

## РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ДВУХКОЛЬЦЕВОЙ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

### Часть 2

#### Особенности нелинейной динамики частотно-фазовой системы с одинаковыми фильтрами третьего порядка в цепях управления

*В. П. Пономаренко*

Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского

Приведены результаты исследования режимов динамического поведения в автогенераторной системе с частотно-фазовым управлением при использовании инверсно включенного многочастотного дискриминатора в цепи частотного управления в случае одинаковых фильтров третьего порядка в цепях фазового и частотного управления. Исследование проведено на основе математической модели системы с двумя степенями свободы с применением качественно-численных методов нелинейной динамики. Показано, что в такой системе возможно существование как синхронного режима, так и множества несинхронных периодических и хаотических режимов различной сложности. Установлено расположение областей параметров с различными динамическими режимами системы, исследованы бифуркационные переходы, приводящие к генерации хаотических колебаний.

*Ключевые слова:* Системы с частотно-фазовым управлением, динамические состояния, устойчивость, бифуркации, аттракторы, фазовые портреты, режим синхронизации, несинхронные режимы, динамический хаос.

### Введение

Данная работа продолжает исследование, нелинейной динамики двухкольцевой системы частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП), объединяющей системы фазовой и частотной автоподстройки частоты перестраиваемого (управляемого) генератора, представленное в [1]. Основное назначение системы ЧФАП состоит в обеспечении подстройки частоты колебаний управляемого генератора к частоте колебаний эталонного генератора. Исследуемая в данной работе частотно-фазовая система отличается от традиционной системы ЧФАП, рассматривавшейся в [2–11], тем, что в цепи частотного управления применен инверсно включенный многочастотный дискриминатор, имеющий синусоидальную характеристику [12–14]. Инверсное

включение дискриминатора соответствует положительной (в отличие от традиционной отрицательной) обратной связи по цепи частотного управления, благодаря которой в системе создаются условия для более активного взаимодействия автомодуляционных колебаний, что делает систему богаче в отношении сложной динамики. В [1] приведены результаты анализа режимов динамического поведения частотно-фазовой системы с инверсно включенным многочастотным дискриминатором в случае применения одинаковых фильтров первого порядка в фазовой и частотной цепях управления. Анализ проведен на основе математической модели системы ЧФАП – динамической системы второго порядка, определенной на цилиндрической фазовой поверхности. Основным результатом, полученный в [1], состоит в выявлении множества вращательных предельных циклов на фазовой поверхности, соответствующих периодическим асинхронным режимам (режимам с вращением фазы) частотно-фазовой системы, в обнаружении возможности потери устойчивости синхронного режима и в установлении расположения на плоскости «начальная частотная расстройка – коэффициент усиления цепи частотного управления» областей параметров с различными динамическими режимами системы.

В данной работе исследуются особенности нелинейной динамики системы ЧФАП с инверсно включенным многочастотным дискриминатором в цепи частотного управления и одинаковыми фильтрами третьего порядка в фазовой и частотной цепях управления. Как упоминалось в [1], применение фильтров высокого порядка в цепях управления системы является одним из эффективных путей увеличения набора возможных автомодуляционных режимов управляемого генератора и воздействия на области существования и характеристики генерируемых колебаний. Усложнение фильтров ведет к усложнению динамики системы ЧФАП – наряду с регулярными режимами, выявленными в [1], становятся возможными квазипериодические и хаотические несинхронные режимы. В данной работе показано, что, благодаря применению в цепи частотного управления многочастотного дискриминатора с синусоидальной характеристикой, в частотно-фазовой системе возможно существование множества различных типов периодических и хаотических модуляционных режимов управляемого генератора, включая режимы с нерегулярными переключениями колебательных движений.

## 1. Математическая модель системы

Исходным уравнением для описания динамических процессов в рассматриваемой частотно-фазовой системе является следующее уравнение для разности фаз  $\varphi$  колебаний управляемого и эталонного генераторов, записанное в операторной форме ( $p \equiv d/dt$ ) [2]:

$$p\varphi + \Omega_1 K_1(p) F(\varphi) + \Omega_2 K_2(p) \Phi(p\varphi) = \delta\omega. \quad (1)$$

В уравнении (1)  $K_1(p)$  и  $K_2(p)$  – коэффициенты передачи фильтров низких частот (ФНЧ) в цепях управления;  $F(\varphi)$  и  $\Phi(p\varphi)$  – характеристики фазового и частотного дискриминаторов, нормированные на единицу;  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  – коэффициенты усиления по цепям управления;  $\delta\omega$  – начальная расстройка частот колебаний эталонного и управляемого генераторов. Характеристики дискриминаторов будем аппроксимировать функциями  $F(\varphi) = \sin \varphi$  и  $\Phi(p\varphi) = -\sin(\beta_1 p\varphi)$ , где  $\beta_1$  – параметр частотного

дискриминатора [4–6]. Знак «минус» в выражении для  $\Phi(p\varphi)$  соответствует инверсному включению многочастотного дискриминатора.

В данной работе мы будем рассматривать случай, когда в цепях управления используются одинаковые ФНЧ третьего порядка с коэффициентами передачи  $K_1(p) = K_2(p) = 1/(1 + b_1p + b_2p^2 + b_3p^3)$ , где  $a_1, b_1, b_2$  и  $b_3$  – постоянные времени. Математическая модель системы ЧФАП с такими ФНЧ, полученная на основании (1), представляется динамической системой

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = u, \quad \frac{du}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = z, \quad \mu_1 \frac{dz}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi - u - \varepsilon y - \mu z + b \sin(\beta u) \quad (2)$$

с четырехмерным цилиндрическим фазовым пространством  $U_2 = \{\varphi(\text{mod } 2\pi), u, y, z\}$ . В уравнениях (2)  $\tau = \Omega_1 t$ ,  $\varepsilon = b_1 \Omega_1$ ,  $b = \Omega_2 / \Omega_1$ ,  $\beta = \beta_1 \Omega_1$ ,  $\gamma = \delta \omega / \Omega_1$ ,  $\mu = b_2 \Omega_1^2$ ,  $\mu_1 = b_3 \Omega_1^3$ .

Исследование полной картины нелинейной динамики рассматриваемой системы ЧФАП на основе модели (2) сопряжено с существенными трудностями, в связи с чем, в качестве основного метода ее исследования применено компьютерное моделирование, которое базируется на качественных и численных методах нелинейной динамики [15–18] и использовании программного комплекса «ДНС» [19].

## 2. Результаты исследования модели (2)

Рассмотрим особенности динамики частотно-фазовой системы, описываемой динамической системой (2). Движения, развивающиеся в фазовом пространстве  $U_2$  системы (2), зависят от шести параметров. Исследование полной картины нелинейной динамики этой системы является весьма сложной и трудоемкой задачей. В данной работе ограничимся рассмотрением динамических состояний и бифуркаций, которые реализуются при изменении параметров  $b$  и  $\mu_1$ , характеризующих степень влияния кольца частотного управления и инерционности фильтров в цепях управления, полагая фиксированными значения параметров  $\beta, \gamma, \mu$  и  $\varepsilon$ .

Система (2) при значениях  $0 \leq \gamma < 1$  имеет два состояния равновесия  $A_1(\arcsin \gamma, 0, 0, 0)$  и  $A_2(\pi - \arcsin \gamma, 0, 0, 0)$ . Исследуя корни характеристического уравнения

$$\xi^4 + (\mu/\mu_1) \xi^3 + (\varepsilon/\mu_1) \xi^2 + ((1 - b\beta)/\mu_1) \xi + \sqrt{1 - \gamma^2}/\mu_1 = 0, \quad (3)$$

выясняем, что состояние равновесия  $A_1$  устойчиво при значениях параметров

$$\mu_1 < \mu_1^0(b, \beta, \varepsilon, \gamma), \quad \mu_1^0 = \mu \varepsilon (1 - b\beta) - \mu^2 \sqrt{1 - \gamma^2} / (1 - b\beta)^2, \quad 1 - b\beta > 0, \quad (4)$$

состояние равновесия  $A_2$  – неустойчивое седлового типа. Неравенства (4) выделяют в пространстве параметров модели (2) область  $B_0 : \{\mu_1 < \mu_1^0(b, \beta, \varepsilon, \gamma)\}$  – область удержания режима синхронизации в системе ЧФАП, определяемого устойчивым состоянием равновесия  $A_1$ .

**2.1. Карта динамических режимов.** Как показали результаты численного исследования системы (2), в фазовом пространстве  $U_2$  может существовать большое число вращательных предельных циклов, в связи с чем картина расположения

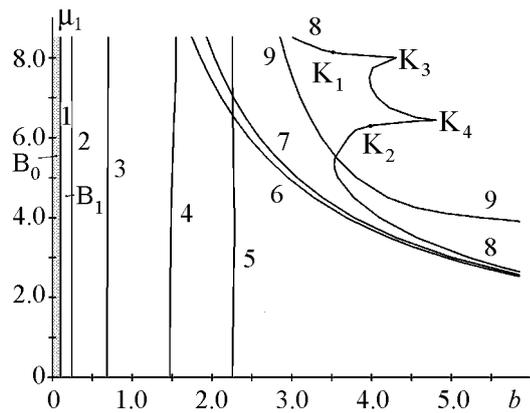


Рис. 1. Карта динамических режимов системы при значениях  $\gamma = 0.3, \beta = 8, \varepsilon = 25, \mu = 4.8$

бифуркационных кривых на плоскости управляющих параметров  $(b, \mu_1)$  представляется достаточно сложной. На рис. 1 приведена карта динамических режимов системы (2), на которой представлены кривые, соответствующие бифуркациям состояния равновесия  $A_1$ , колебательного предельного цикла и четырех вращательных предельных циклов, локализованных в области  $u > 0$  фазового пространства  $U_2$ ; эти кривые построены при значениях параметров  $\gamma=0.3, \beta=8, \varepsilon=25, \mu=4.8$ . Охарактеризуем кривые, представленные на рис. 1.

Кривая 1 – это граница  $\mu_1 = \mu_1^0$  области устойчивости  $B_0$  состояния равновесия  $A_1$ , определяемая (5). Область  $B_0$  заключена между кривой 1 и линией  $b = 0$ . Численное исследование системы (3) показало, что в области  $B_0$  одновременно с состоянием равновесия  $A_1$  в фазовом пространстве существует устойчивый вращательный ( $2\pi$ -периодический по  $\varphi$ ) предельный цикл  $L_1^+$ . При переходе с возрастанием параметра  $b$  через границу 1 в системе (2) наблюдается бифуркация Андронова–Хопфа [15,17], в результате которой в фазовом пространстве  $U_2$  появляется устойчивый предельный цикл колебательного типа  $S_0$ , которому отвечает периодический квазисинхронный режим системы ЧФАП. Этот режим существует при значениях параметров  $b$  и  $\mu_1$  в области между кривыми 1 и 2 одновременно с периодическим асинхронным режимом предельного цикла  $L_1^+$ .

Кривая 2 отвечает седло-узловой бифуркации предельного цикла  $S_0$ . Пересечение кривой 2 с увеличением  $b$  соответствует прекращению квазисинхронного режима в системе ЧФАП и жесткому переходу к периодическому асинхронному режиму предельного цикла  $L_1^+$ .

Кривые 3,4,5 соответствуют седло-узловым бифуркациям вращательных ( $2\pi$ -периодических по  $\varphi$ ) предельных циклов, расположенных в области  $u > 0$  фазового пространства  $U_2$ . При переходе через кривые 3,4,5 с возрастанием  $b$  в фазовом пространстве последовательно появляются устойчивые вращательные предельные циклы  $L_2^+, L_3^+, L_4^+$ . На рис. 2, а даны  $(\varphi, u)$ -проекции фазовых портретов циклов  $L_1^+, L_2^+, L_3^+$  и  $L_4^+$ . Режим цикла  $L_1^+$  существует в области значений  $b$  и  $\mu_1$  между линией  $b = 0$  и кривой 6; режим цикла  $L_2^+$  – в области значений  $b$  и  $\mu_1$  между кривыми 3 и 7. Область существования режима цикла  $L_3^+$  заключена между кривыми 4 и 8. Режим цикла  $L_4^+$  существует в области значений  $b$  и  $\mu_1$  между кривыми 5 и 9.

Кривые 6,7,9 отвечают потере устойчивости предельных циклов  $L_1^+, L_2^+$  и  $L_4^+$  через бифуркации рождения в фазовом пространстве  $U_2$  устойчивых двумерных торов вращательного типа  $T_1^+, T_2^+$  и  $T_4^+$ , соответственно. Торы рождаются при пересечении кривых 6,7,9 с увеличением параметра  $b$ . Части кривой 8 выше точки  $K_1$  и ниже точки  $K_2$  отвечают бифуркации рождения устойчивого двумерного вращательного тора  $T_3^+$  из предельного цикла  $L_3^+$ ; тор  $T_3^+$  рождается при пересечении указанных частей кривой 8 с возрастанием параметра  $b$ . На рис. 2, б даны  $(\varphi, u)$ -проекции фазовых портретов квазипериодических асинхронных режимов торов  $T_1^+,$

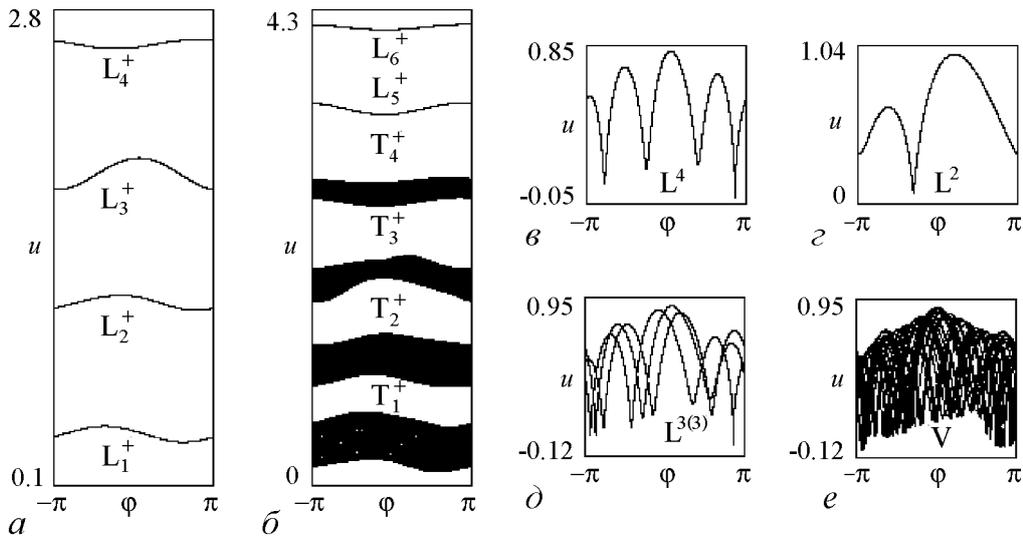


Рис. 2. Проекция фазовых портретов системы (3) при значениях  $\gamma = 0.3$ ,  $\beta = 8$ ,  $\varepsilon = 25$ ,  $\mu = 4.8$ ,  $\mu_1 = 5.5$ ,  $b = 2.5$  (а), 4.0 (б);  $b = 4.0$ ,  $\mu_1 = 10.05$  (в), 21.59 (г), 12.34 (д), 12.55 (е)

$T_2^+$ ,  $T_3^+$  и  $T_4^+$ . Части  $K_1K_3$  и  $K_2K_4$  кривой 8 соответствуют седло-узловой бифуркации предельного цикла  $L_3^+$ , приводящей к прекращению в системе асинхронного режима этого цикла. При пересечении части  $K_3K_4$  кривой 8 с возрастанием  $b$  наблюдается потеря устойчивости режима предельного цикла  $L_3^+$  в результате бифуркации удвоения периода.

Следует отметить, что, наряду с бифуркационными кривыми вращательных предельных циклов, приведенными на рис. 1, на плоскости  $(b, \mu_1)$  установлено существование аналогичных бифуркационных кривых, отвечающих вращательным предельным циклам  $L_1^-$ ,  $L_2^-$ ,  $L_3^-$  и  $L_4^-$  системы (2), локализованным в области  $u < 0$  фазового пространства  $U_2$ . Кроме этого, в результате численного исследования системы (2) выяснено, что для значений параметров  $\mu_1$  и  $b$ , расположенных на плоскости  $(b, \mu_1)$  в областях справа от кривой 5, в системе (2) реализуются седло-узловые бифуркации вращательных предельных циклов, которые приводят к появлению в фазовом пространстве устойчивых предельных циклов, локализованных выше предельного цикла  $L_4^+$  и ниже предельного цикла  $L_4^-$ . При рассматриваемых значениях параметров  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  эти циклы, так же как и циклы  $L_1^+$ ,  $L_2^+$ ,  $L_3^+$ ,  $L_4^+$  и  $L_1^-$ ,  $L_2^-$ ,  $L_3^-$ ,  $L_4^-$ , при возрастании параметра  $b$  испытывают бифуркации рождения двумерных вращательных торов и бифуркации удвоения периода. Таким образом, с возрастанием  $b$  повышается степень мультистабильности системы ЧФАП. Какой из множества одновременно существующих асинхронных режимов реализуется в системе при этих значениях параметров – это зависит от начальных условий.

**2.2. Развитие асинхронных режимов при изменении параметра инерционности.** Рассмотрим особенности развития асинхронных режимов, аттракторы которых локализованы в области  $u > 0$  фазового пространства  $U_2$ . Обратимся к результатам однопараметрического исследования системы (2) при фиксированном значении параметра  $b = 4.0$  и вариации параметра  $\mu_1$ . Отметим, что при  $b = 4.0$  в фазовом пространстве  $U_2$  существуют торы  $T_1^+$ ,  $T_2^+$ ,  $T_3^+$  и  $T_4^+$  и вращательные

предельные циклы  $L_5^+$  и  $L_6^+$ , расположенные выше тора  $T_4^+$  (рис. 2, б). Рассмотрим развитие режимов торов  $T_1^+$ ,  $T_2^+$ ,  $T_3^+$ ,  $T_4^+$  и режимов предельных циклов  $L_5^+$  и  $L_6^+$  при возрастании параметра  $\mu_1$ .

В процессе эволюции режима тора  $T_1^+$  обнаружен эффект чередования режима тора  $T_1^+$  и сложных вращательных предельных циклов, временные реализации  $u(\tau)$  колебаний на которых содержат несколько максимумов и минимумов в интервале  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ . При этом наблюдались как однооборотные ( $2\pi$ -периодические по  $\varphi$ ), так и многооборотные (от  $4\pi$ - до  $16\pi$ -периодические по  $\varphi$ ) сложные предельные циклы. В интервале значений  $\mu_1$  от 6.9 до 21.59 зафиксировано существование сложных однооборотных вращательных предельных циклов  $L^5$ ,  $L^4$ ,  $L^3$  и  $L^2$  соответственно с пятью, четырьмя, тремя и двумя максимумами на интервале  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ . На рис. 2, в, г приведены  $(\varphi, u)$ -проекции фазовых портретов циклов  $L^4$  и  $L^2$ , а на рис. 2, д – трехоборотного ( $6\pi$ -периодического по  $\varphi$ ) сложного предельного цикла  $L^{3(3)}$ . При возрастании  $\mu_1$  реализуются бифуркации удвоения периода сложных предельных циклов, в результате которых в фазовом пространстве образуются вращательные хаотические аттракторы. На рис. 2, е приведена  $(\varphi, u)$ -проекция фазового портрета одного из таких хаотических аттракторов, который возникает на базе трехоборотного сложного предельного цикла.

Другим интересным эффектом, обнаруженным в процессе эволюции режима тора  $T_1^+$  при возрастании  $\mu_1$ , является возникновение в фазовом пространстве колебательных предельных циклов и переходы от квазисинхронных режимов этих циклов к асинхронным режимам. Этот эффект иллюстрирует рис. 3, на котором приведены однопараметрическая бифуркационная диаграмма  $(\mu_1, u)$  (рис. 3, а),  $(\varphi, u)$ -проекция фазовых портретов и фрагмент зависимости  $u(\tau)$ , соответствующие аттракторам системы (2) (рис. 3, б–е). Диаграмма  $(\mu_1, u)$  характеризует эволюцию квазисинхронного режима колебательного предельного цикла  $S_1$  (см. рис. 3, б) при изменении параметра  $\mu_1$  от 19.45 до 21.65. В соответствии с этой диаграммой при возрастании  $\mu_1$  цикл  $S_1$  теряет устойчивость, и в фазовом пространстве рождается притягивающий тор  $T_1$  колебательного типа. Далее наблюдается чередование режима тора  $T_1$  и режимов колебательных предельных циклов различной сложности на торе  $T_1$ . Затем, в результате разрушения тора  $T_1$  система переходит к режиму колебательного хаотического аттрактора  $P_1$  (см. рис. 3, в). При возрастании  $\mu_1$  аттрактор  $P_1$  преобразуется в хаотический аттрактор колебательно-вращательного типа  $W_1$  (см. рис. 3, г, д) в результате появления витков вращательных фазовых траекторий в структуре аттрактора  $P_1$ . Режим колебаний на аттракторе  $W_1$  представляет собой нерегулярное чередование стадий колебательных и вращательных движений.

Из диаграммы, приведенной на рис. 3, а, видно, что, когда параметр  $\mu_1$  изменяется в интервале  $19.66 \leq \mu_1 \leq 20.64$ , в фазовом пространстве одновременно с аттракторами, развивающимися на базе предельного цикла  $S_1$ , существуют аттракторы вращательного типа, которые образуются в процессе эволюции вращательного хаотического аттрактора  $V_1$  (см. рис. 3, е) при возрастании  $\mu_1$ . При этом вначале происходит дехаотизация колебаний, соответствующих аттрактору  $V_1$ , через бифуркации, обратные бифуркациям удвоения периода, и в системе устанавливается периодический асинхронный режим сложного предельного цикла  $L^2$  (см. рис. 2, г). Затем наблюдается жесткий переход от режима цикла  $L^2$  к режиму хаотического аттрактора  $W_1$  (см. рис. 3, г, д) в результате седло-узловой бифуркации цикла  $L^2$ . При

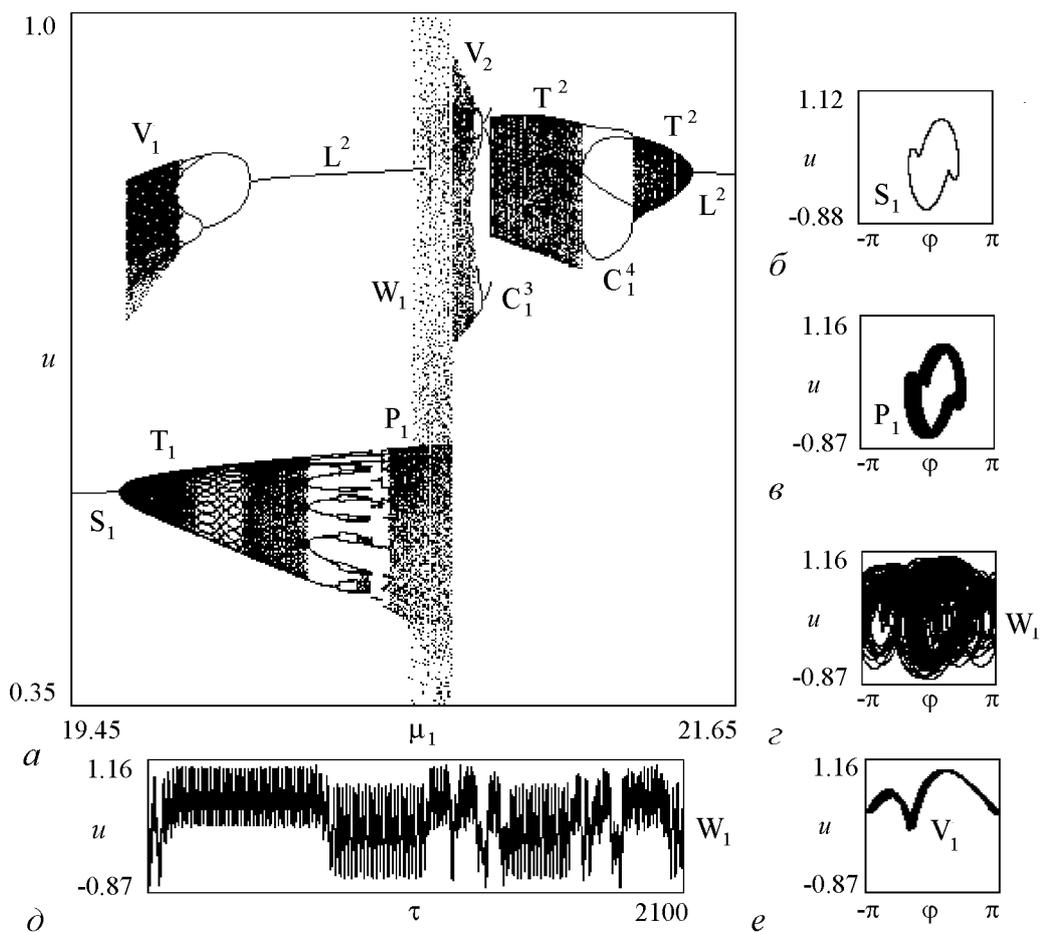


Рис. 3. Эволюция периодического квазисинхронного и хаотического асинхронного режимов при  $\gamma = 0.3$ ,  $\beta = 8$ ,  $\varepsilon = 25$ ,  $\mu = 4.8$ ,  $b = 4.0$  (a) при изменении параметра  $\mu_1$ : 19.5 (б), 20.56 (в), 20.71 (г, д), 19.67 (е)

дальнейшем увеличении  $\mu_1$  частота и длительность стадии колебательных движений в структуре аттрактора  $W_1$  уменьшаются, затем эти движения прекращаются, и система переходит к режиму вращательного хаотического аттрактора  $V_2$ , подобного аттрактору  $V_1$  (см. рис. 3, e). Далее режим колебаний на аттракторе  $V_2$  мягко через бифуркации, обратные бифуркациям удвоения периода, преобразуется в периодический асинхронный режим трехоборотного вращательного предельного цикла  $C_1^3$  (см. рис. 3, a), который при увеличении  $\mu_1$  жестко сменяется квазипериодическим режимом колебательного тора  $T^2$ . Внутри области существования режима тора  $T^2$  наблюдается «окно» четырехоборотного ( $8\pi$ -периодического по  $\varphi$ ) вращательного предельного цикла  $C_1^4$  (см. рис. 3, a). Далее режим тора  $T^2$  мягко преобразуется в периодический асинхронный режим предельного цикла  $L^2$  (см. рис. 2, з).

Примечательно, что когда  $\mu_1$  превышает значение 21.89, цикл  $L^2$  испытывает субкритическую бифуркацию удвоения периода, при которой происходит слияние устойчивого цикла  $L^2$  с седловым предельным циклом удвоенного периода. Одновременно с этим появляется перемежаемость – чередование регулярной стадии колебательного процесса с нерегулярными движениями. Через перемежаемость воз-

никает колебательно-вращательный хаотический аттрактор, подобный хаотическому аттрактору  $W_1$  (см. рис. 3, з, д), колебания на этом аттракторе поддерживаются в системе при продолжении увеличения параметра  $\mu_1$ .

Рассмотрим динамику режима тора  $T_2^+$  (см. рис. 2, б) при изменении величины параметра  $\mu_1$ . Обратимся к однопараметрической бифуркационной диаграмме  $(\mu_1, u)$ , приведенной на рис. 4, а, где  $\mu_1$  изменяется от 7.35 до 10.2. На рис. 4, б–д приведены примеры  $(\varphi, u)$ -проекций фазовых портретов и  $(y, u)$ -проекций сечения Пуанкаре, соответствующие аттракторам модели (2), возникающим при изменении  $\mu_1$ . Замкнутая инвариантная кривая  $\Gamma_2^+$  на рис. 4, б соответствует тору  $T_2^+$ . Режим тора  $T_2^+$  существует при значениях  $7.35 < \mu_1 < 7.99$ , в этом интервале значений  $\mu_1$  выделяются узкие области многооборотных вращательных предельных циклов. Самые широкие из этих областей соответствуют режимам трехоборотных предельных циклов  $C_2^3$  и  $C_3^3$  (см. рис. 4, а). При  $\mu_1 > 7.99$  тор  $T_2^+$  разрушается в результате потери гладкости [20,21] (см. рис. 4, в) с образованием в фазовом пространстве вращательного хаотического аттрактора  $V_3$  (см. рис. 4, з). При увеличении  $\mu_1$  режим аттрактора  $V_3$  жестко сменяется режимом трехоборотного вращательного предельного цикла  $C_3^3$ , затем на базе цикла  $C_3^3$  формируется вращательный хаотический аттрактор  $V_4$  (см. рис. 4, д) через бифуркации удвоения периода. Когда величина параметра  $\mu_1$  превышает значение 10.21, происходит жесткий переход от режима аттрактора  $V_4$  к режиму однооборотного сложного вращательного предельного цикла  $L^4$  (см. рис. 2, в), который сформировался в процессе эволюции режима тора  $T_1^+$ .

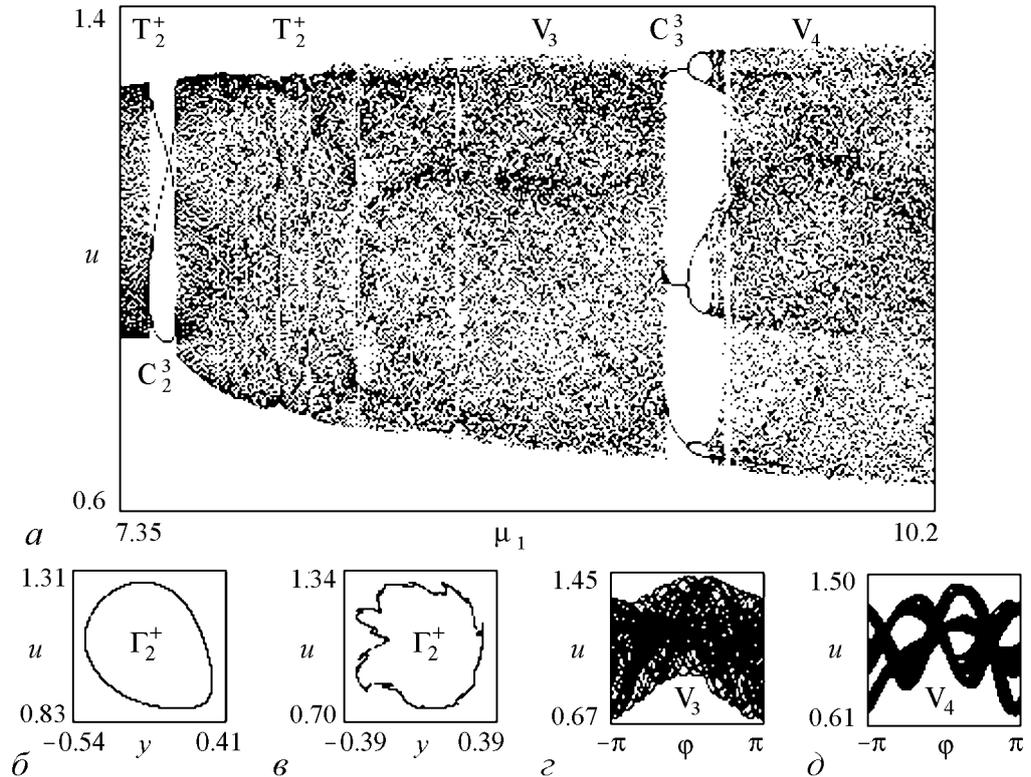


Рис. 4. Развитие режима тора  $T_2^+$  при  $\gamma = 0.3$ ,  $\beta = 8$ ,  $\varepsilon = 25$ ,  $\mu = 4.8$ ,  $b = 4.0$  (а) и при возрастании параметра  $\mu_1$ : 7.35 (б), 7.99 (в), 8.9 (з), 9.44 (д)

Эволюция режима тора  $T_3^+$  при увеличении  $\mu_1$  характеризуется следующими явлениями, которые иллюстрирует рис. 5. Вначале происходит переход от режима тора  $T_3^+$  к режиму однооборотного вращательного предельного цикла  $L_3$ ,  $(\varphi, u)$ -проекция фазового портрета которого приведена на рис. 5, *а*. После прекращения этого режима в результате седло-узловой бифуркации цикла  $L_3$  наблюдается перемежаемость, через которую формируется режим хаотического вращательного аттрактора  $V_5$  (рис. 5, *б*). Затем в интервале  $8.4 < \mu_1 < 9.37$  происходит чередование хаотических колебаний в режиме аттрактора  $V_5$  и периодических режимов вращательных предельных циклов, число оборотов по  $\varphi$  на которых с увеличением  $\mu_1$  последовательно уменьшается на единицу от 21 до 10, то есть имеет место эффект «убавления периода». На рис. 5, *в* приведен фрагмент однопараметрической бифуркационной диаграммы  $(\mu_1, u)$  при изменении  $\mu_1$  от 8.74 до 9.4, на котором отчетливо видны «окна» предельных циклов с числом оборотов по  $\varphi$  от 14 до 10. Внутри этих окон реализуются процессы хаотизации и дехаотизации колебаний соответственно через прямые и обратные бифуркации удвоения периода, жесткие переходы к хаотическим режимам и к режимам многооборотных предельных циклов. После выхода из области убавлений периода режим хаотического аттрактора  $V_5$  поддерживается в системе до значения  $\mu_1 = 10.32$ , с превышением которого наблюдается жесткий переход от режима аттрактора  $V_5$  к периодическому режиму однооборотного сложного предельного цикла  $L^4$  (рис. 5, *з*). Этот переход осуществляется через хаотические движения в окрестности уже исчезнувшего хаотического аттрактора  $V_4$ .

Численное исследование динамики режима тора  $T_4^+$  показывает, что при увеличении  $\mu_1$  вначале наблюдается чередование этого режима и режимов многооборотных вращательных предельных циклов, а затем реализуется бифуркация удвоения тора  $T_4^+$ . На рис. 6, *а-г* представлена эволюция инвариантной кривой  $\Gamma_4^+$  сечения Пуанкаре (см. рис. 6, *а*), соответствующей тору  $T_4^+$ , при изменении  $\mu_1$ . Инвариант-

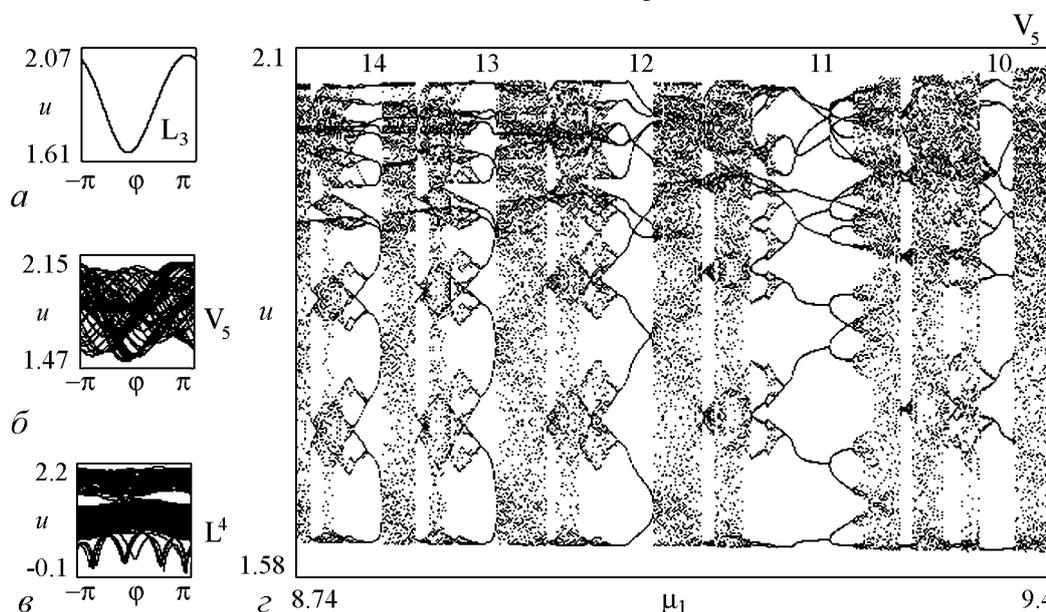


Рис. 5. Аттракторы модели (2) при значениях параметров  $\gamma = 0.3$ ,  $\beta = 8$ ,  $\varepsilon = 25$ ,  $\mu = 4.8$ ,  $b = 4.0$  и значениях  $\mu_1 = 8.0$  (*а*),  $10.0$  (*б*),  $10.33$  (*в*) и фрагмент бифуркационной диаграммы  $(\mu_1, u)$  (*з*), иллюстрирующий эффект «убавления периода»

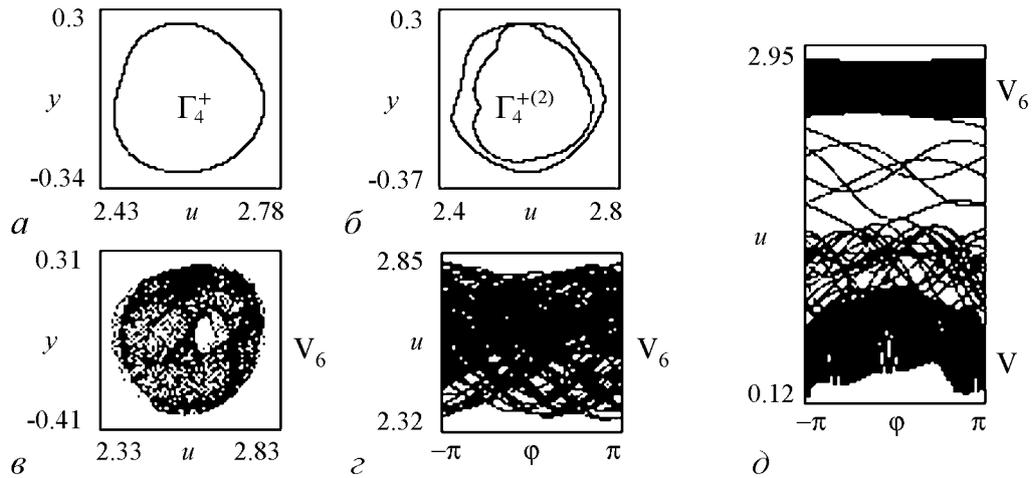


Рис. 6. Аттракторы модели (2) при значениях  $\gamma = 0.3$ ,  $\beta = 8$ ,  $\varepsilon = 25$ ,  $\mu = 4.8$ ,  $b = 4.0$ ,  $\mu_1 = 9.95$  (а), 10.12 (б), 11.2 (в,г), 11.798 (д)

ная кривая становится двухоборотной (см. рис. 6, б) – такая перестройка соответствует бифуркации удвоения тора  $\Gamma_4^+$ . Далее инвариантная кривая теряет гладкость, и реализуется переход к режиму вращательного хаотического аттрактора  $V_6$  (см. рис. 6, в, г). При дальнейшем увеличении  $\mu_1$  происходит жесткий переход от режима аттрактора  $V_6$  к режиму хаотического аттрактора  $V$  (рис. 6, д), который сформировался в процессе эволюции режима тора  $\Gamma_1^+$ . Переходный процесс является хаотическим, он складывается из движений в окрестности уже исчезнувших хаотических аттракторов  $V_5$  и  $V_4$ .

Динамические состояния, развивающиеся на базе предельного цикла  $L_5^+$  (см. рис. 2, б) при увеличении  $\mu_1$ , можно представить в виде следующей последовательности переходов: предельный цикл  $L_5^+ \Rightarrow$  вращательный тор  $T_5^+ \Rightarrow$  две бифуркации удвоения тора  $T_5^+ \Rightarrow$  потеря гладкости четырехоборотной инвариантной кривой и возникновение хаотического аттрактора  $V_7 \Rightarrow$  прекращение колебаний в режиме аттрактора  $V_7$  и жесткий переход к режиму хаотического аттрактора  $W_1$  (см. рис. 3, з, д).

Развитие режима предельного цикла  $L_6^+$  при возрастании  $\mu_1$  характеризуется следующими явлениями: образование тора  $T_6^+$  из цикла  $L_6^+$ ; бифуркации удвоения тора  $T_6^+$ , которые завершаются образованием в фазовом пространстве вращательного хаотического аттрактора  $V_8$ ; прекращение колебаний в режиме аттрактора  $V_8$  и жесткий переход к режиму хаотического аттрактора  $W_1$  (см. рис. 3, з, д).

Из представленных результатов видно, что развитие режимов торов  $T_2^+$ ,  $T_3^+$ ,  $T_4^+$ ,  $T_5^+$  и  $T_6^+$  при возрастании  $\mu_1$  в итоге завершается жесткими переходами к режимам аттракторов  $L^4$ ,  $V$  и  $W_1$ , которые сформировались в процессе эволюции режима тора  $T_1^+$ .

**2.3. Особенности динамики системы при изменении параметра  $b$ .** Анализ поведения системы (2) при изменении параметра  $b$  показывает, что система демонстрирует динамику, схожую с той, которая выявлена при изменении параметра  $\mu_1$ . Так же, как и в первом случае, когда параметр  $\mu_1$  являлся варьируемым, при возрастании  $b$  наблюдаются бифуркации рождения двумерных торов из вращательных

предельных циклов, чередование торов и предельных циклов и переходы к хаотическим режимам через разрушение торов. На рис. 7 приведен пример однопараметрической бифуркационной диаграммы  $(b, u)$ , соответствующей значениям  $\gamma = 0.3$ ,  $\beta = 8$ ,  $\varepsilon = 25$ ,  $\mu = 4.8$ ,  $\mu_1 = 5.5$ . Для ее построения начальные условия были выбраны на торах  $T_1^+$ ,  $T_2^+$ ,  $T_7^+$  и торе  $T_6^{+(2)}$ , образуемом в результате бифуркации удвоения тора  $T_6^+$ , и на хаотических аттракторах  $V_3^+$ ,  $V_4^+$  и  $V_5^+$ , образующихся в результате разрушения торов  $T_3^+$ ,  $T_4^+$  и  $T_5^+$ ; значения параметра  $b$  изменялись от 6.5 до 7.8. На рис. 7 слева от  $(b, u)$ -диаграммы даны  $(y, u)$ -проекции сечения Пуанкаре, соответствующие стартовым аттракторам модели (2) при  $b = 6.5$ .

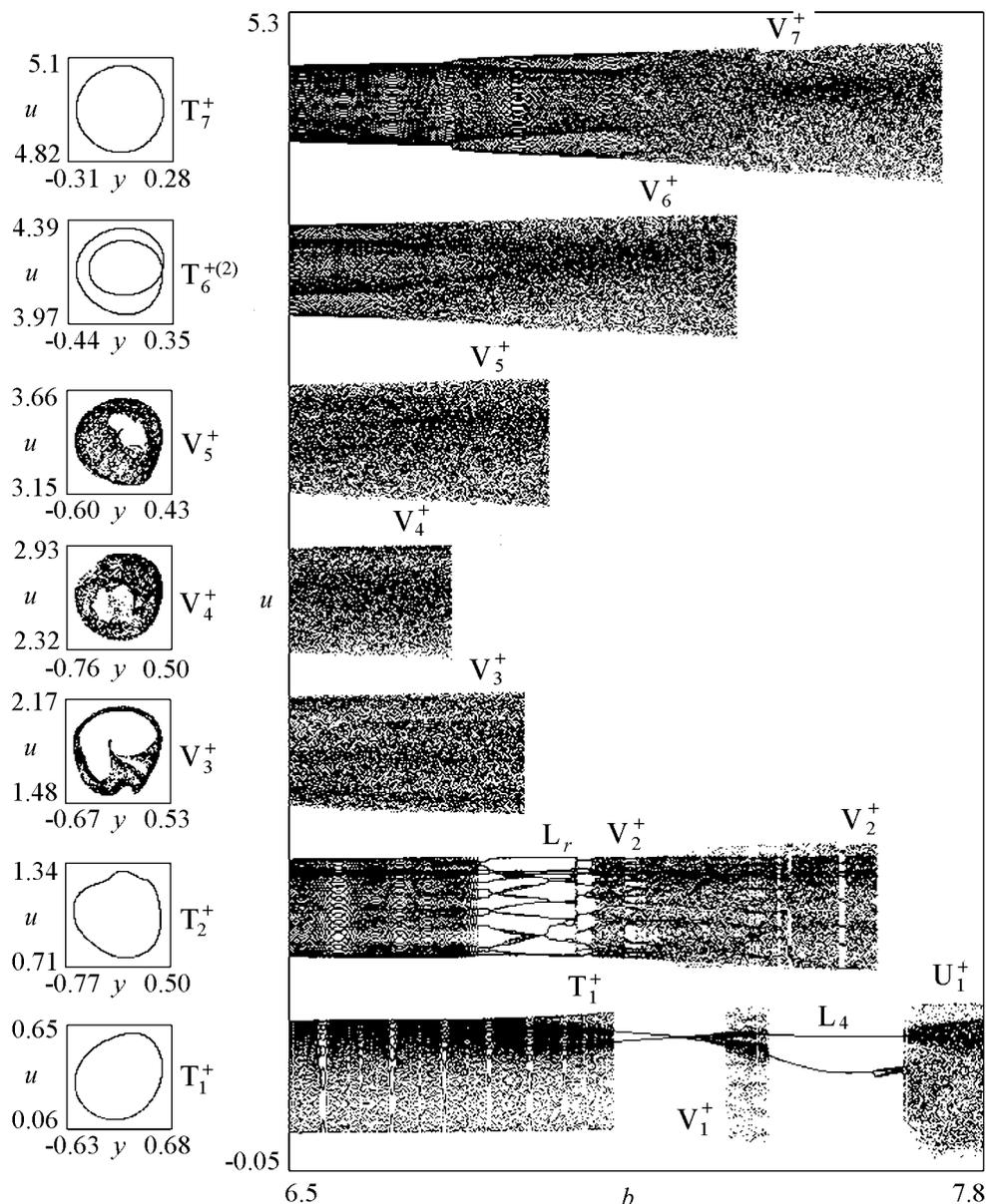


Рис. 7. Сечения Пуанкаре аттракторов стартовых асинхронных режимов и их развитие при возрастании параметра  $b$  ( $\gamma = 0.3$ ,  $\beta = 8$ ,  $\varepsilon = 25$ ,  $\mu = 4.8$ ,  $\mu_1 = 5.5$ )

Анализ диаграммы  $(b, u)$  показывает, что развитие режимов торов  $T_1^+$ ,  $T_2^+$ ,  $T_6^{+(2)}$  и  $T_7^+$  при изменении  $b$  в интервале  $(6.5; 7.8)$  завершается переходами к вращательным хаотическим аттракторам  $U_1^+$ ,  $V_2^+$ ,  $V_6^+$  и  $V_7^+$ , соответственно. Далее при возрастании  $b$  наблюдается последовательное прекращение режимов аттракторов  $V_4^+$ ,  $V_3^+$ ,  $V_5^+$ ,  $V_6^+$ ,  $V_2^+$ ,  $V_7^+$  и жесткие переходы  $V_4^+ \rightarrow V_3^+$ ,  $V_3^+ \rightarrow$  многооборотный вращательный предельный цикл  $L_r$ ,  $V_5^+ \rightarrow T_1^+$ ,  $V_6^+ \rightarrow V_2^+$ ,  $V_2^+ \rightarrow$  четырехоборотный вращательный предельный цикл  $L_4$ ,  $V_7^+ \rightarrow U_1^+$ , который сформировался на базе цикла  $L_4$  (см. рис. 7). Таким образом, при возрастании  $b$  развитие режимов торов  $T_1^+$ ,  $T_2^+$ ,  $T_6^{+(2)}$ ,  $T_7^+$  и хаотических аттракторов  $V_3^+$ ,  $V_4^+$ ,  $V_5^+$  в итоге завершается установлением в системе режима хаотического аттрактора  $U_1^+$ , сформировавшегося в процессе эволюции режима тора  $T_1^+$ .

При дальнейшем увеличении  $b$  на базе аттрактора  $U_1^+$  образуются сложные хаотические аттракторы  $W^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) с  $n$  областями сосредоточения колебательных движений и нерегулярными переключениями между этими областями. Аттракторы  $W^n$  по виду  $(u, y)$ -проекции фазовых портретов и реализаций колебаний  $u(\tau)$  похожи на хаотические многоспиральные аттракторы, наблюдаемые в моделях систем с частотным управлением и систем автофазирования [22–27], а также в других динамических системах с неединственным состоянием равновесия [28–30] и др. На рис. 8 приведены примеры хаотических аттракторов  $W^n$  с  $n = 2, 3, 5, 7, 12$ .

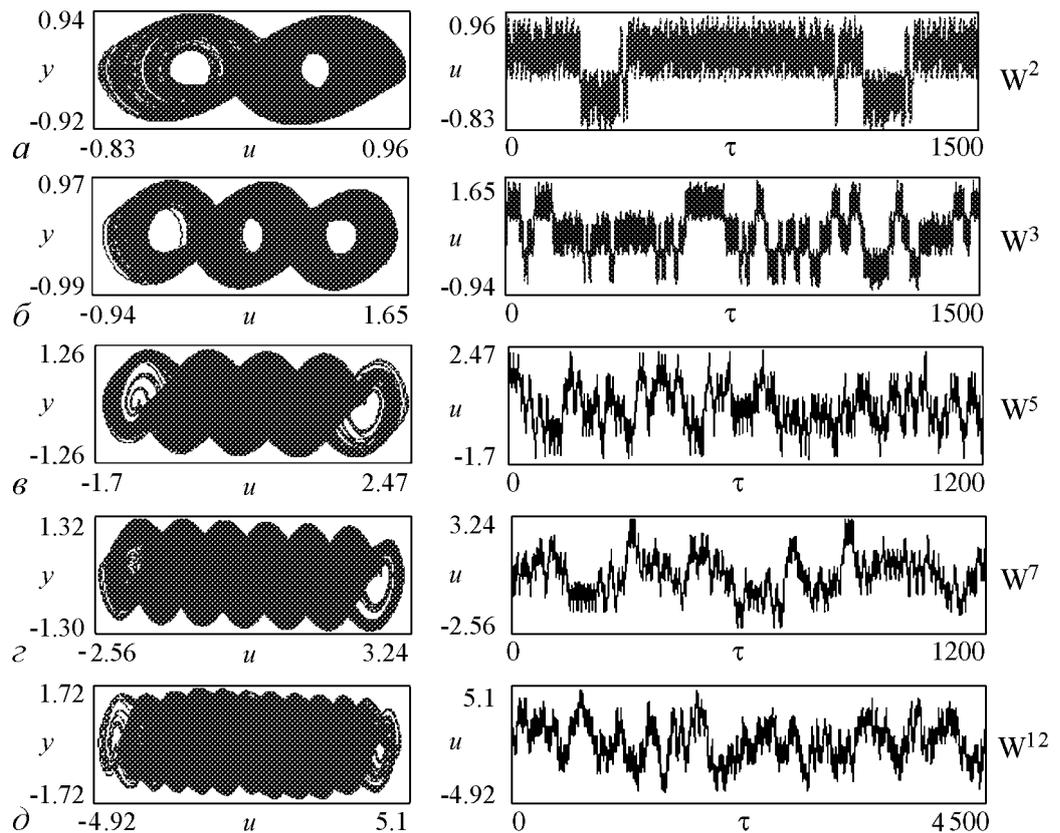


Рис. 8. Хаотические аттракторы  $W^n$ ,  $n = 2, 3, 5, 7, 12$ , при значениях  $\gamma = 0.3$ ,  $\beta = 8$ ,  $\varepsilon = 25$ ,  $\mu = 4.8$ ,  $\mu_1 = 5.5$ ,  $b = 9.25$  (а), 9.8 (б), 16.0 (в), 18.0 (г), 23.0 (д)

На  $(u, y)$ -проекциях фазовых портретов этих аттракторов четко выделяются  $n$  областей сосредоточения колебательных движений, между которыми совершаются нерегулярные переходы. Видно, как усложняется структура хаотического аттрактора и занимаемый объем в фазовом пространстве при возрастании параметра  $b$ . Об этом усложнении свидетельствуют вычисленные величины ляпуновских характеристических показателей  $\rho_m$  на аттракторах  $W^n$  при значениях параметра  $b$ , указанных на рис. 8. Они имеют значения 0.27, 0.33, 0.7, 0.93, 1.17, соответственно.

Приведенные результаты исследования модели (3) показывают, что использование многочастотного дискриминатора с синусоидальной характеристикой в цепи частотного управления системы ЧФАП создает возможности для существования множества разнообразных периодических и хаотических автомодуляционных режимов управляемого генератора.

### Заключение

В данной работе проведено исследование особенностей нелинейной динамики двухкольцевой системы с частотно-фазовым управлением, обусловленных использованием многочастотного дискриминатора с инвертированной синусоидальной характеристикой в кольце частотного управления. На основе математической модели (2) с двумя степенями свободы в цилиндрическом фазовом пространстве, соответствующей частотно-фазовой системе с одинаковыми фильтрами третьего порядка в частотной и фазовой цепях управления, и качественно-численных методов изучено поведение системы при изменении основных управляющих параметров (начальной частотной расстройки, параметра инерционности кольца фазового управления и параметра, характеризующего степень влияния кольца частотного управления).

Выявлена достаточно сложная картина динамических состояний исследуемых моделей, обусловленная существованием множества асинхронных режимов различной сложности и их бифуркаций. Построена карта динамических режимов, на которой выделены области с различными режимами управляемого генератора (синхронным режимом, периодическими и хаотическими автомодуляционными режимами). Переходы к хаотическим режимам реализуются в результате бифуркаций удвоения периода предельных циклов, через перемежаемость и разрушение двумерных торов, через бифуркации удвоения двумерных торов, а также в результате седло-узловых бифуркаций предельных циклов.

Выяснена нетривиальная роль нелинейности частотного дискриминатора при формировании автомодуляционных колебаний в системе. Результатом влияния этой нелинейности является появление в двухкольцевой системе ЧФАП новых колебательных режимов и нелинейных эффектов, не свойственных отдельным системам с фазовым и частотным управлением. Наиболее интересными эффектами являются: потеря устойчивости синхронного режима; многочисленные переходы между периодическими и хаотическими режимами по мере увеличения параметра инерционности и степени влияния частотного кольца управления; возникновение хаотических колебаний с переключениями движений, похожих на колебания в режимах многоспиральных хаотических аттракторов, характерных для динамических систем с неединственным состоянием равновесия. Возникновение подобных колебательных

режимов в рассматриваемой системе оказывается возможным благодаря выясненному в работе существованию множества периодических, квазипериодических и хаотических асинхронных режимов, обязанных своим происхождением применению частотного дискриминатора с синусоидальной характеристикой, и взаимодействию таких режимов. Следует отметить, что существование множества асинхронных режимов в частотно-фазовой системе связано с существованием множества состояний равновесия и соответствующих им моногармонических режимов управляемого генератора в отдельной системе с частотным управлением [24, 25, 31].

Выявленное многообразие динамических состояний модели (2) и возможность эффективного воздействия на их свойства и области существования путем легко реализуемого изменения параметров цепей управления создают предпосылки для расширения области применения систем с частотно-фазовым управлением, в частности, для использования их в качестве генераторов хаотических колебаний для формирования перспективных сигналов с хаотической модуляцией их неэнергетических параметров (частоты и фазы) и применения таких сигналов в информационно-коммуникационных системах [4, 27, 32-36].

#### Библиографический список

1. Пономаренко В.П. Регулярная и хаотическая динамика двухкольцевой системы фазовой синхронизации дискриминатора. Часть 1. Динамика частотно-фазовой системы с одинаковыми фильтрами первого порядка в цепях управления // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 2. С. 25.
2. Капранов М.В. О полосе захвата при частотно-фазовой автоподстройке // Науч. докл. высш. школы. Сер. «Радиотехника и электроника». 1958. Т. 2, № 9. С. 162.
3. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 448 с.
4. Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2013. 366 с.
5. Пономаренко В.П., Тихонов Е.А. Динамика автогенератора с частотно-фазовым управлением при инверсии характеристики частотного дискриминатора // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 6. С. 75.
6. Пономаренко В.П., Тихонов Е.А. Хаотическая и регулярная динамика автогенераторной системы с нелинейной петлей частотно-фазового управления // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 2. С. 205.
7. Матросов В.В. Динамические свойства генератора с частотно-фазовым управлением // Известия вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47, № 4. С. 334.
8. Матросов В.В. Моделирование динамики системы частотно-фазовой автоподстройки с фильтрами первого порядка // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. «Математическое моделирование и управление». 2006. Вып. 2(31). С. 17.
9. Пономаренко В.П. Динамические режимы в моделях автогенераторных систем с частотным и частотно-фазовым управлением // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 3. С. 33.

10. Пономаренко В.П. Динамические режимы и нелинейные эффекты в автогенераторе с частотно-фазовым управлением // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 6. С. 18.
11. Леонов Г.А., Томаев А.М., Чиишева Т.Л. Устойчивость систем частотно-фазовой синхронизации // РЭ. 1992. Т. 37, № 4. С. 671.
12. Капранов М.В., Романов Е.В. Линейные модели системы ЧАП с дискриминатором на линии задержки // Радиотехника. 1988. № 11. С. 34.
13. Капранов М.В. Связь запаздывания сигнала в волоконно-оптической линии задержки с параметрами каскадно-кольцевых ФАП на границе устойчивости // Радиотехнические устройства пьезоэлектроники. Омск, 1985.
14. Каганов В.И. Радиозлектронные системы автоматического управления. Компьютеризированный курс: Учебное пособие для вузов. М.: Горячая линия–Телеком, 2009. 432с.
15. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 548 с.
16. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. 288 с.
17. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
18. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Автоматизация исследований нелинейной динамики систем синхронизации // Вестник Верхне-Волжского отделения АТН РФ. Высокие технологии в радиоэлектронике. Н. Новгород. 1997. Вып. 2(4). С. 15.
19. Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем: Учебно-методическая разработка / Сост. В.В. Матросов. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 54 с.
20. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: ГГУ, 1983. С. 3.
21. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Станкевич Н.М., Тюрюкина Л.В. Физика квазипериодических колебаний. Саратов: Издательский центр «Наука», 2013. 252 с.
22. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Самоорганизация временных структур в мультиравновесной автогенераторной системе с частотным управлением // Журнал технической физики. 1997. Т. 67, № 3. С. 1.
23. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Сложная динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с комбинированным дискриминатором // Радиотехника и электроника. 1997. Т.42, № 9. С. 1125.
24. Заулин И.А., Пономаренко В.П. Синхронные и автоколебательные режимы в многоустойчивых системах с фазовым управлением // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 4. С. 732.
25. Мишагин К.Г., Шалфеев В.Д., Пономаренко В.П. Нелинейная динамика систем фазирования в антенных решетках: Учебное пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2007. 188 с.

26. *Капранов М.В., Родионов М.Н.* Формирование регулярных и хаотических колебаний с помощью системы частотной автоподстройки частоты // Радиотехнические тетради. М.: МЭИ. 1998. № 16. С. 49.
27. *Шахтарин Б.И., Кобылкина П.И., Сидоркина Ю.А., Кондратьев А.В., Митин С.В.* Генераторы хаотических колебаний: Учебное пособие. М.: Гелиос АРВ, 2007.
28. *Radwan A., Soliman A.M., Elwakil A.C.* 1-D digitally-controlled multiscroll chaos generator // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, № 1. P. 227.
29. *Lu J., Chen G.* Generating multiscroll chaotic attractors: Theories, methods and application // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2006. Vol. 16, № 4. P. 775.
30. *Bilotta E., Pantano P., Stranges F.* A gallery of Chua attractors: Part 1 // International Journal of Bifurcation and Chaos 2007. Vol. 17, № 1. P. 1.
31. *Заулин И.А., Пономаренко В.П.* Анализ динамических процессов в статических системах синхронизации // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 33, № 1. С. 106.
32. *Капранов М.В., Морозов А.Г.* Использование хаотической модуляции для передачи информации // Радиотехнические тетради. М.: МЭИ, 1998. № 14. С. 66.
33. *Капранов М.В., Чернобаев В.Г.* Управляемые генераторы хаотических колебаний на базе систем фазовой синхронизации // Радиотехнические тетради. М.: МЭИ, 1998. № 15. С. 86.
34. *Дмитриев А.С., Широков М.Е.* Выбор генератора для прямохаотической системы связи // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 7. С. 840.
35. *Дмитриев А.С., Клецов А.В., Кузьмин Л.В.* Генерация сверхширокополосного хаоса в дециметровом диапазоне // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 7. С. 709.
36. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И.* Генерация хаоса / Под общ. ред. Дмитриева А.С. М.: Техносфера, 2012. 424 с.

*Поступила в редакцию 7.05.2014*

## REGULAR AND CHAOTIC DYNAMICS OF TWO-RING PHASE LOCKED SYSTEM

### Part 2

#### **Peculiarities of nonlinear dynamics of frequency-phase system with identical third-order filters in control circuits**

*V. P. Ponomarenko*

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod

The results of investigation of dynamical modes in the model of oscillatory system with frequency-phase control using multi-frequency discriminator inversely switched in

the chain of frequency control are presented. The study was carried out on the basis of mathematical model of the system with two degrees of freedom with the use of qualitative and numerical methods of nonlinear dynamics. It is shown that in such a system may be realized both synchronous and great number of non-synchronous periodic and chaotic modes of different complexity. Location parameters domains are established with different dynamic modes of the system. The processes developing in the domain of instability of the synchronous mode are considered.

*Keywords:* Systems with frequency-phase control, dynamical states, stability, bifurcation, attractors, phase portraits, synchronous and non-synchronous modes, dynamical chaos.

*Пономаренко Валерий Павлович* – родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года – заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. С 2013 года – учёный секретарь НИИ ПМК ННГУ. По совместительству – профессор кафедры численного и функционального анализа и кафедры прикладной математики факультета вычислительной математики и кибернетики ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике, синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Один из авторов монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше.



603950 Н. Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
Национальный исследовательский университет  
E-mail: povp@uic.nnov.ru