

## ПОДАВЛЕНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЙ В АКТИВНОЙ СРЕДЕ С ПОМОЩЬЮ СЛАБОГО ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

*И. И. Бастраков, К. А. Гаврилова, С. А. Григорьева, Г. В. Осипов*

Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

В данной работе представлены два новых метода подавления импульса в одномерной и двумерной возбудимых средах с помощью внешнего воздействия. В предложенных методах использовалось кратковременное импульсное воздействие, приводящее к изменению скоростей распространения фронтов, что, в свою очередь, привело к дестабилизации распространяющегося импульса и переходу среды в невозбужденное состояние. Исследования проводились на модели Зыкова, которая при некотором наборе параметров является моделью возбудимой среды. Были определены условия на амплитуду и длительность внешних воздействий, необходимые для подавления возбуждений.

*Ключевые слова:* Нелинейная динамика, активные среды, спиральные волны, модель Зыкова, волны возбуждения.

### Введение

Модель возбудимой среды – одна из базовых моделей активных сред. В таких средах возможно существование устойчивых самоподдерживающихся волн. Возбудимые среды широко распространены в автокаталитических химических реакциях [1, 2] и в биологии – нейронные структуры, нейронная и мышечная ткани [3–6]. Такие среды интересны тем, что в них могут распространяться волны возбуждения, которые можно рассматривать как один из механизмов связи между различными частями сред. В некоторых случаях существование распространяющихся волн является нежелательным эффектом. Например, самопроизвольное разрушение спиральной волны на несколько волн и их последовательное дробление из-за неоднородности могут приводить к хаотическому пространственно-временному поведению. Такая динамика рассматривается как возможный механизм для начала желудочковой фибрилляции в сердечной мышце [7]. Таким образом, существует необходимость в разработке эффективных методов для инициации, управления и уничтожения волн возбуждения.

Разработке стратегий по борьбе с сердечными аритмиями на основе математических моделей посвящено большое число исследований. В [8] описано развитие

систем, моделирующих поведение клеток сердечной ткани, механизмы возникновения аритмий сердца и способы борьбы с ними. Способ стимуляции сердца для снижения вероятности сердечной недостаточности, использующий управление с обратной связью (вызываются малые возмущения постоянной амплитуды с чередующимися частотами), предложен в [9]. Этот способ более устойчив к шумам, чем многие аналогичные методы, и поэтому более эффективен, с точки зрения реализации экспериментов и применения для лечения аритмии. В [10] предложен способ подачи внешнего воздействия для подавления спиральной волны в одномерной кусочно-линейной модели ФитцХью–Нагумо – периодическое импульсное воздействие малой амплитуды непрерывное во времени. Управление волнами с помощью обратной связи обсуждалось в [11–14]. В [15] предложено для подавления фибрилляции желудочков подавать последовательность из нескольких (5 или 7) электрических импульсов малой амплитуды, вместо одного импульса с большой амплитудой. При этом снижение суммарной энергии импульсов составило в среднем 84%. Для удержания клеток миокарда в «заблокированном» состоянии в течении заданного промежутка времени в [16] предложено использование синусоидального высокочастотного переменного тока.

В работе предлагается метод, который использует кратковременное импульсное воздействие на среду для уничтожения нестатических состояний в возбудимых средах, таких как распространяющиеся импульсы, одиночная спиральная волна и хаос спиральных волн.

## 1. Модель

Рассмотрим достаточно общую модель, которая описывает возбудимую среду через двумерное уравнение реакции-диффузии

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F(u, v) + D_u \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon G(u, v) + D_v \Delta v, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varepsilon \ll 1$  малый параметр, который управляет пространственно-временными масштабами в системе;  $u$  и  $v$  – быстрые и медленные переменные, соответственно;  $\Delta$  – оператор Лапласа в пространственных координатах;  $D_{u,v}$  – коэффициенты диффузии для быстрой и медленной переменных. В нервной и мышечных тканях диффузия медленной переменной отсутствует, то есть  $D_v = 0$  в (1). Функции  $F(u, v)$  и  $G(u, v)$  определяют локальную кинетику системы.

Динамика изолированного элемента среды (в (1)  $D_u = D_v = 0$ ) описывается следующей системой:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u, v), \\ \frac{dv}{dt} = \varepsilon G(u, v). \end{cases} \quad (2)$$

Функции  $F(u, v)$  и  $G(u, v)$ , используемые при моделировании возбудимых сред, качественно представлены на рис. 1. Изоклина  $F(u, v) = 0$  имеет  $N$ -образную

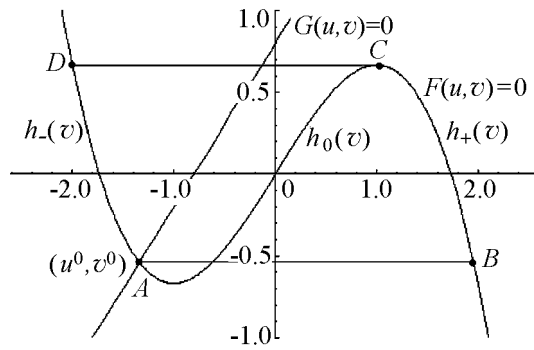


Рис. 1. Фазовый портрет возбудимой системы после подачи внешнего стимула. Изоклины  $F(u, v) = 0$  и  $G(u, v) = 0$ . Маршрут  $ABCD$  соответствует одиночному кратковременному импульсу. Интервал  $AB$  соответствует переднему фронту импульса, интервал  $BC$  – возбужденной части импульса, интервал  $CD$  – заднему фронту импульса и интервал  $DA$  – невозбужденной части импульса

форму. Обозначим левую убывающую ветвь через  $h_-(v)$ , правую убывающую ветвь как  $h_+(v)$  и среднюю возрастающую ветвь как  $h_0(v)$ . Изоклина  $G(u, v) = 0$  монотонная функция и пересекает левую ветвь  $h_-(v)$  изоклины  $F(u, v) = 0$  в одной точке. Обозначим  $v_{\max}$  и  $v_{\min}$  значения в стационарных точках на изоклине  $F(u, v) = 0$ , где достигаются локальные максимальное и минимальное значения переменной  $v$ , соответствующие расположению  $A$  и  $C$  на рис. 1. Единичный элемент среды имеет на пересечении изоклин  $F(u, v) = 0$  и  $G(u, v) = 0$  состояние равновесия  $(u_0, v_0)$ . Это состояние устойчиво по отношению к малым возмущениям. В пространственно-

распределенной системе однородное состояние с координатами  $u = u_0$  и  $v = v_0$  линейно устойчиво. Однако оно может быть неустойчиво к большим возмущениям, которые могут приводить к появлению неоднородного движения. В частности, в зависимости от возмущения можно получить различные возбудимые движения [17]. Будем рассматривать одиночные импульсы в однородной среде, одиночную спираль и спирально-волновой беспорядок.

Для распространяющегося импульса обозначим время возбуждения через  $T_{AB}$ , время гашения через  $T_{CD}$ , длину переднего фронта волны через  $l_{AB}$ , длину заднего фронта волны через  $l_{CD}$ , длину возбужденной части через  $l_{BC}$  и длину невозбужденной части импульса  $l_{DA}$ .

Сначала рассмотрим процессы подавления возбуждения в одномерной модели, а затем продемонстрируем их для двумерной.

## 2. Подавление возбуждения в одномерной среде

Рассмотрим систему (1) в одномерном случае без диффузии медленной переменной. Одиночный элемент описывается моделью Зыкова [18]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F(u, v) + D_u \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon G(u, v), \end{cases} \quad (3)$$

где  $x \in [0, L]$ ,  $L$  – параметр, определяющий размер среды.  $F$  и  $G$  следующие кусочно-линейные функции:

$$F(u, v) = \begin{cases} -k_1 u - v, & u \leq \sigma, \\ k_f(u - a) - v, & \sigma < u < b - \sigma, \\ k_2(b - u) - v, & b - \sigma \leq u, \end{cases} \quad (4)$$

$$G(u, v) = \begin{cases} k_g u - v, & k_g u - v \geq 0, \\ k_\varepsilon(k_g u - v), & k_g u - v < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $k_{1,2}$  – определим из непрерывности функции  $f(u, v) = F(u, v) + v$ , при  $u = \sigma$  и  $u = b - \sigma$ , то есть  $k_1 = -k_f(\sigma - a)/\sigma$ ,  $k_2 = k_f(b - \sigma - a)/\sigma$ .

Рассмотрим систему (3) с функциями (4) и (5) при следующих значениях параметров:  $a = 5$ ,  $b = 20$ ,  $k_f = 0.4$ ,  $k_g = 1.7$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $k_\varepsilon = 6$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . Выберем  $D_u = 1$  и  $L = 35$ , граничные условия считаем периодическими  $u(x + L, t) = u(x, t)$ . Кроме пространственно однородного устойчивого состояния  $u(x, t) = u^0$  и  $v(x, t) = v^0$ , при определенных условиях существует решение в виде распространяющегося импульса. Его форма определяется контуром  $ABCD$  на рис. 2.

Маршрут  $ABCD$  состоит из четырех различных интервалов:

- два участка быстрых движений: передний фронт импульса –  $AB$  и задний фронт импульса –  $CD$ ;
- два участка медленных движений:  $BC$  и  $DA$ , соответствующие возбужденному и не возбужденному состоянию среды, соответственно.

Найдем условия, при которых одиночный импульс может быть подавлен относительно коротким импульсным воздействием. Это может быть достигнуто за счет введения внешней импульсной силы  $e(x, t)$  во второе уравнение системы (3).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F(u, v) + D_u \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon G(u, v) + e(x, t), \end{cases} \quad (6)$$

где

$$e(x, t) = \begin{cases} E_0, & t \in \Delta t, \\ 0, & t \notin \Delta t. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $\Delta t$  – продолжительность внешнего импульса,  $E_0$  – его амплитуда.

Существование малого параметра  $\varepsilon$  в системе (3) позволяет разделить все движения на быстрые и медленные. Медленная переменная  $v(x, t)$  имеет характерное время эволюции  $\tau_v = 1/\varepsilon$ , а быстрая переменная  $u(x, t)$  может значительно измениться в течение намного более короткого промежутка времени. Поэтому для переднего фронта  $AB$  и заднего  $CD$  фронта импульса значения медленной переменной  $v$  в нулевой аппроксимации могут приниматься как константы:  $v_f$  – соответствует переднему фронту и  $v_b$  – соответствует заднему фронту.

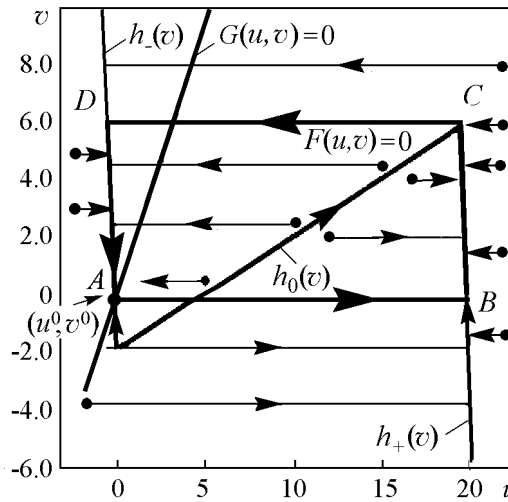


Рис. 2. Фазовый портрет единичного элемента среды при  $\varepsilon = 0.001$ . Маршрут  $ABCD$  соответствует одиночному кратковременному импульсу возбуждения

Если время действия внешнего импульса  $\Delta t$  короче, чем время возбуждения  $T_{AB}$  или время релаксации  $T_{CD}$ , то эти предположения могут быть применены к системе (6). Тогда, после подачи импульса, значение медленной переменной для переднего и заднего фронтов импульса, в нулевой аппроксимации для  $\varepsilon$ , тоже являются константами. Из второго уравнения (6) находим  $v_{f,b}^{imp}$  – значения медленной переменной на переднем и заднем фронтах, соответственно:

$$v_{f,b}^{imp} = v_{f,b} + E, \quad (8)$$

где  $E = E_0 \Delta t$ . В данном случае  $E_0 \Delta t$  – энергия внешнего воздействия. Модель, описывающую эволюцию переднего и заднего фронтов волны, можно представить как

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, v_{f,b}^{imp}) + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (9)$$

В зависимости от величины внешнего импульса будем различать три типа воздействий: слабое, среднее и сильное. В качестве слабого воздействия рассмотрим такой импульс, после подачи которого значение медленной переменной не выходит из интервала  $(v_{\min}, v_{\max})$ . При постоянном значении  $v_{f,b}^{imp}$  уравнение (9) может иметь три пространственно однородных статических состояния с абсциссами

$$u_1^{f,b} = -v_{f,b}^{imp}/k_1 \in h_-(v), \quad u_2^{f,b} = a + v_{f,b}^{imp}/k_f \in h_0(v), \quad u_3^{f,b} = b - v_{f,b}^{imp}/k_2 \in h_+(v), \quad (10)$$

определяемыми уравнением  $\widehat{F} \equiv F(u, v_{f,b}^{imp}) = 0$ , где величина  $V_f^{imp}$  определяет состояние равновесия для переднего фронта волны, а величина  $V_b^{imp}$  определяет состояние равновесия для заднего фронта волны. При среднем внешнем воздействии может существовать только одно пространственно однородное устойчивое статическое состояние, координата которого  $u \in h_-(v)$  или  $u \in h_+(v)$ . При сильном внешнем воздействии устойчивых статических состояний нет.

### 2.1. Подавление возбуждения с помощью слабого внешнего воздействия.

Пусть имеем слабое внешнее воздействие. Будем рассматривать случай когда  $u_1^{f,b} < u_2^{f,b} < u_3^{f,b}$ . Тогда два из этих установившихся состояний  $u_1^{f,b}$  и  $u_3^{f,b}$  устойчивы, а  $u_2^{f,b}$  неустойчиво. Поэтому (9) описывает две стационарные волны переключения:

- волна от  $u_1^f$  до  $u_3^f$ , соответствующая переднему фронту;
- волна от  $u_3^b$  до  $u_1^b$ , соответствующая заднему фронту.

Профили этих волн переключения, распространяющиеся со скоростями  $c_{f,b}$ , являются решениями уравнения

$$-c_{f,b} \frac{du}{d\xi_{f,b}} = F(u, v_{f,b}^{imp}) + D_u \frac{d^2 u}{d\xi_{f,b}^2}, \quad (11)$$

где  $\xi_{f,b} = x - c_{f,b}t$ ,  $c_f$  – скорость переднего фронта,  $c_b$  – скорость заднего фронта. Граничные условия

$$\left. \frac{du}{d\xi_f} \right|_{\xi_f=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{du}{d\xi_f} \right|_{\xi_f=T} = 0 \quad (12)$$

для переднего фронта волны и

$$\left. \frac{du}{d\xi_b} \right|_{\xi_b=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{du}{d\xi_b} \right|_{\xi_b=T} = 0 \quad (13)$$

для заднего фронта волны.

Решение для переднего и заднего фронтов волны может быть найдено при малых значениях  $\sigma$ . Тогда в (11) остается только ветвь  $h_0(v)$

$$F(u, v_{f,b}^{imp}) = k_f(u - a) - v_{f,b}^{imp}. \quad (14)$$

Система (11) с одним из граничных условий (12) или (13) является задачей на собственные числа для единственных значений скорости распространения  $c_{f,b}$ . При этом значения  $v_{f,b}^{imp}$  определяют скорости и направления движения переднего и заднего фронтов распространяющегося импульса. Поэтому кратковременное импульсное воздействие может вызывать изменение значения медленной переменной на переднем и заднем фронтах бегущего импульса, что приводит к изменению скоростей распространения фронтов. Распространение переднего и заднего фронтов с различными скоростями может привести к дестабилизации распространяющегося импульса и переходу в состояние равновесия.

Собственные значения задач (11), (12) и (11), (13) являются комплексно-сопряженными и равны  $p_{1,2}^{f,b} = -c_{f,b}/2 \pm i\sqrt{4k_f - c_{f,b}^2}/2$ .

Тогда, для переднего и заднего фронтов волны получим выражения

$$u(\xi_{f,b}) = e^{\gamma \xi_{f,b}} \left[ A_{f,b}^1 \cos \delta \xi_{f,b} + A_{f,b}^2 \sin \delta \xi_{f,b} \right] + u_2^{f,b}, \quad (15)$$

где  $\gamma = -c_{f,b}/2$ ,  $\delta = \sqrt{4k_f - c_{f,b}^2}/2$ ,  $A_f^1 = u_1^f - u_2^f$ ,  $A_b^1 = u_3^b - u_2^b$ ,  $A_f^2 = ((u_3^f - u_2^f)e^{-\gamma T} - A_f^1 \cos \delta T) / \sin \delta T$ ,  $A_b^2 = ((u_1^b - u_2^b)e^{-\gamma T} - A_b^1 \cos \delta T) / \sin \delta T$ .

Скорости переднего и заднего фронтов

$$c_{f,b}^2 = \frac{4k_f \ln^2 \left( \frac{b}{a_{f,b}} - 1 \right)}{\pi^2 + \ln^2 \left( \frac{b}{a_{f,b}} - 1 \right)}, \quad (16)$$

с продолжительностью

$$T_{f,b} = \frac{1}{\sqrt{k_f}} \sqrt{\pi^2 + \ln^2 \left( \frac{b}{a_{f,b}} - 1 \right)}, \quad (17)$$

где  $a_f = b - a - v_f^{imp}/k_f$ ,  $a_b = a - v_b^{imp}/k_f$  – имеют смысл порогового значения медленной переменной. Таким образом, подавая внешнее воздействие, можно изменять значения медленной переменной на переднем и заднем фронтах импульса и, как следствие, регулировать скорости распространения обоих фронтов (рис. 3).

В зависимости от знака  $E_0$  можно выделить два случая подавления распространяющегося импульса:

- При  $E_0 < 0$  происходит дестабилизация импульса, распространяющегося в среде за счет увеличения возбужденной части ВС и уменьшения невозбужденной части AD (см. рис. 2). Довозбуждение импульса обусловлено замедлением движения заднего фронта и ускорением движения переднего фронта (см. рис. 3).
- При  $E_0 > 0$  происходит дестабилизация импульса, распространяющегося в среде за счет уменьшения возбужденной части BC и увеличения невозбужденной части AD (см. рис. 2). Гашение импульса обусловлено ускорением движения заднего фронта и замедлением движения переднего фронта (см. рис. 3).

Подавление возбуждения возможно, только если амплитуда и продолжительность внешних импульсов достаточно велики. При этом одной из важнейших характеристик является ширина возбужденной части импульса  $l_{BC}$ . Значение  $l_{BC}$  может быть найдено из уравнения для медленных движений следующей системы:

$$\begin{cases} F(u, v) = h_+(v) = 0, \\ -c^* \frac{dv}{d\xi_{f,b}} = \varepsilon G(u, v), \end{cases} \quad (18)$$

где  $c^*$  – скорость распространения невозмущенного импульса.

$$l_{BC} = \frac{\varepsilon}{c^*} \left( 1 + \frac{k_g}{k_2} \right). \quad (19)$$

Для невозмущенного распространяющегося импульса ( $E = 0$ ) скорости переднего и заднего фронтов должны быть равны ( $c_f = c_b$ ). Тогда при фиксированных значениях параметров получаем следующее соотношение медленной переменной для переднего и заднего фронта импульса  $v_b = (b - 2a)k_f - v_f$ . Воспользовавшись этим соотношением, получим выражение для скорости невозмущенного распространяющегося импульса

$$c_{f,b}^2 = \frac{4k_f \ln^2 \left( \frac{a + v_f/k_f}{b - a - v_f/k_f} \right)}{\pi^2 + \ln^2 \left( \frac{a + v_f/k_f}{b - a - v_f/k_f} \right)}. \quad (20)$$

Зная значения ширины возбужденной части импульса и обеих скоростей переднего и заднего фронтов, можно получить оценки продолжительности и амплитуды внешнего импульса, необходимого для подавления всех возбуждений в среде.

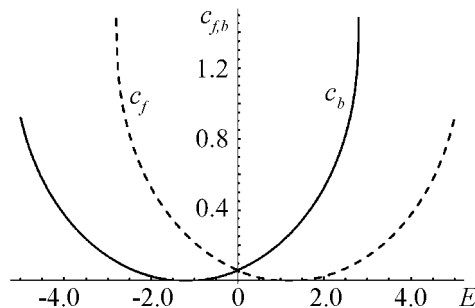


Рис. 3. Скорости переднего  $c_f$  и заднего  $c_b$  фронтов импульса в зависимости от  $E$

Найдем значение  $E_{cr}^T$  такое, что после подачи импульса в систему передний и задний фронты с течением некоторого времени  $T$  достигнут друг друга. В течение этого времени после прекращения подачи импульса в нулевой аппроксимации можно рассматривать новые распространяющиеся значения переднего  $c_f$  и заднего  $c_b$  фронтов как константы. Таким образом, можно найти значение  $E_{cr}^T$ , такое что передний и



задний фронты смогут пройти интервал, равный ширине исходного невозмущенного импульса  $l_{BC}$  в течение времени  $T$ . Оценим критическую величину  $E_{cr}^T$ . Для этого рассмотрим уравнение

$$c_f T + l_{BC} = c_b T, \quad (21)$$

где  $T \leq T_{AB} = l_{AB}/c^*$  и  $l_{BC}$  могут быть найдены из (21). Время, в течение которого возбужденная часть импульса уменьшится до нуля,

$$T = \frac{l_{BC}}{c_b - c_f}. \quad (22)$$

Приближенные значения времени подавления импульса могут быть найдены в зависимости от значения  $E$ , так как величины  $c_b$  и  $c_f$  зависят от  $E$ . Предполагая, что новые скорости возмущенного импульса остаются постоянными в течение времени  $T \leq T_{AB}$ , оценка критической величины  $E_{cr}^T$  после этого распространяющего импульса, может быть получена из (22) при  $T = T_{AB}$ . Аналогичная оценка времени подавления импульса и критической величины амплитуды внешнего воздействия может быть получена для случая довозбуждения импульса. При этом в качестве необходимого условия для подавления импульса, можно рассматривать условие расширения возбужденной части импульса на всю среду. Общее время подавления импульса состоит из

- времени, в течение которого вся среда окажется возбужденной,

$$T_1 = \frac{L - l_{BC}}{c_f - c_b}, \quad (23)$$

где  $L$  – размер среды,

- времени перехода от возбужденного состояния среды к невозбужденному

$$T_2 = T_{CD} + T_{DA}. \quad (24)$$

Таким образом, общее время возбуждения может быть выражено как:  $T_{\text{общ}} = T_1 + T_2$ , что является неявным заданием оценки критической величины  $E_{cr}^T$  при  $T_{\text{общ}} = T_{AB}$ .

**2.2. Подавление возбуждения через параметрическое управление.** Ранее мы использовали системное управление, то есть изменяли позиции в фазовом пространстве системы импульсным воздействием при постоянных значениях параметров среды. Теперь продемонстрируем подавление возбуждения через параметрическое управление, то есть будем изменять значение одного из системных параметров. Возьмем в качестве  $F(u, v)$  и  $G(u, v)$  следующие функции, описывающие модель ФитцХью–Нагумо:

$$F(u, v) = u - \frac{u^3}{3} - v, \quad (25)$$

$$G(u, v) = u - \gamma v + \beta, \quad (26)$$

где  $\beta$  определяет асимметрию между возбуждением и восстановлением для каждого элемента,  $\gamma$  характеризует диссипацию медленной переменной  $v$ . В качестве управляющих параметров рассмотрим релаксационный параметр  $\varepsilon$  и параметр  $\beta$ .

Аналогично предыдущим случаям будем рассматривать только кратковременное импульсное воздействие. Тогда для параметрического  $\varepsilon$ -управления можно записать

$$\varepsilon \equiv \varepsilon(x, t) = \begin{cases} E_0, & t \in \Delta t, \\ 0, & t \notin \Delta t, \end{cases} \quad (27)$$

и для  $\beta$ -управления

$$\beta \equiv \beta(x, t) = \begin{cases} \beta_0 + E_0 t, & t \in \Delta t, \\ \beta_0, & t \notin \Delta t. \end{cases} \quad (28)$$

В (27) и (28)  $E_0$  и  $\Delta t$  имеют тот же смысл, что и ранее. Импульсное изменение параметра  $\beta$  эквивалентно добавлению внешнего импульса  $\varepsilon$  во второе уравнение системы (3). Поэтому теория, рассмотренная ранее, может быть применена для случая параметрического управления. Изменение параметра  $\beta$  приводит к изменению значений медленных переменных в переднем и заднем фронтах распространяющихся волн.

**2.3. Локализованное в одномерной среде импульсное воздействие.** Изменение скоростей переднего и заднего фронтов может быть достигнуто за счет воздействия только на небольшой участок среды, содержащий передний или задний фронт волны. В этом случае импульсное воздействие может быть записано как

$$e \equiv e(x, t) = \begin{cases} E_0, & t \in \Delta t, x \in \Delta x, \\ 0, & t \notin \Delta t, x \notin \Delta x, \end{cases} \quad (29)$$

где  $\Delta t$  – время воздействия,  $\Delta x$  – область воздействия. Так как положения переднего и заднего фронтов соответствуют, например, положениям максимальных значений производных быстрой и медленной переменных, то время и область воздействия могут быть однозначно определены.

### 3. Численные эксперименты

Проведены численные эксперименты для различных значений параметров  $E_0$  и  $\Delta t$ . На рис. 4 представлены численные результаты для различных значений амплитуды  $E_0$  при фиксированной длительности  $\Delta t = 10$  приложенного внешнего импульса. Внешний импульс приложен в момент времени  $t = 0$ . В случае успешного довозбуждения импульса происходит расширение возбужденной части исходного импульса на всю среду, что приводит к его уничтожению и переходу среды в невозбужденное состояние. В случае успешного гашения импульса происходит сужение возбужденной части исходного импульса, что приводит к его уничтожению и переходу среды в невозбужденное состояние. В случае неуспешного подавления значение импульсного воздействия  $E = E_0 \Delta t$  недостаточно для дестабилизации начального импульса. Расширение возбужденной части исходного импульса, продолжающееся и

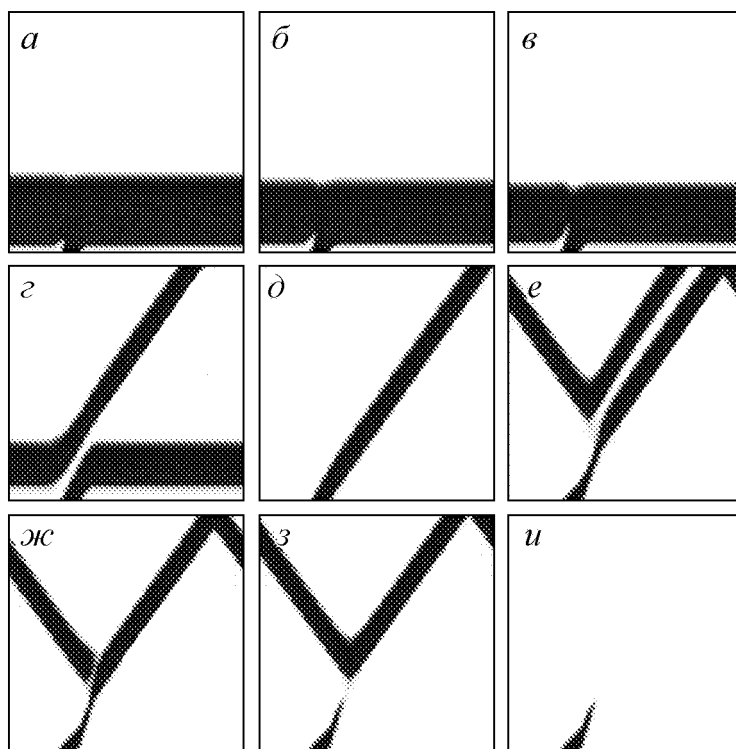


Рис. 4. Пространственно-временные диаграммы эволюции начального импульса (по горизонтали отложена пространственная координата, по вертикали – временная; темным цветом обозначены возбужденные области, светлым – невозбужденные области). Успешное довозбуждение импульса (а–в) при значениях амплитуды  $E_0$ :  $-5.5$  (а),  $-3.5$  (б),  $-2.5$  (в). Успешное гашение импульса (жс–и) при значениях амплитуды  $E_0$ :  $3.5$  (жс),  $3.59$  (з),  $3.6$  (и). Неуспешное подавление (з–е): неуспешное довозбуждение при  $E_0 = -0.5$  (з); невозмущенная модель Зыкова при  $E_0 = 0$  (д); неуспешное гашение при  $E_0 = 3.0$  (е)

после прекращения подачи внешнего воздействия, через некоторое время заканчивается, область возбуждения начинает сужаться и в итоге начальный импульс восстанавливается. Таким образом, подавление распространяющегося импульса возможно, если значение  $E$  больше некоторой критической величины  $E_{cr}^T$ .

#### 4. Подавление возбуждения в двумерной среде

**4.1. Подавление одиночной спиральной волны.** Рассмотрим двумерную модель с импульсным внешним воздействием

$$\begin{cases} c \frac{\partial u}{\partial t} = F(u, v) + D_u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon G(u, v) + e(x, t), \end{cases} \quad (30)$$

со свободными граничными условиями

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0, x=L} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0, y=L} = 0, \quad (31)$$

где  $e(x, t)$  определено системой (7).

Спиральная волна имеет ширину возбужденной части, которая является относительно постоянной вдали от ядра спиральной волны и от границ среды [19]. Предположим, что ширина возбужденной части волны совпадает с шириной импульса, распространяющегося в одномерной среде с тем же набором параметров. Заметим, что эволюция спиральной волны может рассматриваться как движение свободного конца спирали и движение переднего и заднего фронтов спиральной волны. Поэтому внешний импульс, применяемый к одиночной спиральной волне или пространственно-временному беспорядку, приведет к результатам, аналогичным полученным ранее для одномерной среды.

Внешнее воздействие может привести к изменению скорости распространения переднего и заднего фронтов спиральной волны. Таким образом, изменится ширина возбужденной части, что приведет к дестабилизации и уничтожению спиральной волны.

Проведены численные эксперименты для различных значений параметров  $E_0$  и  $\Delta t$ . На рис. 5, 6 представлены результаты расчетов для различных значений амплитуды  $E_0$  при фиксированной длительности приложенного внешнего импульса  $\Delta t = 10$ . Внешний импульс приложен в момент времени  $t = 0$ . В случае успешного довозбуждения происходит расширение возбужденной части импульса, что приводит к переходу среды в возбужденное состояние, дестабилизации и уничтожению спиральной волны и последующему переходу среды в невозбужденное состояние. В случае успешного гашения происходит сужение возбужденной части импульса, что приводит к дестабилизации и уничтожению спиральной волны и переходу среды в невозбужденное состояние.

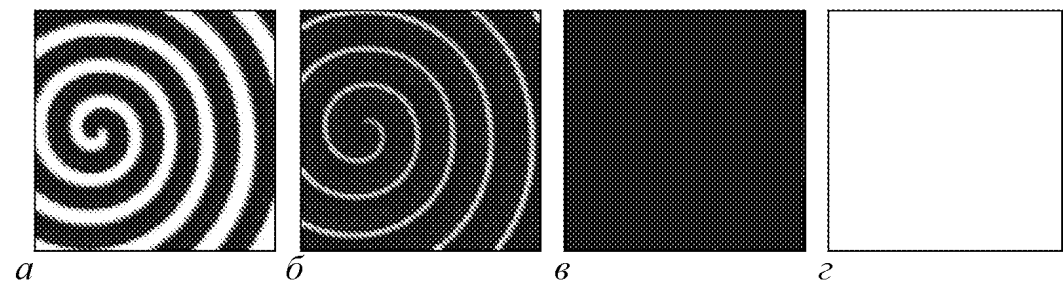


Рис. 5. Мгновенные распределения эволюции начального импульса (по горизонтали отложена пространственная координата  $x$ , по вертикали – пространственная координата  $y$ ; темным цветом обозначены возбужденные области, светлым – невозбужденные области). Довозбуждение импульса при амплитуде  $E_0 = -2.5$  и временах  $t$ : а – 0, б – 4.0, в – 10.0, г – 17.0

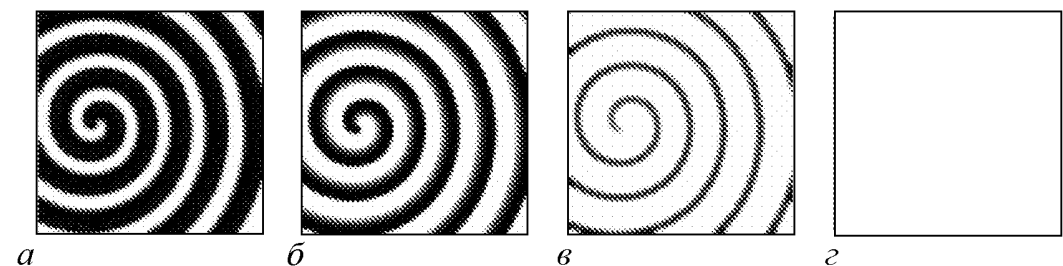


Рис. 6. Мгновенные распределения эволюции начального импульса (по горизонтали отложена пространственная координата  $x$ , по вертикали – пространственная координата  $y$ ; темным цветом обозначены возбужденные области, светлым – невозбужденные области). Гашение импульса при амплитуде  $E_0 = 5.0$  и временах  $t$ : а – 0, б – 2.0, в – 4.0, г – 7.0

**4.2. Подавление спирально-волнового беспорядка.** По схеме, изложенной в предыдущем пункте, были проведены численные эксперименты для различных значений параметров  $E_0$  и  $\Delta t$ . На рис. 7, 8 приведены мгновенные распределения эволюции начального импульса  $u(x, y, 0)$ . В случае успешного довозбуждения происходит расширение возбужденной части импульса, что приводит к переходу среды в возбужденное состояние, дестабилизации и уничтожению спирально-волнового беспорядка и последующему переходу среды в невозбужденное состояние. В случае успешного гашения происходит сужение возбужденной части импульса, что приводит к дестабилизации и уничтожению спирально-волнового беспорядка и переходу среды в невозбужденное состояние.

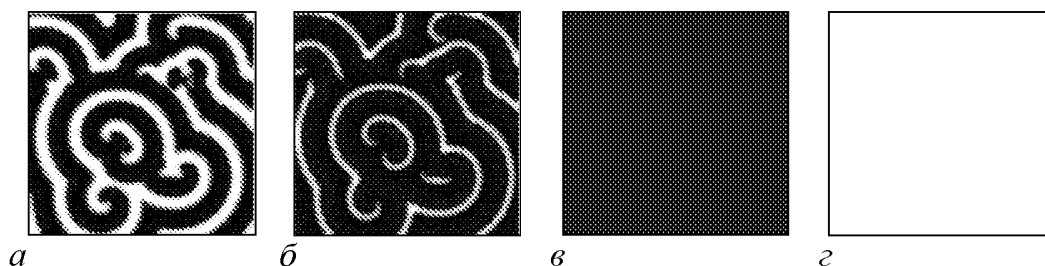


Рис. 7. Мгновенные распределения эволюции начального импульса (по горизонтали отложена пространственная координата  $x$ , по вертикали – пространственная координата  $y$ ; темным цветом обозначены возбужденные области, светлым – невозбужденные области). Довозбуждение импульса при амплитуде  $E_0 = -3.0$  и временах  $t$ :  $a - 0$ ,  $б - 3.0$ ,  $в - 11.0$ ,  $г - 16.0$

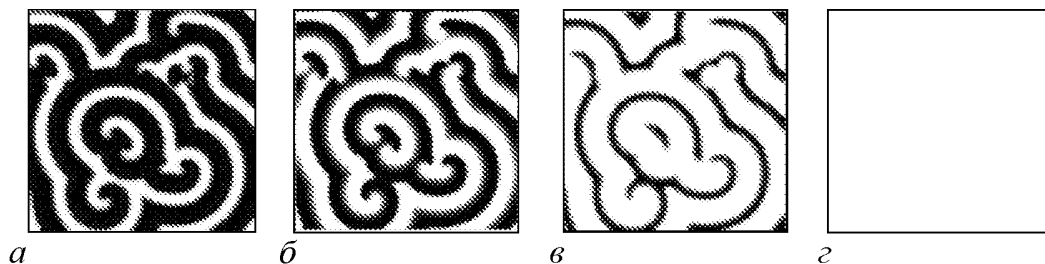


Рис. 8. Мгновенные распределения эволюции начального импульса (по горизонтали отложена пространственная координата  $x$ , по вертикали – пространственная координата  $y$ ; темным цветом обозначены возбужденные области, светлым – невозбужденные области). Гашение импульса при амплитуде  $E_0 = 4.5$  и временах  $t$ :  $a - 0$ ,  $б - 3.0$ ,  $в - 5.0$ ,  $г - 10.0$

### Заключение

В работе предложены способы подавления нестатических состояний в возбудимых средах, таких как распространяющиеся импульсы, одиночная спиральная волна, спирально-волновой беспорядок. Было показано, что короткое импульсное воздействие может вызывать изменение значений медленной переменной переднего и заднего фронтов волн и соответствующее изменение скоростей фронтов. Распространение фронтов с различными скоростями ведет к дестабилизации распространяющегося импульса и переходу среды в невозбужденное состояние. Приведенные методы не требуют постоянного во времени применения воздействия. И в случае

довозбуждения и в случае гашения внешние воздействие не приводит явно к возбуждению или невозбуждению всей среды, а влияет только на передний и задний фронты.

*Теоретические исследования поддержаны грантом РФФ № 14-2-00811. Частично работа поддержана грантом (Соглашение от 27 августа 2013г. № 02.В.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ.)*

#### **Библиографический список**

1. Merkin J.H., Petrov V., Scott S.K., Showalter K. Wave-induced chemical chaos // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, № 3. P. 546.
2. Zimmermann M.G., Firlie S.O., Natiello M.A. et al. Pulse bifurcation and transition to spatio-temporal chaos in an excitable reaction-diffusion model // Physica D. 1997. Vol. 110. P. 92.
3. Резниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии, Ижевск: Институт компьютер. исследований, 2006. 184 с.
4. FitzHugh R.A. Impulses and physiological states in theoretical model of nerve membrane // Biophys. J. 1961. P. 445.
5. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application conduction and excitation in nerve // J. Physiol. 1952. P. 500.
6. Zeeman E.C. Differential equations for the heartbeat and nerve impulses. Mathematical institute, Univer. of Warwick, Coventry, 1972.
7. Востриков В.А., Горбунов Б.Б. Сравнение биполярных импульсов, генерируемых внешними дефибрилляторами // Клиническая анестезиология и реаниматология. 2006. Т. 3, № 6.
8. Елькин Ю.Е., Москаленко А.В. Базовые механизмы аритмий сердца // Клиническая аритмология. Под ред. проф. А.В. Ардашева. М.: ИД Медпрактика-М, 2009. С. 45.
9. Sridhar S., Duy-Manh Le, Yun-ChiehMi, Sinha S., Pik-Yin Lai, Chan C.K. Suppression of cardiac alternans by alternating-period-feedback stimulations // Physical Review. Vol. 2013. Vol. 87, № 4. 042712.
10. Konishi K., Takeuchi M., Shimizu T. Design of external forces for eliminating traveling wave in a piecewise linear FitzHugh–Nagumo model // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2011. Vol. 21, № 2. 023101.
11. Sakurai T., Mihaliuk E., Chirila F., Showalter K. Design and control of wave propagation patterns in excitable media // Science. 2009(2002). Vol. 296, № 5575; Vilas C., Garcia M.R., Banga J.R., Alonso A.A. Robust feed-back control of distributed chemical reaction systems // Chemical engineering science. 2007. Vol. 62, № 11. P. 2941.
12. Yoneshima H., Konishi K., Kokame H. Symposium on nonlinear theory and its applications // Chaos: Proceedings of the International. 2008. Vol. 21, № 2. 023101.
13. Guo W., Qiao C., Zhang Z., Ouyang Q., Wang H. Spontaneous suppression of spiral turbulence based on feedback strategy // Physical Review. 2010. Vol. 81. 056214.
14. Sakaguchi H., Nakamura Y. Sample entropy of GPI neurons dependence on the level of alertness in 6OHDA rats // Journal of the Physical Society of Japan. 2010.

Vol. 79. 074802.

15. Luther S., Fenton F.H., Kornreich B.G., Squires A., Bittihn P. Low-energy control of electrical turbulence in the heart // Nature. 2011. Vol. 475, № 7355. 235-9.
16. Tandri H., Weinberg S.H., Chang K.C., Zhu R., Trayanova N.A., Tung L., Berger R.D. Reversible cardiac conduction block and defibrillation with high-frequency electric field // Science Translational Medicine. 2011. Vol. 3, № 102. 102ra96.
17. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 272 с.
18. Zykov V.S., Mikhailov A.S., Muller S.C. Controlling spiral waves in confined geometries by global feedback // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78.
19. Гулько А.Б., Петров А.А. Механизм образования замкнутых путей проведения в возбудимой среде // Биофизика. 1972. Т. 17, вып. 2. 270 с.

Поступила в редакцию 30.01.2014

После доработки 7.04.2014

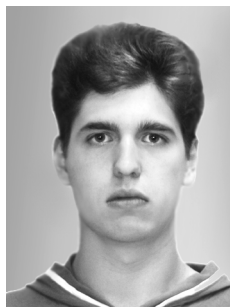
## THE SUPPRESSION OF THE EXCITATION OF THE ACTIVE MEDIUM WITH A WEAK EXTERNAL ACTION

*I. I. Bastrakov, K. A. Gavrilova, S. A. Grigorieva, G. V. Osipov*

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod

This paper presents two new methods of suppressing an impulse in one-dimensional and two-dimensional excitable media using an external influence. In the proposed methods, we used short-impulse influence, leading to a change in velocity of the front, which in turn led to the destabilization of the propagating impulse and transition medium unexcited state. The studies were conducted on the Zykov model that a certain set of parameters is a model of an excitable medium. The conditions were determined for the amplitude and duration of the external influences required for suppressing excitation.

*Keywords:* Nonlinear dynamics, active medium, spiral waves, Zykov model, excitation waves.



*Бастраков Илья Иванович* – родился в 1992 году в Омутнинске. Получил степень бакалавра прикладной математики и информатики в 2013 году в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского. С 2013 года проходит обучение в магистратуре по специальности «Математическое моделирование» факультета ВМК ННГУ. Выполнял исследования по проектам ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы». Им опубликовано 3 тезиса научных конференций.

603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 23  
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского  
E-mail: [ilya.bastrakov@gmail.com](mailto:ilya.bastrakov@gmail.com)



*Гаврилова Ксения Андреевна* – родилась в 1992 году в Дзержинске. Получила степень бакалавра прикладной математики и информатики в 2013 году в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского. С 2013 года проходит обучение в магистратуре по специальности «Математическое моделирование» факультета ВМК ННГУ. Выполняла исследования по проектам ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы». Ею опубликовано 2 тезиса научных конференций.

603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 23  
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского  
E-mail: gavrilovakseniaan@gmail.com



*Григорьева Светлана Анатольевна* – окончила механико-математический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского с дипломами бакалавра (2006) и магистра (2008) математики. В 2008–2011 проходила обучение в аспирантуре на факультете Вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского по специальности «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление». С 2008 года ассистент кафедры Теории управления и динамики машин факультета ВМК ННГУ. Участвует в разработке курса Methods of optimization для иностранных студентов 3-го курса специализации Information Technologies. Выполняет исследования по российским и международным проектам: ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы». Принимала участие в работе российских и международных научных коллективов под руководством: проф. J. Suykens из Католического университета г. Левена, Бельгия; проф. С.К. Chan из Тайваньской Академии наук Sinika, Тайвань; проф. И.Р. Ефимова из Вашингтонского университета, США; проф. J. Kurths из Потсдамского института исследования климата, Германия. Научные исследования С.А. Григорьевой проводятся по математическому моделированию и оптимальному управлению динамики сложных систем. Ею опубликовано 7 научных трудов из них: 5 тезисов научных конференций, 1 методическая работа, также 1 статья в журнале Прикладной нелинейной динамики (ВАК).

603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 23  
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского  
E-mail: sv.grigoryeva@gmail.com



*Осипов Григорий Владимирович* – родился в 1960 году. Является высококвалифицированным преподавателем и выполняет все виды педагогической работы: читал лекции по общим курсам «Классическая механика» и «Теория колебания», ведет практические и лабораторные занятия, руководит курсовыми и дипломными работами студентов. Разработал специальные курсы «Синхронизация, структуры и хаос в нелинейных дискретных средах», «Численные методы в исследовании нелинейных систем» и «Возбудимые среды: динамика и управление». Опубликовал более 120 научных работ, а за последние 5 лет – 30 работ в ведущих отечественных и зарубежных журналах и в сборниках материалов нескольких международных конференций, на которых выступал с докладами в качестве приглашенного лектора. В 2004 году защитил докторскую диссертацию по теме «Синхронизация в неоднородных ансамблях локально диффузионно связанных регулярных и хаотических осцилляторов». За последние пять лет участвовал в выполнении двух международных (INTAS) и пяти российских (РФФИ) научных проектов (в трех из них – в качестве руководителя). Работал по приглашениям, в том числе как приглашенный профессор, зарубежных университетов в Дармштадте, Леувене, Тайбее, Потсдаме, Вене, Гонконге, Ланкастере и Бостоне.

603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 23  
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского  
E-mail: grosipov@gmail.com