Изв.вузов «ПНД», т. 2, № 2, 1994 УДК 534.1+ 538.56

О ДИНАМИКЕ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В СОЦИОЛОГИИ

С.Я. Вышкинд, А.А. Деветьярова

Рассматриваются две нелинейные динамические системы третьего порядка, предлагаемые в качестве математических моделей распространения информации в обществе, состоящем из трех групп индивидуумов разного типа – тех, до которых информация еще не дошла, но, получив, они передадут ее другим; тех, кто владеет информацией и активно распространяет ее, и тех, кто, обладая информацией, не желает или не имеет возможности передавать ее другим. Исследуются структура фазового пространства моделей, бифуркации, приводящие к смене режимов, особенности и характеристики различных режимов. Полученные результаты, интерпретированные с точки зрения социологии, могут представлять интерес как при изучении распространения идей, так и при анализе механизмов формирования общественного мнения.

Попытки применения методов нелинейной динамики в социальных науках приводят к осознанию общих проблем методологии этих наук, но не решают их автоматически. Поэтому гипотезы, обусловливающие применимость этих методов не претендуют на статус универсальных истин, а выведенные из них заключения хотя и могут быть полезными, но их нельзя рассматривать как некие теоремы об обществе. Очень важным, если не основным, при моделировании является выбор переменных. Большинство переменных, составляющих основу физики, потребовали для их нахождения сотен лет. Такие физические переменные, как, например, «энергия», «импульс», "заряд", "температура» и т.д. не были очевидными и только их великолепная согласованность и успешность применения позволили неявно скрытой в них точке зрения на мир стать доминирующей в науке. Благодаря им мир выглядит для нас совсем не таким, каким он выглядел для ученых средневековья. Подобное же существенное изменение величин, используемых в мышлении, имело место и в социальных науках. Как бы ни провозглашали себя различные теории «научными» или «объективными», для выбора модели решающей остается идеология (парадигма, мировоззрение). Вопрос заключается в том, какие переменные *действительно* описывают систему; детали же того, *как* связаны между собой эти переменные, почти второстепенны. Таким образом, любая социологическая модель, словесная или математическая, всегда неявно несет в себе идеологию. Все вышесказанное не означает, что наука здесь не может эффективно продвигаться вперед, скорее это указывает на то, что критика в адрес любой математической модели должна различать возражения к идеологии и к математике в большей мере, чем это было принято до сих пор. Прекрасные примеры такого подхода можно найти в [1].

В задачах, возникающих в социологии, многие из управляющих параметров неизвестны и «неуправляемы». Помочь здесь может лишь лучшее понимание влияния «лишних» параметров или анализ моделей, учитывающих большее их количество или дополнительные связи. Такой подход и применен в данной работе, где сделана попытка описать особенности распространения информации в обществе. Подобные задачи рассматривались, в частности, Дж. Николисом [2] с применением вероятностного анализа системы связанных линейных разностных уравнений. Известно также использование для решения социологических задач теории катастроф [1,3].

Нашей целью была попытка подобрать или составить математическую модель, с помощью которой можно было бы проследить, в частности, за распространением в обществе некоторой информации или идеи. В этой связи можно было бы говорить и о механизмах формирования общественного мнения, поскольку отношение к идее, суждению, утверждению и т.п. определяется полнотой имеющейся информации, степенью ее правдивости, доверием к ней, умением оценить ее привлекательность или неприемлемость, а также влиянием отношения к ней других людей. Для этого была принята исходная гипотеза о том, что общество может быть представлено тремя группами людей разного типа, количество которых и принято в качестве переменных X, Y, Z, где группа X – люди, до которых информация еще не дошла, но они поделятся ею с другими, как только получат ее; группа Y – люди, до которых информация дошла, и которые активно распространяют ее среди других; группа Z – люди, получившие информацию, но либо не желающие передавать ее, либо не имеющие возможности передать информацию другим, однако, не противодействующие ее распространению.

В качестве параметров были приняты следующие: P, Q, R – весовые (масштабные) коэффициенты; α – параметр, характеризующий влияние людей типа X на людей типа Y. Это могут быть, в частности, комментарии, в том числе искажающие или опровергающие передаваемую информацию, влияющие на отношение к последней или на принятие решений. Поэтому параметр α – может принимать как положительные, так и отрицательные значения. При этом изменение количества индивидуумов в каждой группе можно описать, в частности, такими динамическими системами:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -PX + Y + Z \\ \dot{Y} &= -QY + \alpha X - XZ \\ \dot{Z} &= -RZ + XY \end{aligned} \qquad (1) \quad \text{и} \quad \begin{aligned} \dot{X} &= -PX + Y + YZ \\ \dot{Y} &= -QY + \alpha X - XZ \\ \dot{Z} &= -RZ + XY. \end{aligned} \qquad (2)$$

Первые слагаемые ($-PX$, $-QY$, $-RZ$) в правых частях (1) и (2) описывают уменьшение количества индивидуумов в каждой из рассматриваемых групп. Действительно, сам процесс распространения информации «изымает» из сообщества (коллектива, группы) некоторое количество его членов. К примеру, если часть индивидуумов из группы X получает информацию, то тем самым уменьшается общее число ее членов, т.е. тех, до кого эта информация еще не дошла, причем уменьшается тем больше, чем больше получивших информацию. И так в группах всех типов. Однако, сокращение состава одной группы одновременно увеличивает количество других. Это обстоятельство описывается в системах (1) и (2) «перекрестными», «чужими» слагаемыми (Y в правой части уравнений для X и αX в уравнениях для Y). Произведение XY в правой части уравнений для Z означает, что состав группы людей типа Z пополняется как за счет X, так и Y. Это соответствует принятой гипотезе о типах людей в группах. Нелинейный член XZ в правой части уравнений для Y также очевиден, он описывает уменьшение этой группы при возрастании количества «необремененных» информацией или нераспространяющих ее людей. Наконец, последнее слагаемое, которое и различает системы (1) и (2). Очевидно, что группа неосведомленных людей (X) может пополняться не только за счет распространителей информации (Y), но и теми, кто не препятствует распространению (Z). При этом в системе (1) эта зависимость учтена линейным, пропорциональным образом, а в (2) – нелинейно.

Разнообразие режимов моделей (1) и (2) определяется структурой их фазового пространства, типом, устойчивостью, расположением состояний равновесия, предельных циклов, других аттракторов.

Поскольку различие между системами (1) и (2) состоит в одном из слагаемых правой части уравнений для X, т.е. в характере зависимости изменения числа людей из группы X от количества людей из группы Z (линейной в системе (1) и нелинейной в (2)) можно оценить роль и влияние взаимодействия между людьми на процесс распространения информации.

Легко видеть, что в системах (1) и (2) в зависимости от параметров существует разное число состояний равновесия (с.р.).

Анализ системы (1) показывает, что

а) единственное устойчивое в нуле с.р. $O_0(0,0,0)$ существует при $Q > (\alpha/P)(1+ \alpha/4PR)$;

б) по два с.р. $O_0(0,0,0)$ и $O_1(X_{10} = \alpha/2P,\ Y_{10},\ Z_{10})$ существуют при $Q = (\alpha/P)(1+\alpha/4PR)$; $O_0(0,0,0)$ и $O_2(X_{20} = \alpha/P,\ Y_{20},\ Z_{20})$ существуют при $Q = \alpha/P$;

в) три с.р. $O_0(0,0,0)$, $O_1(X_{10},\ Y_{10},\ Z_{10})$ и $O_2(X_{20},\ Y_{20},\ Z_{20})$ существуют при $Q < (\alpha/P)(1+\alpha/4PR)$, причем здесь O_1 и O_2 – несимметричны.

Тип и устойчивость с.р. определяется расположением корней характеристического уравнения

$$\begin{aligned}&\lambda^3 + \lambda^2(P+Q+R) + \lambda(QR + PR + PQ-\alpha+X_{i0}-Y_{i0}+Z_{i0}) + \\ &+ (PQR + X_{i0}Y_{i0} + X_{i0}Z_{i0} -\alpha X_{i0} + PX_{i0} - QY_{i0} + RZ_{i0}-\alpha R) = 0,\end{aligned} \tag{3}$$

где X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0}, $i = 0, 1, 2$ – координаты соответствующего с.р.

Далее с помощью ПЭВМ было проведено разбиение плоскости параметров (α, Q) на области с различным типом с.р. Результаты этого разбиения приведены на рис. 1, при этом использовались следующие обозначения: A – неустойчивый узел; B – устойчивый узел; C – седло (с $\dim W_s = 1$, $\dim W_u = 2$); D – седло (с $\dim W_s = 2$, $\dim W_u = 1$); E – неустойчивый фокус; F – устойчивый фокус; G – седло–фокус. Символы «.» (точка) и «III» (вертикальные линии) обозначают отсутствие с.р. при соответствующих значениях параметров.

Аналогичный анализ системы (2) приводит к следующим результатам:

а) единственное устойчивое в нуле с.р. $O_0(0,0,0)$ существует при $Q>(1+\alpha)^2/4P$;

б) три с.р. $O_0(0,0,0)$ и $O_{1,2}$ $(\pm X_0,\ \pm Y_0,\ \pm Z_0)$ существуют при $Q< \alpha/P$ и $Q=(1+\alpha)^2/4P$;

в) пять с.р. $O_0(0,0,0)$, $O_{1,2}$ $(\pm X_{10},\ \pm Y_{10},\ \pm Z_{10})$ и $O_{3,4}(\pm X_{20},\ \pm Y_{20},\ \pm Z_{20})$ существуют при $Q> \alpha/P$.

Тип и устойчивость этих с.р. определяются расположением корней характеристического полинома

$$\begin{aligned}&\lambda^3 + \lambda^2(P+Q+R) + \lambda(QR + PR + PQ - \alpha Z_{i0} + Z_{i0} - \alpha + X_{i0}^2 - Y_{i0}^2 + Z_{i0}^2) + \\ &+ (PQR + X_{i0}Y_{i0} + \alpha + PX_{i0}^2 + 2X_{i0}Y_{i0}Z_{i0} - \alpha R + RZ_{i0} + RZ_{i0}^2 - \alpha RZ_{i0} - QY_{i0}^2) = 0,\end{aligned} \tag{4}$$

где X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0}, $i = 0, 1, 2$ – координаты соответствующего с.р.

При фиксированных $P = 10.00$ и $R = 2.66$ расположение корней (4) в зависимости от α, Q представлено на рис. 2. На основании этого разбиения были изучены различные режимы и бифуркации, приводящие к их смене. Так, в частности, в интервале $-40.00 < \alpha < -14.00$ в системе (2) наблюдался режим метастабильного хаоса, который можно описать как наличие странного аттрактора и ненулевую вероятность перехода к стационарному состоянию или предельному циклу, причем, продолжительность «хаотической фазы» зависит от начальных условий.

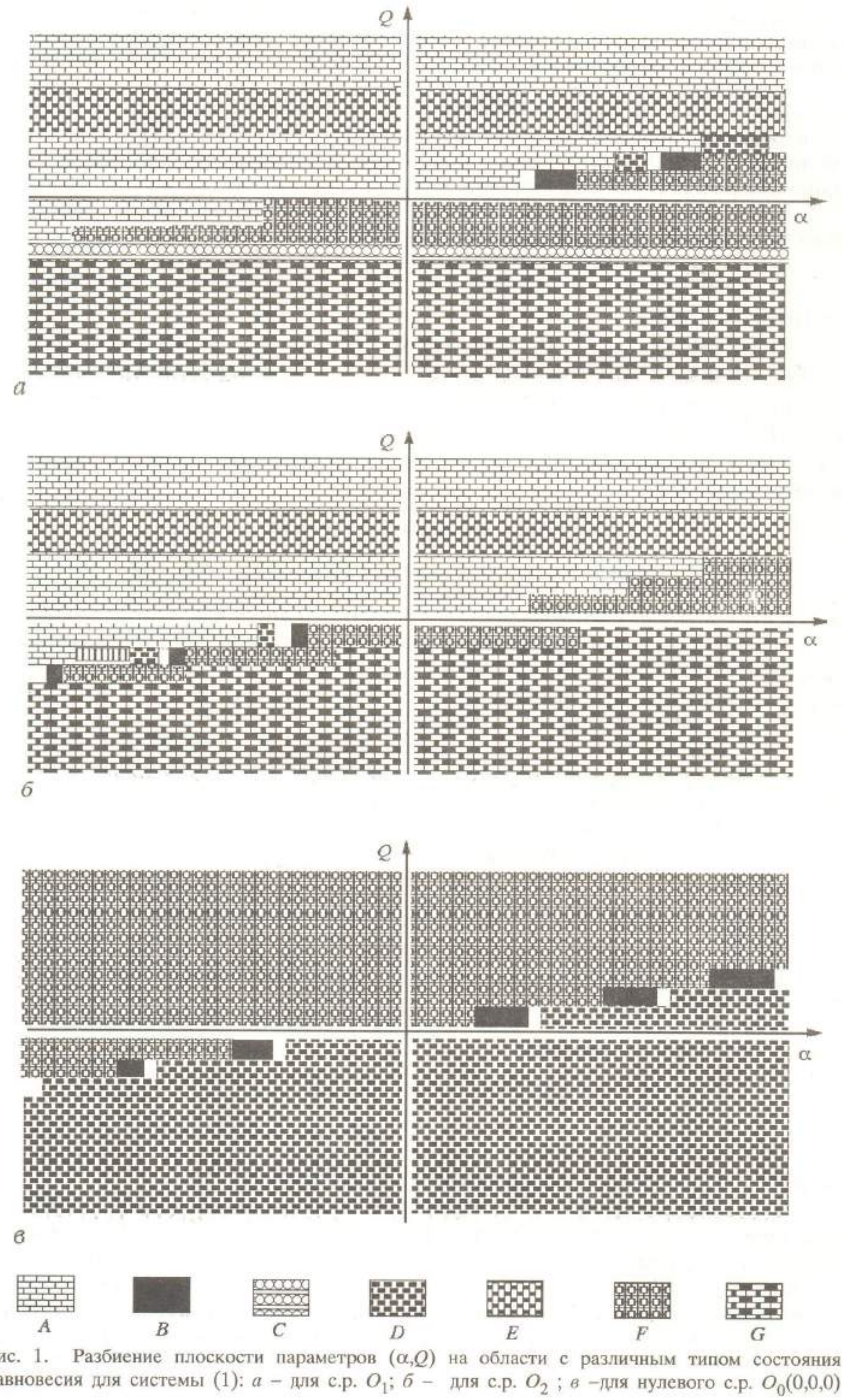


Рис. 1. Разбиение плоскости параметров (α, Q) на области с различным типом состояния равновесия для системы (1): *а* – для с.р. O_1; *б* – для с.р. O_2; *в* –для нулевого с.р. $O_0(0,0,0)$

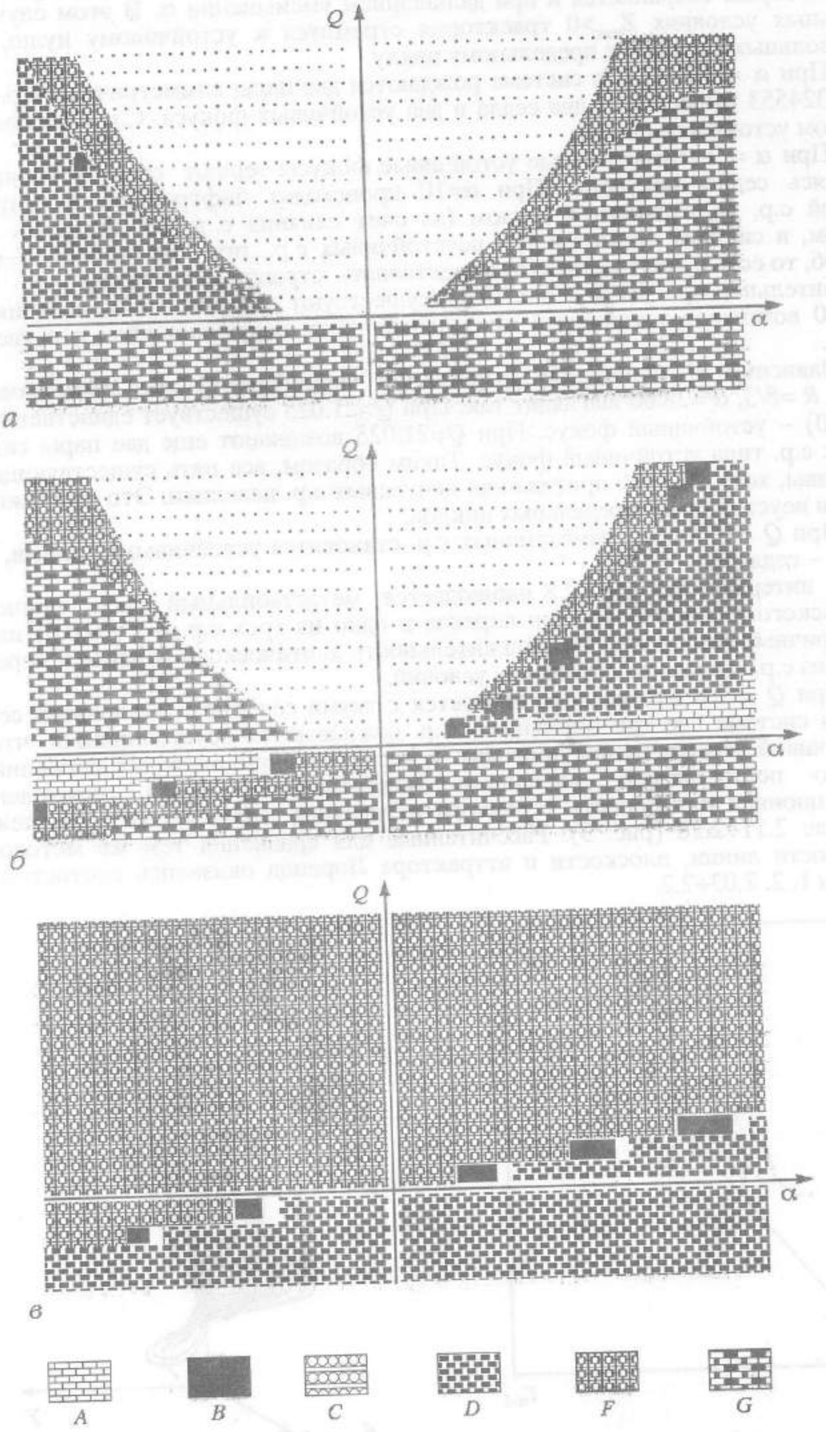


Рис. 2. Разбиение плоскости параметров (α,Q) на области с различным типом состояния равновесия для системы (2): *а* – для с.р. $O_{1,2}$; *б* – для с.р. $O_{3,4}$; *в* –для нулевого с.р. $O_0(0,0,0)$

При α=–40.00 из замкнувшейся петли сепаратрисы возникает предельный цикл, который сохраняется и при дальнейшем уменьшении α. В этом случае при начальных условиях $Z_{нач}>0$ траектория стремится к устойчивому нулю, а при произвольных $Z_{нач}<0$ – к предельному циклу.

При α = 5.324553 в системе рождаются две пары симметричных с.р., и при α > 5.324553 существуют два седла и два устойчивых фокуса. С.р. O_0 становится при этом устойчивым узлом.

При α = 9 симметричные устойчивые фокусы теряют свою устойчивость, становясь седло–фокусами. При α=10 происходит бифуркация, в результате которой с.р. O_0 становится седлом (за счет слияния с двумя седлами). Таким образом, в системе остаются три неустойчивых с.р., при этом $\mathrm{div}U=-P-Q-R$ = =–13.66, то есть в системе может существовать странный аттрактор.
Действительно, при 10.00 < α < 40.00 существуют хаотические колебания. При α=40.00 возникает устойчивый предельный цикл, сохраняющийся и с увеличением α.

Зависимость поведения системы от параметра Q при фиксированных P = 10, R =8/3, α =28.00 выглядит так. При Q>21.025 существует единственное с.р. $O_0(0,0,0)$ – устойчивый фокус. При Q=21.025 возникают еще две пары симметричных с.р. типа устойчивый фокус. Таким образом, все пять существующих с.р. устойчивы, хотя области притяжения ненулевых с.р. невелики. Это возможно при наличии неустойчивых предельных циклов.

При Q =19.5 два симметричных с.р. становятся устойчивыми узлами, а при Q=19.1 – седлами.

В интервале 5.5< Q< 2.8 наблюдается метастабильный хаос, причем из хаотического режима возможен переход в одно из трех с.р. – $O_0(0,0,0)$ или два симметричных ненулевых. Продолжительность хаотического режима и переход к одному из с.р. зависят от начальных условий.

При Q = 2.8 нулевое с.р. сливается с двумя седлами и становится седлом. Вновь в системе все три оставшихся с.р. оказываются неустойчивыми, что при неустойчивой бесконечности приводит к возникновению сложных движений, что и было подтверждено численным экспериментом. Была определена и корреляционная размерность странного аттрактора, значение которой лежит в интервале 2.11÷2.28 (рис. 3). Рассчитанные для сравнения тем же методом [4] размерности линии, плоскости и аттрактора Лоренца оказались соответственно равными 1, 2, 2.03÷2.2.

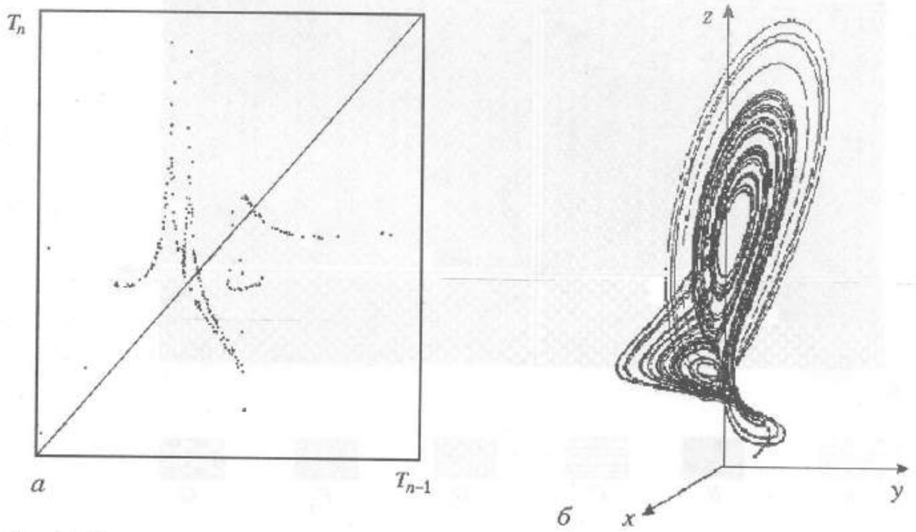


Рис. 3. Один из стохастических режимов системы (2) при Q = 2.80, P=10.00, R =2.67, α = 28.00, X = 13.00, Y = 13.00, Z = 13.00: *а* – точечное отображение; *б* – странный аттрактор с корреляционной размерностью 2.11÷2.28

При $Q< 0$ в системе существуют 5 неустойчивых состояний равновесия, а при $-13.66 < Q< 0$ неустойчива и бесконечность, что вновь делает возможным существование странного аттрактора. При $Q=-4.0$ и при дальнейшем его уменьшении появляется устойчивый предельный цикл, который теряет устойчивость при $Q=-13.0$, передавая ее бесконечности.

Для различных наборов значений параметров систем (1) и (2) были построены точечные отображения в себя секущей плоскости z = const. Некоторые из полученных функций последования и соответствующие им фазовые портреты приведены на рис. 4–7, где указаны значения параметров и начальных условий для представленных режимов.

Интерпретируем полученные результаты и обсудим разнообразие режимов рассмотренных математических моделей с точки зрения задачи о распространении информации в обществе.

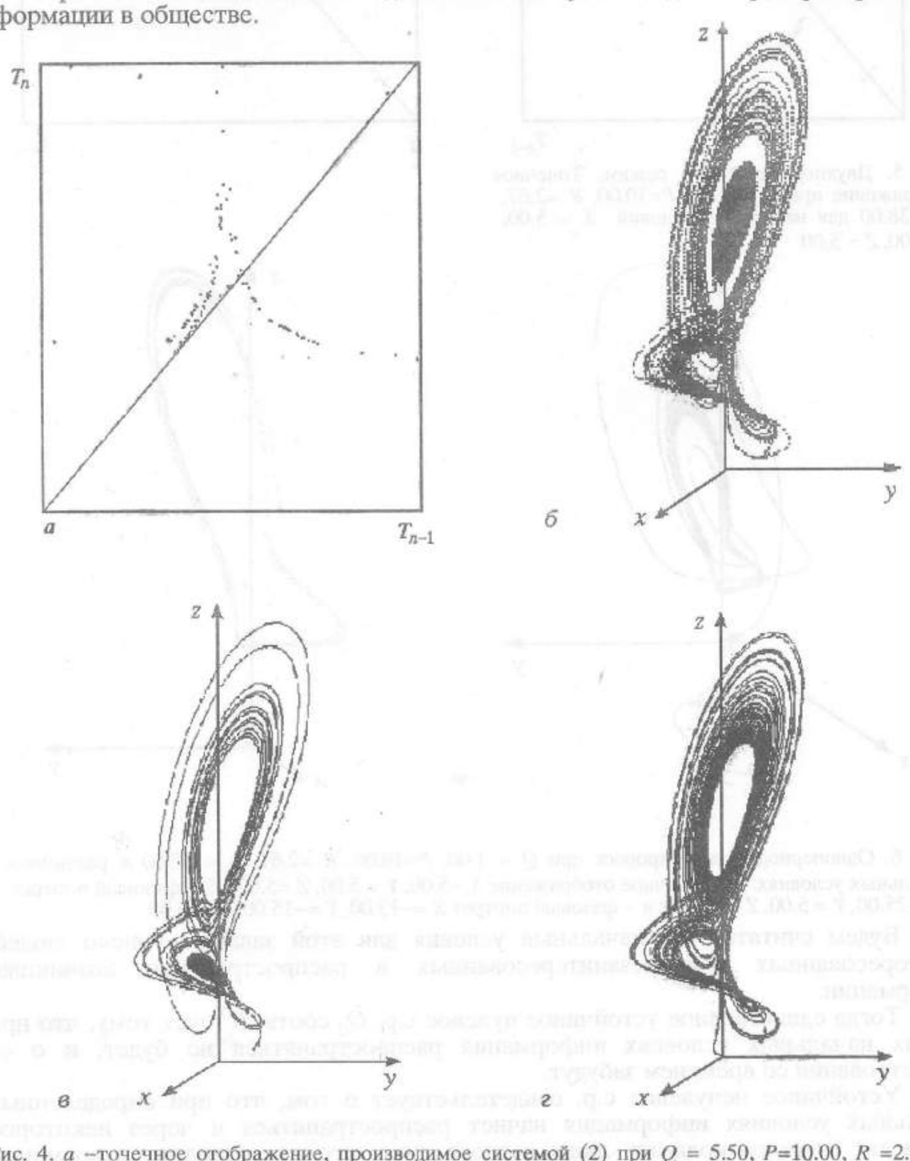


Рис. 4. *а* –точечное отображение, производимое системой (2) при Q = 5.50, P=10.00, R =2.67, α = 28.00, X = 13.00, Y = 13.00, Z = 13.00; фазовые портреты (2) при тех же значениях параметров и различных начальных условиях: *б* – X = 13.00, Y = 13.00, Z = 13.00; *в* – X = 14.00, Y = 14.00, Z = 14.00; *г* – X = 15.00, Y = 15.00, Z = 15.00

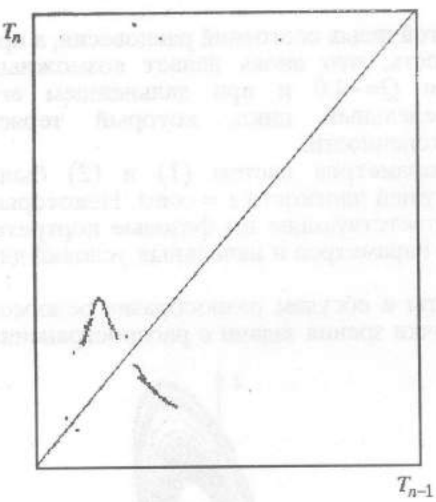
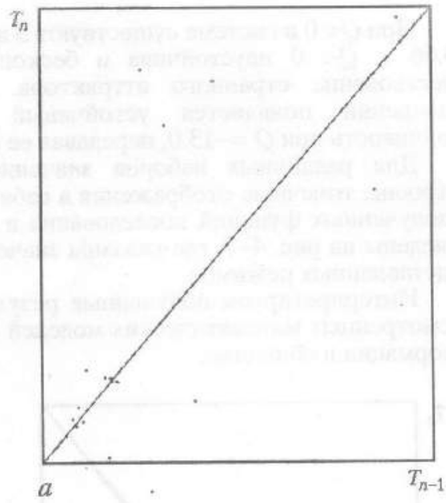


Рис. 5. Двухпериодический режим. Точечное отображение при Q = 1.00, P=10.00, R =2.67, α = 38.00 для начальных условий X = 5.00, Y= 5.00, Z = 5.00



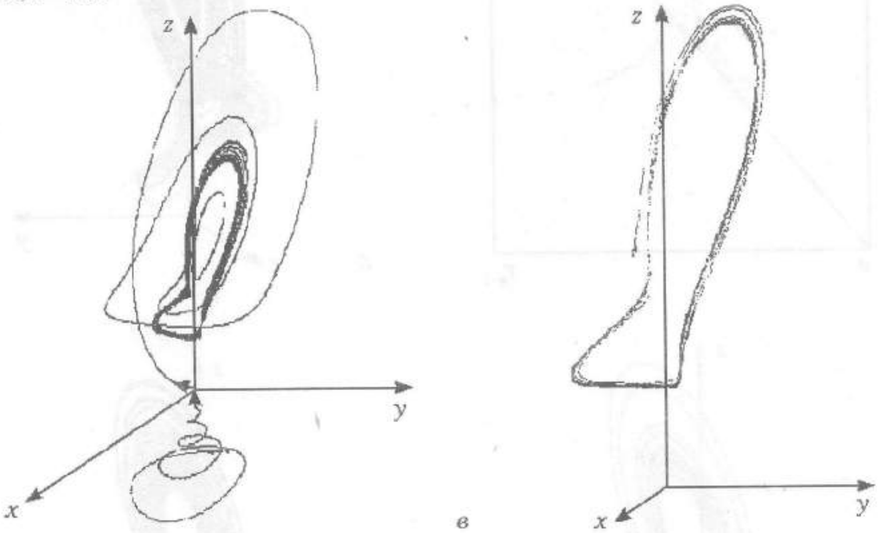
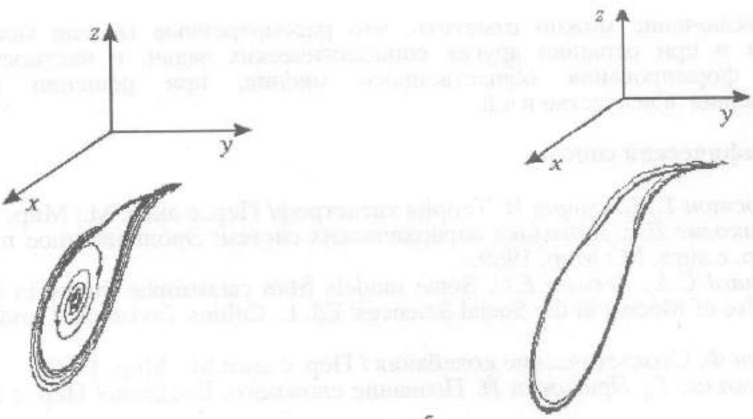


Рис. 6. Однопериодический процесс при Q = 1.00, P=10.00, R =2.67, α = 50.00 и различных начальных условиях: *а* – точечное отображение X =5.00, Y = 5.00, Z =5.00; *б* – фазовый портрет X =–25.00, Y = 5.00, Z =–49.00; *в* – фазовый портрет X =–13.00, Y =–15.00, Z =40.00

Будем считать, что начальные условия для этой задачи – число людей, заинтересованных или незаинтересованных в распространении возникшей информации.

Тогда единственное устойчивое нулевое с.р. O_0 соответствует тому, что при любых начальных условиях информация распространяться не будет, и о ее существовании со временем забудут.

Устойчивое ненулевое с.р. свидетельствует о том, что при определенных начальных условиях информация начнет распространяться и через некоторое время ею будут располагать люди разного типа, что не позволит со временем забыть о ней.



а *б*

Рис. 7. Фазовые портреты системы (2) для $\alpha < 0$, построенные при $Q = 1.00$, $P=10.00$, $R=2.67$, $\alpha=-50.00$ для различных начальных условий: *а* – $X = 25.00$, $Y = -5.00$, $Z = -49.00$; *б* – $X = 6.00$, $Y = 7.00$, $Z = -40.00$

Наличие трех с.р. соответствует «жесткому» режиму распространения информации, то есть режиму, для развития которого необходимо преодоление некого порога (при устойчивости нулевого и одного из ненулевых с.р.). Если же устойчивы оба ненулевых с.р., то имеет место конкуренция, то есть при определенных начальных условиях некоторое количество людей разных типов будет считать информацию ложной, а при других начальных условиях другое количество представителей разных групп будет считать ее правдивой. Если же иметь в виду распространение идей, то этот режим можно понимать, как разделение общества на группы, принявшие разные идеи.

Наличие в системе режима метастабильного хаоса свидетельствует о том, что прежде, чем информация перестанет распространяться и ее забудут (в случае перехода к $O_0(0,0,0)$), какое–то время, зависящее от начальных условий, она будет бурно обсуждаться в обществе. При переходе в одно из симметричных с.р. информация с положительным или отрицательным знаком будет сохраняться в обществе.

Хаос, возникающий в системе, соответствует распространению информации самым произвольным образом, причем с постоянно меняющимся мнением о ней.

Если же все состояния равновесия неустойчивы (при устойчивой бесконечности), то можно сказать, что при любых начальных условиях информация распространяется до тех пор, пока о ней не узнают все. Итак, анализ ситемы (1) показал возможность предсказания характера распространения информации и оценки ее правдивости или ложности.

С учетом нелинейного влияния тех, кто не хочет или не может распространять информацию, и тех, кто ее активно распространяет на людей, до которых она еще не дошла (см. систему (2)), возможны следующие ситуации. Возникновение режима метастабильного хаоса (активное распространение информации, обрастание ее какими–то новыми фактами, домыслами и т.д.) через некоторое время, зависящее от начальных условий и весовых коэффициентов, может привести к забвению информации либо к ее сохранению в исходном или искаженном вариантах. Установление хаотического режима свидетельствует о том, что распространение информации предсказать невозможно. Через некоторое время после возникновени‹ информации о ее первоначальном смысле забывают, но постоянно изменяют, дополняют, в результате чего число утверждающих, что информация правдива или ложна, меняется самым произвольным образом.

Можно предположить, что система (1) с некоторой точностью описывает процессы распространения информации, которая не влияет существенным образом на жизнь людей. Система же (2) описывает (также с некоторой степенью адекватности) распространение очень важной информации, от правдивости которой может, к примеру, зависеть благосостояние людей.

В заключение можно отметить, что рассмотренные модели могут быть полезными и при решении других социологических задач, в частности, при изучении формирования общественного мнения, при решении вопросов цензурирования в искусстве и т.п.

Библиографический список

1. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф/ Пер. с англ. М.: Мир, 1980.

2. *Николис Дж.* Динамика иерархических систем: Эволюционное представ- ление / Пер. с англ. М.: Мир, 1989.

3. *Isnard C.A., Zeeman E.C.* Some models from catastrophe theory in the social sciences// Use of Models in the Social Sciences/ Ed. L. Collins.Tavistock, London, 1976. P. 44.

4. *Мун Ф.* Стохастические колебания / Пер. с англ.М.: Мир, 1989.

5. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. Введение/ Пер. с англ. М.: Мир, 1990.

Нижегородский государственный университет

Поступила в редакцию 17.12.93
после переработки 7.02.94

ON DYNAMICS OF SOME MATHEMATICAL MODELS IN SOCIOLOGY

S.Ya. Vyshkind, A.A. Devetyarova

Two 3–rd order dynamical systems are considered in this paper. These systems are proposed to be the mathematical models of information distribution in society, comprising three groups of individuals of different types – those, which did not receive the information yet, but would supply it to other recipients; those which possess the information and actively distribute it; and those, which possess the information but do not want or have no opportunity to pass it to others. Structure of the models phase space, bifurcations, which lead to the regimes transitions, features and characteristics of different regimes are investigated.

Obtained results, being interpreted from the sociological point of view, could be of substantial interest for research in the areas of the idea distribution processes and of the public opinion formation.

Вышкинд Светлана Яковлевна окончила радиофизический факультет Горьковского государственного университета в 1961 году. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1978) в области теории нелинейных колебаний. Доцент ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Опубликовала более 50 работ.

Деветьярова Анна Александровна родилась в г. Выкса Горьковской области в 1970 году. Окончила радиофизический факультет Нижегородского государственного университета в 1992 году. В рамках студенческой научной работы занималась применением радиофизических методов в социологии и экономике. Результаты дипломной работы частично использованы в данной статье. В настоящее время живет в Вятке, занимается программным обеспечением сетевой связи.