Интеллигенция в российском обществе и университете», «Психика и интеллект обучаемого»). Действительный член Всероссийского общества библиофилов.
E-mail: Pznr@elefot.tsu.ru



ДВЕ ТЫСЯЧИ СЕДЬМОЙ ГОД В ДАТАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ*

Д.И. Трубецков

Леонардо да Винчи и нелинейная наука

Турбулентные завихрения воды, описанные в дневниках, находят свое воплощение в золотых локонах художественных образов. Плавные изгибы спирали, полученной им путем математических размышлений, подозрительно напоминают позы моделей на его портретах. Леонардо писал о живописи так: «Она охватывает все формы, существующие и еще не найденные в природе». Твердые тела Платона, формировавшие его архитектурные зарисовки, видны в набросках разных кодексов и формализованы в книге «О божественной пропорции...» Он исследует птичий полет как натуралист, инженер по аэродинамике и художник, анимируя движение крыльев серией рисунков, но мечтает уже о полете человека. Винтовая спираль, ранее призванная придать динамизм художественным образам, теперь воплощается у Леонардо в воздушный винт, обеспечивающий взлет вертолета. Поглощенный проектом пилотируемого полета, он исследовал свободное падение, гравитацию и фундаментальные вопросы физики. Достигнув высокой чистоты эксперимента, он убедился в постоянстве ускорения свободного падения вне зависимости от массы падающего тела. Работы Леонардо столь целостны благодаря его синергетическому подходу, полному симбиозу различных областей знаний.

Аталай Бюлент [1]

Течения, струи, турбулентность

Уже указывалось, что, намечая планы трудов той или иной области естествознания, Леонардо да Винчи перечислял будущие книги, которых так и не было. Самое большое количество книг он перечисляет в связи с гидромеханикой и связанными с ней проблемами. Причем это не столько книги, сколько разные вопросы, случаи, проблемы, расположенные без строгой системы. Нечто подобное получается, когда он хочет собрать термины о воде, иногда повторяясь. Опять перед нами воплощенная варьета – разнообразие рассматриваемого удивляет и подавляет: здесь

*Начало см. в журнале «Известия вузов. ПНД», т. 16, № 1, с.33; № 2, с. 35.

геология, инженерия, гидродинамика и гидростатика, наблюдения над пловцами и судами; все это чередуется друг с другом и переплетается.

Леонардо советует себе: «Напиши сначала о воде в целом и о каждом ее движении, а дальше опиши все виды дна и вещества, из которых оно состоит, всегда приводя положения из указанного раздела о воде. Тогда порядок получится хороший, ибо иначе изложение было бы сбивчивое. Опиши все фигуры, образуемые водой, от самой большой до самой малой волны, и укажи их причины» [7, с. 338].

Математический аппарат Леонардо не соответствовал уровню и широте проблем, которые он ставил перед собой. Вопросы гидродинамики влекли его, но все та же скудность математического аппарата заставляла его довольствоваться множеством эмпирических наблюдений и общими качественными рассуждениями¹⁾.

В книге [15, с. 60] утверждается: «В сущности, последующие работы Галилея и Паскаля... представляют собой развитие, оформление и закрепление основных принципов гидростатики, осознанных уже Леонардо да Винчи».

Действительно, Леонардо да Винчи сумел правильно определить условия равновесия в сообщающихся сосудах, близко подошел к формулировке закона Паскаля.

Остановимся подробнее на результатах его размышлений и наблюдений за волнами (далее приведены цитаты из [7] с указанием страниц в круглых скобках).

По-видимому, наиболее известно следующее замечание Леонардо да Винчи: «Импульс гораздо быстрее воды, потому что многочисленны случаи, когда волна бежит от места своего возникновения, а вода не двигается с места, наподобие волн, образуемых в мае на нивах течением ветров: волны кажутся бегущими по полю, между тем нивы со своего места не сходят» (с. 350).

Он сравнивает волны на воде с волнами песка, у него есть догадка о волновом распространении звука и света. Вот некоторые из его рассуждений.

«Когда дует ветер, он выглаживает песок. Посмотри, как этот песок образует свои волны, и заметь, насколько он движется медленнее, чем ветер. И так же поступи с водой и заметь различие между водой и песком» (с. 351).

«Как брошенный в воду камень становится центром и причиной различных кругов, также кругами распространяется и звук, порожденный в воздухе, также и всякое помещенное в светлом воздухе тело распространяется кругами и наполняет окружающие части бесчисленными своими образами и все является во всем и все в каждой части. Вода, ударяемая водою, образует вокруг места удара круги; звук – на далекое расстояние в воздухе; еще больше – огонь; еще дальше – ум в пределах вселенной; однако, поскольку он ограничен, он простирается не на бесконечность» (с. 653).

И рядом с внимательным Леонардо-наблюдателем Леонардо-экспериментатор.

Для исследования течения воды в разных частях реки, он пользуется окрашиванием струй.

«Вода, которая падает вниз из узкого выхода, вытекая из большого бассейна, произведет в воздухе различные пересечения, которые будут тем выше одно другого, чем ближе к устью причина одних, нежели причина других... Опыт с пересечением ты произведешь при помощи окрашенной воды: налитая с правой стороны бассейна, она ударится внизу в воду с левой стороны» (с. 342).

¹⁾Заметим, что первая книга по гидродинамике появилась лишь в 1638 году. Ее написал ученик Галилея, Б. Кастелли (1577–1644). Она носила название «Della misura dell'acque correnti» (Рим, 1638).

«Если хочешь увидеть, где, в каком месте – на поверхности, в середине или на дне – вода течет быстрее, налей воды, которая окрашена синопской краской, вместе с маслом в поток, который протекает по неровному дну, имеющему разные наклоны, – тогда по течению ты в точности увидишь, что опережает» (с. 359).

Леонардо да Винчи наблюдает движение зернышек в трубе или стеклянном ящике, измеряет наклон течения с помощью движущейся лодочки или кусочка пробки.

«Чтобы увидеть, движет ли маленькая волна на поверхности глубокую воду, находящуюся на дне, смешай около твоего отверстия воду с черным просом и через стеклянные пластинки ты увидишь то, что тебе нужно» (с. 350).

Вспомните теперь знаменитые опыты Рейнольдса с окрашенной струйкой жидкости или замечательные фотографии из [16], где для визуализации процессов в жидкость добавляют алюминиевые частицы.

Для наблюдения водоворотов Леонардо да Винчи создает искусственные водовороты, чтобы исследовать их законы. Среди записей Леонардо есть фрагмент, который поражает воображение: ему действительно захотелось назвать разные "движения" и "фигуры" воды, поэтому он вводит 64 термина из гидродинамики, сопровождая их рисунками (см. рис. 1). Эта своеобразная, не соответствующая, а опережающая свое время научно-художественная энциклопедия нелинейных волн с акцентом на турбулентность, поражала исследователей творчества Леонардо да Винчи. Например, В.П. Зубов [8] пишет: «Леонардо переходит к простому перечислению – казалось бы, врывается мощный поток, готовый смести все». Ему вторит Баткин Л.М. [3] – мы приведем целиком небольшой отрывок.

«Перед нами, действительно, нечто совсем уже невообразимое. Леонардо захотелось назвать разные "движения" и "фигуры" воды. И он вдруг набрасывает – подряд – шестьдесят четыре обозначения!

Вот как это звучит: "Risaltazione, circulatione, revolutione, revoltamento, ragiramento, risaltamento, sommergimento, surgimento, declinatione, elevatione, cavamento, consumamento, percussione, ruinamento, discienso, impetuosità, retrosi, urtationi, confregationi, ondationi, rigamenti, bollimenti, ricasamenti, ritardamenti, serpeggianti, rigore, mormori, strepiti, ringorgare, ricalcitrazioni, flusso e riflusso, ruine, conquassamenti, baratry, spelonche delle ripe, revertigini, precipizi, riversciamenti, tumulty, confusioni, ruine tempestose, equazione, equalità, arazione di pietre, urtamenti, bollori, sommergimenti dell' onde superficiale, ritardamenti, rompimenti, divisamenti, aprimenti, celerita, vehementia, furiosità, impetuosità, concorso, declinatione, commistamento, revolutione, cascamento, cbalzamento, corruzione d'argini, confuscazioni" (цитата из [7, с. 341–342]. – Д.И.Т.). Я предложил бы примерно такой перевод: "Бурление, круговращение, переворот, поворот, круговорот, пережат, погружение, всплывание, падение, вздымание, истечение, иссякание, ударение, разрушение, спад, стремительность, откаты, столкновения, разбивания, волнения, струи, вскипания, ниспадания, замедления, извивания, неуклонность, рокоты, гулы, переполнять, нахлесты, прилив и отлив, обвалы, сотрясения, омуты, вымоины берегов, смерчи, пучины, наводнения, штормы, смешения, бурные обвалы, выравнивание, равновесие, волочение камней, толчки, вспенивания, погружения поверхностных волн, замедления, прорывы, разделения, бреши, скорость, порывистость, яростность, стремительность, слияние, понижение, перемешивание, переворот, водопад, низвержение, повреждение плотин, взбаламучивание".

Сразу же бросается в глаза, что одни слова – revolutione, ritardamenti, impretuosità – повторяются дважды; другие едва ли различимы по смыслу; и многие лишены какого-либо специфического "гидродинамического" содержания. Иначе говоря, терминологиче-

других круговых волн, движущихся им навстречу, *после* столкновения пусть вздымаются в воздух, не отделяясь от своих оснований...» [7].

Скорее, речь идет не о том как, а о том, что изображать.

Конечно, Л.М. Баткин, как специалист по истории и теории культуры, не хочет объяснить текст и рисунки Леонардо лишь стремлением провести конкретно-эмпирическое исследование. Он задает вопрос и отвечает на него.

«Что же это за потоп 64-х названий? Это потоп варьета.

Предметность бесконечно-разнообразных движений воды широко изливается в гортань Леонардо и превращается в речевые рокоты и гулы (или в "абстракционистские" рисунки серии "Потоп", хранящейся в Виндзоре, с их свободным геометрическим ритмом). Предметность природы жадно впитывается глазом и ухом, всей личностью – и становится внутренним определением мышления. Личность, стремящаяся к "универсальности", не в силах как-то ограничить предметную варьета. Она с нею не справляется, индивида несет водоворот различий. Но, следовательно, индивид не справляется с собой. Чем больше мир наполняет индивида, чем шире, универсальней творческая личность Возрождения, тем больше целиком устремленная к внешнему личность, этот Глаз в центре мира, кажется каким-то новым грандиозным явлением природы. Тем больше это, возможно, сверхличность – но не личность в конкретно-ограниченном, законченном (и поэтому частном) смысле.

Не только Леонардо описывает воду, и вода описывает Леонардо...

Идея перечисления, идея разнообразия чудовищно раздувается, затопляет берега. Тут уж могут зазвучать слова синонимические или даже те же самые слова, существенно, что они все равно звучат как разные, ибо это перечень разного. Варьета формализуется, потому что обнажается до дна ее природная предметность, видна граница "разнообразия". И это последняя логико-культурная граница итальянского Возрождения. Гениальный, но все-таки ведь человечески-конкретный ренессансный индивид претендует стать Всем, соперничая с "божественным умом", всякая ноша для него все еще недостаточно тяжела. Но ведь Бог, бесконечный абсолют, способен совпасть со всем лишь потому, что он – Ничто. Значит?..

В Леонардовых записях по гидродинамике больше трагизма, чем в "Тайной вечере" » [3].

Вода завораживала Леонардо. Его сочинение «Трактат о движении и мере воды» (Ватиканский список), который в 1643 году составил доминиканец Арконати для кардинала Барберини, состоит из 566 фрагментов, распределенных по девяти книгам.

1. О сфере воды.
2. О движении воды.
3. О волнах воды.
4. О водоворотах.
5. О падающей воде.
6. О повреждениях, причиняемых водою.
7. О предметах, переносимых водой.
8. О мере воды и о трубках.
9. О мельницах и других водяных механизмах.

Любопытны наброски к рукописи Британского музея: «Книга о сокрушении войск силою разливов, произведенных выходом вод из берегов. Книга о затоплении войск посредством закрытия устья долин. Книга, показывающая, каким образом реки приносят невредимым лес, срубленный в горах. Книга о барках, направляемых против течения

рек. Книга о подъеме больших мостов посредством одного лишь повышения уровня вод. Книга о предотвращении натиска рек, чтобы он не направлялся в города» [8, с. 98].

Никола Витковски, автор весьма своеобразной книги [17], особенно отмечает «...бесчисленные рисунки поразительной сложности, изображающие водные потоки, водопады, наводнения». Более того, Витковски пишет о Леонардо следующее: «Предчувствуя, по-видимому, что вихревое движение жидкости еще долго будет озадачивать математиков (и действительно, уравнения механики жидкостей мы научились решать только с помощью самых мощных компьютеров, да и то для этого приходится использовать весьма грубые приближения), он сумел классифицировать вихри в движении воздуха под крыльями птиц и в пенном следе позади корабля. К рекам он питал особую слабость. В эпоху, когда люди вознамерились повернуть реку Арно, любые знания о воде имели стратегическую важность» [17, с. 18–19].

Интересно, что слабость к рекам с детства питал и Джеймс Клерк Максвелл. Может быть, храня образ растекавшейся ручейками реки, он представит потом взаимодействие электрических токов и магнитных полей струями и водоворотами. «В двух статьях, непосредственно продолжающих логику рассуждений Фарадея ("О силовых линиях Фарадея», 1852, и «О физической силовой линии", 1862), Максвелл положил начало концептуальному рукоделию, неслыханно сюрреалистическому: с исключительной точностью он описывает все известные по наблюдениям магнитные и электрические явления при помощи системы мягких шестеренок, представляющих собой цепочку вихрей "воображаемой жидкости"» [17, с. 302]. «Максвелл... наполнил пространство «молекулярными вихрями», между которыми вставил маленькие шарики, чтобы передавать движение от одного вихря к другому... Ток, то есть аналогичная жидкости циркуляция маленьких шариков, заставляет вращаться магнитные вихри (создает магнитное поле), а затухание движения вихрей интерпретируется как ослабление поля по мере удаления от проводника. Именно это и наблюдал Эрстед. Фарадей же заставлял изменяться магнитное поле. Это означает, что одни вихри уже вращаются, пока другие еще находятся в покое, и оттого шарикам приходится перераспределяться между ними – то есть возникает электрический ток» [17, с. 303–304].

Модель вихрей была понятной и без использования математического аппарата. Более того, она объяснила вращение плоскости поляризованного света магнитным полем и дала для скорости распространения возмущения в этой странной среде значение, в точности равное скорости света.

«...Вихри не дают физикам забыть о себе, что показывает их недавнее триумфальное возвращение в знаменитой теории хаоса и явлениях турбулентности. Оно и к лучшему: редкое физическое явление так завораживает» [17, с. 305].

Есть момент, на который историки, изучающие творчество Леонардо да Винчи, обычно не указывают. Насколько современны чертежи дамб, шлюзов и водяных мельниц, выполненных Леонардо, настолько архаична его теория рек, в которой воплотились неоплатонические идеи относительно макрокосма и микрокосма. Главное в этих идеях: человек подобен космосу в целом, всякому минералу соответствует какое-то растение, всякому растению – орган человеческого тела, а органу человеческого тела – планета Солнечной системы и т.д. и т.п. В рамках этих идей тело человека должно находиться в точном соответствии с телом Земли. Но тогда кровообращение должно быть связано с обращением воды в реках, а ветры, которые сменяют друг друга, представляют собой дыхательную систему планеты.

фото

φωτο

Согласно [17, с. 19–20], «Леонардо видел в реках подобие лопнувших на поверхности земной кожи кровеносных вен, устремляющих воды к морю, чтобы вернуть их в огромную систему подземного кровообращения, в которой вода переносится от морского дна к горным вершинам так же, как человеческая кровь переносится по телу от ног к голове. Что до представлений о динамике воздуха и воды, они были типично аристотелевскими: птица летит потому, что ее поддерживают потоки воздуха, которые она привела в движение своими крыльями, а рыба плавает из-за того, что вода быстро смыкается позади нее... За пределами этих странностей, в то время общепринятых, Леонардо оставался теоретиком, ощущавшим значительно большую свободу в общении со своим дневником, чем на деле»²⁾.

Код да Винчи и современная нелинейная динамика. Разрушение квазипериодического движения

Вернемся к тому месту в книге Брауна [12], в которой Лэнгдон размышляет о числе 1.618. Повторимся чуть-чуть.

«Да Винчи, последовательность Фибоначчи, пентакл... Неким непостижимым образом их связала одна из самых фундаментальных концепций в истории искусств...»

Их связала золотая пропорция, в которой мы и видим код да Винчи. Используется ли он в современной науке, в частности, в нелинейной динамике? Да, используется при рассмотрении перехода квазипериодического движения на торе с двумя несоизмеримыми частотами в хаотическое при добавлении нелинейного возмущения [18, 19]. Движение на невозмущенном торе можно в полярных координатах описать простым отображением Пуанкаре

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega \pmod{1} \quad (\theta_n \text{ берется по модулю один}),$$

где $\Omega = \omega_1/\omega_2$ – число вращений, показывающее сдвиг угла θ за одну итерацию. Для рациональных значений $\omega_1/\omega_2 = p/q$ траектория замыкается после q циклов (состояние синхронизации мод). При иррациональном отношении ω_1/ω_2 движение квазипериодическое, траектория нигде не замыкается и перекрывает весь тор.

Было показано, что для сильно диссипативных систем радиальное движение траектории при возникновении хаоса несущественно, и можно изучать разрушение тора и превращение его в странный аттрактор с помощью отображения окружности

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n).$$

По аналогии, скажем, с числом Рейнольдса, число K представляет степень нелинейности последнего слагаемого, которая должна вноситься для достижения хаоса. Чтобы наблюдать переход от квазипериодичности к хаосу, в приведенной выше формуле нужно изменять два параметра. Если увеличивать нелинейность (то есть K), то необходимо изменять и Ω , чтобы сохранить число вращений равным заданному иррациональному числу, что гарантирует квазипериодичность.

Предлагается следующий метод. При фиксированном K вычисляется величина $\Omega_{p/q}(K)$, которая:

²⁾Чего стоит одно из его гидродинамических соображений: «Самую большую реку можно поднять на самую высокую гору, воспользовавшись принципом сифона».

- 1) принадлежит q -циклу отображения $f(\theta)$;
- 2) содержит элемент $\theta = 0$;
- 3) обеспечивает сдвиг на p .

Таким образом, $\Omega_{p/q}$, дающая рациональное число вращения $\omega = p/q$, определяется выражением

$$f_{K,\Omega}^q(0) = p, \quad (1)$$

где индексы K и Ω показывают, что левая часть остается функцией обеих переменных.

Число (иррациональное) вращения оценивается последовательностью усеченных непрерывных дробей, то есть рациональных чисел. Например, золотым сечением вида $\omega^* = \tau - 1 = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.6180339\dots$. Оно получается из непрерывной дроби

$$\omega^* = \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}$$

$$\omega_n = \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_n}{F_n + F_{n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}}, \quad \omega^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \frac{1}{1 + \omega^*}, \quad (2)$$

$$\omega^{*2} + \omega^* - 1 = 0 \rightarrow \omega^* = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (F_n - \text{ числа Фибоначчи}).$$

Число ω^* называют «наихудшим» иррациональным числом в том смысле, что оно хуже всего может быть приближено рациональными числами.

Для отображения окружности были получены следующие численные результаты.

1. Величины параметров $\Omega_n(K)$, порождающих, согласно (1), числа вращения ω_n в (2), стремятся к некоторой постоянной по закону геометрической прогрессии, то есть

$$\Omega_n(K) = \Omega_\infty(K) - \text{const} \cdot \delta^{-n},$$

где

$$\delta = \begin{cases} -2.6180339\dots = -(\omega^*)^{-2} & \text{при } |K| < 1, \\ -2.83362\dots & \text{при } |K| = 1 \end{cases}$$

– универсальная постоянная (зависящая, однако, от ω^*).

2. Расстояния d_n от $\theta = 0$ до ближайшего принадлежащего ω_n элемента цикла

$$d_n = f_{\Omega_n}^{F_n}(0) - F_{n-1}$$

таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = \alpha,$$

где α – еще одна универсальная константа

$$\alpha = \begin{cases} -1.618\dots = -(\omega^*)^{-1} & \text{при } |K| < 1, \\ -1.28857\dots & \text{при } |K| = 1, \end{cases}$$

причем, $f_{\Omega_n}^{F_{n+1}}(0) - F_n = 0$. В этом случае спектр мощности

$$A(\omega) = \frac{1}{F_{n+1}} \sum_{j=0}^{F_{n+1}-1} U(t_j) e^{2\pi i \omega t_j},$$

где

$$U(t_j) = \theta^n(t_j) - t_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

периодическая функция, описывающая зависимость от времени элементов цикла

$$\theta^n(t_j) = \theta(j\omega_n) = f^j(\theta)$$

для времен $t_j = j\omega_n$ в пределе при $n \rightarrow \infty$.

Спектр демонстрирует самоподобие, поскольку структура между любыми соседними пиками одна и та же. После F_n итераций движение остается почти периодическим: главные пики появляются на частотах, равных степеням чисел Фибоначчи.

Переход от квазипериодичности к хаосу при числе вращения, равном золотому среднему $\omega^* = (\sqrt{5} - 1)/2$, имел место и в натурном эксперименте с ячейкой Бенара с дополнительными источниками тепла в боковых стенках, модулирующими конвективный поток выбранной частотой [18, с. 144–146]. Эксперимент количественно подтвердил универсальность скейлинга в переходе от квазипериодичности к хаотической конвекции при отношении частот, близком к золотому среднему.

Квазикристаллы и плитки Пенроуза

Мы подошли к еще одной составляющей кода да Винчи – пентаклу, входящему в пентагон.

В журнале *Physical Review Letters*, в статье, датированной 12 ноября 1984 года, израильский физик Дан Шехтман привел экспериментальное доказательство существования металлического сплава (сплав алюминия и марганца) с необычными свойствами. Сплав образуется при сверхбыстром охлаждении расплава со скоростью 10^6 К в секунду, и при исследовании методами электронной дифракции проявляет все свойства кристалла, поскольку его дифракционная картина состоит из ярких и регулярно расположенных точек. Но эта картина характеризуется наличием пентагональной или икосаэдрической симметрии, строго запрещенной в кристалле из геометрических соображений. Такие необычные сплавы были названы квазикристаллами. Оказалось, что их много. Специалисты в области кристаллографии быстро поняли, что понятие квазикристалла носит фундаментальный характер, потому что оно обобщает и завершает определение кристалла. Говорят даже о том, что это открытие можно сравнить с добавлением понятия иррациональных чисел к рациональным в математике.

Как описать квазикристалл? Согласно классическим представлениям кристаллографии, кристалл составляется из единственной ячейки, которая должна грань к грани (плотно) устилать всю плоскость. Плотное заполнение плоскости может быть осуществлено с помощью треугольников, квадратов и шестиугольников. С помощью пятиугольников (пентагонов) такое заполнение невозможно. Но у Шехтмана-то получилось! На протяжении нескольких последующих лет ряд научных групп во всем

мире изучали необычный сплав Шехтмана посредством электронной микроскопии высокого разрешения. Была подтверждена идеальная однородность вещества, в котором симметрия пятого порядка сохранялась в макроскопических областях с размерами в несколько десятков нанометров, близкими к размерам атомов.

Для получения кристаллической структуры квазикристалла разработана модель, в основе которой лежит понятие «базового элемента». В рамках этой модели внутренний икосаэдр из атомов алюминия окружен внешним икосаэдром из атомов марганца. В «базовом элементе» 42 атома алюминия и 12 атомов марганца. В процессе затвердевания «базовые элементы» быстро соединяются между собой жесткими октаэдрическими мостиками. Гранями икосаэдра являются равнобедренные треугольники. Для образования октаэдрического мостика из марганца нужно, чтобы два таких треугольника (по одному в каждой ячейке) приблизились достаточно близко друг к другу и выстроились параллельно. В результате и образуется квазикристалл с икосаэдрической симметрией.

Отметим, что и здесь не обошлось без золотой пропорции.

В поисках объяснения икосаэдрической симметрии кристаллов физики вспомнили о математическом открытии, сделанном в 1974 году английским теоретиком Роджером Пенроузом, – о плитках Пенроуза, представляющих собой аperiодические регулярные структуры, образованные тонкими и толстыми ромбами, подчиняющимися золотой пропорции. Они оказались плоским аналогом квазикристаллов. Именно роль ромбов Пенроуза в пространстве трех измерений стали играть икосаэдры. С их помощью осуществлялось плотное заполнение трехмерного пространства.

Вернемся к изображению пентагона. Нетрудно видеть, что после проведения в нем диагоналей, пентагон включает в себя пять равнобедренных треугольников, окрашенных в темный цвет, и пять равнобедренных треугольников, не окрашенных. И темные, и светлые треугольники являются «золотыми», так как отношение бедра к основанию равно золотой пропорции. Соединив два темных треугольника их основаниями, получим тонкий «золотой» ромб. Аналогично из светлых треугольников получим толстый «золотой» ромб. Пенроуз использовал ромбы для получения «золотого» паркета, который был назван плитками Пенроуза. Плитки имеют пентагональную симметрию, а отношение числа толстых ромбов к тонким стремится к золотой пропорции.

Еще один замечательный объект, относящийся к нашему повествованию, – фуллерены³⁾. Термином «фуллерены» называют замкнутые молекулы типа C_{60} , C_{70} , C_{76} , C_{84} , в которых все атомы углерода находятся на сферической или сфероидальной поверхности. В этих молекулах атомы углерода расположены в вершинах правильных шестиугольников или пятиугольников, покрывающих поверхность сферы или сфероида. В молекуле C_{60} , напоминающей покрышку футбольного мяча и имеющей форму правильного усеченного икосаэдра, атомы углерода расположены на сферической поверхности в вершинах 20 правильных шестиугольников и 12 правильных пятиугольников, так что каждый шестиугольник граничит с тремя шестиугольниками и тремя пятиугольниками, а каждый пятиугольник граничит с шестиугольниками.

³⁾ Термин «фуллерен» происходит от имени американского архитектора Бакминстера Фуллера, который использовал такие структуры при конструировании куполов зданий.

Фуллерены впервые были синтезированы в 1985 году Г. Крото и Р. Смолли, получившими в 1996 году за это открытие Нобелевскую премию. Интересно, что в 1992-м году фуллерены обнаружили в породах докембрийского периода, то есть они оказались не только рукотворными, но и природными образованиями.

Вместо заключения:

Леонардо да Винчи «О своих трудах, талантах и знаниях» [20]

«Хорошо знаю – некоторым гордецам покажется, что они вправе порицать меня, ссылаясь на то, что я человек без книжного образования. Глупый народ! Не понимают они, что, как Марий ответил римским патрициям, и я мог бы ответить им, говоря: «Вы, что украсили себя чужими трудами, вы не хотите признать за мною права на мои собственные». Скажут, что, не имея книжного образования, я не смогу хорошо сказать то, о чем хочу трактовать. Не знают они, что мои предметы более, чем из чужих слов, должны быть почерпнуты из опыта, который был наставником тех, кто хорошо писал: так и я беру его себе в наставники и во всех случаях на него буду ссылаться.

<...> Хотя бы я и не умел хорошо, как они, цитировать авторов, я буду цитировать гораздо более достойную вещь, ссылаясь на опыт наставника их наставников. Они расхаживают чванные и напыщенные, разряженные и разукрашенные не своими, но чужими трудами, а в моих мне же самому отказывают, и если меня, изобретателя, презирают, то насколько более должны быть порицаемы сами – не изобретатели, а трубачи и пересказчики чужих произведений.

<...> Многие будут считать себя вправе упрекать меня, указывая, что мои доказательства идут вразрез с авторитетом некоторых мужей, заслуживающих великого почета согласно их незрелым суждениям; они не замечают, что мои предметы родились из простого чистого опыта, который есть истинный учитель.

<...> И увлекаемый жадным своим влечением, желая увидеть великое множество разнообразных и странных форм, произведенных искусной природой, блуждая среди темных скал, я подошел ко входу в большую пещеру. На мгновение остановясь перед ней пораженный, не зная, что там, изогнув дугою свой стан и оперев усталую руку о колено, правой я затенил опущенные и прикрытые веки. Много раз наклонялся я то туда, то сюда, чтобы что-нибудь разглядеть там, в глубине, но мешала мне в том великая темнота, которая там внутри была, и когда я пробыл так некоторое время, внезапно два пробудились во мне чувства: страх и желание; страх – пред грозной и темной пещерой, желание – увидеть, не было ли чудесной какой вещи там, в глубине».

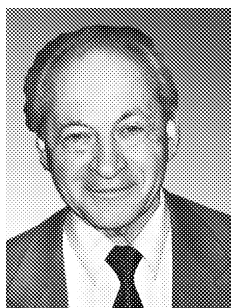
Библиографический список

1. *Бюлент А.* Математика и «Мона Лиза». Искусство и наука в творчестве Леонардо да Винчи. М.: Техносфера, 2007. 304 с.
2. *Данилов Ю.А.* Причудливый мир науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004. 228 с.
3. *Баткин Л.М.* Леонардо да Винчи и особенности ренессансного творческого мышления. М.: Искусство, 1999. 415 с.
4. *Джорджо Вазари.* Леонардо да Винчи, живописец и скульптор флорентийский (Из кн. Жизнеописания наиболее знаменитых живописцев, ваятелей и зодчих) // Леонардо да Винчи. Суждения о науке и искусстве. СПб.: Издательский дом «Азбука – классика», 2006. 224 с.

5. Проф. Зигмундъ Фрейдъ. Леонардо да Винчи. М.: Типография Торг. д. «Мысль», Петровка, д. 17, 1912. 119 с.
6. Леонардо да Винчи. Избранные произведения: В 2-х т. СПб.: Издательский дом «Нева»; М.: Изд-во «Олма-Пресс», 2000.
7. Леонардо да Винчи. Избранные естественно-научные произведения. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1955. 1207 с.
8. Зубов В.П. Леонардо да Винчи. М.: Техносфера, 1962.
9. Тайи Джессика, Барр Трейси. Леонардо да Винчи для «чайников». М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. 304 с.
10. Мэттьюз Кэйтлин. Таро да Винчи. М.: ООО ТД Изд-во «Мир книги», 2006. 144 с.
11. Стахов А., Слученкова А., Щербаков И. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. СПб.: Издательский дом «Питер», 2007. 320 с.
12. Браун Д. Код да Винчи. М.: «АСТ», 2004.
13. Гримм Г.Д. Пропорциональность в архитектуре. Л.: Издательство ОНТИ, 1935.
14. Реньи А. Трилогия о математике. М.: Мир, 1980. 376 с.
15. Долгов А.Н. Краткий очерк истории гидростатики // В книге «Начала гидростатики. Архимед, Стэвин, Галилей, Паскаль». Л., 1933.
16. Альбом течений жидкости и газа. Пер. с англ. / Сост. М. Ван-Дайк. М.: Мир, 1986. 184 с.
17. Витковски Н. Сентиментальная история науки. М.: Колибри, 2007. 448 с.
18. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. 240 с.
19. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Физмалит, 2001. 296 с.
20. Леонардо да Винчи. Суждения о науке и искусстве. СПб.: Издательский Дом «Азбука – классика», 2006. 135 с.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 16.01.2008



Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2008 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2008 год 450 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 26.05.08. Подписано к печати 24.06.08
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 19,95(14,25). Уч.-изд. л. 19,0. Тираж 200. Заказ 403

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2008
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2008