



НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС ПРИ СЛАБОНЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН

В.А. Буц, А.Н. Куприянов, О.В. Мануйленко, А.П. Толстолужский

Предлагается критерий возникновения хаотической динамики при слабонелинейном взаимодействии волн. При этом обобщается критерий возникновения хаоса при взаимодействии типа волна - частица. Роль ширины нелинейного резонанса играет инкремент неустойчивости. Численный анализ подтверждает этот критерий.

Введение

Исследование динамических систем, траектории которых являются сложными, хаотическими, в большинстве случаев возможно только численными методами. Однако в той области фазового пространства, где отсутствуют инвариантные поверхности, ограничивающие движение, для описания системы могут быть с успехом использованы методы статистической физики.

Обычная эволюция траекторий динамической системы при изменении ее параметров заключается в следующем. При определенных значениях параметров траектории являются регулярными и достаточно простыми. Изменение значений параметров может привести к локальной стохастичности, т.е. к возникновению в фазовом пространстве областей стохастичности, которые разделены инвариантными поверхностями. И, наконец, при достижении параметрами некоторых критических значений возникает глобальная неустойчивость, когда область хаотического движения становится односвязной, а инвариантные поверхности разрушены. Для анализа регулярных траекторий с успехом применяются разнообразные асимптотические методы; в области же стохастичности, чтобы определить характер траекторий, а также методы, которыми они могут быть исследованы, необходимо знать критерии перехода от регулярного движения к стохастическому. В настоящее время существует несколько критериев перехода к глобальной стохастичности (см., например, [1]).

Наиболее простым и эффективным является критерий Чирикова [2,3]. Так как этот критерий (и многие другие) основан на понятии нелинейного резонанса, то он удобен и широко используется при изучении процессов, включающих в себя взаимодействие типа волна - частица.

В настоящей работе сформулированы условия, при выполнении которых динамика взаимодействия типа волна - волна становится хаотической. Эти условия проверяются на системе, описывающей взаимодействие ВЧ и НЧ волн в нелинейных средах.

1. Формулировка критерия

Как известно, перекачка энергии из одной волны в другие при их нелинейном взаимодействии носит характер неустойчивости. При этом естественно предположить, что величина инкремента развития этой неустойчивости (Γ) играет роль ширины нелинейного резонанса при взаимодействии типа волна - волна. Далее, можно предположить, что динамика этого взаимодействия будет хаотической, когда параметр $K = \Gamma / \delta\omega$ станет больше единицы ($K > 1$), где $\delta\omega$ - расстояние между резонансами различных волн. Отметим, что величина $\delta\omega$ обычно пропорциональна минимальной частоте.

Такая формулировка критерия основана на качественной картине процесса слабонелинейного взаимодействия волн. Для более строгого обоснования его рассмотрим хорошо изученный процесс распада. Пусть волна с амплитудой a_1 , волновым вектором k_1 и частотой ω_1 распадается на две волны $(a_2, k_2, \omega_2, a_3, k_3, \omega_3)$. Кроме того, предположим, что имеется еще одна волна (a_4, k_4, ω_4) , у которой $k_4 = k_3$, $\omega_4 - \omega_3 = \Delta \ll \omega_1$.

Рассмотрим случай, когда четвертая волна не влияет на процесс распада. Тогда уравнения для динамики изменения амплитуд и фаз трех взаимодействующих волн имеют вид [4, формула (2.10)]

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} a_1 &= iV^* a_2 a_3, \\ \frac{d}{d\tau} a_2 &= iV a_1 a_3^*, \\ \frac{d}{d\tau} a_3 &= iV a_1 a_2^*, \end{aligned} \quad (1)$$

где V - матричный элемент взаимодействия. На линейной стадии ($|a_1| = \text{const}$, $\varphi_1 = \text{const}$) процесс распада характеризуется экспоненциальным ростом амплитуд $|a_2|$ и $|a_3|$ с инкрементом $\Gamma = |a_1| |V|$. Изменение фазы $\varphi = 2\varphi_2 + 2\varphi_3$ подчиняется уравнению математического маятника:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \Phi + (2|a_1| |V|)^2 \sin(\Phi) = 0, \quad (2)$$

из которого видно, что полуширина нелинейного резонанса равна 4Γ .

Пусть теперь отсутствует третья волна, а в трехволновом взаимодействии вместо нее участвует четвертая волна. Тогда система уравнений, описывающая динамику амплитуд взаимодействующих волн, будет иметь вид ($\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_4$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} a_1 &= iV_1^* a_2 a_4 \exp(i\delta\tau), \\ \frac{d}{d\tau} a_2 &= iV_1 a_1 a_4^* \exp(-i\delta\tau), \\ \frac{d}{d\tau} a_4 &= iV_1 a_1 a_2^* \exp(-i\delta\tau). \end{aligned} \quad (3)$$

На линейной стадии для фазы $\Psi = 2\varphi_2 + 2\varphi_4 + 2\delta\tau$ также получаем уравнение (2), где $\Gamma = \Gamma_1 = |a_1| |V_1|$. Откуда следует, что расстояние между нелинейными резонансами равно 2δ . Предполагая, что ширина нелинейного резонанса для фаз на линейной стадии для четвертой волны мала ($\Gamma_1 \ll \Gamma$), получим условие перекрытия нелинейных резонансов, а соответственно, условие возникновения стохастической неустойчивости: $2\Gamma/\delta > 1$. Отметим, что приведенный критерий, так же, как и другие [1], позволяет определить область параметров, в которой динамика системы становится хаотической. Что касается границы перехода к хаосу, то для ее определения требуются более тщательные аналитические или численные исследования.

2. Основные уравнения

Сформулированные выше условия перехода к стохастичности проверяются на примере нелинейного взаимодействия высокочастотных (ВЧ) и низкочастотных (НЧ) волн в средах с квадратичной нелинейностью. В приближении слабой нелинейности уравнения для определения комплексных амплитуд взаимодействующих волн легко находятся из системы уравнений Максвелла и уравнений движения среды. Будем для простоты считать, что во взаимодействии участвует только одна НЧ волна, затухание отсутствует, а коэффициенты матрицы взаимодействия не зависят от номера ВЧ волны. В этих приближениях систему уравнений, описывающую динамику взаимодействующих волн, можно привести к виду

$$\begin{aligned} i \frac{d}{d\tau} a_n &= b a_{n-1} \exp(i\Delta\tau) + b^* a_{n+1} \exp(-i\Delta\tau), \\ \frac{d^2}{d\tau^2} b + \Omega^2 b &= - \sum_n a_{n-1}^* a_n \exp(-i\Delta\tau), \end{aligned} \quad (4)$$

где a_n - комплексная амплитуда ВЧ волны с номером n , b - комплексная амплитуда НЧ волны, $\Delta = \omega_n - \omega_{n-1}$; ω_n - частота ВЧ волны с номером n , Ω - частота свободных НЧ колебаний.

При получении системы (4) также предполагалось, что между взаимодействующими волнами имеется пространственный синхронизм, т.е. выполнены условия $\vec{k}_n - \vec{k}_l = \vec{\alpha}$, где \vec{k}_n - волновой вектор ВЧ волны с номером n , l , $\vec{\alpha}$ - волновой вектор НЧ волны. Нас в общем случае будут интересовать процессы, характерное время развития которых может быть меньшим периода НЧ волны ($T_{нч}$). Поэтому в системе уравнений (4) уравнение для НЧ волны является полным, второго порядка, т.е. не укорочено. Если характерные времена нелинейных процессов значительно меньше $T_{нч}$, то в (4) можно подставить $b = b_1(\tau) \exp(-i\Omega\tau)$. Считая, что b_1 медленно меняется со временем, усредним полученные уравнения по периоду НЧ волны. В результате имеем систему уравнений, которая впервые, по-видимому, была получена в [5,6] и анализировалась многими авторами:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{d\tau} a_n &= b a_{n-1} \exp(i\delta\tau) + b^* a_{n+1} \exp(-i\delta\tau), \\ i \frac{d}{d\tau} b &= \sum_n a_{n-1}^* a_n \exp(-i\delta\tau), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\delta = (\omega_n - \omega_{n-1} - \Omega)$ - расстройка.

Системы уравнений (4) или (5) описывают широкий круг нелинейных процессов взаимодействия волн. В частности, в зависимости от начальных условий эти системы описывают либо процессы распада (когда вначале задана одна высокочастотная волна, например, процессы $t \rightarrow t+l$, $l \rightarrow l+s$), либо процессы слияния (когда вначале задана одна ВЧ волна и амплитуда НЧ волны), либо процессы типа beat-wave (когда вначале заданы амплитуды двух ВЧ волн). На небольших временах, когда амплитуды всех волн, кроме заданных, малы, а заданные изменились незначительно, система (4) может быть линеаризована и из нее легко находится инкремент неустойчивости соответствующего процесса (Γ). Его величина пропорциональна амплитудам первоначально заданных волн ($\Gamma = \Gamma(a_{n0}, b_0)$). Если $K > 1$, то, как мы предположили, должен наступить динамический хаос.

3. Трехволновое взаимодействие

Рассмотрим подробнее наиболее простые и важные случаи нелинейного взаимодействия трех волн, распространяющихся в нелинейной среде:

1) распад ВЧ поперечной электромагнитной волны с частотой ω_0 , волновым вектором \vec{k}_0 и амплитудой A_0 , которая распадается в плазме на электромагнитную ($\omega_{-1}, \vec{k}_{-1}, A_{-1}$) и ленгмюровскую (ω_p, \vec{k}_p, A_p) волны;

2) аналогичный процесс в замагниченной плазме ($\omega_H^2 \gg \omega_p^2$);

3) распад волны (ω_0, \vec{k}_0, A_0), распространяющейся в замагниченном, компенсированном по заряду электронном пучке, на электромагнитную ($\omega_{-1}, \vec{k}_{-1}, A_{-1}$) и пучковую ($k_p \vec{V}, \vec{k}_p, A_p$) волны. Таким образом, во всех трех случаях рассматриваем процесс распада $t \rightarrow t+1$.

Из уравнений Максвелла и гидродинамических уравнений движения плазмы (пучка) для описания динамики распада несложно получить систему (4), в которой $n = \{0, -1\}$;

$$\begin{aligned}
 1) \quad & a_0 \equiv A_0(\tau)/A_0(0); \quad a_{-1} \equiv A_{-1}(\tau)/A_0(0) \{\omega_{-1}/\omega_0\}^{1/2}; \\
 & b \equiv [\delta n/n_0] \{\sigma(k_p, 0, A_0) \cos \alpha\}^{1/3}; \quad \tau \equiv \theta t; \quad \Omega^2 \equiv \omega_p^2/\theta^2; \\
 & \Delta \equiv \{\omega_0 - \omega_{-1}\}/\theta; \quad \theta \equiv \{\lambda(k_p, 0, A_0) \cos^2 \alpha\}^{1/3}; \\
 3) \quad & a_0 \equiv A_{oz}(\tau)/A_{oz}(0); \quad a_{-1} \equiv A_{-1z}(\tau)/A_{oz}(0) (\omega_{-1}/\omega_0^*) (\omega_0^*/\omega_0) (\omega_{-1}/\omega_0)^{1/2}; \\
 & b \equiv [\delta n/n_0] \sigma(k_{pz}, V_0, A_{oz})^{1/3}; \quad \tau \equiv \lambda(k_{pz}, V_0, A_{oz})^{1/3} t; \\
 & \Omega^2 \equiv (k_{pz}^2/k^2) \omega_p^2 \lambda^{-2/3}; \quad \Delta \equiv \{\omega_0 - \omega_{-1}\} \lambda^{-1/3}; \\
 & \lambda(k_{pz}, V_0, A_{oz}) \equiv k_{pz}^2 \omega_p^4 [A_{oz}^2/32\pi m_e n_0] \{\omega_0/\omega_0^*\}^2 [1/\omega_{-1} \omega_{-1}^* \omega_0]; \\
 & \sigma(k_{pz}, V_0, A_{oz}) \equiv k_{pz}^2 \omega_p^2 [\pi m_e n_0/A_{oz}^2] \{\omega_{-1}/\omega_0\}^{1/2} \{\omega_{-1}/\omega_{-1}^*\}^2; \quad \omega_n^* \equiv \omega_n - \vec{k}_n \vec{V}_0.
 \end{aligned}$$

Здесь δ_n - медленные возмущения этой плотности, n_0 - невозмущенная плотность плазмы; α - угол между векторами \vec{A}_0 и \vec{A}_{-1} ; $\omega_p^2 = 4\pi n_0 e^2/m_e$ - частота ленгмюровских колебаний плазмы; e - заряд электрона, m_e - масса электрона, \vec{V}_0 - невозмущенная скорость пучка. Если в п.3) принять $\vec{V}_0=0$, то получим переменные для описания распада в замагниченной плазме (см. п.2)).

3.1. Начальная стадия распада. Инкремент неустойчивости. Критерий стохастичности

На небольших временах, когда амплитуда волны A_0 (волны накачки) меняется мало, распад $t \rightarrow t+1$ носит характер неустойчивости. Величину инкремента этой неустойчивости легко найти из системы уравнений (4), полагая в ней амплитуду волны накачки a_0 постоянной и равной 1, т.е. решая систему (4) в приближении заданной амплитуды a_0 . В начальный момент времени амплитуды всех остальных волн малы. В этом случае система (4) становится линейной. Полагая в ней $b = b_0 \exp(-i\omega t)$ и $a_{-1} = a_{-10} \exp(-i\omega t - i\Delta t)$, для определения комплексной величины ω получим следующее дисперсионное уравнение:

$$(\omega^2 - \Omega^2)(\omega + \Delta) = 1. \quad (6)$$

В рассматриваемом случае параметром, определяющим различный характер динамики поля, естественно выбрать амплитуду волны накачки A_0 . Когда эта амплитуда достаточно мала, так что $\Omega^2 \gg 1$, то максимальная величина инкремента достигается в условиях точного выполнения резонансных условий $\omega_0 - \omega_{-1} = \omega_p$:

$$\Gamma = \text{Im} \omega = 1/\sqrt{2} \Omega. \quad (7)$$

Условие $\Omega^2 \gg 1$ с учетом (7) означает, что параметр $K = \Gamma/\Omega \ll 1$. В данном случае происходит регулярный процесс перекачки энергии из волны накачки в энергию рассеянной поперечной волны и в энергию ленгмюровской волны.

Рассмотрим теперь случай больших амплитуд поля волны накачки ($\Omega^2 \ll 1$). Максимальное значение величины инкремента в этом случае достигается при $\Delta \rightarrow 0$:

$$\Gamma = \text{Im}\omega = \sqrt{3}/2. \quad (8)$$

Параметр K в этом случае превышает единицу ($K > 1$) и процесс распада должен быть хаотическим, а для его описания могут быть использованы методы статистической физики.

3.2. Анализ численных результатов

Система уравнений (4) была решена численно для различных значений амплитуды волны накачки. Были исследованы временная динамика амплитуд взаимодействующих волн (рис. 1, а, 2, а), спектры полученных реализаций (рис. 1, б, 2, б) и автокорреляционные функции (рис. 1, в, 2, в). Характерные зависимости этих величин для случая, когда $K < 1$, представлены на рис. 1. Из этих рисунков видно, что реализуется обычный процесс трехволнового взаимодействия. Амплитуды взаимодействующих волн периодически меняют свою величину, спектр реализаций линейчатый, а корреляционная функция осциллирует, почти не меняя своей величины. Динамика поля качественно меняется, когда амплитуда волны накачки достигает такой величины, что параметр K становится больше единицы ($K > 1$) (см. рис. 2). В этом случае поля становятся хаотическими, спектры - широкими, сплошными, а корреляционная функция быстро спадает до нуля.

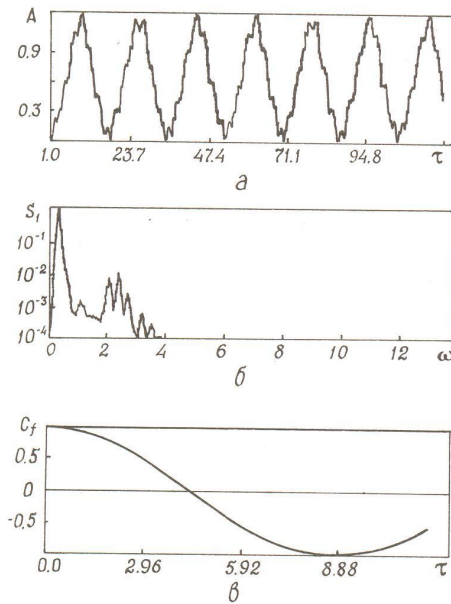


Рис. 1

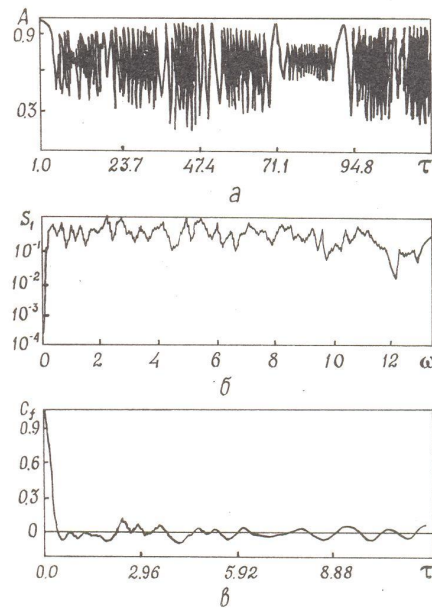


Рис. 2

* * *

В заключение необходимо сделать следующее замечание. Критерий $K > 1$ действительно показывает область параметров, где имеет место хаотическая динамика неинтегрируемых систем. Для интегрируемых систем он не работает. Обычно бывает трудно указать, интегрируема рассматриваемая система или нет. Поэтому критерием нужно пользоваться осторожно. Действительно, система (4) при малой амплитуде падающей волны сводится к системе уравнений первого порядка [5,6] и при бесконечном числе волн полностью интегрируема. Интегрируемой она является и при конечном числе волн, когда число красных и синих сателлитов одинаково.

Следует отметить, что в [4] рассмотрена динамика системы, представляющей собой систему большого числа связанных нелинейных осцилляторов. Найдены условия возникновения хаотичности в этой системе. Показано, что это возможно только при наличии нелинейного самовоздействия, т.е. когда в гамильтониане имеется нелинейность четвертой степени. Если ограничиться в гамильтониане нелинейностью третьей степени и считать, что имеется большое число высокочастотных осцилляторов (собственные частоты ω_n), которые связаны друг с другом через один с собственной частотой Ω ($\omega_n \gg \Omega$), то система уравнений в [4] легко сводится к системе (4). Таким образом, сформулированный выше критерий пригоден для более широкого круга физических процессов, чем просто взаимодействия типа волна - волна. В частности, в рассматриваемой системе осцилляторов для возникновения стохастичности нет необходимости в эффектах самовоздействия.

Библиографический список

1. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
2. Заславский Г.М., Чириков Б.В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний//УФН. 1971. Т.105. N5. С.3.
3. Chirikov B.V. A universal instability of many-dimensional oscillator system// Phys. Reports. 1979. Vol.52. P.265.
4. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
5. Bakaj A.S. Interaction of high-frequency and low-frequency waves in a plasma //Nuclear fusion. 1970. Vol.10. P.53.
6. Водяницкий А.А., Репалов Н.С. Нелинейное взаимодействие продольных волн в неизотермической плазме//ЖТФ. 1970. Т.40. N 1. С.32.

Харьковский физико-технический институт

INSTABILITY AND DYNAMICAL CHAOS IN A WEAK NONLINEAR INTERACTION OF WAVES

V.A. Butz, A.N. Kupriyanov, O.V. Manuylenko, A.P. Tolstoluzhskiy

The criterion of chaotic dynamics arising under a weak nonlinear waves interaction is suggested. The chaos arising criterion for wave - particle interaction is generalized. The value of the instability growth rate plays a role of the nonlinear resonance width. Computer simulations confirm this criterion.