Бифуркации
в динамических системах

Изв. вузов «ПНД», т. 22, № 1, 2014 УДК 517.9

ЛОКАЛЬНАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. С. Кащенко[1], *С. А. Кащенко*[1,2]

[1] Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
[2] Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Исследуется локальная – в окрестности нулевого состояния равновесия – динамика разностных и сингулярно возмущенных дифференциально-разностных систем уравнений. Критические случаи в задаче об устойчивости этого состояния равновесия имеют бесконечную размерность. Построены специальные нелинейные эволюционные уравнения, которые играют роль нормальной формы. Показано, что их динамика определяет поведение решений исходной системы.

Ключевые слова: Квазинормальная форма, запаздывание, разностное уравнение, дифференциально-разностное уравнение.

1. Введение

Нелинейные разностные и дифференциально-разностные системы уравнений служат математическими моделями многих прикладных задач. В этом плане особо можно отметить модели в областях радиоэлектроники, нейронных сетей, клеточных автоматов и т. д. Одним из базовых объектов в теории разностных систем уравнений являются системы вида

$$u_n = (A + \varepsilon B)u_{n-1} + F(u_{n-1}). \tag{1}$$

Здесь $n = 0, 1, ...;$ $u_n \in R^r$, A и B – $r \times r$ матрицы, $\varepsilon > 0$ – малый параметр: $0 < \varepsilon \ll 1$, вектор-функция $F(u)$ достаточно гладкая и имеет в нуле порядок малости не ниже второго. Удобно считать, что $F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + ...$, где $F_j(u, ..., u)$ – линейны по каждому аргументу. Предполагается, что реализуется критический в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия случай, когда матрица A имеет m собственных значений, равных по модулю 1, а все остальные ее собственные значения по модулю меньше, чем 1. Известно, что при этих условиях

© *И. С. Кащенко, С. А. Кащенко*

система (1) имеет в окрестности состояние равновесия $u = 0$ локальное инвариантное интегральное многообразие размерности m, на котором (1) можно представить в форме специальной системы размерности m нелинейных уравнений – нормальной форме. Отметим, что общая теория одномерных отображений достаточно хорошо изучена в [1]. Обратим внимание на построенную в [2] специальную теорию кусочно-линейных непрерывных, а в [3] – кусочно-линейных разрывных отображений. Завершенной теории даже для двумерного случая не существует, однако для различных классов нелинейностей получено много интересных результатов (см., например, [4]).

В настоящее время хорошо разработана общая методика исследования локальной – в некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия – динамики систем вида (1). Здесь будут существенно использованы результаты работы [5] об устойчивости нулевого состояния равновесия в различных критических случаях. Суть их состоит в том, что нормальные формы для разностных систем представимы в виде специальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений для медленно меняющихся (в непрерывном времени t) амплитуд при гармониках линейной части (1).

Вместе с (1) рассмотрим в R^r систему с непрерывным временем

$$u(t) = (A + \varepsilon B)u(t-1) + F(u(t-1)). \tag{2}$$

Эта система уравнений принадлежит к классу систем уравнений нейтрального типа нулевого порядка. Её решения с кусочно-непрерывной начальной при $t = t_0$ вектор-функцией тоже будут при $t > t_0$ кусочно-непрерывными.

Условие непрерывности решений (2) с начальной функцией $u(s+t_0) = \varphi(s) \in$ $\in C_{[-1,0]}(R^r)$ состоит в требовании выполнения условия согласования

$$\varphi(0) = (A + \varepsilon B)\varphi(-1) + F(\varphi(-1)). \tag{3}$$

Здесь будут рассмотрены вопросы о локальной динамике решений системы уравнений (3) с кусочно-непрерывными и непрерывными с условиями согласования начальными функциями. Соответственно, установившиеся решения будут либо кусочно-непрерывными, либо стремящиеся при $t \to \infty$ к кусочно-непрерывным функциям.

Отметим, что характеристический квазиполином линейной части (2) при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$\det|\exp A - I| = 0. \tag{4}$$

Обозначим через $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ все собственные значения матрицы A, равные по модулю 1. Тогда $\varkappa_j = \exp(i\omega_j)$ $(0 \le \omega_j < 2\pi)$ и корни (4) составляют бесконечную совокупность

$$\lambda_{jk} = i\left[\omega_j + 2\pi k\right],\ j = 1,\ \ldots,\ m;\ k = 0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots\,. \tag{5}$$

Таким образом, для (2) реализуется критический в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия случай бесконечной размерности. Как следствие этого факта для системы (2) характерно наличие бесконечных множеств различных локальных разрывных динамических режимов. Введем затем в рассмотрение эквивалентную системе (2) систему уравнений

$$u(t + \mu) = (A + \varepsilon B)u(t-1) + F(u(t-1)), \tag{6}$$

© *И. С. Кащенко, С. А. Кащенко*

где

$$0 < \mu \ll 1 \tag{7}$$

– еще один малый параметр. Эта система получается из (2) путем простых преобразований и переобозначений. Решение (6) с начальной функцией $u(s) = \varphi(s) \in \in C_{[-1,\,0]}(R^r)$ будет тоже n-раз непрерывно дифференцируемым, если выполнены условия согласования

$$\varphi^j(\mu) = (A + \varepsilon B)\varphi^j(-1) + \frac{d^j}{ds^j}F(\varphi(s-1))\bigg|_{s=0} \quad (j = 0,\ \ldots,\ n).$$

Вместе с изучением динамики непрерывно дифференцируемых и дважды непрерывно дифференцируемых решений (2) естественным образом возникает задача изучения локальной динамики следующих двух систем уравнений

$$\mu\dot{u}(t) + u(t) = (A + \varepsilon B)u(t-1) + F(u(t-1)) \tag{8}$$

и

$$\frac{1}{2}\mu^2\ddot{u}(t) + \mu\dot{u}(t) + u(t) = (A + \varepsilon B)u(t-1) + F(u(t-1)). \tag{9}$$

Каждая из этих двух систем является системой с запаздывающим аргументом, а значит для гладкости решений (при всех t больше некоторого t_0) не нужны условия согласования начальных функций. В силу (7), системы (8) и (9) являются сингулярно возмущенными.

Поставим задачу сравнительного локального анализа динамики систем (2), (8) и (9) (при достаточно малых значениях ε и μ).

Характеристические квазиполиномы линеаризованных в нуле систем (2), (8) и (9) имеют бесконечно много корней, вещественные части которых стремятся к нулю при ε, $\mu \to 0$. Тем самым и для этих систем реализуется критический в задаче об устойчивости нуля случай бесконечной размерности.

Стандартные методы локального анализа, основанные на применении методов инвариантных интегральных многообразий [6, 7] и метода нормальных форм (см., например, [8]), вообще говоря, здесь неприменимы, однако формализм метода нормальных форм существенно используется. Для изучения динамики при сформулированных условиях в [9] разработаны методы построения специальных нелинейных эволюционных систем, нелокальная динамика которых определяет локальные динамические свойства исходных систем соответственно (2), (8) и (9). Эти методы базируются на использовании некоторых формальных (бесконечных) рядов, в которых фигурируют неизвестные медленно меняющиеся по времени амплитуды-коэффициенты при гармонических решениях линейных (вырожденных) систем (2), (8), (9). Подставляя эти ряды в исходные системы и собирая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим бесконечную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Как оказывается, эту бесконечную систему удается «свернуть», то есть записать в виде нелинейного уравнения с частными производными – в виде так называемой квазинормальной формы (КНФ). Важно отметить, что получены явные формулы, которые позволяют перейти от решений построенных эволюционных уравнений (КНФ) к решениям исходных систем. По решениям КНФ будут построены главные приближения асимптотических по невязке решений (2), (8) и (9).

В настоящей работе ограничимся рассмотрением трех наиболее важных и интересных случаев, когда $m = 1$ и $\varkappa_1 = 1$, когда $m = 1$ и $\varkappa_1 = -1$ и когда $m = 2$ и $\varkappa_{1,2} \neq -1; 1$.

Во втором разделе приведены результаты для наиболее простого случая, когда A_0 имеет на единичной окружности одно простое – единичное – собственное значение. Отметим, что полученные для (2) и (8) в этом случае результаты довольно просты, а для (9) являются новыми. В третьем разделе рассмотрен существенно более интересный случай, когда $m = 1$ и матрица A имеет собственное значение -1. В частности, будет показано, что динамика всех трех систем (2), (8) и (9) может принципиально отличаться. Наконец, в четвертом разделе рассмотрены ситуации, когда $m = 2$ и $\varkappa_{1,\,2} \neq 1; -1$. Особый интерес здесь представляет рассмотрение резонансных случаев $\omega_{1,2} = \pm\dfrac{\pi}{2}$ и $\omega_{1,2} = \pm\dfrac{2\pi}{3}$.

Будут выявлены сходства и различия динамических свойств уравнений с дискретным и с непрерывным «временем“, а также разрывных и гладких решений исходных систем уравнений.

Замечание 1.1. Из приведенных ниже результатов можно сделать вывод о том, что использование систем вида (9) с более старшими производными ($\dfrac{1}{6}\mu^3\dddot{u}$ и т. д.) интереса не представляет.

В плане обсуждения поставленной задачи обратим особое внимание на важность вывода систем уравнений с запаздыванием (8) и (9) из системы (6). Поясним сказанное. Для этого рассмотрим систему уравнений нейтрального типа в форме

$$Cu(t) = Du(t-1) + F(u(t-1)).$$

Согласно идеологии вывода систем (8) и (9) здесь возникают системы уравнений

$$\mu C\dot{u}(t) + Cu(t) = Du(t-1) + F(u(t-1))$$

и

$$\frac{1}{2}\mu^2 C\ddot{u}(t) + \mu Cu(t) = Du(t-1) + F(u(t-1)).$$

Эти системы уравнений нейтрального типа и сингулярно возмущенные системы с запаздыванием сводятся, очевидно, к системам вида (2), (8) и (9), соответственно. Если же вместо последних двух систем рассматривать системы

$$\mu\dot{u}(t) + Cu(t) = Du(t-1) + F(u(t-1))$$

и

$$\frac{1}{2}\mu^2\ddot{u}(t) + \mu\dot{u}(t) + Cu(t) = Du(t-1) + F(u(t-1)),$$

то, вообще говоря, задачи о динамике решений уравнений с малым параметром μ могут не иметь ничего общего с уравнением нейтрального типа (при $\mu = 0$).

Замечание 1.2. Обратим внимание еще на одно обстоятельство, подчеркивающее важность вывода систем (8), (9) из системы (6). Для этого рассмотрим две системы дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{u}(t) + u(t) = (A + \varepsilon B)u(t-\tau) + F(u(t-\tau))$$

© *И. С. Кащенко, С. А. Кащенко*

и

$$\ddot{u}(t) + a\dot{u}(t) + u(t) = (A + \varepsilon B)u(t - \tau) + F(u(t - \tau)) \qquad (a > 0).$$

Будем предполагать, что запаздывание τ достаточно велико: $\tau = \mu^{-1}$, $0 < \mu \ll 1$. Тогда в результате замены времени $t \to \tau t$ приходим к системам

$$\mu\dot{u}(t) + u(t) = (A + \varepsilon B)u(t - 1) + F(u(t - 1))$$

и

$$\mu^2\ddot{u}(t) + a\mu\dot{u}(t) + u(t) = (A + \varepsilon B)u(t - 1) + F(u(t - 1)).$$

Первая из этих систем совпадает с (8), а вторая отличается от (9) параметрами левой части. Ниже будет показано, что в последнем случае динамика может существенно отличаться от динамики системы (9).

2. Случай простого единичного собственного значения матрицы A

2.1. Здесь считаем, что $m = 1$ и $\varkappa_1 = 1$ ($\omega_1 = 0$). Отметим, что модельный – в случае, когда размерность $r = 1$ – вид системы (1) такой

$$v_n = v_{n-1} + \varepsilon b_0 v_{n-1} + c v_{n-1}^2 + o(\varepsilon^2 + |v_{n-1}|^3 + \varepsilon v_{n-1}^2).$$

При выполнении условий невырожденности $b_0 \neq 0$ и $c \neq 0$ локальная динамика этого уравнения определяется динамикой укороченного уравнения

$$v_n = (1 + \varepsilon b_0)v_{n-1} + c v_{n-1}^2.$$

Очевидно, имеется ровно два состояния равновесия, устойчивость которых определяется просто.

2.2. Рассмотрим систему (2) при $m = 1$; $\varkappa_1 = 1$. Обозначим через a собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению $\varkappa_1 = 1$, а через b – собственный вектор сопряженной к ней матрицы A^*, отвечающий такому же собственному значению. Удобно нормировать a и b так, чтобы $(a, b) = 1$. Напомним, что характеристическое уравнение (4) имеет корни $\lambda_k = 2\pi i k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части.

Согласно методу КНФ [9, 10], введем в рассмотрение формальный ряд

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(2\pi i k t) a + \varepsilon^2 u_2(\tau, t) + \ldots , \qquad (10)$$

где $\tau = \varepsilon t$ – медленное время; $\xi_k(\tau)$ – неизвестные, медленно меняющиеся «амплитуды» при периодических гармониках-решениях линейной (при $\varepsilon = 0$) системы (2); вектор-функции $u(\tau, t)$ периодичны по t с периодом 1. Подставляя (10) в (2) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε, на втором шаге получим уравнение для определения выражения $\xi(\tau, x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(2\pi i k x)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = b_0 \xi + c \xi^2, \; \xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x). \qquad (11)$$

Здесь $b_0 = (Ba,\ b)$, $c = (F_2(a,\ a), b)$ и использовано соотношение $\xi(\tau - \varepsilon, x) = = \xi(\tau, x) - \varepsilon \dfrac{\partial \xi(\tau, x)}{\partial \tau} + o(\varepsilon^2)$.

Заметим, что эта КНФ – обыкновенное дифференциальное уравнение с периодически меняющимся параметром x – анализируется тривиально.

2.3. Построение КНФ для системы (8). Сначала дополнительно предполагаем, что параметры ε и μ связаны соотношением

$$\mu = g\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

где значение параметра $g > 0$ как-то фиксировано.

Подставляя ряд (10) в (8) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε, на втором шаге получим КНФ – параболическую краевую задачу для определения $\xi(\tau, x)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{g^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + g^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + b_0 \xi + c\,\xi^2, \quad \xi(\tau, x+1) \equiv \xi(\tau, x). \tag{13}$$

Определенное при всех $\tau \geq \tau_0$ решение этой краевой задачи позволяют определить асимптотическое по невязке решение (8) с помощью формулы

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon\, \xi(\varepsilon t,\ t) a + o(\varepsilon^3).$$

Предположим затем, что выполнено соотношение

$$\mu = g\varepsilon^{\alpha} \qquad (\alpha > 0).$$

Тем самым к краевой задаче (13) сводится случай $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Динамика (в главном) при $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ тривиальна: снова приходим к (13), но при $b_0 = 0$.

2.4. Существенно более интересен случай, когда

$$\alpha > \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Здесь используем результаты из [11]. Введем несколько обозначений. Фиксируем произвольное значение $z \neq 0$ и через $\theta = \theta(\varepsilon,\ z) \in (0,\ 1]$ обозначим такую величину, для которой значение $z\varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta$ является целым. Рассмотрим параболическую краевую задачу

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = \frac{z^2 g^2}{2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + b_0 \xi + c\xi^2, \quad \xi(\tau,\ y+1) \equiv \xi(\tau,\ y). \tag{15}$$

Определенное при всех $\tau > \delta_0$ и ограниченное при $\tau \to \infty$ решение этой краевой задачи доставляет асимптотическое по невязке решение $u(t,\ \varepsilon)$ уравнения (8) с помощью формулы

$$u = \varepsilon \xi(\varepsilon t, (z\varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta)t) + o(\varepsilon).$$

Таким образом, в качестве квазинормальной формы выступает однопараметрическое семейство (зависящее от параметра z) краевых задач (15).

При условии (14) роль квазинормальныхх форм играют и существенно более сложные краевые задачи [11]. Опишем их структуру. Фиксируем произвольно целое

$n > 1$ и рассмотрим произвольный набор чисел $z_1,\ ...,\ z_n$ $(z_j \neq 0)$. Через $\theta_j = \theta_j(z_j,\ \varepsilon) \in (0,\ 1]$ обозначим значение, для которого выражение $z_j\varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta_j$ является целым. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{g^2}{2}\left(z_1\frac{\partial}{\partial y_1} + ... + z_n\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^2\xi + b_0\xi + c\,\xi^2 \tag{16}$$

с 1-периодическими по каждому из y_j краевыми условиями. Главный вывод заключается в том, что по ограниченному при $\tau \to \infty$ решению $\xi(\tau, y,\ ..., y_n)$ этой краевой задачи восстанавливаем асимптотическое по невязке решение уравнения (8). Сформулируем соответствующее утверждение более точно.

Теорема 1. *Фиксируем произвольно натуральное n и произвольный набор вещественных чисел $z_1,\ ...,\ z_n$ $(z_j \neq 0)$. Пусть уравнение (16) имеет ограниченное по τ при $\tau \to \infty$ вместе с производными $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y_i^2}$ $(i = 1, \ldots, n)$ и 1-периодическое по всем $y_1,\ ...,\ y_n$ решение $\xi(\tau,\ y_1,\ ...,\ y_n)$. Тогда система уравнений (8) имеет асимптотическое по невязке решение $u(t,\ \varepsilon)$, для которого*

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon\xi(\varepsilon t,\ (z_1\varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta_1)t,\ ...,\ (z_n\varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta_n)t) + o(\varepsilon).$$

Отметим, что устойчивым решением краевой задачи (15) может быть только состояние равновесия. По-видимому, этот же вывод справедлив и для (16).

2.5. Рассмотрим вопрос о поведении решений уравнения второго порядка с запаздыванием (9). Сначала остановимся на наиболее интересном случае, когда

$$\mu = g\varepsilon^{\frac{1}{3}}. \tag{17}$$

Рассмотрим характеристический квазиполином линеаризованного в нуле уравнения (9)

$$\frac{1}{2}g^2\varepsilon^{\frac{2}{3}}\lambda^2 + g\varepsilon^{\frac{1}{3}}\lambda + 1 = (1 + \varepsilon b_0)\exp(-\lambda). \tag{18}$$

Вещественные части бесконечно многих корней $\lambda_k(\varepsilon)$ уравнения (18) стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ и нет корней, вещественные части которых положительны и отделены от нуля при $\varepsilon \to 0$. Асимптотическое разложение для $\lambda_k(\varepsilon)$ имеет вид

$$\lambda_k(\varepsilon) = 2\pi ki - \varepsilon^{\frac{1}{3}}g2\pi ki + \varepsilon^{\frac{2}{3}}g^2 2\pi ki - \varepsilon\left[b_0 + g^3\left(\frac{1}{6}(2\pi k)^3 i + 2\pi ki\right)\right] + o(\varepsilon^{\frac{4}{3}}). \tag{19}$$

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_k(\tau)\exp\left[2\pi ki\left(1 - \varepsilon^{\frac{1}{3}}g + \varepsilon^{\frac{2}{3}}g^2\right)t\right] + \varepsilon^2 u_2(t,\ \tau) + ..., \quad \tau = \varepsilon t. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (9) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε, на втором шаге получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $\xi_k(\tau)$. Как оказывается, эта система уравнений представима в виде одного уравнения для $\xi(\tau,\ x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\varepsilon_k(\tau)\exp(2\pi kix)$

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = g^3\frac{1}{6}\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3} - g^3\frac{\partial\xi}{\partial x} + b_0\xi + c\xi^2 \tag{21}$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau,\ x+1)=\xi(\tau,\ x). \tag{22}$$

Очевидно, краевая задача (21), (22) имеет два однородных состояния равновесия $\xi\equiv 0$ и $\xi\equiv -b_0c^{-1}$. Первое устойчиво при $b_0<0$, а второе – при $b_0>0$ $(c\neq 0)$. Для этой же краевой задачи просто строятся бегущие волны – 1-периодические решения вида $\xi(y)$, где $y=\omega_n\tau+nx$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. Для $\xi(y)$ тогда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{6}g^3n^3\frac{\partial^3\xi}{\partial y^3}-(\omega_n+g^3n)\frac{\partial\xi}{\partial y}+b_0\xi+c\,\xi^2=0. \tag{23}$$

Положим здесь $\omega_n=-g^3n-\dfrac{2\pi^2}{3}g^3n^3-(\dfrac{1}{6}g^3n^3)^{-1}\sigma$ и $\nu=(\dfrac{1}{6}g^3n^3)^{-1}$. Опуская индекс n, из (23) приходим к уравнению

$$\frac{\partial^3\xi}{\partial y^3}+4\pi^2(1+\nu\sigma)\frac{\partial\xi}{\partial y}+\nu(b_0\varepsilon+c\,\xi^2)=0. \tag{24}$$

При каждом фиксированном σ и при достаточно малых значениях параметра ν это уравнение имеет периодическое решение периода $T(\nu)=1+o(\nu)$ и

$$\xi_0(y_1,\ \varepsilon)=\sqrt{2}b_0(2c)^{-1}\cos 2\pi y_1-b_0(2c)^{-1}+o(\nu),$$

где $y_1=(1+o(\nu))y$. Распорядиться фигурирующим в (24) параметром $\sigma=\sigma(\nu)$ можно так, чтобы $T(\nu)\equiv 1$. Таким образом при всех достаточно малых ν или, что то же самое, при всех достаточно больших значениях n краевая задача (21), (22) имеет периодическое решение

$$\xi(\tau,\ x)=\xi_0\left(-\left[g^3n+\frac{2\pi^2}{3}g^3n^3+\nu_n\sigma(\nu_n)\right]\tau+nx\right)\qquad(\nu_n=(\frac{1}{6}g^3n^3)^{-1}).$$

Исследование устойчивости $\xi_n(\tau,\ x)$ сводится, очевидно, к определению асимптотики при $\nu\to 0$ таких собственных значений $\lambda=\lambda(\nu)$ периодической краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^3\xi}{dy^3}+4\pi^2(1+o(\nu^2))\frac{d\xi}{dy}+b_0+2c\xi(\tau,\ x)\xi=\lambda\xi, \tag{25}$$

которые стремятся к нулю при $\nu\to 0$. Таковых, очевидно, три. Одно из них, конечно, нулевое, а два других $\lambda_1(\nu)$ и $\lambda_2(\nu)$ вещественны, таковы, что $\lambda_j(\nu)=\nu\lambda_{j1}+o(\nu^2)$ $(j=1,2)$ и $\lambda_{11}\lambda_{21}<0$. Тем самым одно из $\lambda_j(\nu)$ положительно, а значит все периодические решения $\xi_n(\tau,\ x)$ при достаточно больших n неустойчивы.

2.6. О некоторых распространениях полученных утверждений.

2.6.1. Пусть в системе (9) для параметра μ выполнено условие $\mu=g\varepsilon^{\alpha}$, где

$$\alpha>\frac{1}{3}.$$

Соответствующие квазинормальные формы получаются из краевой задачи (21), (22) заменой в ней оператора $\dfrac{\partial}{\partial x^3}$ на оператор $\left(z_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+\dots+z_n\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

2.6.2. В том случае, когда в (11), (13), (21) выполнено равенство $c=0$, следует, очевидно, перейти к рассмотрению кубической нелинейности $du^3(t-1)$. В результате приходим к нормализованным краевым задачам вида (11), (13), (21), в которых слагаемое $c\,\xi^2$ следует заменить на $d\,\xi^3$. Установившиеся режимы здесь имеют амплитуды порядка $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Для нахождения бегущих волн соответствующего уравнения приходим к задаче определения 1-периодических решений обыкновенного дифференциального уравнения-аналога (24)

$$\frac{d^3\xi}{dy^3}+4\pi^2(1+\nu\sigma)\frac{d\xi}{dy}+\nu(b_0\varepsilon+d\xi^3)=0,\quad 0<\nu\ll 1.$$

При условии $b_0>0$ и $d<0$ (и при подходящем выборе функции $\sigma=\sigma(\nu)$) это уравнение имеет состояния равновесия $\xi\equiv 0$, $\xi=\pm\xi_0$, где $\xi_0=(-b_0d^{-1})^{\frac{1}{2}}$ и 1-периодические решения

$$\xi_0(y,\,\nu)=\frac{2}{\sqrt{3}}\xi_0\cos 2\pi y+o(\nu)$$

и

$$\xi_{1,2}(y,\,\nu)=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\xi_0+\sqrt{\frac{8}{15}}\xi_0\cos 2\pi y+o(\nu).$$

Тем самым исходное уравнение имеет неустойчивое состояние равновесия $u\equiv 0$, два устойчивых однородных состояния равновесия $u_{1,2}=\pm\varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi_0+o(\varepsilon)$ и – при достаточно больших n – три семейства периодических решений $u_{1,n}$, $u_{2,n}$, $u_{3,n}$, причем

$$u_{1,2,n}(t,\,\varepsilon)=\pm\varepsilon_0\left[\frac{1}{\sqrt{5}}+\sqrt{\frac{8}{15}}\cos(\omega_n(1+\nu_n\sigma(\nu_n))\varepsilon t+nx)+o(1)\right],$$

$$u_{3,n}(t,\,\varepsilon)=\varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi_0\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\omega_n(1+\nu_n\sigma(\nu_n))\varepsilon t+nx)+o(1)\right].$$

Все решения $u_{1,n}(t,\,\varepsilon)$ и $u_{2,\,n}(t,\,\varepsilon)$ неустойчивы, а все решения $u_{3,n}(t,\,\varepsilon)$ орбитально асимптотически устойчивы.

Замечание 2.1. В этом и следующих параграфах фигурируют краевые задачи, содержащие произвольный параметр z (формула (15)). После замены $x\to zx$ получаем параболическое уравнение без параметра, а параметр входит только в краевые условия. Тем самым речь идет о построении решений параболического уравнения с произвольным периодом по пространственной переменной. В этой связи актуальной становится задача о решениях уравнения вообще без краевых условий. Тогда для уравнения из (15) применима, например, известная методика Колгомогорова–Петровского–Пискунова [12].

2.7. Квазинормальные формы для системы уравнений

$$\rho\mu^2\ddot{u}(t)+\mu\dot{u}(t)+u(t)=(hA+\varepsilon B)u(t-1)+cu^2(t-1)+du^3(t-1)+\dots\,. \quad (26)$$

Эта система является несколько более общей, по сравнению с (9). В ней присутствуют два новых параметра $\rho>0$ и h. Система (26) переходит в (9) при $\rho=\dfrac{1}{2}$ и

$h = 1$. Здесь коротко остановимся на описании локальной динамики (26). Подробно соответствующие результаты приведены в [13].

Предположим сначала, что выполнены условия

$$0 < \rho < \frac{1}{2} \tag{27}$$

и

$$\mu = g\varepsilon^{\alpha} \text{ и } \alpha = \frac{1}{2}. \tag{28}$$

Тогда при $0 < |h| < 1$ и при достаточно малых ε и μ все решения (9) из некоторой (достаточно малой и независящей от ε и μ) окрестности $u = 0$ стремятся к нулю при $t \to \infty$. Если же $|h| > 1$, то характеристический квазиполином

$$\rho\mu^2\lambda^2 + \mu\lambda + 1 = b\exp(-\lambda) \tag{29}$$

имеет корень с положительной (и отделенной от нуля при малых ε и μ) вещественной частью. При условии $|b| = 1$ бесконечно много корней (29) стремятся к мнимой оси при ε, $\mu \to 0$. В этом случае динамика (9) описывается [13] при $\alpha = \dfrac{1}{2}$ поведением решений КНФ

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = g^2\left(\frac{1}{2} - \rho\right)\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + b_0\xi - (d + c^2)\xi^3, \quad \xi(\tau,\, y+1) \equiv -\xi(\tau,\, y), \tag{30}$$

а связь (30) и (9) устанавливает соотношение

$$u(t,\, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi(\varepsilon t,\, t + \sqrt{\varepsilon}g(1 + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}))t) + o(\varepsilon).$$

При $\alpha > \dfrac{1}{2}$ ситуация в основе своей повторяет построения, приведенные выше в п. 2.4: оператор $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ заменяется на вырожденный параболический $\left(z_1\dfrac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + z_n\dfrac{\partial}{\partial y_n}\right)^2$, решение $u(t,\, \varepsilon)$ становится быстро осциллирующим по «пространственной» переменной:

$$u(t,\, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\xi\Big(\varepsilon t,\, \left(z_1\varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta_1\right)t + \sqrt{\varepsilon}gz_1(1 + o(1))t,\, \ldots,$$
$$\ldots\left(z_n\varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta_n\right)t + \sqrt{\varepsilon}gz_n(1 + o(1))t\Big) + o(\varepsilon).$$

Если же

$$\rho > \frac{1}{2}, \tag{31}$$

то ситуация существенно сложнее [13]. Введем в рассмотрение функцию

$$h(\rho) = \left[\left(2\rho^2\right)^{-1}\left(2\rho - \frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

При условии (31) эта функция положительна, монотонно возрастает и $h(\frac{1}{2}) = 1$. Тогда при $0 < |h| < h(\rho)$ все корни (29) имеют отрицательные вещественные части, отделенные от нуля при малых ε и μ. При $|h| > h(\rho)$ имеется корень квазиполинома (29) с положительной (и отделимой от нуля при $0 < \varepsilon,\ \mu \ll 1$) вещественной частью. Таким образом, в изучении нуждается только случай, когда в (9) $|h| = h(\rho)$. В [13] показано, что при $\alpha = \dfrac{1}{2}$ динамика (9) определяется тогда поведением решений параболической краевой задачи для комплексной функции $\xi(\tau,\, y)$ с 2π-периодическими краевыми условиями

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \beta_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \beta_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + \beta_3 \xi + \beta_4 |\xi|^2 \xi.$$

Значения всех комплексных коэффициентов $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_4$ приведены в [13]. Таким образом динамика (9) в случае (31) существенно сложнее, чем в случае (27). Отметим, что при $\alpha > \dfrac{1}{2}$, как и выше, оператор $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ заменяется на $\left(z_1 \dfrac{\partial}{\partial y_1} + ... + z_n \dfrac{\partial}{\partial y_n} \right)^2$. Решение $u(t,\, \varepsilon)$ связано с $\xi(\tau,\, y_1,\, \ldots,\, y_n)$ формулой

$$\begin{aligned} u(t,\varepsilon) = {} & \sqrt{\varepsilon} \exp\left[i \sqrt{\rho - \frac{1}{2}} (\rho\varepsilon)^{-1} (1 + o(1)) t \right] \xi \left(\varepsilon t,\, \left(z_1 \varepsilon^{\frac{1}{2} - \alpha} + \theta_1 + \sqrt{\varepsilon} g z_1 + o(\sqrt{\varepsilon}) \right) t, ..., \right. \\ & \left. ... \left(z_n \varepsilon^{\frac{1}{2} - \alpha} + \theta_n + \sqrt{\varepsilon} g z_1 + o(\sqrt{\varepsilon}) \right) t \right) + \\ & + \sqrt{\varepsilon} \exp\left[-i \sqrt{\rho - \frac{1}{2}} (\rho\varepsilon)^{-1} (1 + o(1)) t \right] \bar{\xi} \left(\varepsilon t,\, \left(z_1 \varepsilon^{\frac{1}{2} - \alpha} + \theta_1 + \sqrt{\varepsilon} g z_1 + o(\sqrt{\varepsilon}) \right) t, ..., \right. \\ & \left. ... \left(z_n \varepsilon^{\frac{1}{2} - \alpha} + \theta_n + \sqrt{\varepsilon} g z_1 + o(\sqrt{\varepsilon}) \right) t \right) + o(\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned}$$

3. Случай простого собственного значения $\varkappa_1 = -1$ матрицы A

3.1. Этот случай существенно более содержателен по сравнению с предыдущим.

Отметим, что простейшим модельным уравнением здесь служит уравнение

$$u_n = (-1 + \varepsilon b_0) u_{n-1} + c u_{n-1}^2 + d u_{n-1}^3 + \ldots .$$

Характеристическое уравнение (4) имеет на единичной окружности корни

$$\lambda_k = \exp[(2k+1)\pi i], \quad k = 0,\, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Пусть $Aa = -a$, $A^* b = -b$ и $(a,\, b) = 1$. Ниже предполагаем, что выполнены условия невырожденности

$$b_0 \neq 0, \quad d + c^2 \neq 0.$$

Для исследования системы уравнений (2) введем в рассмотрение формальный ряд

$$u(t,\, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a\, \xi_k(\tau) \exp[i(2k+1)\pi t] + \varepsilon u_2(t,\, \tau) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_3(t,\, \tau) + \ldots, \qquad (32)$$

в котором $\tau = \varepsilon t$, $\xi_k(\tau)$ – неизвестные «амплитуды» при соответствующих гармониках, зависимость функций $u_j(t,\ \tau)$ от первого аргумента является 2-периодической. Подставляя (32) в (2) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε, на третьем шаге (то есть собирая коэффициенты при $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$) из условий разрешимости уравнений относительно $u_3(t,\ \tau)$ получаем уравнение для $\xi(\tau,\ x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \times$ $\times \exp(i(2k+1)\pi x)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = b_0\xi - (d + c^2)\xi^3, \quad \xi(\tau,\ x+1) = -\xi(\tau,\ x). \tag{33}$$

Отметим, что при $b_0 > 0$ и $(d + c^2) < 0$ и при каждом $x \in [0,\ 2\pi]$ краевая задача (33) имеет множество разрывных периодических решений, которые принимают два значения: $\xi_0 = \pm[b_0(d + c^2)^{-1}]^{\frac{1}{2}}$.

3.2. Рассмотрим вопрос о построении гладких асимптотических по невязке решений системы (8). Предположим сначала, что для некоторой постоянной $g > 0$ малые параметры μ и ε связаны соотношением

$$\mu = g\sqrt{\varepsilon}. \tag{34}$$

Тогда локальная динамика системы уравнений (8) определяется [9] (нелокальным) поведением решений параболической краевой задачи

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}g^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + g^2\frac{\partial \xi}{\partial y} + b_0\xi - (d + c^2)\xi^3, \quad \xi(\tau,\ y+1) \equiv -\xi(\tau,\ y). \tag{35}$$

Решения системы (8) и (35) связаны асимптотическим равенством

$$u(t,\ \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}a\xi(\varepsilon t,\ t + \sqrt{\varepsilon}g(1 + o(1))t) + \varepsilon u_2(\varepsilon t,\ t + \varepsilon^{\frac{1}{2}}(g + o(1))t) + \dots\ .$$

Таким образом при условии (34) получаем асимптотическое представление для гладких решений системы уравнений (8).

Отметим, что при условии

$$\mu = g\varepsilon^{\alpha} \tag{36}$$

и при $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ получаем краевую задачу (35) при $b_0 = 0$. Тем самым этот случай интереса не представляет.

3.3. Быстро осциллирующие решения (8). Пусть в (36) для параметра α верно неравенство

$$\alpha > \frac{1}{2}. \tag{37}$$

Как и выше, через z будем обозначать произвольную постоянную, а через $\theta =$ $= \theta(z,\ \varepsilon) \in (0,\ 1]$ такую величину, которая дополняет выражение $z\varepsilon^{1/2-\alpha}$ до целого. Пусть $\xi(\tau,\ y)$ – ограниченное при $\tau \to \infty$ решение краевой задачи

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}g^2z^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + b_0\xi - (d + c^2)\xi^3, \quad \xi(\tau,\ y+1) \equiv \xi(\tau,\ y). \tag{38}$$

Тогда формулой

$$u(t,\ \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\xi(\varepsilon t,\ t(z\varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta) + gz(1 + o(1))\sqrt{\varepsilon}t)$$

© *И. С. Кащенко, С. А. Кащенко*

доставляется асимптотическое с точностью до $o(\varepsilon)$ решение системы уравнений (8).

В более общей ситуации функция $\xi(\tau,\, y_1,\, \ldots,\, y_n)$ – решение уравнения

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\left(z_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + z_n\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^2 \xi + b_0\xi - (d+c^2)\xi^3.$$

Рассматриваются либо 2-периодические, либо 1-антипериодические условия по каждой из переменных $y_1,\, \ldots,\, y_n$, причем количество 1-антипериодических условий обязательно нечетно.

Для решения $\xi(\tau,\, y_1,\, \ldots,\, y_n)$ этого уравнения с соответствующими краевыми условиями имеет место утверждение теоремы и асимптотическая формула для решения $u(t,\, \varepsilon)$ системы (8)

$$u(t,\, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\xi\Big(\varepsilon t,\, \Big(z_1\varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta_1\Big)t + \sqrt{\varepsilon}gz_1(1+o(1))t,\, ...,$$
$$... \Big(z_n\varepsilon^{\frac{1}{2}-\alpha} + \theta_n\Big)t + \sqrt{\varepsilon}gz_n(1+o(1))t\Big) + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

Заметим, что функция $r(\tau,\, zgy) = \xi(\tau,\, y,\, \ldots,\, y)$, где $z = (z_1 + \cdots + z_n)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + b_0 r - (d+c^2)r^3.$$

3.4. Построение КНФ для системы уравнений (9).

Пусть сначала выполнено условие

$$\mu = g\varepsilon^{1/3}.$$

Подставляя формальный ряд (32) в (9) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$, приходим на третьем шаге к КНФ

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{6}g^3\frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3} - g^3\frac{\partial \xi}{\partial y} + b_0\xi - (d+c^2)\xi^3, \tag{39}$$

$$\xi(\tau,\, y+1) \equiv -\xi(\tau,\, y), \tag{40}$$

где $\tau = \varepsilon t,\ y = t - \varepsilon^{1/3}gt + \varepsilon^{2/3}g^2 t$. Напомним, что решения этой краевой задачи и системы (9) связаны соотношением

$$u(t,\, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}a\xi(\varepsilon t,\, t - \varepsilon^{1/3}gt + \varepsilon^{2/3}g^2 t) + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

Если же $\mu = g\varepsilon^{\alpha}$ и $\alpha > \dfrac{1}{3}$, то, как и во втором разделе, соответствующие совокупности семейств КНФ получаются из (39), (40) путем замены там оператора $g^3\left(\dfrac{1}{6}\dfrac{\partial^3}{\partial y^3} - \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ на операторы $\dfrac{1}{6}g^3\left(z_1\dfrac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + z_k\dfrac{\partial}{\partial y_k}\right)^3$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{6}g^3\left(z_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + z_k\frac{\partial}{\partial y_k}\right)^3 + b_0\xi - (d+c^2)\xi^3. \tag{41}$$

Следует рассматривать такие краевые условия для (41), которые по каждому из $y_j,\ (j = 1,\, \ldots,\, k)$ либо 2-периодичны, либо 1-антипериодичны, но количество переменных с антипериодическими краевыми условиями должно быть обязательно нечетным. Сформулируем итоговое утверждение.

© И. С. Кащенко, С. А. Кащенко

Теорема 2. *Пусть для некоторого натурального k и для некоторой совокупности вещественных (ненулевых) чисел $z_1, \ldots, z_k$ уравнение (41) с соответствующими краевыми условиями имеет ограниченное при $\tau \to \infty$ вместе с производными $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y_i^2}$ $(i = 1, \ldots, k)$ решение $\xi_0(\tau, y_1, \ldots, y_k)$. Тогда система уравнений (9) имеет асимптотическое по невязке решение $u(t, \varepsilon)$, для которого*

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} a\xi_0 \Big(\varepsilon t, (z_1\varepsilon^{\frac{1}{3}-\alpha} + \theta_1 - \varepsilon^{\frac{1}{3}} g z_1 + \varepsilon^{\frac{2}{3}} g^2 z_1^2)t, \ldots,$$
$$\ldots (z_k\varepsilon^{\frac{1}{3}-\alpha} + \theta_k - \varepsilon^{\frac{1}{3}} g z_k + \varepsilon^{\frac{2}{3}} g^2 z_k^2)t\Big) + o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

Замечание 3.1. Как и в п.2 из второго раздела для КНФ (39), (40) и (41) можно довольно просто конструировать, используя бифуркационный метод Андронова–Хопфа, бесконечные семейства периодических бегущих волн вида $\xi_n = \xi_n(\omega_n\tau + \pi(2n+1)y)$.

Замечание 3.2. Пусть функция $\xi(\tau, y_1, \ldots, y_k)$ являются решением уравнения (41). Тогда функция $\eta(\tau, y) = \xi(\tau, \delta y, \ldots, \delta y)$, где $\delta = (z_1 + \ldots + z_k) g\sigma^{-\frac{1}{3}}$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} + b_0\eta - (d + c^2)\eta^3.$$

3.5. О квазилинейных разностных и дифференциально-разностных уравнениях.

Изложенный выше подход распространяется, очевидно, и на квазилинейные разностные уравнения. Пусть, для примера, имеем квазилинейную разностную систему

$$u(t) = -u(t-1) + \varepsilon f(u(t-1)), \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{42}$$

или квазилинейную дифференциально-разностную систему

$$\mu\dot{u}(t) + u(t) = -u(t-1) + \varepsilon f(u(t-1)), \quad 0 < \varepsilon,\ \mu \ll 1. \tag{43}$$

Динамика (42) в главном тогда описывается КНФ-уравнением для 1-антипериодической по второму аргументу «амплитуды» $\xi(\tau, x)$ $(\xi(\tau, x+1) \equiv -\xi(\tau, x))$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = f_0(\xi), \text{ где } \tau = \varepsilon t,\ f_0(\xi) = \frac{1}{2}\left(f(-\xi) - f(\xi)\right). \tag{44}$$

При $\mu = g\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ динамика (43) описывается квазинормальной формой

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + f_0(\xi), \quad \xi(\tau, x+1) \equiv -\xi(\tau, x). \tag{45}$$

Функция $u(t,\varepsilon)$ в (42) и (43) связана с $\xi(\tau, x)$ равенством $u(t,\varepsilon) = \xi(\varepsilon t, t) + O(\varepsilon)$. В [9, 10] отмечалось, что динамические свойства уравнений (44) и (45), а значит и (42) и (43), могут существенно отличаться. Поясним сказанное. Пусть, для примера, уравнение $f_0(\xi) = 0$ имеет корни $\xi_0 = 0, \xi_1, -\xi_1, \ldots, \xi_m, -\xi_m$ и $0 < \xi_1 < \cdots < \xi_m$. Пусть, далее, $(-1)^j f'(\xi_j) > 0$. Тогда уравнение (44) при каждом

x имеет (неустойчивое) однородное состояние равновесия $\xi \equiv 0$ и неоднородные состояния равновесия (1-антипериодические по x), принимающие только два значения ξ_j и $-\xi_j$, устойчивость которых чередуется. В этих условиях относительно краевой задачи (45) заключаем, что она может иметь только состояния равновесия, близкие при каждом фиксированном x и при $\mu \to 0$ либо к ξ_1, либо к $-\xi_1$.

4. Динамика систем (2), (8) и (9) в случае, когда матрица A имеет два собственных значения $\varkappa_{1,2} = \exp \pm i\omega$

Пусть $Aa = \varkappa_1 a$, $A^* b = \varkappa_2 b$ и $(a, b) = 1$.

4.1. Динамика при выполнении условия отсутствия главных резонансов. Здесь предполагаем, что $0 < \omega < 2\pi$ и $\omega \neq \dfrac{\pi}{2}$, $\omega \neq \pi$, $\omega \neq \dfrac{2\pi}{3}$.

Отметим, что простейшие резонансные случаи $\omega = 0$ и $\omega = \pi$ рассмотрены выше, а случаи $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ и $\omega = \dfrac{2\pi}{3}$ будут рассмотрены ниже.

При сформулированных условиях характеристический квазиполином (4) имеет бесконечно много корней λ_k^+ и λ_k^- $(k = 0, \pm 1, \dots)$, лежащих на мнимой оси,

$$\lambda_k^{\pm} = \pm i(\omega + 2k\pi).$$

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\xi(\tau, x)\exp(i\omega t)a + \overline{\xi}(\tau, x)\exp(-i\omega t)\overline{a}\right) + \varepsilon u_2(t, \tau) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_3(t, \tau) + \dots, \tag{46}$$

где $\tau = \varepsilon t$, $x = t$, $\xi(\tau, x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)\exp(2\pi i k x)$, а зависимость от первого аргумента функции $u_j(t, x)$ является 1-периодической.

Подставим (46) в (2) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. Функцию $\xi(\tau, x)$ предполагаем достаточно гладкой по τ. На втором шаге тогда находим, что

$$u_2(t, \tau) = |\xi|^2 b_1 + \xi^2 b_2 \exp(2i\omega t) + \overline{\xi^2}\, \overline{b}_2 \exp(-2i\omega t),$$

а для векторов b_1 и b_2 верны равенства

$$b_1 = (I - A)^{-1} \left(F_2(a, \overline{a}) + F_2(\overline{a}, a)\right),$$

$$b_2 = (\exp(2i\omega)I - A)^{-1} \exp(-2i\omega) F_2(a, a).$$

На третьем шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$, из условия разрешимости получающейся системы относительно $u_3(t, \tau)$ приходим к комплексному уравнению (КНФ) для нахождения неизвестной амплитуды $\xi(\tau, x)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \gamma\xi + d|\xi|^2\xi, \;\; \xi(\tau, x+1) \equiv \xi(\tau, x).$$

Здесь $\gamma = \exp(-i\omega)(A_1 a, b)$, $d = \exp(-i\omega)\left((F_3(a, a, \overline{a}) + F_3(a, \overline{a}, a) + F_3(\overline{a}, a, a) + \right.$ $\left. + F_2(b_1, a) + F_2(a, b_1) + F_2(b_2, \overline{a}) + F_2(\overline{a}, b_2)), b\right)$.

Приведем квазинормальные формы для двух систем уравнений (8) и (9). Ограничимся только рассмотрением в некотором смысле основного случая, когда в (8) $\mu = g\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, а в (9) – $\mu = g\varepsilon^{\frac{1}{3}}$. Другие соотношения, связывающие малые параметры ε и μ исследуются по аналогии с изложенным выше.

Для корней $\lambda_k(\varepsilon)$ и $\overline{\lambda_k}(\varepsilon)$ $(k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots)$ характеристического квазиполинома, отвечающего линейной части (8), верны асимптотические формулы

$$\lambda_k(\varepsilon) = i(\omega + 2k\pi) - \varepsilon^{\frac{1}{2}} gi(\omega + 2k\pi) + \\ + \varepsilon\left[-\frac{1}{2}g^2(4\pi^2k^2) - 2g^2\omega k\pi + ig2k\pi - \frac{1}{2}g^2\omega^2 + ig^2\omega + \gamma\right] + \dots .$$

Рассмотрим решение (8) в виде формального ряда

$$u(t,\ \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\xi(\tau,\ y)\exp[i\omega(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}}g)t]a + \overline{\xi}(\tau,\ y)\exp[-i\omega(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}}g)t]\overline{a}) + \\ + \varepsilon u_2(t,\ \tau) + \varepsilon^{\frac{3}{2}}u_3(t,\ \tau) + \dots\ , \quad (47)$$

где $y = t - \varepsilon^{\frac{1}{2}}gt$, $\tau = \varepsilon t$. Для нахождения неизвестной амплитуды $\xi(\tau,\ y)$ получаем квазинормальную форму – комплексное параболическое уравнение типа Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{1}{2}g^2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + g^2(1 + i\omega)\frac{\partial\xi}{\partial y} + (\gamma + g^2\omega(i - \frac{1}{2}\omega))\xi + d|\xi|^2\xi,\ \xi(\tau,\ y+1) \equiv \xi(\tau,\ y). \quad (48)$$

Для корней соответствующего характеристического квазиполинома для уравнения (9) верна асимптотическая формула

$$\lambda_k(\varepsilon) = i(\omega + 2\pi k) - \varepsilon^{\frac{1}{3}}gi(\omega + 2\pi k) + \varepsilon^{\frac{2}{3}}g^2 i(\omega + 2\pi k) + \\ + \varepsilon\left[-\frac{1}{6}ig^3(\omega + 2\pi k)^3 - ig^3(\omega + 2\pi k) + \gamma\right] + \dots\ ,$$

а аналог формулы (6) имеет вид

$$u = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\xi(\tau,\ y)\exp[i\omega(1 - \varepsilon^{\frac{1}{3}}g + \varepsilon^{\frac{2}{3}}g^2)t]a + \\ + \overline{\xi}(\tau,\ y)\exp[-i\omega(1 - \varepsilon^{\frac{1}{3}}g + \varepsilon^{\frac{2}{3}}g^2)t]\overline{a}) + \varepsilon u_2(t,\ \tau) + \dots\ , \quad (49)$$

где $y = t - \varepsilon^{\frac{1}{3}}gt + \varepsilon^{\frac{2}{3}}g^2t$, $\tau = \varepsilon t$. Для нахождения $\xi(\tau,\ y)$ получаем квазинормальную форму – краевую задачу

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{g^3}{6}\frac{\partial^3\xi}{\partial y^3} + \frac{i\omega g^3}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} - g^3\left(1 + \frac{1}{2}\omega^2\right)\frac{\partial\xi}{\partial y} + \\ + \left[\gamma - \frac{ig^3\omega^3}{6} - ig^3\omega\right]\xi + d|\xi|^2\xi,\ \ \xi(\tau,\ y+1) \equiv \xi(\tau,\ y). \quad (50)$$

Основной результат состоит в том, что с помощью формул (47), (49) по решениям квазинормальных форм (48), (50) определяются асимптотические по невязке решения систем уравнений (8), (9), соответственно.

Отметим, что в (48) и (50) просто определяются бегущие волны – решения вида $\xi_n = \rho_n \exp(i\sigma\tau + 2\pi niy)$. Для (48) таких решений всегда конечное число, а для уравнения (50), например, при условиях $\mathrm{Re}\ \gamma > 0$ и $\mathrm{Re}\ \mathrm{d} < 0$ их бесконечно много и у всех у них одинаковая амплитуда $\rho_n = \rho_0 = [-(\mathrm{Re}\ \gamma)(\mathrm{Re}\ \mathrm{d})^{-1}]^{\frac{1}{2}}$. Используя приведенные выше построения, можно исследовать вопросы о существовании, асимптотике и устойчивости решений краевой задачи (50) более сложной, по сравнению с бегущими волнами, структуры.

4.2. Нормальные и квазинормальные формы в случае резонансного соотношения $\omega = \dfrac{\pi}{2}$.

При условии $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ подставим формальный ряд (46) в (2). Собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε, на третьем шаге получим уравнение для $\xi(\tau,\ x)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \gamma\xi + d|\xi|^2\xi + p\exp(-2\pi ix)\overline{\xi}^3, \quad \xi(\tau,\ x+1) \equiv \xi(\tau,\ x). \tag{51}$$

Параметры γ и d те же, что и выше, а

$$p = (-i)\left[\left(F_3(\overline{a},\ \overline{a},\ \overline{a}) + F_2(\overline{b_2},\ \overline{a}) + F_2(\overline{a},\ \overline{b_2}),\ b\right)\right].$$

Отметим, что при $p = 0$ и при условиях $\mathrm{Re}\ \gamma > 0$, $\mathrm{Re}\ \mathrm{d} > 0$ уравнение (51) имеет простейшее периодическое решение – бегущую волну $\xi_0(\tau) = [-(\mathrm{Re}\ \gamma)(\mathrm{Re}\,\mathrm{d})^{-1}]^{\frac{1}{2}}\exp(\mathrm{i}\omega_0\tau)$, где $\omega_0 = \mathrm{Im}\ \gamma + (\mathrm{Im}\ \mathrm{d})[-(\mathrm{Re}\ \gamma)(\mathrm{Re}\ \mathrm{d})^{-1}]$. При $p \neq 0$ решений вида $\mathrm{const}\ \exp(i\sigma\tau)$ $(\sigma \neq 0)$ не существует.

Рассмотрим вопрос о состоянии равновесия уравнения (51). Положим $\xi = \rho\exp(i\varphi)$, где $\rho > 0$. Тогда для нахождения ρ и φ приходим у системе уравнений

$$|\gamma + d\rho^2|^2 = \rho^2|p|^2, \tag{52}$$

$$p\exp[-i(4\varphi + 2\pi x)] = -(\gamma + \rho^2 d)\rho^{-2}. \tag{53}$$

Первое из этих двух уравнений представляет собой вещественное уравнение второго порядка относительно ρ^2. Если $|p|^2 > |d|^2$, то значение ρ^2 из (52) определяется единственным образом. Если же $0 < |p|^2 < |d|^2$, то условия существования положительного корня, а их тогда обязательно два, формулируется в виде неравенства

$$\gamma\overline{d} + \overline{\gamma}d < 0.$$

Определив положительный корень из (52), из (53) находим соответственно 4, если этот корень один, и 8, если таких корней два, значений величин $\varphi = \varphi_j$. Важно подчеркнуть, что все $\varphi_j = \varphi_j(x)$ представимы в виде $\varphi_j = \varphi_{j0} + \dfrac{\pi}{2}x$, где φ_{j0} не зависят от x. Таким образом уравнение (51) не может иметь ненулевого непрерывно зависящего от x 1-периодического состояния равновесия. Разрывных и 1-периодических по x состояний равновесия можно, очевидно, компоновать множеством способов.

Сформулируем результаты об устойчивости состояний равновесия уравнения (51) при каждом фиксированном x. Для определенности условимся считать, что при наличии двух положительных корней ρ_1^2 и ρ_2^2 у уравнения (52) выполнено неравенство $0 < \rho_1^2 \leq \rho_2^2$.

Лемма 1. *Пусть* $|p|^2 > |d|^2$. *Тогда уравнение (51) имеет четыре ненулевых состояния равновесия* $\xi_j = \rho_1 \exp i\varphi_j$ $(j = 1, \ldots, 4)$, *причем все они неустойчивые.*

Лемма 2. *Пусть* $0 < |p|^2 < |d|^2$. *Тогда уравнение (51) имеет 8 состояний равновесия* $\xi_j = \rho_1 \exp i\varphi_j$ $(j = 1, \ldots, 4)$ *и* $\xi_j = \rho_2 \exp i\varphi_j$ $(j = 5, \ldots, 8)$. *Состояния равновесия* $\xi_1, \ldots, \xi_4$ *неустойчивы, а* $\xi_5, \ldots, \xi_8$ *– асимптотически устойчивы.*

Простые доказательства этих утверждений опустим.

При рассмотрении системы уравнений (8) для нахождения $\xi(\tau, y)$, где $\tau = \varepsilon t$, $y = t - \varepsilon^{\frac{1}{2}} gt$, приходим к параболической краевой задаче

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + g^2(1 + i\omega)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\gamma + g^2\omega\left(i - \frac{1}{2}\omega\right)\right)\xi + d|\xi|^2\xi +$$
$$+ p\exp(-2\pi i(y + \varepsilon^{-1/2} gt))\overline{\xi}^3, \qquad \xi(\tau, y+1) \equiv \xi(\tau, y). \quad (54)$$

Последнее слагаемое в уравнении (54) является быстро осциллирующим по времени τ, поэтому можно воспользоваться известным (см., например, [14]) принципом усреднения. В результате для нахождения главного члена асимптотики функции $\xi(\tau, y)$ приходим опять к краевой задаче (48). Таким образом в нормальной форме (51) влияние резонансного соотношения $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ существенно, а в квазинормальной форме (54) им можно пренебречь.

При рассмотрении системы уравнений (9) в случае $\mu = g\varepsilon^{1/3}$ для $\xi(\tau, y)$ получаем краевую задачу, которая отличается от (50) только тем, что в правую часть добавляется слагаемое $p\exp(-2\pi i(y + \varepsilon^{-1/2} g\tau))\overline{\xi}^3$.

3.3. Нормальные и квазинормальные формы в случае резонансного соотношения $\omega = \dfrac{2\pi}{3}$.

В отличие от предыдущих случаев, когда $\omega = \pi$ или $\omega = \dfrac{\pi}{2}$, нормализованное уравнение здесь будет содержать и квадратичное и кубическое слагаемые. Тем самым амплитуду и саму зависимость от времени нельзя пронормировать так, чтобы исключить из уравнения малый параметр ε. Поэтому в качестве аналога формального ряда (46) имеем

$$u(t, \varepsilon) = \xi(t, \tau)\exp(i\omega t)a + \overline{\xi}(t, x)\exp(-i\omega t)\overline{a} + u_2(t, x) + \ldots, \qquad (55)$$

причем по первому аргументу функции в правой части (55) являются медленно (при $\varepsilon \to 0$) меняющимися, по второму аргументу они 1-периодичны, амплитуда $\xi(\tau, x)$ достаточно мала (при $\varepsilon \to 0$) и каждое последующее слагаемое в (55) имеет более высокий порядок малости по сравнению с предыдущим. Подставляя (55) в (2) при $x = t$ и производя стандартные действия, приходим к уравнению для $\xi(\tau, x)$ с точностью до $o(\varepsilon)$ и $O(|\xi|^4)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon\gamma\xi + d|\xi|^2\xi + q\exp(-2\pi i x)\overline{\xi}^2, \ \xi(\tau, x+1) \equiv \xi(\tau, x), \qquad (56)$$

где $q = \exp(-\dfrac{4i\pi}{3})$ $(F_2(\overline{a}, \overline{a}), b)$.

При рассмотрении системы уравнений (8) в случае $\mu = g\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ получаем краевую задачу параболического типа для нахождения достаточно гладких асимптотических по невязке решений

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\varepsilon g^2}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \varepsilon g^2(1+i\omega)\frac{\partial\xi}{\partial y} + \varepsilon\left(\gamma + g^2\omega\left(i+\frac{1}{2}\omega\right)\right)\xi + d|\xi|^2\xi + \\ + q\exp(-2\pi i(y+\varepsilon^{\frac{1}{2}}t))\bar{\xi}^2, \quad \xi(t,\, y+1) \equiv \xi(t,\, y). \quad (57)$$

Соответственно, в случае уравнения (9) для $\mu = g\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \varepsilon\frac{g^3}{3}\frac{\partial^3\xi}{\partial y^3} + \varepsilon i\omega\frac{g^3}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} - \varepsilon g^3\left(1+\frac{1}{2}\omega^2\right)\frac{\partial\xi}{\partial y} + \varepsilon\left[\gamma - i\frac{g^3\omega^3}{6} - ig^3\omega\right]\xi + \\ + d|\xi|^2\xi + q\exp[-2\pi i(y+\varepsilon^{\frac{1}{2}}t)]\bar{\xi}^2, \quad \xi(t,\, y+1) \equiv \xi(t,\, y). \quad (58)$$

Сделаем несколько важных замечаний.

Во-первых, при выполнении условий невырожденности $\gamma \neq 0$, $q \neq 0$ и при каждом фиксированном y уравнение (56) имеет три ненулевых состояния равновесия

$$\xi_j = \varepsilon|\gamma q^{-1}|(1+o(1))\exp\left[i(\varphi_j + \frac{2}{3}\pi y) + O(\varepsilon)\right] \quad (j = 1, 2, 3),$$

где φ_j не зависят от y. Тем самым это уравнение не может иметь ненулевых непрерывно зависящих от y и 1-периодических по y состояний равновесия. Простой анализ показывает, что все состояния равновесия ξ_j при каждом y неустойчивы.

Во-вторых, краевые задачи (57) и (58) содержат быстро осциллирующие (причем с нулевым средним) по времени τ $(\tau = \varepsilon t)$ слагаемые. Это открывает путь к применению известного метода усреднения [14].

В-третьих, ситуации, когда $\mu = g\varepsilon^{\alpha}$ (при $\alpha > \frac{1}{2}$ в случае (8) и $\alpha > \frac{1}{3}$ в случае (9)) рассматриваются так же, как и выше, поэтому соответствующие квазинормальные формы здесь не приводим.

4.4. Системы с малым внешним воздействием.

Коротко остановимся на рассмотрении системы двух уравнений с малым внешним периодическим воздействием

$$u(t) = (A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon(\cos\Omega t)B)u(t-1) + F_2(u(t-1),\, u(t-1)) + \ldots . \quad (59)$$

Ограничимся изучением наиболее простого и интересного случая, когда матрица A_0 имеет два собственных значения $\varkappa_{1,\,2} = \exp(\pm i\omega)$ и $0 < \omega < \pi$. Пусть $\Omega \neq 2\pi n$ $(n = 0,\, 1,\, \ldots)$ и $\Omega \neq 2\omega$. Повторяя предыдущие построения, для нахождения $\xi(\tau,\, x)$ получим те же, что и выше, уравнения. Если же $\Omega = 2\omega$, то в правую часть соответствующего уравнения добавляется слагаемое

$$\frac{1}{2}\exp(-i\Omega)(Ba,\, a)\,\bar{\xi}(\tau,\, x),$$

а при выполнении для некоторого $n_0 \neq 0$ соотношения $\Omega = 2\pi n_0$ в правую часть добавляется лишь слагаемое $(\cos 2\pi n_0 x)\exp(-i\omega)(Ba,\, b)\xi(\tau,\, x)$.

© *И. С. Кащенко, С. А. Кащенко*

Выводы

1. Выше речь шла только о нахождении главных членов асимптотических по невязке решений исходных систем уравнений. После этого, применяя стандартные методы асимптотических разложений, можно строить и более высокие по порядку приближения таких решений. Это, в свою очередь, открывает возможность получать результаты о существовании точных решений, близким к асимптотическим по невязке. Отсюда уже решается вопрос о наследовании свойств устойчивости решений квазинормальной формы и соответствующих им решений исходной системы.

2. Построенные квазинормальные формы, как правило, являются нелинейными уравнениями с частными производными. Динамические свойства такого типа уравнений могут быть достаточно сложны и разнообразны (см., например, [15]). Тем самым можно сделать вывод о том, что для исходных систем уравнений (8) и (9) характерна сложная динамика.

3. В ряде наиболее интересных ситуаций квазинормальные формы представляют собой семейства краевых задач, зависящих от «континуальных» параметров. Каждому решению каждого из представителей этих семейств отвечает решение исходной системы. Отсюда заключаем, что для рассмотренных задач характерно явление гипермультистабильности, когда происходит резкое и неограниченное увеличение количества установившихся режимов при стремлении к нулю малого параметра.

4. Некоторые квазинормальные формы содержат в качестве параметра определенную выше величину $\theta = \theta(\varepsilon)$, причем $\theta(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ бесконечно много раз пробегает значения от 0 до 1. Для различных значений θ динамика соответствующих краевых задач может быть различна. Отсюда следует, что при $\varepsilon \to 0$ возможен неограниченный процесс чередования «рождения» и «гибели» установившихся решений в исходной системе уравнений.

5. Может показаться, что численное исследование динамики квазинормальных форм является более трудной задачей по сравнению с задачей численного анализа исходной системы. Однако это не так. Во-первых, решения исходных систем устроены так, что их главные приближения являются решениями квазинормальных форм. Во-вторых, квазинормальные формы не содержат сингулярностей, поэтому проблем с организацией численного исследования не возникает, а для исходных систем такие исследования весьма затруднительны.

Работа выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ и гранта Президента РФ (соглашение №14.124.13.5948-МК).

Библиографический список

1. *Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Н., Шарковский А.Н.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1986
2. *Maistrenko Yu.L., Maistrenko V.L., Chua L.O.* Cycles of chaotic intervals in a time-delayed Chua's circuit // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3, № 6. P. 1557.
3. *Кащенко Д.С.* Динамика простейших кусочно-линейных разрывных отображений // Модел. и анализ информ. систем. 2012. Vol. 19, № 3. P. 73.

© *И. С. Кащенко, С. А. Кащенко*

4. *Kulenovic M. R.S., Ladas G.* Dynamics of second order rational difference equations with open problems and conjectures. Chapman & Hall/CRC. 2002
5. *Шноль Э.Э.* Об устойчивости неподвижных точек двумерных отображений // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 7. С. 1156.
6. *Kuramoto Y., Tsuzudi T.* On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems// Progr. Theor. Phys. 1975. Vol. 54, № 3. P. 687.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
8. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
9. *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Диф. уравнения. 1989. Т. 25, № 8. С. 1448.
10. *Kaschenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // Int. J. of Bifurcations and chaos. 1996. Vol. 6, №7. P. 10939.
11. *Кащенко И.С.* Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 421, № 5. С. 586.
12. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Математика и механика. 1937. Т. 1, № 6. С. 1.
13. *Кащенко С.А.* Уравнения Гинзбурга–Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // Журнал Вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38, № 3. С. 457.
14. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1974.
15. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. матем. Новейшие достижения. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 28. С. 207.

Поступила в редакцию 29.11.2013

LOCAL DYNAMICS OF DIFFERENCE AND DIFFERENCE-DIFFERENTIAL EQUATIONS

I. S. Kaschenko,[1] *S. A. Kaschenko*[1,2]

[1] P.G. Demidov Yaroslavl State University

[2] National Research Nuclear University «MEPhI»

We study local dynamics of difference and singular perturbed difference-differential systems in the neighborhood of zero equilibrium state. All critical cases in this problem have infinite dimension. We construct special nonlinear equations that play the role of normal form. Their nonlocal dynamics describes the behavior of solution of initial system.

Keywords: Quasi-normal form, delay, difference equation, difference-differential equation.

© *И. С. Кащенко, С. А. Кащенко*

Кащенко Илья Сергеевич – родился в Ярославле (1982), окончил Ярославский государственный университет (2004). После окончания ЯрГУ работает там же. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ЯрГУ (2006) в области нелинейной динамики уравнений с запаздыванием. Является автором 35 научных и научно-методических трудов.

150000 Ярославль, ул. Советская, д. 14
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: iliyask@uniyar.ac.ru

Кащенко Сергей Александрович – родился в Ярославле (1953), окончил Ярославский государственный университет (1975). После окончания ЯрГУ работает там же. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1990) в области теории нелинейных колебаний. Автор пяти монографий. Опубликовал 230 научных статей по направлению, указанному выше.

150000 Ярославль, ул. Советская, д. 14
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
115409 Москва, Каширское шоссе, 31
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

© *И. С. Кащенко, С. А. Кащенко*