

## ДИАГНОСТИКА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО БЕСПОРЯДКА

*Л.Н.Корзинов, М.И.Рабинович*

Если имеется лишь фотография, на которой зафиксирован пространственный беспорядок, представляющий мгновение в жизни распределенной динамической системы, в принципе, с помощью специальной обработки пространственной наблюдаемой возможно отличить стационарный беспорядок от пространственно-временного хаоса и от пространственно-временного шума. Идеи и результаты такой обработки, связанной с вычислением дифференциальной пространственной размерности, обсуждаются в данной статье.

### Введение

Зададимся очень простым по постановке вопросом. Возможно ли, анализируя две фотографии, на которых представлено неупорядоченное распределение различных полей в пространстве в некоторый фиксированный момент времени, сказать, какая из фотографий отвечает беспорядку, не меняющемуся во времени («замороженный» беспорядок), а какая соответствует, скажем, распределению поля турбулентности? Другими словами, можно ли, обрабатывая лишь мгновенные снимки неупорядоченных полей, высказаться о наличии у них временной динамики? На первый взгляд ответ очевиден: нет. Действительно, пространственные Фурье-спектры и в том, и в другом случае сплошные, корреляционные функции – спадающие и т.д. И тем не менее, для некоторого класса неупорядоченных полей, а именно, полей, порожденных распределенными динамическими системами (например, уравнениями в частных производных без флуктуационных источников), на поставленный вопрос можно ответить положительно.

Будем для придания конкретности говорить о распределенных динамических системах с одной пространственной координатой и временем. Предположим также, что длина пространственной корреляции много меньше размеров системы. В качестве примеров воспользуемся двумя различными моделями: уравнением Свифта – Хоенберга с жестким режимом возбуждения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u + \beta u^2 - u^3 - (k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2})^2 u \quad (1)$$

и комплексным уравнением Гинзбурга – Ландау (CGLE)

$$\frac{\partial a}{\partial t} = a - (1 + i\beta) |a|^2 a + (1 + i\alpha) \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Первая модель демонстрирует при  $t \rightarrow \infty$  устойчивый статический пространственный беспорядок. В зависимости от начальных условий этот беспорядок может быть в среднем однородным по  $x$ , локализованным, либо неоднородным [1].

Модель CGLE в определенной области параметров генерирует стационарный пространственно-временной хаос, средние характеристики которого оказываются постоянными по времени и по координате [2,3].

Основная идея настоящей работы заключается в построении по данному мгновенному снимку, то есть заданному в момент времени  $t_0$  распределению поля по координате  $x$ , пространственных корреляционных интегралов  $C(\epsilon, d_E)$ . По свойствам корреляционного интеграла – локальному наклону и наличию квадратичной компоненты – возможно судить о свойствах временной динамики системы. В частности, для стационарного детерминированного беспорядка определяемая по дифференциальному наклону  $\log C(\epsilon, d_E)$  величина пространственной плотности корреляционной размерности и квадратичная компонента корреляционного интеграла оказываются равными нулю. Для пространственно-временного хаоса они конечны, и для пространственно-временного шума скейлинг отсутствует (плотность размерности и квадратичная компонента не определены).

### 1. Статический беспорядок

Как известно, система (1) на интервале  $0 < x < L$  при произвольно большом  $L$  записывается в градиентной форме  $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta u}$  с функционалом свободной энергии [1,4]

$$F = \int_0^L \left\{ \frac{u^2}{2} - \beta \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} + \left( k_0^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u^2 \right\} dx, \quad (3)$$

который может лишь убывать вдоль траектории изменяющегося во времени решения, поскольку

$$\frac{dF}{dt} = - \int_{-L}^L \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx \leq 0. \quad (4)$$

Величина  $F$  достигает локального экстремума на статических  $\left( \frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$  решениях (1). Это означает, что всякий «эволюционно зрелый», то есть установившийся при  $t \rightarrow \infty$ , пространственный беспорядок должен описываться трансляционной динамической системой

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + 2k_0^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + u[(1 + k_0^4) - \beta u + u^2] = 0. \quad (5)$$

Как показано Глебским и Лерманом [5], в фазовом пространстве (5) существует гомоклиническая структура. Среди траекторий, принадлежащих этой структуре, содержатся и те, которые отвечают установившемуся при  $t \rightarrow \infty$  пространственному беспорядку. На рис. 1 демонстрируется пример такого беспорядка [1].

Поскольку система (5) представляет собой обыкновенное

дифференциальное уравнение 4-го порядка, то пространственная корреляционная размерность распределения  $u(x)$ , отвечающая установившемуся беспорядку, будет конечной. Кроме того, если учесть, что система (5) гамильтонова, то размерность  $D^s$  стохастического множества, соответствующего гомоклинической структуре, должна быть меньше 3. Это подтверждает прямой компьютерный эксперимент.

Для определения пространственной размерности реконструировалось фазовое пространство с размерностью вложения  $d_E$  по формуле

$$u_k^s = \{u(x_k, t), u(x_k + l, t), u(x_k + 2l, t), \dots, u(x_k + (d_E - 1)l, t)\}, \quad (6)$$

где  $u_k^s$  – векторы, принадлежащие стохастическому множеству в пространстве вложения,  $l$  – расстояние между отсчетами при построении вектора  $u_k^s$ . Пространственный корреляционный интеграл  $C^s(\epsilon, d_E)$  вычисляется как

$$C^s(\epsilon, d_E) = \frac{1}{NM} \sum_{ij} \theta(\epsilon - \|u_i^s - u_j^s\|). \quad (7)$$

Здесь  $N$  – общее число векторов  $u_k^s$  в реконструированном фазовом пространстве размерности  $d_E$ ,  $M$  – число опорных векторов, которое выбиралось равным  $(0.1-0.3)N$ .

На рис. 2 представлена зависимость от  $\log \epsilon$  дифференциальной размерности, которую мы определяем как

$$\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) = \frac{d \log C^s(\epsilon, d_E)}{d \log \epsilon} \quad (8)$$

для беспорядка, изображенного на рис. 1. Наличие линейного участка на этом рисунке дает оценку пространственной размерности  $D_2^s$ , а аналогичная зависимость  $\log C^s$  от  $d_E$  позволяет определить пространственную энтропию

$$K_2^s(\epsilon, d_E) = \log C^s(\epsilon, d_E) - \log C^s(\epsilon, d_E - 1). \quad (9)$$

Мы здесь не указываем переходов к пределам при  $\epsilon \rightarrow 0$  и при  $d_E \rightarrow \infty$ , поскольку в реальных вычислениях ни один из них не достигим. Однако, наличие «плато» конечной ширины по  $\epsilon^1$  при увеличении  $d_E$ , скажем, от 2 до 10–15 говорит о существовании скейлинга в поведении  $K_2^s(\epsilon, d_E)$  и  $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$ , который и дает возможность оценить интересующие нас величины  $K_2^s$  и  $D_2^s$ .

Возвращаясь к определению пространственного корреляционного интеграла,

<sup>1</sup> Как правило, оценка размерности и энтропии считаются надежными, если плато шире, чем две степени двойки по  $\epsilon$ .

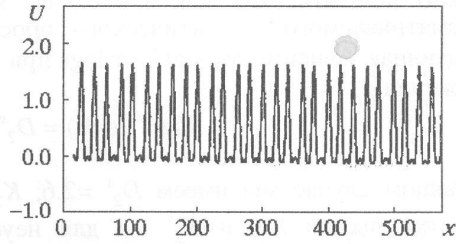


Рис. 1. Решение уравнения (1) при  $t \rightarrow \infty$ , замороженный беспорядок

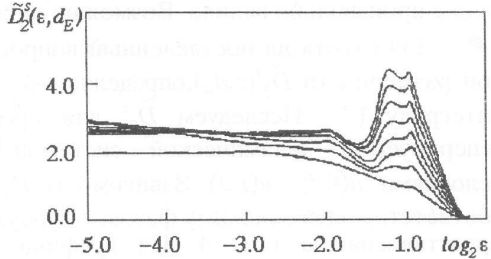


Рис. 2. Дифференциальная размерность  $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$  для пространственно-хаотического поля, изображенного на рис. 1;  $d_E$  изменяется от 2 до 10

можно заметить, что, как и в случае маломерного временного хаоса, для рассматриваемого статического пространственного беспорядка справедлива следующая зависимость  $\log C^s$  от  $\log \epsilon$  при уменьшении  $\epsilon$  и увеличении размерности вложения  $d_E$

$$\log C^s(\epsilon, d_E) = D_2^s \log \epsilon - K_2^s d_E l. \quad (10)$$

В данном случае мы имеем  $D_2^s = 2.6$ ;  $K_2^s = 0.28$ . Естественной представляется попытка ввести  $D_2^s$  и  $K_2^s$  и для неустановившегося беспорядка, например, определить эти величины для последовательности пространственных распределений в различные моменты времени. Это, в частности, позволит описать процесс формирования устойчивого беспорядка. Подобная идея была реализована в [1], где было установлено, что в процессе формирования беспорядка пространственная энтропия  $K_2^s$  увеличивается от нуля до положительного значения

$$K_2^s(t \rightarrow \infty) = 0.28.$$

## 2. Характеристики пространственно-временного хаоса в «больших» системах

Если пространственно-временной хаос в распределенной системе является в некотором смысле развитым, то большинство степеней свободы неравновесной среды не связаны алгебраически друг с другом. Размерность такого хаоса, вычисленная как из временного ряда (по осциллограмме, снятой в одной точке пространства), так и из пространственной наблюдаемой (по мгновенному снимку), может быть весьма велика и, вообще говоря, должна расти при увеличении размеров системы. Таким образом, наиболее трудной задачей представляется научиться отличать мгновенные снимки пространственно-временного хаоса не от статического беспорядка, размерность которого конечна, а от пространственно-временного шума, размерность мгновенного снимка которого также произвольно велика. Возможно ли это?

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим свойства дифференциальной размерности  $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$ , определяемой по пространственному корреляционному интегралу (7). Исследуем  $\tilde{D}_2^s$  для пространственной наблюдаемой (рис. 3), генерируемой динамической системой (2) с периодическими граничными условиями:  $u(0, t) = u(L, t)$ . Зависимость  $\tilde{D}_2^s$  от  $d_E$  и  $\log \epsilon$  для мгновенного снимка, соответствующего режиму фазовой турбулентности в модели, описываемой CGLE, представлена на рис. 4. Из графика видно, что при фиксированном  $\epsilon$

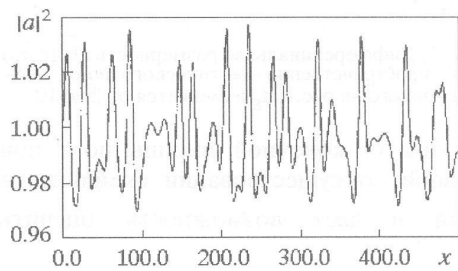


Рис. 3. Решение уравнения (2), отвечающая стационарному пространственно-временному хаосу при значении параметров  $\beta = -1.3$ ,  $\alpha = 1.15$

$\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$  растет линейно с увеличением  $d_E$  (то есть  $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) - \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E - 1) = f(l)$ , рис. 5), а при фиксированном  $d_E$  линейно убывает с увеличением  $\log \epsilon$  (то есть  $\partial \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) / \partial \log \epsilon = \text{const} = q^s$ , (рис. 6)).

Таким образом, как следует из эксперимента, функцию  $\tilde{D}_2^s$  можно представить в виде

$$\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) = -q^s \log \epsilon + f(l) d_E + A^s, \quad (11)$$

где  $q^s$ ,  $A^s$  – константы,  $f(l)$  – некоторая

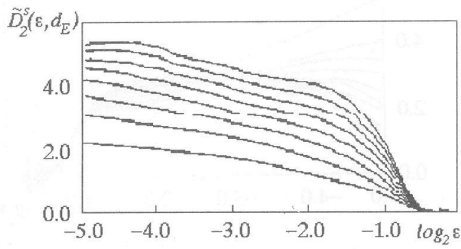


Рис. 4. Дифференциальная размерность  $\tilde{D}_2^s$ , вычисленная для пространственного распределения поля, взятого в один момент времени из стационарного пространственно-временного хаоса, изображенного на рис. 3;  $d_E$  изменяется от 2 до 10

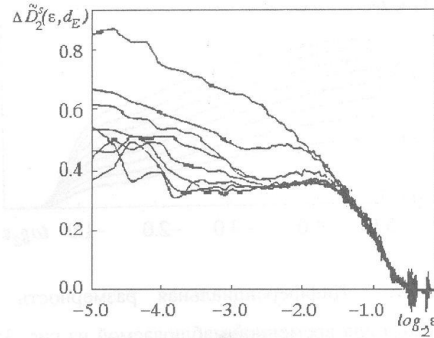


Рис. 5.  $\Delta \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) = \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) - \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E - 1)$ . Насыщение на графике при увеличении  $d_E$  от 2 до 9 происходит на уровне  $\Delta \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) = 0.35$

функция от  $l$ . Поскольку  $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$  растет линейно с увеличением  $d_E$  (или при увеличении пространственной длины  $\Lambda = d_E^l$  подсистемы), естественно предположить, что  $f(l)$  должна быть также линейной функцией:  $f(l) = \rho_2 l$ , где  $\rho_2$  назовем плотностью размерности  $D_2^s$ . Тогда выражение для  $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$  можно записать в виде

$$\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) = -q^s \log \epsilon + \rho_2 l d_E + A^s. \quad (12)$$

Заметим, что для временной дифференциальной размерности справедлива аналогичная формула (см. рис. 7, 8, 9, а также [2,3])

$$\tilde{D}_2^t(\epsilon, d_E) = -q^t \log \epsilon + \sigma_2 t d_E + A', \quad (13)$$

где  $\sigma_2$  — плотность «временной» размерности,  $t$  — время задержки между соседними отсчетами,  $q^t, A'$  — константы.

Итак, увеличение длины подсистемы  $\Lambda = d_E^l$  приводит к увеличению дифференциальной размерности. С другой стороны, такой же эффект дает увеличение разрешения, то есть уменьшение  $\epsilon$ . Последнее обстоятельство, по-видимому, связано с увеличением временной памяти системы (то есть длины подсистемы по времени) по мере уменьшения  $\epsilon$ . Действительно, предыстория поведения системы, демонстрирующей пространственно-временной хаос, накладывает отпечаток на свойства мгновенного снимка, полученного в данный момент времени. Причем, чем выше степень разрешения при обработке мгновенного снимка, тем более далекое прошлое проявляется в нем. Или, более формально: если мы знаем состояние системы длины  $\Lambda$  с точностью  $\epsilon$ , то нам известно [3] количество информации

$$I_0 = -\rho_2 \Lambda \log \epsilon.$$

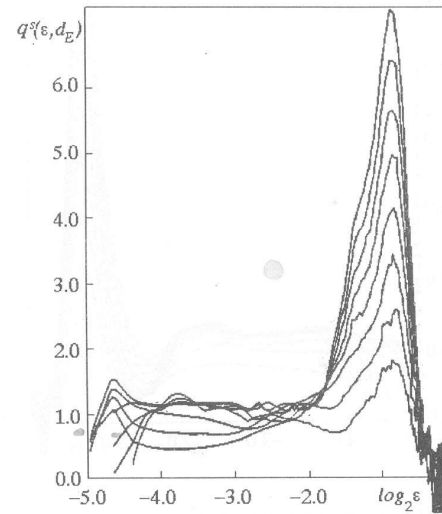


Рис. 6. Квадратичная компонента пространственного корреляционного интеграла  $q^s(\epsilon, d_E) = \partial \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) / \partial \log \epsilon$ ;  $d_E$  изменяется от 2 до 10

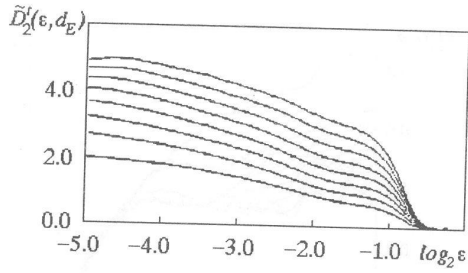


Рис. 7. Дифференциальная размерность  $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$  для временной наблюдаемой из рис. 3;  $d_E$  изменяется от 2 до 10

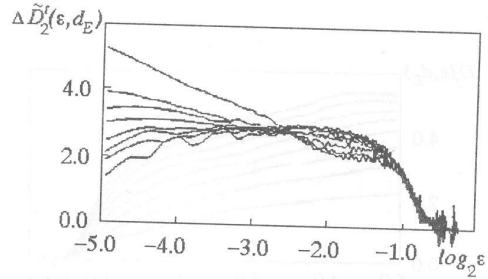


Рис. 8. Зависимость  $\sigma_2(\epsilon, d_E)t = \Delta \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) = \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) - \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E - 1)$ . Насыщение на графике при увеличении  $d_E$  от 2 до 9 происходит на уровне  $\sigma_2 t = 0.33$

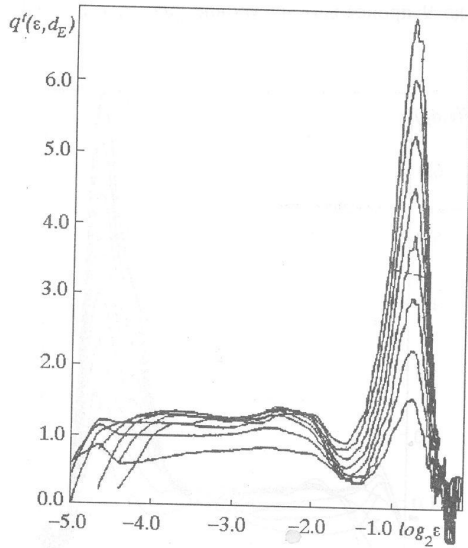


Рис. 9. Квадратичная компонента временного корреляционного интеграла  $q'(\epsilon, d_E) = \partial \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) / \partial \log \epsilon$ ,  $d_E$  изменяется от 2 до 10

Поскольку энтропия системы положительна, то через время  $t$  мы будем знать о системе уже меньше: количество информации определяется выражением

$$I(t) = I_0 - K_2 t, \quad (14)$$

где  $K_2$  — энтропия системы длины  $\Lambda$ . Как следует из эксперимента [3], энтропия растет линейно с ростом  $\Lambda$ . Это обстоятельство дает возможность определить плотность энтропии:  $\eta_2 = K_2 / \Lambda$ . В этих обозначениях (14) можно записать в виде

$$I(t) = -\rho_2 \Lambda \log \epsilon - \eta_2 \Lambda t.$$

Отсюда следует, что время  $T_{\max}$ , при котором мы уже не будем иметь никакой информации о состоянии системы ( $I(T_{\max}) = 0$ ) вычисляется по формуле

$$T_{\max} = (\rho_2 / \eta_2) \log(1/\epsilon). \quad (15)$$

С другой стороны, можно предположить, что в динамической системе значение  $T_{\max}$  пропорционально времени корреляции системы  $\tau_c$  и точности задания ее координат при  $t = 0$ , то есть  $\log(1/\epsilon)$

$$T_{\max} \sim \tau_c \log(1/\epsilon).$$

По определению

$$\tau_c = c \rho_2 / \eta_2, \quad (16)$$

где  $c$  — константа, подлежащая вычислению. Если учесть, что система демонстрирует установившийся пространственно-временной хаос, то есть находится на аттракторе, то сумма положительных ляпуновских экспонент равна сумме отрицательных. Это эквивалентно тому, что потеря информации о состоянии системы будет происходить с одинаковой скоростью как при



увеличении  $t$ , так и при уменьшении  $t$ . Другими словами, система «хранит» информацию от  $-T_{\max}$  до  $T_{\max}$ , таким образом «время памяти» равно не  $T_{\max}$ , а  $2T_{\max}$ .

Имея это в виду, корреляционный интеграл вычисленный по пространственному распределению, представляющему собой «мгновение» в жизни пространственно-временного хаоса, можно записать в форме, аналогичной (10), если учесть, что  $D_2^s$  и  $K_2^s$  пропорциональны «временной памяти» или «временной длине» подсистемы  $2T_{\max}$ :  $D_2^s \sim 2T_{\max}$  и  $K_2^s \sim 2T_{\max}$ . Соответствующие коэффициенты пропорциональности естественно назвать плотностью временной размерности  $\sigma_2$  (то есть  $D_2^s = 2\sigma_2 T_{\max}$ ) и плотностью пространственной энтропии  $\gamma_2$  (то есть  $K_2^s = 2\gamma_2 T_{\max}$ ). Тогда для  $\log C^s(\epsilon, d_E)$  выражение (10) можно представить в форме

$$\log C^s(\epsilon, d_E) = -\sigma_2 \tau_c (\log \epsilon)^2 + 2\gamma_2 \tau_c l d_E \log \epsilon + A^s \log \epsilon + B^s. \quad (17)$$

Отсюда легко найти выражение для дифференциальной размерности  $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$  пространственного корреляционного интеграла

$$\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) = -2\sigma_2 \tau_c \log \epsilon + 2\gamma_2 \tau_c l d_E + A^s. \quad (18)$$

Выражение (17) аналогично выражению для временного корреляционного интеграла, которое обсуждалось в [3]

$$\log C^t(\epsilon, d_E) = -\rho_2 l_c (\log \epsilon)^2 + 2\eta_2 l_c t d_E \log \epsilon + A^t \log \epsilon + B^t, \quad (19)$$

здесь  $t$  – время задержки между соседними отсчетами,  $A^t$  и  $B^t$  – константы. По аналогии с определением (16) можно ввести и длину корреляции  $l_c$

$$l_c \sim \sigma_2 / \gamma_2. \quad (20)$$

Кроме соотношений (16) и (20) должны выполняться также равенства

$$\begin{aligned} 2\eta_2 l_c &= \sigma_2, \\ 2\gamma_2 \tau_c &= \rho_2, \end{aligned} \quad (21)$$

где первое следует из (12) и (18), а второе – из аналогичных выражений для временного корреляционного интеграла (13) и (19). Учитывая определения  $l_c$  и  $\tau_c$  (21) можно записать в виде

$$\begin{cases} 2c \eta_2 / \gamma_2 = 1, \\ 2c \gamma_2 / \eta_2 = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим, что  $c = 1/2$  и  $\eta_2 = \gamma_2$ . Это означает, что вновь введенная величина  $\gamma_2$ , плотность пространственной энтропии, будет в точности равна  $\eta_2$ , плотности «обычной» энтропии. Интересно заметить, что по размерности эти величины одинаковы и в некотором смысле «двумерны»

$$[\eta_2] = [\gamma_2] = \frac{\text{бит}}{\text{см} \cdot \text{с}},$$

то есть означают производство информации на единицу длины за единицу времени. Естественно ожидать, что такая величина единственна для каждой конкретной системы, и именно поэтому  $\eta_2 = \gamma_2$ .

Кроме плотности энтропии существуют еще две величины, характеризующие пространственно-временной беспорядок, плотность пространственной размерности  $\rho_2$  и плотность временной размерности  $\sigma_2$ . Эти

величины «одномерны»

$$[\rho_2] = \frac{\text{бит}}{\text{см}}, \quad [\sigma_2] = \frac{\text{бит}}{\text{с}}$$

и характеризуют скорость производства беспорядка по пространственной координате и по времени. Их отношение, как было показано в [3], равно скорости распространения информации в среде

$$\sigma_2 / \rho_2 = V.$$

Таким образом, можно выделить три величины, полностью характеризующие локальные свойства пространственно–временного хаоса: это плотности временной и пространственной размерностей  $\sigma_2$  и  $\rho_2$  и плотность энтропии  $\eta_2$ . Все остальные величины, такие как время и длина корреляции, скорость распространения информации выражаются через  $\rho_2$ ,  $\sigma_2$  и  $\eta_2$  посредством формул (16), (20), (21).

### 3. Компьютерный эксперимент

Для анализа пространственного и пространственно–временного хаоса использовалось прямое интегрирование уравнений (1) и (2) с периодическими граничными условиями:  $u(0,t) = u(L,t)$ . Вычисления проводились по схеме операторной экспоненты, обеспечивающей большую точность, чем сеточные схемы, что позволило увеличить шаг по времени до 0.2. Физическая длина системы  $L^2$  выбиралась настолько большой, насколько это требовалось для надежного вычисления размерностей. Большинство вычислений дифференциальной размерности были проведены при числе гармоник  $N = 32768$ . В этом случае все характеристики пространственного и пространственно–временного хаоса не изменялись при увеличении длины резонатора до  $N = 262114$ , что свидетельствует о достаточном количестве гармоник  $N = 32768$ .

В численном эксперименте с моделью CGLE выход на режим установившейся турбулентности наблюдался из состояния близкого к тривиальному, которому отвечает режим малых флуктуаций, вызванных ошибкой представления числа в машине (начальные условия примерно  $10^{-15}$ ).

Установление режима пространственного беспорядка в модели (1) наблюдалось при начальных условиях вида

$$u(x) = 1.8\sin(kx) + \epsilon f(x), \quad (22)$$

где  $k = 0.1$  соответствует неустойчивой периодической решетке (детали см. в [1]),  $f(x)$  – случайная функция с равномерным распределением в интервале  $[0,1]$ ,  $\epsilon \sim 0.1$  – малый параметр.

Решение уравнения (1), представленное на рис. 1, было получено для  $t = 1000$ , хотя вид распределения поля не меняется уже при  $t \sim 100$ . Поэтому можно утверждать, что решение, представленное на рис. 1, соответствует статическому беспорядку при  $t \rightarrow \infty$  и, следовательно, описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (5). Расстояния между соседними отсчетами  $l$  в формуле (6), определенное из критерия первого минимума взаимной информации [7], оказалось равным длине  $l = 0.6$ . Для вычисления корреляционного интеграла было взято  $N = 32768$  и  $M = 10000$  (см.(7)).

Соответственно, для модели (2) параметры вычислений корреляционного интеграла были следующие:  $l = 0.6$ ,  $N = 32768$ ;  $M = 10000$ . Как следует из рис. 4, дифференциальная размерность не насыщается при увеличении  $d_E$ . В этом

<sup>2</sup> Эта длина связана с числом гармоник  $N$  соотношением  $L = 0.2 \pi N$ .



заключается основное отличие  $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$  детерминированного хаоса в распределенных системах от маломерного хаоса в сосредоточенных системах. Кроме того, дифференциальная размерность при уменьшении  $\log_2 \epsilon$  растет линейно с показателем  $q^s$ , что говорит об универсальности свойств реконструированного хаотического множества. Таким образом, насыщение происходит не на графиках зависимости дифференциальной размерности от  $\log_2 \epsilon$

и  $d_E$ , а на графиках  $\Delta \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$  и  $q^s(\epsilon, d_E)$  от  $\log_2 \epsilon$  и  $d_E$ .

В случае, когда корреляционный интеграл строится по мгновенному снимку, насыщение на этих графиках при увеличении  $d_E$  происходит при значениях  $\rho_2^l = 0.35$  и  $q^s = 1.2$  соответственно (см. (12) и (17)). Учитывая, что  $l = 0.6$ , получаем:  $\rho_2 = 0.35/l \approx 0.58$  (см. рис.5), и  $q^s = \sigma_2 \tau_c = 1.2$  (см. рис.6)

Таким образом, имея лишь один мгновенный снимок, мы уже можем определить, что  $\sigma_2 > 0$  (очевидно, что  $\tau_c$  конечно), и, следовательно, система демонстрирует хаотическое поведение во времени. Для пространственного хаоса на рис. 1, напротив,  $q^s = 0$ , а значит и  $\sigma_2 = 0$ , что доказывает статичность такого беспорядка.

Анализируя поведение квадратичной компоненты в зависимости от  $\log_2 \epsilon$  нетрудно отличить детерминированный пространственно-временной хаос от шумового поля (рис. 10, 11, 12). Как видно из рис. 6, в случае детерминированного пространственно-временного хаоса  $q^s$  имеет постоянное значение в довольно широком интервале  $\epsilon$ . Для шумового поля значения  $q^s$  не постоянны при изменении  $\epsilon$  (см. рис.12).

Анализ поведения квадратичной компоненты  $q^s$  позволяет выделить следующие характерные случаи: 1)  $q^s(\epsilon, d_E) = 0$  – статический пространственный беспорядок; 2)  $q^s(\epsilon, d_E) = \text{const} > 0$  – детерминированный пространственно-временной хаос, для такого режима  $\sigma_2 \tau_c = q^s$  и 3) наконец, когда зависимость  $q^s(\epsilon, d_E)$  от  $\log_2 \epsilon$  не имеет плато. Как нам представляется, подобный мгновенный снимок отвечает пространственно-временному шуму, не имеющему динамической природы.

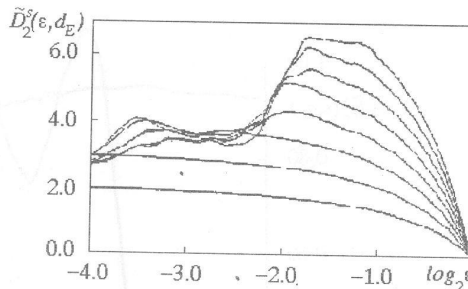


Рис.10. Дифференциальная размерность  $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$  для шума, равномерно распределенного в интервале  $[0,1]$ ;  $d_E$  изменяется от 2 до 10

## Дискуссия

Как выяснилось в самое последнее время, распознать, какой тип поведения демонстрирует исследуемая распределенная система, можно располагая временной последовательностью, полученной лишь в одной точке пространства сколь угодно «большой» системы [2]. Это выглядит удивительно и даже вызвало определенный скептицизм [7]. Однако, сейчас уже имеются убедительные результаты, доказывающие справедливость этого утверждения. Ключевой характеристикой для подобного рода диагностики может служить плотность размерности  $D_2^s$ , вычисленной по временной последовательности с помощью алгоритма Грассбергера – Прокаччия. При этом обычно предполагается, что размерность  $D_2^s$  растет линейно с ростом  $L$  для одномерной распределенной

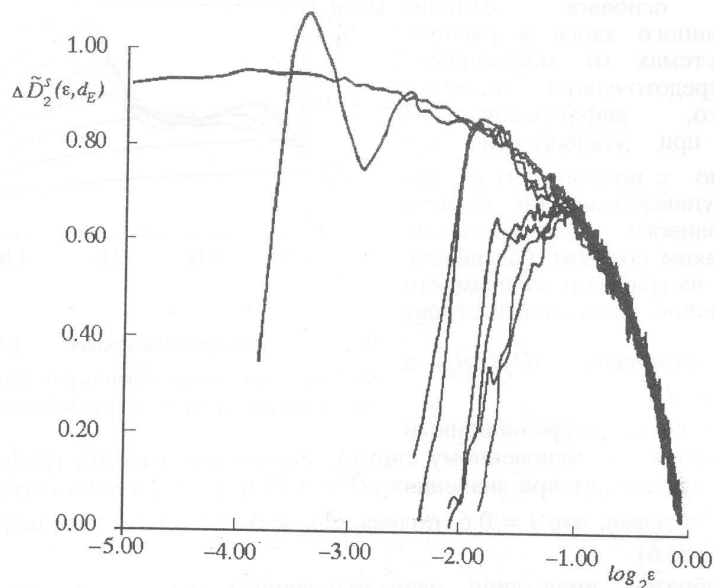


Рис.11. Зависимость  $\rho_2(\epsilon, d_E)l = \Delta \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) = \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) - \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E - 1)$  для шумового поля;  $d_E$  изменяется от 2 до 9

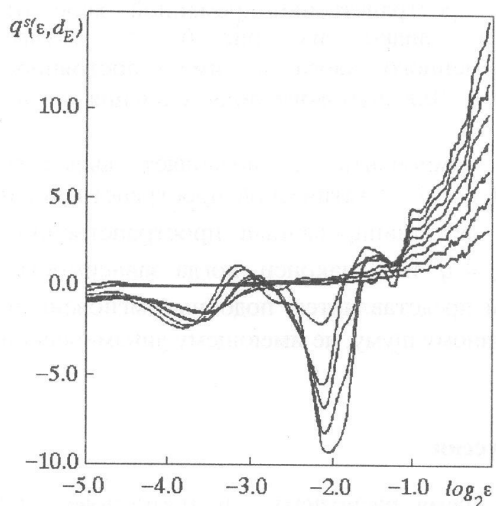


Рис. 12. Квадратичная компонента пространственного корреляционного интеграла

$q^s(\epsilon, d_E) = \partial \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) / \partial \log_2 \epsilon$  для шумового поля;  $d_E$  изменяется от 2 до 10

[9], и т.д. При такой динамике мы будем иметь  $\rho_2 = q^s = 0$ .

2. Поведение системы регулярно в пространстве и хаотично во времени

системы [3], то есть  $\rho_2 = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{D_2^s}{L}$ .

Можно ли решить аналогичную задачу, опираясь не на анализ временной последовательности, а на анализ лишь пространственной последовательности, то есть имея в распоряжении лишь фотографию, один мгновенный снимок поля? Как мы показали выше, это действительно возможно, если опираться на характеристики  $\rho_2$  и  $\eta_2$ .

Если не говорить о деталях, то многообразие динамики распределенных систем можно представить следующей приближенной схемой:

1. Поведение системы регулярно в пространстве и во времени – структуры в виде кристаллов или квазикристаллов, периодические решения в виде спиральных волн, стационарные волны

например, хаос в течении Колмогорова<sup>3</sup>. В этом случае получим  $\rho_2 = 0$ ,  $q^s > 0$ .

3. Наблюдается пространственный беспорядок, поведение же во времени регулярно. Простейший случай, когда пространственная картина вообще не меняется во времени – замороженный беспорядок или стационарные хаотические волны. Однако имеются примеры, когда устойчив и пространственный беспорядок, периодически осциллирующий во времени<sup>4</sup>. При этом мы должны получить  $\rho_2 > 0$ ,  $q^s = 0$ .

4. Поведение нерегулярно и во времени, и в пространстве. Сюда относится пространственно-временной хаос структур и развитая турбулентность. В этом случае  $\rho_2 > 0$ ,  $q^s > 0$ .

Проблему разделения с помощью анализа характеристик мгновенного снимка, скажем, турбулентности дефектов и развитой турбулентности, характеризующейся наличием инерционного интервала, еще предстоит решить. Добавим, что весьма интересным и многообещающим представляется обобщение результатов, полученных в данной работе на 2-х и 3-х мерные распределенные системы.

Авторы признательны Л.Ш. Цимрингу, инициировавшему данную работу своими исследованиями по скейлингу временной наблюдаемой [2], а также И.М. Старобинцу, М.В. Баженову и Л.Ю. Глебскому за плодотворные дискуссии.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-02-15424).*

#### Библиографический список

1. Gorshkov K.A., Korzinov L.N., Rabinovich M.I., Tsimring L.Sh. Random pinning of localized states and the birth of spatial disorder within gradient models // J.Stat.Phys. 1994. Vol. 74, N 5/6. P. 1033.
2. Tsimring L.Sh. Nested strange attractors and universality of spatio-temporal chaos // Phys.Rev.E. 1993. Vol. 48, № 5. P. 3446.
3. Grassberger P. Information Content and Predictability of Lumped and Distributed Dynamical Systems // Physica Scripta. 1987. Vol. 40. P. 346.
4. Bauer M., Heng H., Martinssen W. Characterization of spatio-temporal chaos from time series // Phys.Rev.Lett. 1993. Vol. 71 (4). P. 521.
5. Глебский Л.Ю., Лерман Л.М. Стационарные самолокализованные решения обобщенного Свифта – Хоеенберга: Тез. докл. III конференции «Нелинейные колебания механических систем». НИИ ПМК ННГУ, сентябрь 1993 г.
6. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of the strange attractors // Physica D. 1983. Vol. 9. P.141.
7. Fraser A.M., Swinney H.L. Independent coordinates for strange attractors from mutual information // Phys.Rev. A. 1986. Vol. 33.P. 1134.
8. Torcini A, Politi A., Puccioni G.P., D'Alessandro G. Fractal dimension of spatially extended systems // Physica D. 1991. Vol. 53. P. 85.
9. Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I. Nonlinearities in Action. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1992.

Институт прикладной физики РАН  
Нижний Новгород

Поступила в редакцию 17.01.94  
после переработки 29.04.94

<sup>3</sup> В больших системах подобные решения, как правило, существуют в весьма узкой области параметров.

<sup>4</sup> Обычно это происходит в результате синхронизации частот и фаз структур, формирующих беспорядок.

## THE DIAGNOSTICS OF SPATIO-TEMPORAL DISORDER

*L.N.Korzinov , M.I.Rabinovich*

A single photo of spatial disorder that is merely an instant in the life of an extended dynamical system and a novel technique for processing of a space series may, in principle, enable one to distinguish between stationary disorder, spatio-temporal chaos and spatio-temporal noise. The ideas and results of such a processing are presented in this paper.



*Корзинов Лев Николаевич* закончил Нижегородский государственный университет в 1992 году. В настоящее время работает в Институте прикладной физики РАН младшим научным сотрудником. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, пространственно-временной хаос. Имеет 7 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



Editorial board of the journal «Applied nonlinear dynamics» plans to publish special issue on the problems of the investigation of the fluctuation influence onto dynamics of nonlinear systems. The following basic sections are suggested:

- influence of fluctuations onto bifurcations and evolution of nonlinear systems with complicated dynamics;
- nonlinear Brownian motion;
- stochastic resonance from auto-oscillatory and other nonlinear systems;
- diagnostics of nonlinear systems using statistic characteristics calculated from the experimental data.

The editor of this issue is professor *Vadim S. Anishchenko*.

Those who wish to participate in this special issue are invited to inform the editorial board about their intentions and submit the papers to the editorial office not later than 1 December 1994.

