Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 3, 2005 УДК 531.36

ЭФФЕКТИВНЫЕ КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГОМОКЛИНИЧЕСКИХ БИФУРКАЦИЙ В ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Г.А. Леонов

Сформулирована путевая бифуркационная задача. Проведено ее обсуждение для классического результата Ф.Трикоми о существовании гомоклинической бифуркации в диссипативной маятниковой системе. Сделан обзор результатов, решающих путевые гомоклинические бифуркационные задачи для системы Лоренца.

К 85-летию
профессора Ю.И. Неймарка

Каковы возможности аналитических методов исследования гомоклинических бифуркаций в диссипативных системах? Здесь в окрестности точки бифуркации мы, как правило, не имеем интегрируемых приближений, и поэтому методы малого параметра и теории возмущений, примененные в малой окрестности бифуркационного параметра, оказываются малопригодными для получения эффективных аналитических результатов.

Для диссипативных систем оказался плодотворным подход, восходящий к пионерской работе Ф.Трикоми [1] и его последователей [2–16].

Вначале сформулируем широко известную теорему Трикоми, затем обсудим путевую бифуркационную задачу и рассмотрим ее в некоторых случаях для системы Лоренца.

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \sin\theta = \gamma, \tag{1}$$

где α и γ – положительные параметры. Уравнение (1) описывает движение маятника в вязкой среде с постоянным внешним силовым моментом, работу синхронной электрической машины и системы фазовой автоподстройки частоты [17–23].

Эквивалентная уравнению (1) система

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= z, \\ \dot{z} &= -\alpha z - \sin\theta - \gamma \end{aligned} \tag{2}$$

при $\gamma < 1$ имеет седловое состояние равновесия $z = 0, \theta = \theta_0 + 2k\pi$, где число θ_0 удовлетворяет условиям

$$\sin\theta_0 = \gamma, \ \cos\theta_0 < 0.$$

Зафиксируем параметр $\gamma \in (0,1)$ и будем варьировать параметр $\alpha \in [0, +\infty)$. При $\alpha = 0$ система (2) интегрируема, и легко видеть, что для сепаратрисы $\theta(t)^+, z(t)^+$ седла $\theta = \theta_0, \ z = 0$, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{t\to+\infty} z(t)^+ = 0, \ \lim_{t\to+\infty} \theta(t)^+ = 0,$$
$$z(t) > 0, \quad \forall\, t \in (T, +\infty)$$

(здесь T – некоторое число), существует некоторое число τ такое, что (рис. 1)

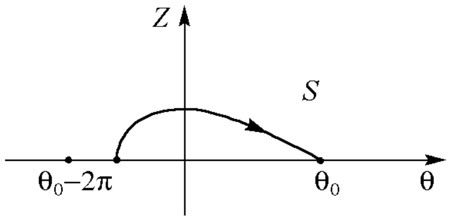


Рис. 1.

$$z(\tau)^+ = 0, \ \theta^+(\tau) \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0),$$
$$z(t)^+ > 0, \ \forall\, t > \tau. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь отрезок прямой

$$z = -K(\theta - \theta_0), \quad \theta \in [\theta_0 - 2\pi, \theta_0].$$

Легко видеть, что на этом отрезке выполнены следующие соотношения:

$$(z - K(\theta - \theta_0))^\bullet = -\alpha z + Kz - \sin\theta + \gamma =$$
$$= (\theta - \theta_0)\left(-K(K - \alpha) + \frac{\gamma - \sin\theta}{\theta - \theta_0}\right).$$

Используя очевидное неравенство

$$\left|\frac{\gamma - \sin\theta}{\theta - \theta_0}\right| \le 1, \quad \forall\, \theta \ne \theta_0$$

и предполагая, что

$$\alpha > 2, \ \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} < K < \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1},$$

получим оценку

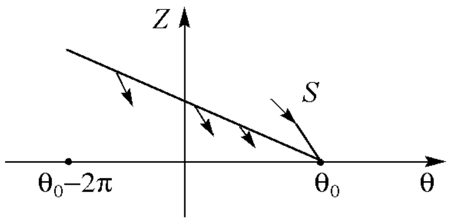


Рис. 2.

$$(z - K(\theta - \theta_0))^\bullet < 0 \tag{4}$$

при $z = -K(\theta - \theta_0), \ \theta \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0)$. Из оценки (4) следует (рис. 2), что сепаратриса $\theta(t)^+, z(t)^+$ в полосе $\{z, \theta \,|\, \theta \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0)\}$ будет располагаться выше отрезка прямой $\{z, \theta \,|\, z = -K(\theta - \theta_0), \, \theta \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0)\}$. Отсюда следует, что при $\alpha > 2$ не существует числа τ, для которого выполнены соотношения (3).

Хорошо известно, что кусок траектории $S : \{z(t)^+, \theta(t)^+ \,|\, t \ge \tau\}$ непрерывно зависит от параметра α. Отсюда и из приведенных выше рассуждений вытекает следующий известный результат.

Теорема 1 (Ф.Трикоми [1]). *Для любого $\gamma > 0$ существует число $\alpha(\gamma) \in (0,2]$ такое, что система (2) с такими параметрами γ и $\alpha(\gamma)$ имеет в цилиндрическом фазовом пространстве $\{z, \theta \mod 2\pi\}$ гомоклиническую траекторию*

$$\lim_{t\to+\infty} z(t) = \lim_{t\to-\infty} z(t) = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \theta_0, \ \lim_{t\to-\infty} \theta(t) = \theta_0 - 2\pi.$$

Проведем теперь некоторое обобщение рассмотренного здесь подхода. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x,d), \ x \in R^n, \ d \in R^m \tag{5}$$

с вектор-функцией $f(x,d)$. Евклидово пространство $\{x\}$ называют фазовым пространством, пространство $\{d\}$ – пространством параметров.

Пусть $\gamma(s), \ s \in [0,1]$ – гладкий путь в пространстве параметров $\{d\}$. Сформулируем теперь обобщение подхода Ф.Трикоми.

Путевая бифуркационная задача. *Дан гладкий путь $\gamma(s)$ в пространстве параметров $\{d\}$. Существуют ли точки бифуркации на этом пути $\{d\}$ для системы (5)?*

В рассматриваемом нами случае точки бифуркации – это точки гомоклинической бифуркации. С точки зрения оценивания точек бифуркации – это выбор как можно более короткого пути. Чем короче путь, тем лучше оценка. Выбор пути часто диктуется рассматриваемой задачей. Приведем пример.

В теории фазовой синхронизации при рассмотрении уравнения (1) часто фиксируют α и варьируют γ (задача нахождения полосы захвата [17,18]). Заметим, что, как было показано ранее, при $\alpha > 2$ на пути $\gamma(s)$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$ не имеется точек гомоклинической бифуркации. Легко видеть, что при малых положительных α такие точки существуют.

Рассмотрим теперь систему Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь σ, b, r – положительные параметры, $r > 1$. Исследованию гомоклинических бифуркаций в системе Лоренца посвящены работы [24–31].

Рассмотрим гладкий путь $\sigma(s)$, $b(s)$, $r(s)$ в пространстве параметров системы (6). Обозначим через $x(t)^+, y(t)^+, z(t)^+$ сепаратрису седла $x = y = z = 0$, удовлетворяющую соотношениям

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty} z(t) = 0, \ x(t) > 0, \quad \forall\, t \le t_0,$$

где t_0 – некоторое число ($t_0 \ll 0$). В [31] доказан следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $2\sigma(s) > b(s)$, $\forall\, s \in [0,1]$ и для любого $s \in [0, s_0)$ существуют числа $T(s) > \tau(s)$ такие, что выполнены следующие соотношения:*

$$x(T)^+ = \dot{x}(\tau)^+ = 0, \tag{7}$$

$$x(t)^{+} > 0, \ \forall\, t < T, \tag{8}$$

$$\dot{x}(t)^{+} \neq 0, \ \forall t < T, \, t \neq \tau. \tag{9}$$

Предположим, что для $s = s_0$ не существует пары $T(s_0) > \tau(s_0)$ такой, что выполнены соотношения (7)–(9). Тогда при $s = s_0$ траектория $x(t)^{+}, y(t)^{+}, z(t)^{+}$ является гомоклинической

$$\lim_{t \to +\infty} x(t)^{+} = \lim_{t \to +\infty} y(t)^{+} = \lim_{t \to +\infty} z(t) = 0.$$

При рассмотрении специального пути $b(s) \equiv b_0, \sigma(s) \equiv \sigma_0$, $r(s): r(1) = 1$, $r(0) \gg 1$ ($r(0)$ – большое число) в [26,27,31] получен следующий результат.

Теорема 3. *Пусть*

$$2b_0 + 1 < 3\sigma_0. \tag{10}$$

Тогда для b_0, σ_0 существует такое s_0, что система (6) с $b = b_0, \sigma = \sigma_0, r = r(s_0)$ имеет гомоклиническую траекторию.

В [30] показано, что условие (10) является и необходимым для существования гомоклинической траектории.

Рассмотрим здесь другой специальный путь $\sigma(s) \equiv \sigma_0$, $r(s) \equiv r_0$, $b(s)$: $b(0) = 0$, $b(1) = 2\sigma_0$, $b(s) \in (0, 2\sigma_0)$, $\ \forall\, s \in (0,1)$.

Для применения теоремы 2 рассмотрим два предельных случая.

1) $|b(s) - 2\sigma_0| \leq \varepsilon$,

где ε – достаточно малое число,

2) $b(0) = 0$.

В первом случае хорошо известно [25,28], что сепаратриса седла $x(t)^{+}$, $y(t)^{+}$, $z(t)^{+}$ стремится при $t = \to +\infty$ к устойчивому состоянию равновесия и $x(t)^{+} > 0$, $\forall\, t \in R^1$.

Во втором случае преобразуем систему (6) к некоторому специальному виду. Для этого сделаем следующую замену:

$$\widetilde{x} = \frac{1}{\nu} x, \ \widetilde{y} = \frac{\sigma}{\rho}(y - x), \ \widetilde{z} = \frac{1}{\kappa}(z - \frac{1}{2\sigma} x^2), \ \widetilde{t} = \frac{1}{\lambda} t,$$

$$\nu = \lambda\rho, \ \ \kappa = \frac{\rho}{\sigma\lambda\nu}, \ \ \rho = \frac{\sqrt{2}}{\lambda^2}, \ \lambda = \frac{1}{\sqrt{\sigma(r-1)}}.$$

После такой замены система (6) с $b = 0$ примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{x}} &= \widetilde{y}, \\ \dot{\widetilde{y}} &= -A\widetilde{y} - \widetilde{x}\widetilde{z} + \widetilde{x} - \widetilde{x}^3, \\ \dot{\widetilde{z}} &= C\widetilde{x}^2, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$A = \frac{\sigma + 1}{\sqrt{\sigma - 1}}, \ \ C = 2\sqrt{\frac{\sigma}{r-1}}.$$

Соотношения (7)–(9) здесь примут вид

$$\widetilde{x}(T)^{+} = \widetilde{y}(\tau)^{+} = 0, \tag{12}$$

$$\widetilde{x}(t)^{+} > 0, \ \ \forall t < T, \tag{13}$$

$$\widetilde{y}(t)^{+} \neq 0, \ \ \forall t < T, \ t \neq \tau. \tag{14}$$

При $\sigma = 10$, $r = 28$ в результате численного интегрирования сепаратрисы $\widetilde{x}(t)^{+}$, $\widetilde{y}(t)^{+}$, $\widetilde{z}(t)^{+}$ получено выполнение соотношений (12)–(14).

Таким образом, существует $s_0 \in (0,1)$ такое, что при $r_0 = 28$, $\sigma_0 = 10$ и $b = b(s_0)$ траектория $x(t)^{+}, y(t)^{+}, z(t)^{+}$ является гомоклинической.

Сформулируем следующую проблему.

Проблема. *Найти необходимые и достаточные условия выполнения условий (12)–(14) для системы (11).*

Отметим, что различные варианты путевой гомоклинической бифуркационной задачи для многомерных обобщений системы (2) решены в [32, Part 4. Existence of Homoclinic. Orbits]

Библиографический список

1. *Tricomi F.* Integrazione di unequazione differenziale presentatasi in electrotechnica // Annali della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa: Scienza Phys. e Mat. 1933. Vol. 2. P.1.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1965.
3. *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.
4. *Баутин Н.Н.* Качественные исследования одного уравнения ФАП // Прикл. математика и механика. 1970. Т.34, № 5. С.850.
5. *Белых В.Н., Некоркин В.И.* Качественные исследования системы трех дифференциальных уравнений теории фазовой синхронизации // Прикл. математика и механика. 1975. Т.39, вып. 4. С. 642.
6. *Белюстина Л.Н.* Об одном уравнении из теории электрических машин // Сборник памяти А.А.Андронова. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С.158.
7. *Белюстина Л.Н.* Исследование нелинейной системы ФАП // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т.2, № 2. С.63.
8. *Белюстина Л.Н.* О полосе захвата и численном исследовании точечных отображений в некоторых задачах синхронизации // Динамика систем. Горький: ГГУ, 1976. № 11. С.18.
9. *Белюстина Л.Н., Быков В.В., Кивелева К.Г., Шалфеев В.Д.* О величине полосы захвата системы ФАПЧ с пропорционально-интегрирующим фильтром // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т.13, № 4. С. 561.
10. *Белюстина Л.Н., Белых В.Н.* Качественное исследование динамической системы на цилиндре // Дифференц. уравнения. 1973. Т.9, № 3. С. 403.
11. *Губарь Н.А.* Исследование кусочно-линейных динамических систем с тремя параметрами // Прикл. математика и механика. 1961. Т.25, № 6. С.1011.

12. *Amerio L.* Studio asimptotika del moto un punto su una chiusa per azione diforze independenti dal tempo // Ann. R. Scuola Norm. sup. Piza, 1950. Vol. 3, № 3. P.17.
13. *Amerio L.* Determinazione della condizioni di stabilita per gli integrali di un'equazione interessante l'electrotecnica // Ann. di Matem. pura ed appl. 1949. Vol. 30, № 4. P.34.
14. *Hayes W.D.* On the equation for a damped pendulum under constant torque // Z. Ang. Math. Phys. 1953. Bd 4, № 5. S.398.
15. *Zeifert G.* On the existence of certain solutions of nonlinear differential equations // Z. Ang. Math. Phys. 1952. Bd 3, № 6. S.468.
16. *Zeifert G.* On stability questions for pendulum-like equations // Z. Ang. Math. Phys. 1956. Bd 7, № 3. S.238.
17. *Шахгильдян В.В., Белюстина Л.Н.* Системы фазовой синхронизации. М.: Радио и связь, 1982.
18. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
19. *Янко-Триницкий А.А.* Новый метод анализа работы синхронных двигателей при резкопеременных нагрузках. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1958.
20. *Гупта С.* Фазовая автоподстройка частоты // Труды Инст-та инж. электротехн. и радиотехн. 1975. Т.63, № 2. С.50.
21. *Stocker J.J.* Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems. New York: Interscience, 1950.
22. *Viterbi A.J.* Principles of coherent communications. New York: McGraw-Hill, 1966.
23. *Lindsey W.C.* Sinchronization systems in communication and control. New York : Prentice-Hall, 1972.
24. *Белых В.Н.* О бифуркации сепаратрис седла системы Лоренца // Дифференциальные уравнения. 1984. Т.20, № 10. С.1666.
25. *Leonov G.A., Reitman V.* Attraktoreingrenzung für nichtlineare systeme. Leipzig: Teubner, 1987.
26. *Леонов Г.А.* Об оценке параметров бифуркации петли сепаратрисы седла системы Лоренца // Дифференц. уравнения. 1988. Т.24, № 6. С.972.
27. *Леонов Г.А.* Об оценке бифуркационных значений параметров системы Лоренца // Успехи мат. наук. 1988. Т.43, № 3. С.189.
28. *Леонов Г.А.* О существовании гомоклинических траекторий в системе Лоренца // Вестн. СПб. ун-та. Математика, механика, астрономия. 1999, № 1. С.13.
29. *Hastings S.P., Troy W.C.* A shooting approach to chaos in the Lorenz equations // J. of Different. Equat. 1996. Vol. 127, № 1. P.41.
30. *Chen X.* Lorenz equations. Pt. 1. Existence and nonexistence of homoclinic orbits // SIAM J. Math. Analysis. 1966. Vol. 27, № 4. P.1057.
31. *Леонов Г.А.* Оценки аттракторов и существование гомоклинических орбит в системе Лоренца // Прикладная математика и механика. 2001. Т.65, вып. 1. С. 21.
32. *Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B.* Frequency-domain methods for nonlinear analysis. Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 1996.

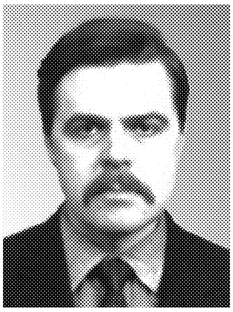
Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 2.06.2005

EFFECTIVE CRITERIA FOR THE EXISTENCE OF HOMOCLINIC BIFURCATIONS IN DISSIPATIVE SYSTEMS

G.A. Leonov

The path bifurcation problem is formulated. The application of it for the classical result of F. Tricomi on the existence of homoclinic bifurcations in a dissipative pendulum system is discussed. The survey of results concerning to the solving of the path homoclinic bifurcation problems for Lorenz system is given.



Леонов Геннадий Алексеевич – родился в Ленинграде (1947), окончил Ленинградский университет (1969). С 1971 года работает в Санкт-Петербургском государственном университете. В 1971 году защитил кандидатскую диссертацию и в 1983 году – докторскую. Область научных интересов: дифференциальные уравнения, теория управления, колебания, хаос. Опубликовал 10 монографий и 200 научных статей. Лауреат Государственной премии СССР (1986), премии технического университета Дрездена (1988). E-mail:leonov@math.spbu.ru