

**ИНВАРИАНТНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА  
ЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ  
ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ**

*А.Ф. Голубенцев*, *В.М. Аникин*

Показано, что нахождение конечного числа собственных функций оператора Перрона – Фробениуса отображения Реньи  $x_{n+1} = \beta x_n \bmod 1$  (в случае равенства вещественного коэффициента числу Фидия  $\beta = \Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ ), а также связанных с этим оператором модифицированного эволюционного оператора и оператора Перрона – Фробениуса сопряженного отображения основано на последовательном построении конечномерных инвариантных функциональных подпространств для этих операторов.

**Введение**

Хаотические отображения (нелинейные разностные уравнения со случайными начальными условиями) представляют интерес как простые модельные объекты при решении ряда естественнонаучных задач, в том числе как генераторы шумоподобных сигналов, кодирующих конфиденциальные сообщения (особенно в формате двумерных и трехмерных отображений). Ряд важных свойств отображений определяется видом собственных функций ассоциированного линейного оператора Перрона – Фробениуса и значениями собственных чисел. Сложность задачи нахождения этих характеристик определяется в первую очередь видом отображения. Для симметричных отображений типа сдвигов Бернулли и полученных из него простыми преобразованиями отдельных ветвей новых отображений, собственные функции оператора Перрона – Фробениуса являются полиномами Бернулли (комбинацией полиномов Бернулли и Эйлера) [1]. Для кусочно-линейных отображений, не все ветви которых переводят свои отрезки задания целиком в полную область определения отображения (как правило, единичный интервал), задача нахождения собственных функций в достаточно общем виде еще не решалась. В этой работе развивается аналитический метод нахождения собственных функций оператора Перрона – Фробениу-

са кусочно-линейного  $\Phi$ -отображения, в определение которого входит число Фидия  $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ ,

$$x_{n+1} = \{\beta x_n\} = \begin{cases} \beta x_n, & 0 \leq x_n \leq \beta^{-1} \\ \beta x_n - 1, & \beta^{-1} < x_n \leq 1 \end{cases} = \quad (1)$$

$$= (\beta x_n) \cdot \mathbf{1}(0 \leq x_n \leq \beta^{-1}) + (\beta x_n - 1) \cdot \mathbf{1}(\beta^{-1} < x_n \leq 1).$$

Символ  $\{\}$  в (1) означает выделение дробной части числа, а иррациональный коэффициент  $\beta = \Phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$  представляет собой одно из чисел Фидия. Мы сохраняем в записи отображения коэффициент  $\beta$  [2-6], поскольку число Фидия – это лишь одно из возможных значений [6], при котором отображение (1) сохраняет эргодические и перемешивающие свойства [2,3]. Отображение (1) состоит из двух линейных ветвей, из которых только одна переводит область задания  $(0, \beta^{-1})$  на единичный интервал. При записи  $\Phi$ -отображения (1) использованы индикаторные функции отдельных отрезков (интервалов) единичного интервала области определения (1) – соответственно  $(0, \beta^{-1})$  и  $(\beta^{-1}, 1)$ . Индикаторная функция отрезка (например,  $[a, b]$ ) определяется как единично-нулевая функция вида

$$\mathbf{1}(a \leq x \leq b) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (2)$$

Оператор Перрона – Фробениуса, ассоциированный с рассматриваемым отображением, имеет вид [4]:

$$Pf(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \left( f\left(\frac{x}{\beta}\right) + f\left(\frac{x+1}{\beta}\right) \right), & 0 \leq x \leq \beta^{-1}, \\ \frac{1}{\beta} f\left(\frac{x}{\beta}\right), & \beta^{-1} < x \leq 1 \end{cases} = \quad (3)$$

$$= \frac{1}{\beta} \left( f\left(\frac{x}{\beta}\right) + f\left(\frac{x+1}{\beta}\right) \cdot \mathbf{1}(0 \leq x \leq \beta^{-1}) \right).$$

Предлагаемый метод нахождения собственных функций оператора (3) заключается в построении конечномерных инвариантных подпространств в функциональном пространстве, соотнесенном с эволюционным оператором, и последующем переходе в этих подпространствах к новому базису. Показано, что собственные числа эволюционного оператора являются знакопеременными отрицательными степенями числа Фидия, а собственные функции представляют собой кусочно-степенные функции, терпящие разрыв первого рода в точке золотого сечения  $1/\Phi = 1 - \Phi \approx 0.618$ . Аналогичную структуру сохраняют собственные числа и собственные функции модифицированного оператора Перрона – Фробениуса и эволюционного оператора сопряженного (к  $\Phi$ -отображению) хаотического преобразования, обладающего равномерным инвариантным распределением (в последнем случае собственные функции терпят разрыв в точке  $1/(1 + \Phi^{-2}) \approx 0.724$ .

## 1. Четырехмерное инвариантное функциональное подпространство

Введем следующие обозначения:  $\psi_n(x)$  –  $n$ -я собственная функция оператора Перрона – Фробениуса  $\Phi$ -отображения,  $\lambda_n$  –  $n$ -е собственное число, соответствующее  $\psi_n(x)$ , ( $n$  изменяется от 0 до  $\infty$ , значению  $n = 0$  отвечает инвариантная плотность).

Рассмотрим результат действия оператора (3) на ряд функций – индикаторную функцию  $\mathbf{1}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) единичного интервала (0,1), индикаторную функцию  $\Theta(x) = \mathbf{1}$  ( $0 \leq x \leq \beta^{-1}$ ) =  $1 - \mathbf{1}$  ( $\beta^{-1} < x \leq 1$ ) интервала (0,  $\beta^{-1}$ ), независимую переменную  $x$  и комбинацию функций  $x\Theta(x)$ . Соответственно, получим

$$P\mathbf{1} (0 \leq x \leq 1) = \beta^{-1} \cdot \mathbf{1} (0 \leq x \leq \beta) + \beta^{-1} \cdot \mathbf{1} (-1 \leq x \leq \beta^{-1}) \cdot \mathbf{1} (0 \leq x \leq \beta^{-1}), \quad (4)$$

$$P\Theta(x) = \beta^{-1} \mathbf{1} (0 \leq x \leq 1), \quad (5)$$

$$Px = \beta^{-2}x + \beta^{-2}(x+1)\Theta(x) = \beta^{-2}\Theta(x) + \beta^{-2}x + \beta^{-2}x\Theta(x), \quad (6)$$

$$Px\Theta(x) = \beta^{-2}x\Theta\left(\frac{x}{\beta}\right) + \beta^{-2}(x+1)\Theta\left(\frac{x+1}{\beta}\right)\Theta(x) = \beta^{-2}x. \quad (7)$$

Анализируя структуру соотношений (4)-(7), можно сделать вывод, что индикаторная функция единичного отрезка  $\mathbf{1}(x)$ , индикаторная функция  $\Theta(x)$ , линейные функции  $x$  и  $x\Theta(x)$  могут рассматриваться как неортогональный базис четырехмерного инвариантного подпространства интегрируемых функций (линейной оболочки над полем вещественных чисел, порожденной этими векторами) эволюционного оператора. В этой связи целесообразнее перейти к матричной записи уравнений (4)-(7):

$$P \begin{vmatrix} \mathbf{1} \\ \Theta(x) \\ x \\ x \cdot \Theta(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta^{-1} & \beta^{-1} & 0 & 0 \\ \beta^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-2} & \beta^{-2} & \beta^{-2} \\ 0 & 0 & \beta^{-2} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{1} \\ \Theta(x) \\ x \\ x \cdot \Theta(x) \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} \mathbf{1} \\ \Theta(x) \\ x \\ x \cdot \Theta(x) \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Здесь введена матрица линейного преобразования (3) в базисе  $\mathbf{1}(x)$ ,  $\Theta(x)$ ,  $x$  и  $x\Theta(x)$ :

$$A = \begin{vmatrix} \beta^{-1} & \beta^{-1} & 0 & 0 \\ \beta^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-2} & \beta^{-2} & \beta^{-2} \\ 0 & 0 & \beta^{-2} & 0 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Характеристический многочлен матрицы  $A$  имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \beta^{-1} & -\beta^{-1} & 0 & 0 \\ -\beta^{-1} & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\beta^{-2} & \lambda - \beta^{-2} & -\beta^{-2} \\ 0 & 0 & -\beta^{-2} & \lambda \end{vmatrix} = \quad (10)$$

$$= (\lambda - 1) (\lambda + \beta^{-2}) (\lambda - \beta^{-1}) (\lambda + \beta^{-3}).$$

Корни характеристического многочлена являются характеристическими числами матрицы  $A$  (то есть собственными числами оператора Перрона – Фробениуса). Приравнявая (10) нулю, получим значения собственных чисел:

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = -\beta^{-2}, \lambda_2 = \beta^{-1}, \lambda_3 = -\beta^{-3}. \quad (11)$$

Собственное число  $\lambda_0 = 1$  соответствует собственной функции в форме инвариантной плотности отображения.

## 2. Аналитический расчет первых четырех собственных функций

Осуществим теперь переход от базиса  $\mathbf{1}(x), \Theta(x), x, x\Theta(x)$  к новому базису, состоящему из четырех собственных функций  $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)$  оператора Перрона – Фробениуса. Для этого необходимо [7] осуществить преобразование подобия

$$A = T^{-1} \Lambda T. \quad (12)$$

Здесь  $T$  – невырожденная матрица перехода к новому базису, определяющая преобразование

$$\| \psi_0(x) \ \psi_1(x) \ \psi_2(x) \ \psi_3(x) \|' = T \| \mathbf{1} \ \Theta(x) \ x \ x\Theta(x) \|', \quad (13)$$

$T^{-1}$  матрица, обратная матрице  $T$ , а  $\Lambda$  – диагональная матрица, описывающая в новом базисе линейные преобразования базисных векторов под действием оператора эволюции. В силу того, что базис составляется из собственных функций оператора, матрица  $\Lambda$  состоит из собственных чисел (11), являющихся инвариантами при преобразованиях подобия [7,8].

Задача диагонализации предопределяет вид матрицы  $T^{-1}$ : она должна состоять из собственных векторов матрицы  $A$ , удовлетворяющих условию  $Ab_i = \lambda_i b_i$ . Найдя эти векторы, можно посредством обращения  $T^{-1}$  найти матрицу  $T$  и, тем самым, решить поставленную задачу.

Для нахождения же собственных векторов матрицы  $A$ , согласно [7], прежде всего нужно построить так называемую присоединенную матрицу  $B(\lambda) = \|b_{ik}(\lambda)\|$ , элементы которой  $b_{ik}(\lambda)$  являются алгебраическими дополнениями величин  $\lambda\delta_{ki} - a_{ki}$  в определителе (10). Эффективный способ вычисления элементов  $b_{ik}(\lambda)$  связан с представлением присоединенной матрицы  $B(\lambda)$  через характеристический многочлен (10). Найдём отношение разности  $\Delta(\lambda) - \Delta(\mu)$  к разности  $\lambda - \mu$

$$\delta(\lambda, \mu) = \frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\mu)}{\lambda - \mu} = \mu + (\lambda - \beta^{-1}). \quad (14)$$

Тогда присоединенная матрица [7]

$$B(\lambda) = \delta(\lambda E, A). \quad (15)$$

Подставляя в (14) вместо  $\lambda$  и  $\mu$  матрицы  $\lambda E$  и  $A$ , соответственно, получим из (15)

искомую присоединенную матрицу

$$\begin{aligned}
 & B(\lambda) = \\
 & \begin{array}{cccc}
 \lambda^3 - \beta^{-2}\lambda^2 - \beta^{-4}\lambda & \beta^{-1}\lambda^2 - \beta^{-3}\lambda - \beta^{-5} & 0 & 0 \\
 \beta^{-1}\lambda^2 - \beta^{-3}\lambda - \beta^{-5} & \lambda^3 - \lambda^2 + \beta^{-5}\lambda + \beta^{-5} & 0 & 0 \\
 \beta^{-3}\lambda & \beta^{-2}\lambda^2 - \beta^{-3}\lambda & \lambda^3 - \beta^{-1}\lambda^2 - \beta^{-2}\lambda & \beta^{-2}\lambda^2 - \beta^{-3}\lambda - \beta^{-4} \\
 \beta^{-5} & \beta^{-4}\lambda - \beta^{-5} & \beta^{-2}\lambda^2 - \beta^{-3}\lambda - \beta^{-4} & \lambda^3 - \lambda^2 - \beta^{-4}\lambda + \beta^{-4}
 \end{array} . \\
 & \hspace{20em} (16)
 \end{aligned}$$

Замена в (16) величины  $\lambda$  характеристическими числами матрицы  $A$  (11) дает собственные векторы матрицы  $A$  – ими являются ненулевые столбцы матрицы  $B(\tilde{\lambda})$ , если  $\tilde{\lambda}$  – характеристическое число матрицы  $A$  [7].

Для  $\tilde{\lambda} = \lambda_0 = 1$  имеем

$$B_1(\lambda_0 = 1) = 2\beta^{-3} \begin{vmatrix} 1 & \beta^{-1} & 0 & 0 \\ \beta^{-1} & \beta^{-2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\beta^{-1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\beta^{-2} & \frac{1}{2}\beta^{-3} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

откуда следует, что вектор

$$b_0 = \begin{vmatrix} 1 & \beta^{-1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\beta^{-2} \end{vmatrix}' \quad (17)$$

– первый собственный вектор матрицы  $A$  (второй столбец матрицы  $B(\lambda_0)$  пропорционален первому).

Для  $\tilde{\lambda} = \lambda_1 = -\beta^{-2}$  имеем

$$B(\lambda_1 = -\beta^{-2}) = \beta^{-4} \begin{vmatrix} -\beta^{-2} & \beta^{-1} & 0 & 0 \\ \beta^{-1} & -1 & 0 & 0 \\ -\beta^{-1} & 1 & 0 & 0 \\ \beta^{-1} & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

то есть

$$b_1 = \begin{vmatrix} \beta^{-1} & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}' \quad (18)$$

– второй собственный вектор матрицы  $A$ .

Аналогично, если

$$B(\lambda_2 = \beta^{-1}) = -\beta^{-3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta^{-1} & 0 & 1 & \beta^{-1} \\ -\beta^{-2} & 0 & \beta^{-1} & \beta^{-2} \end{vmatrix},$$

то третий собственный вектор матрицы (9) суть

$$b_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & \beta^{-1} \end{array} \right\|'. \quad (19)$$

Наконец, поскольку

$$B(\lambda_3 = -\beta^{-3}) = -\beta^{-5} \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta^{-1} & -\beta^{-1}(1 + \beta^{-2}) & -2\beta^{-3} & 2\beta^{-2} \\ -1 & (1 + \beta^{-2}) & 2\beta^{-2} & -2\beta^{-1} \end{array} \right\|,$$

то четвертый собственный вектор матрицы (9) определяется как

$$b_3 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \beta^{-1} & -1 \end{array} \right\|'. \quad (20)$$

Теперь мы можем записать матрицу  $\Gamma^{-1}$ , обратную искомой преобразующей матрице  $\Gamma$ ; последняя матрица обеспечивает переход к базису в виде собственных функций оператора Перрона – Фробениуса. Матрица  $\Gamma^{-1}$  состоит из только что найденных собственных векторов (17)-(20) матрицы (9)

$$\Gamma^{-1} = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & \beta^{-1} & 0 & 0 \\ \beta^{-1} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \beta^{-1} \\ \frac{1}{2}\beta^{-2} & -1 & \beta^{-1} & -1 \end{array} \right\|. \quad (21)$$

Матрицу перехода к новому базису  $\Gamma$  будем искать посредством обращения (21):

$$\Gamma = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{1}{1 + \beta^{-2}} & \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} & -\frac{1}{1 + \beta^{-2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} & 0 & \frac{1}{1 + \beta^{-2}} & \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{1 + \beta^{-2}} & \frac{1}{2}\beta & \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} & -\frac{1}{1 + \beta^{-2}} \end{array} \right\|. \quad (22)$$

Из соотношения

$$\left\| \begin{array}{cccc} \psi_0(x) & \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) \end{array} \right\|' = \Gamma \left\| \begin{array}{cccc} 1 & \Theta(x) & x & x\Theta(x) \end{array} \right\|',$$

определяющего переход к новому базису, находятся четыре первые собственные функции оператора Перрона – Фробениуса (3)  $\Phi$ -отображения:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{1 + \beta^{-2}} + \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} \cdot \Theta(x), \quad (23)$$

$$\psi_1(x) = \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} - \frac{1}{1 + \beta^{-2}} \cdot \Theta(x), \quad (24)$$

$$\psi_2(x) = -\frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} + \frac{1}{1 + \beta^{-2}} \cdot x + \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} \cdot x\Theta(x), \quad (25)$$

$$\psi_3(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{1 + \beta^{-2}} + \frac{\beta}{2} \cdot \Theta(x) + \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} \cdot x - \frac{1}{1 + \beta^{-2}} \cdot x\Theta(x). \quad (26)$$

Собственные функции (23), (24) являются кусочно-постоянными, а функции (25) и (26) – кусочно-линейными (рис. 1). Правильность проведенных расчетов легко проверяется действием оператора Перрона – Фробениуса на функции (23)-(26).

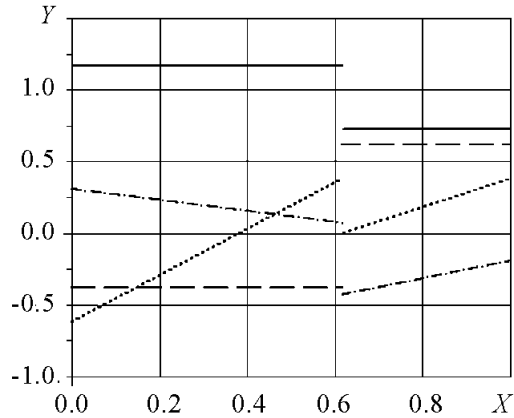


Рис. 1. Кусочно-постоянные и кусочно-линейные собственные функции оператора Перрона – Фробениуса Ф-отображения

### 3. Обсуждение результатов и обобщения

Увеличивая размерность инвариантных функциональных подпространств, теоретически можно ставить задачу о нахождении счетного множества собственных функций оператора Перрона – Фробениуса и соответствующих собственных чисел. Успех решения задачи связан с преодолением сложности математических преобразований, серьезно возрастающей с ростом порядка матрицы линейных преобразований  $A$ .

Можно предложить три направления, облегчающие решение сформулированной задачи:

1) переход к модифицированному оператору Перрона – Фробениуса (по инвариантной мере), связанному с определенным выше оператором Перрона – Фробениуса (3) (по мере Лебега) соотношением [9-11]

$$Ug(x) = \frac{1}{\psi_0(x)} P(\psi_0(x)g(x)); \quad (27)$$

2) применение метода неопределенных коэффициентов;

3) построение производящих функций для собственных функций операторов (3) и (27).

Последовательно оценим перспективы этих направлений. Нетрудно увидеть, что инвариантным для оператора (27) является равномерное распределение, собственные числа операторов (3) и (27) совпадают, а собственные функции связаны соотношением:  $\psi_k(x) = \psi_0(x)\psi_{(U),k}(x)$ , где  $\psi_{(U),k}(x)$  – собственные функции модифицированного оператора. Преимуществом «работы» с оператором (27) является более «приятный» вид матриц, возникающих при описанных выше преобразованиях – они являются нижними треугольными матрицами. В результате описывавшихся

уже действий можно получить (при введении шестимерного инвариантного функционального пространства) дополнительные собственные числа  $\lambda_4 = \beta^{-2}$ ,  $\lambda_5 = -\beta^{-4}$  и соответствующие собственные функции оператора Перрона – Фробениуса:

$$\lambda_4 = \beta^2, \quad \tilde{\psi}_4(x) = \frac{1}{2}\beta^{-1} - \frac{1}{2}\beta^{-2}\Theta(x) - 2\beta^{-1}x + 2\beta^{-3}x\Theta(x) + x^2; \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_5(x) = & -\frac{2\beta^2}{3(1+\beta^{-2})} + \frac{2}{1+\beta^{-2}}\Theta(x) + \frac{\beta^2}{1+\beta^{-2}}x - \\ & -\frac{2\beta}{1+\beta^{-2}}x\Theta(x) - \frac{1}{1+\beta^{-2}}x^2 + x^2\Theta(x). \end{aligned} \quad (29)$$

Тем не менее, расчетная процедура остается сложной, но благодаря ей выявляется общая структура собственных чисел и собственных функций: собственные числа – это знакопеременные величины в виде отрицательных степеней числа Фидия, а собственные функции являются кусочно-степенными с разрывом в точке золотого сечения.

Имея такую конструктивную гипотезу, ее можно проверить, используя метод неопределенных коэффициентов. Поясним идею этого метода на тестовом примере, подтвердив полученные выше результаты для четырех собственных функций (на основе знания собственных чисел). Будем искать собственные функции в виде следующих представлений:

$$\psi_n(x) = \mu_1^{(n)} + \mu_2^{(n)}\Theta(x) + \mu_3^{(n)}x + \mu_4^{(n)}x\Theta(x), \quad n = 0, 1, 2, 3. \quad (30)$$

Неизвестные коэффициенты  $\mu_k^{(n)}$  для  $n = 0, 1, 2, 3$ ;  $k = 1, 2, 3, 4$  найдем из уравнения, определяющего собственные числа и функции оператора Перрона – Фробениуса  $\Phi$ -отображения (4.6):

$$P\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x).$$

При действии оператора Перрона – Фробениуса (3) на функции вида (30) возникают следующие уравнения ( $n = 0, 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} P\psi_n(x) = \lambda_n \left( \mu_1^{(n)} + \mu_2^{(n)}\Theta(x) + \mu_3^{(n)}x + \mu_4^{(n)}x\Theta(x) \right) & \equiv \\ \equiv \left( \mu_1^{(n)} + \mu_2^{(n)} \right) \beta^{-1} + \left( \mu_1^{(n)}\beta^{-1} + \mu_3^{(n)}\beta^{-2} \right) \Theta(x) + \left( \mu_3^{(n)} + \mu_4^{(n)} \right) \beta^{-2}x + \mu_3^{(n)}\beta^{-2}x\Theta(x) & \equiv \\ \equiv \lambda_n \left( \frac{\left( \mu_1^{(n)} + \mu_2^{(n)} \right) \beta^{-1}}{\lambda_n} + \frac{\left( \mu_1^{(n)}\beta^{-1} + \mu_3^{(n)}\beta^{-2} \right)}{\lambda_n} \Theta(x) + \right. & \\ \left. + \frac{\left( \mu_3^{(n)} + \mu_4^{(n)} \right) \beta^{-2}}{\lambda_n} x + \frac{\mu_3^{(n)}\beta^{-2}}{\lambda_n} x\Theta(x) \right). & \end{aligned}$$



Приравнивая коэффициенты при 1,  $\Theta(x)$ ,  $x$ ,  $x\Theta(x)$ , найдем следующие непротиворечивые выражения для искомым коэффициентов  $\mu_k^{(n)}$ :

$$\begin{aligned} \lambda_0 = 1 : \quad & \mu_1^{(0)} = \frac{1}{1 + \beta^{-2}}, \quad \mu_2^{(0)} = \beta^{-1}\mu_1^{(0)}, \quad \mu_3^{(0)} = \mu_4^{(0)} = 0; \\ \lambda_1 = \beta^{-1} : \quad & \mu_1^{(1)} = -\mu_4^{(1)}, \quad \mu_2^{(1)} = 0, \quad \mu_3^{(1)} = \beta\mu_4^{(1)}, \quad \mu_4^{(1)} = 1; \\ \lambda_2 = -\beta^{-2} : \quad & \mu_1^{(2)} = 1, \quad \mu_2^{(2)} = -\beta, \quad \mu_3^{(2)} = \mu_4^{(2)} = 0; \\ \lambda_3 = -\beta^{-3} : \quad & \mu_1^{(3)} = \frac{\beta}{2}, \quad \mu_2^{(3)} = -\frac{\beta + \beta^{-1}}{2}0, \quad \mu_3^{(3)} = -\beta^{-1}, \quad \mu_4^{(3)} = 1. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в (30), приходим к выражениям (23)-(26). Можно проводить дальнейшие обобщения, повышая степень независимой переменной в (30) и увеличивая число слагаемых вида  $x^n$  и  $\Theta x^n$  с неопределенными коэффициентами. При этом будет повышаться размерность системы линейных алгебраических уравнений, необходимых для нахождения численных значений коэффициентов  $\mu_k^{(n)}$ .

Возникает вопрос, а нельзя ли создать некий «самораспаковывающийся архив», который в компактной форме содержал бы (и генерировал!) значения собственных функций и собственных чисел оператора? Речь идет о производящей функции для собственных функций и собственных чисел оператора [1]. К этому вопросу (в случае Ф-отображения) мы надеемся обратиться специально. А сейчас просто продемонстрируем реальность этой идеи (указав вид производящих функций) для двух пилообразных отображений (с нечетным и четным числом ветвей), полученных инверсией четных ветвей из сдвигов Бернулли  $x_{n+1} = Mx_n \bmod 1$  ( $M$  – целое число). Для этого введем производящие функции для полиномов Бернулли  $B_k(x)$  и Эйлера  $E_k(x)$  [12], соответственно

$$B(x, t) = \frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!}, \quad (31)$$

$$E(x, t) = \frac{2e^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(x) \frac{t^k}{k!}, \quad (32)$$

( $t$  – параметр). Нам понадобятся выражения для производящих функций полиномов Бернулли с четными номерами и полиномов Эйлера с нечетными номерами

$$B_e(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k}(x) \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2} (B(x, t) + B(x, -t)) = \frac{(t/2)}{\text{sh}(t/2)} \text{ch}(x - 1/2)t, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} E_o(x, t) &= E(x, t) - E(x, -t) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E_{2k+1}(x) \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{t/2}{\text{sh}(t/2)} \text{sh}(x - 1/2)t. \end{aligned} \quad (34)$$

Рассмотрим два отображения

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = \phi_1(x_n) &= 5x_n \mathbf{1}(0 \leq x_n < 1/5) + (2 - 5x_n) \mathbf{1}(1/5 \leq x_n < 2/5) + \\
&+ (5x_n - 2) \mathbf{1}(2/5 \leq x_n < 3/5) + (4 - 5x_n) \mathbf{1}(3/5 \leq x_n < 4/5) + \\
&+ (5x_n - 4) \mathbf{1}(4/5 \leq x_n \leq 1),
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = \phi_2(x_n) &= 6x_n \mathbf{1}(0 \leq x_n < 1/6) + (2 - 6x_n) \mathbf{1}(1/6 \leq x_n < 1/3) + \\
&+ (6x_n - 2) \mathbf{1}(1/3 \leq x_n < 1/2) + (4 - 6x_n) \mathbf{1}(1/2 \leq x_n < 2/3) + \\
&+ (6x_n - 4) \mathbf{1}(2/3 \leq x_n < 5/6) + (6 - 6x_n) \mathbf{1}(5/6 \leq x_n < 1),
\end{aligned}$$

соответственно характеризующие операторами Перрона – Фробениуса

$$P_1 f(x) = \frac{1}{5} \left( f\left(\frac{x}{5}\right) + f\left(\frac{2-x}{5}\right) + f\left(\frac{2+x}{5}\right) + f\left(\frac{4-x}{5}\right) + f\left(\frac{4+x}{5}\right) \right), \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
P_2 f(x) &= \frac{1}{6} \left( f\left(\frac{x}{6}\right) + f\left(\frac{2-x}{6}\right) + f\left(\frac{2+x}{6}\right) + f\left(\frac{4-x}{6}\right) + \right. \\
&\left. + f\left(\frac{4+x}{6}\right) + f\left(\frac{6-x}{6}\right) \right).
\end{aligned} \tag{37}$$

Поддействовав оператором (37) на функцию (33) с аргументом  $x/2$  и используя элементарные свойства гиперболических функций, найдем

$$P_2 B_e(x/2, t) = \frac{t/12}{\text{sh}(t/12)} \text{ch}((x - 1/2)(t/12)) = B_e(x/2, t/6),$$

а это означает, что собственными функциями оператора Перрона – Фробениуса (37) являются полиномы Бернулли  $B_{2k}(x/2)$  с собственными числами  $\lambda_k = 1/6^{2k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Аналогично, действуя оператором (36) на функции (33) и (34), получим

$$P_1 B_e(x, t) = \frac{t/10}{\text{sh}(t/10)} \text{ch}((x - 1/2)(t/5)) = B_e(x, t/5), \tag{38}$$

$$P_1 E_o(x, t) = \frac{1}{5} \frac{1}{\text{ch}(t/10)} \text{sh}((x - 1/2)t/5) = \frac{1}{5} E_o(x, t/5). \tag{39}$$

Результаты (38) и (39) означают, что собственными функциями оператора Перрона – Фробениуса (36) являются четные (по порядку) полиномы Бернулли и нечетные полиномы Эйлера. Собственные числа  $\lambda_k = 1/5^{2k}$  имеют кратность 2. Собственные числа становятся простыми для отображения, инверсного (35) ( $\tilde{\phi}_1(x_n) = 1 - \phi_1(x_n)$ ), поскольку в этом случае собственные числа становятся знакопеременными.

#### 4. Зачем радиофизику оператор Перрона – Фробениуса

Спектральные характеристики оператора Перрона – Фробениуса определяют перемешивающие свойства отображения, другими словами, скорость установления в системе равновесного распределения и расщепления корреляций. Продемонстрируем значимость первых собственных функций этого оператора на примере хаотического отображения, сопряженного Ф-отображению, то есть полученного из него посредством кусочно-линейной замены переменной

$$x = \begin{cases} \beta^{-1} (1 - \beta^{-2}) \alpha, & 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1 + \beta^{-2}}, \\ (1 + \beta^{-2}) \alpha - \beta^{-2}, & \frac{1}{1 + \beta^{-2}} < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (40)$$

Данная замена переменной приводит к кусочно-линейному отображению, имеющему равномерное инвариантное распределение

$$\alpha_{n+1} = g(\alpha_n) = \begin{cases} \beta \alpha_n, & 0 \leq \alpha_n \leq \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}}, \\ \alpha_n + \frac{\beta^{-2}}{1 + \beta^{-2}}, & \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} < \alpha_n \leq \frac{1}{1 + \beta^{-2}}, \\ \beta^2 \alpha_n - \frac{\beta^2}{1 + \beta^{-2}}, & \frac{1}{1 + \beta^{-2}} < \alpha_n \leq 1. \end{cases} \quad (41)$$

Не представляет труда записать оператор Перрона – Фробениуса для (41):

$$P_g f(\alpha) = f\left(\alpha - \frac{\beta^{-2}}{1 + \beta^{-2}}\right) + \left(\beta^{-1} f(\beta^{-1} \alpha) + \beta^{-2} f\left(\beta^{-2} \alpha - \frac{1}{1 + \beta^{-2}}\right) - f\left(\alpha - \frac{\beta^{-2}}{1 + \beta^{-2}}\right)\right) \cdot \Theta_1(\alpha), \quad (42)$$

где  $\Theta_1(\alpha) = \mathbf{1}\left(0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1 + \beta^{-2}}\right)$ .

Собственные числа сопряженных отображений являются инвариантами, а собственные функции пересчитываются с учетом (40) по четкому правилу [1]. Поэтому первые собственные функции для оператора (42) будут иметь вид

$$\lambda_0 = 1, \quad \psi_0(\alpha) = 1, \quad (43)$$

$$\lambda_1 = -\beta^{-2}, \quad \psi_1(\alpha) = (1 - (1 + \beta^{-2}) \Theta(\alpha)), \quad (44)$$

$$\lambda_2 = \beta^{-1}, \quad \psi_2(\alpha) = \left(-\frac{1}{1 + \beta^{-2}} + \frac{\beta^{-1}}{1 + \beta^{-2}} \Theta(\alpha) + \alpha - \beta^{-2} \alpha \Theta(\alpha)\right), \quad (45)$$

$$\lambda_3 = -\beta^{-3}, \quad \psi_3(\alpha) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \beta^{-2}} + \frac{2}{1 + \beta^{-2}} \Theta(\alpha) + \alpha - 2\beta^{-1} \alpha \Theta(\alpha)\right). \quad (46)$$

Автокорреляционная функция для орбит отображения вычисляется исходя из определения [13]

$$R(n) = \overline{\alpha_n \alpha_0} - \bar{\alpha}_n \cdot \bar{\alpha}_0 = \int_0^1 g^{(n)}(\alpha) \alpha d\alpha - \int_0^1 g^{(n)}(\alpha) d\alpha \int_0^1 \alpha d\alpha, \quad (47)$$

где  $g^{(n)}(\alpha)$  –  $n$ -я итерация отображения. Произведение интегралов в правой части (47) с очевидностью равно  $1/4$  (случайные величины  $\alpha_n$  и  $\alpha_0$  при расчете считаются одинаково распределенными – по инвариантному закону). Полугрупповые свойства дискретных отображений, сохраняющих меру, позволяют представить  $n$ -ю итерацию в форме различных итерационных композиций, в том числе и в виде  $g^{(n)}(\alpha) = g^{(n-1)}(\phi(\alpha))$ ,  $n$ -кратное применение которого в (47) ведет к изящной формуле для расчета автокорреляционной функции

$$R(n) = \int_0^1 \alpha (P_g^n \alpha) d\alpha - \frac{1}{4}. \quad (48)$$

Эта важная формула особенно удобна и полезна, если переменную  $\alpha$  представить в виде линейной комбинации собственных функций оператора Перрона – Фробениуса<sup>1</sup>. Тогда и результат многократного действия этого оператора на переменную  $\alpha$  будет представлять собой линейную комбинацию собственных функций. Выберем для такого представления собственные функции (45) и (46). Пусть

$$\begin{aligned} \alpha = a\psi_2(\alpha) + b\psi_3(\alpha) + c = & \left( -\frac{a}{1+\beta^{-2}} - \frac{b}{2} - \frac{b}{1+\beta^{-2}} + c \right) + \\ & + \frac{\beta^{-1}a + 2b}{1+\beta^{-2}} \Theta(\alpha) + (a+b)\alpha - (\beta^{-2}a + 2\beta^{-1}b)\alpha \Theta(\alpha). \end{aligned} \quad (49)$$

Тогда переменная  $\alpha$  может быть представлена в виде

$$\alpha = \frac{2}{1+\beta^{-2}} \psi_2(\alpha) - \frac{\beta^{-1}}{1+\beta^{-2}} \psi_3(\alpha) + \frac{1}{2}. \quad (50)$$

Теперь легко найти результат многократного действия оператора Перрона – Фробениуса изучаемого отображения на  $\alpha$ :

$$P\alpha = \frac{2}{1+\beta^{-2}} \beta^{-1} \psi_2(\alpha) - \frac{\beta^{-1}}{1+\beta^{-2}} (-\beta^{-3}) \psi_3(\alpha) + \frac{1}{2}. \quad (51)$$

<sup>1</sup>Не менее изящна формула для расчета автокорреляционной функции орбит сопряженного хаотического отображения с неравномерным инвариантным распределением [14]:

$$R(n) = \int_0^1 \alpha P^n h(\alpha) d\alpha - \left( \int_0^1 h(\alpha) d\alpha \right)^2,$$

где  $P$  – оператор отображения с равномерным инвариантным распределением,  $h(\alpha)$  – сопрягающая функция.

$$P^n \alpha = \frac{2\beta^{-n}}{1 + \beta^{-2}} \left( \psi_2(\alpha) - \frac{1}{2} (-1)^n \beta^{-2n-1} \psi_3(\alpha) \right) + \frac{1}{2}. \quad (52)$$

Подстановка (51) в (48) после ряда элементарных вычислений позволяет записать точное выражение для автокорреляционной функции орбит хаотического отображения (41):

$$R(n) = \frac{1}{12(1 + \beta^{-2})^4} \cdot (4\beta^{-1}(1 + \beta^{-7}) + (-1)^n (1 + \beta^{-5})\beta^{-2n}) \beta^{-n}. \quad (53)$$

Часто выражение для автокорреляционной функции  $R(n)$  записывают, вводя ляпуновский показатель  $\Lambda$ . Учитывая, что в нашем случае  $\beta^{-1} = e^{-\Lambda}$ , получим эквивалентную форму записи для (53)

$$R(n) = \frac{1}{12(1 + e^{-2\Lambda})^4} (4(1 + e^{-7\Lambda})e^{-\Lambda} + (-1)^n (1 + e^{-5\Lambda})e^{-2\Lambda n}) e^{-\Lambda n}. \quad (54)$$

Характер затухания нормированной автокорреляционной функции  $r(n) = R(n)/R(0)$  отражает рис. 2. Что касается  $\Phi$ -отображения, выражение для его автокорреляционной функции приведено в [5]:

$$\begin{aligned} r(n) &= \left[ 1 - \frac{\beta^{-1}}{2} (1 - (-1)^n \beta^{-\Lambda n}) \right] \beta^{-\Lambda n} = \\ &= \left[ 1 - \frac{1}{2\beta} (1 - (-1)^n e^{-\Lambda n}) \right] e^{-\Lambda n}. \end{aligned}$$

Для сравнения рядом приводится график функции  $\exp(-\Lambda n)$ . Видно, что динамика расщепления корреляций в динамической системе в форме базового отображения, определяется не только показателем Ляпунова (собственным числом  $\beta^{-1} = e^{-\Lambda}$ ), но и вторым собственным числом  $\beta^{-2} = e^{-2\Lambda}$ .

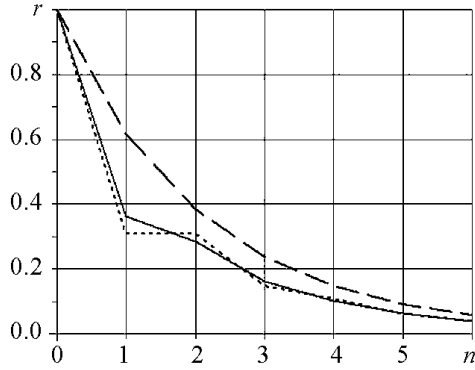


Рис. 2. Автокорреляционная функция орбит  $\Phi$ -отображения (точечная линия) и сопряженного ему отображения с равномерным инвариантным распределением (сплошная линия). Прерывистая линия отражает зависимость  $e^{-\Lambda n}$

### Заключение

В общем контексте нелинейной динамики значимость данной работы состоит в том, что она раскрывает некоторую вычислительную «кухню», связанную с анализом спектральных свойств оператора Перрона – Фробениуса. Знание его собственных чисел и собственных функций позволяет с «открытыми глазами» делать заключения о динамике установления равновесного распределения в динамической системе, прогнозе ее поведения, среднестатистическом характере расщепления корреляций, что в целом способствует полноценному выяснению характеристик хаотических моделей, предлагаемых для аппроксимации различных реальных процессов.

Автор благодарен рецензенту за обсуждение работы.

## Библиографический список

1. Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Аркадакский С.С. О некоторых свойствах оператора Фробениуса-Перрона для сдвигов Бернулли // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 2. С. 67-73.
2. Renyi A. Representation for real numbers and their ergodic properties // Acta. Math. Acad. Sc. Hungar. 1957. Vol. 8. P. 477-493.
3. Рохлин В.А. Точные эндоморфизмы пространства Лебега // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1961. Т. 25. С. 499-530.
4. Гельфонд А.О. Об одном общем свойстве систем счисления // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1959. Т. 23. С. 800-814.
5. Mori H., So B.-Ch., Ose T. Time-correlation functions of one-dimensional transformations // Progress in Theor. Physics. 1981. Vol. 66. No. 4. P. 1266-1283.
6. Аникин В.М., Аркадакский С.С. Кусочно-линейные отображения с неравномерным инвариантным распределением // Радиотехника. 2005. № 4. Специальный выпуск «Ученые России: Александр Федорович Голубенцев». С. 78-85.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
8. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. М.: Просвещение, 1966. 336 с.
9. Бланк Л.М. Устойчивость и локализация в хаотической динамике. М.: МЦНМО, 2001. 352 с.
10. Lasota A., Mackey M.C. Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 360 с.
11. Iosifescu M., Kraaikamp C. Metrical theory of continued fractions. Kluwer Boston Inc., 2002. 346 pp.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. Гл. 21.
13. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
14. Anikin V.M., Goloubentsev A.F. Analysis of biological chaotic rythmes // Proc. SPIE. Complex Dynamics, Fluctuations, Chaos, and Fractals in Biomedical Photonics / Ed. V.V. Tuchin, 2004. Vol. 5330. P. 167-177.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 15.11.2004

## INVARIANT SUBSPACES FOR LINEAR EVOLUTION OPERATORS OF CHAOTIC MAPS

A.F. Goloubentsev, V.M. Anikin

Invariant functional subspaces for the Perron-Frobenius operator of a piece-wise linear chaotic Renyi map is constructed to find its first eigenfunctions.



*Голубенцев Александр Федорович* (1933 – 2003) – доктор физико-математических наук, профессор. Заведовал кафедрой вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ. Автор 7 монографий, 7 учебных пособий и 150 статей по статистической электронике и радиофизике, нелинейной динамике.



*Аникин Валерий Михайлович* – родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил Саратовский университет (1970). После окончания СГУ работал в Научно-исследовательском институте механики и физики СГУ, с 1984 года - на кафедре вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ. Кандидат физико-математических наук, доцент. Область научных интересов - математическое моделирование стохастических и хаотических процессов. Один из авторов монографий «Статистические модели квазирегулярных радиофизических и оптических структур», «Математические модели контактов организма человека с чужеродными агентами», а также учебных пособий по вычислительным методам и программированию. Ученый секретарь докторского диссертационного совета СГУ по специальностям радиофизика, оптика, физика полупроводников и диэлектриков. E-mail: [Anikinvm@info.sgu.ru](mailto:Anikinvm@info.sgu.ru)