



ФОРМИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СТРУКТУР В РЕШЕТКАХ БИСТАБИЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ДВУМЯ ТИПАМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ

О.И. Канаков, В.Д. Шалфеев

Исследуются и сравниваются закономерности формирования структур в решетках из бистабильных элементов первого порядка с нелинейными связями с двумя различными видами нелинейности базового элемента. Результаты интерпретируются с точки зрения применения таких систем к задаче выделения контуров в изображениях. На рассмотренных примерах показано, что замена нелинейности базового элемента при определенных условиях не влияет существенно на функционирование такой системы обработки изображений.

Введение

Исследование динамики коллективных систем, состоящих из большого количества связанных нелинейных элементов, является одним из перспективных и бурно развивающихся направлений современной нелинейной физики. Коллективная динамика представляет интерес как в применении к исследованию известных в биологии, физике и технике сложных систем (таких как нейронные ансамбли, взаимодействующие популяции, активные среды, энергосети, фазированные антенные решетки), так и с точки зрения создания нового класса искусственных систем, ориентированных на решение задач обработки информации.

В связи с приложениями к обработке изображений за последнее десятилетие большое количество теоретических и экспериментальных исследований были посвящены динамике двумерных сетей из нелинейных элементов [1–5]. В соответствии с предложенной в [1] концепцией изображение, подлежащее обработке, может быть задано или через начальные условия, или в форме внешней силы, или обоими этими способами одновременно; результатом обработки считается структура, устанавливающаяся в системе. Основное преимущество такого способа обработки заключается в

его параллелизме: число пикселей в обрабатываемом изображении определяет сложность системы, но не влияет либо влияет слабо на время обработки.

Одной из известных моделей такого типа является двумерная решетка связанных бистабильных элементов, динамика каждого из которых описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, а связи осуществляются через нелинейную функцию. Уравнения решетки размера $K \times L$ имеют вид

$$\dot{x}_{ij} = -x_{ij} + \sum_{k,l=-m}^m \delta_{kl} \Phi(x_{i+k,j+l}) + \gamma_{ij}, \quad (1)$$

где $i = \overline{1, K}$, $j = \overline{1, L}$; m – максимальная дальность связей; $\Phi(x)$ – нелинейная скалярная функция, $|\Phi(x)| \leq 1$; γ_{ij} – параметры внешнего воздействия; коэффициенты δ_{kl} определяют трансляционно-инвариантную структуру связей. Используются нулевые граничные условия, то есть все величины x_{ij} , где i меньше 1 или больше K , или j меньше 1 или больше L , полагаются равными нулю.

К настоящему времени хорошо изучены свойства систем вида (1) с нелинейностью типа кусочно-линейной функции с насыщением $\Phi(x) = F(x)$, где

$$F(x) = \frac{1}{2}(|x + 1| - |x - 1|). \quad (2)$$

Такие системы известны под названием CNN (cellular neural/nonlinear networks – клеточные нейронные/нелинейные сети). Они активно изучались и в теории (как аналитически, так и с помощью численного моделирования), и в эксперименте на радиоэлектронных схемах, реализующих динамику типа (1) (см. обзор [5]).

Известно [1], что системы CNN с симметричными связями ($\delta_{kl} = \delta_{-k,-l}$ в (1) для $k, l = \overline{-m, m}$) не имеют никаких других аттракторов, кроме устойчивых состояний равновесия. Таким образом, эволюция таких систем из любых начальных условий сходится к неподвижной структуре. Существует метод [6], позволяющий найти все устойчивые состояния равновесия заданной CNN или спроектировать CNN с заданными устойчивыми состояниями равновесия [7].

Представляют интерес, однако, и свойства систем вида (1) с другими типами нелинейности. В частности, вид функции $\Phi(x)$ в (1) должен соответствовать выбранному способу технической реализации системы. Например, базовый элемент может быть реализован как автогенератор с цепью управления по частоте. Если сигнал в цепи управления инвертирован по отношению к тому, который используется в типичной системе частотной автоподстройки, то такой элемент является бистабильным. Переменная состояния в этом случае имеет смысл нормированной частоты колебаний генератора, а нелинейность базового элемента определяется характеристикой частотного дискриминатора. Типичная нелинейность в моделях таких элементов описывается функцией

$$G(x) = \frac{2x}{1 + x^2}. \quad (3)$$

Кроме того, системы вида (1) с различными типами нелинейности представляют теоретический интерес как обширный класс решеточных систем с нелинейными недиффузионными связями.

В общем случае системы вида (1) способны демонстрировать сложную динамику, в том числе хаос [6]. Однако, с точки зрения упомянутого выше применения к обработке изображений, наибольший интерес представляет исследование стационарных структур в таких системах и закономерностей их формирования.

Настоящая работа посвящена сравнению закономерностей формирования структур в решеточных системах вида (1) с двумя типами нелинейности: $\Phi(x) = F(x)$ (2) и $\Phi(x) = G(x)$ (3) в частном случае нулевого внешнего воздействия ($\gamma_{ij} = 0$). При исследовании используются как аналитические расчеты, так и численное моделирование с опорой на аналитические результаты и эвристические соображения. В разделе 1 аналитически исследуются стационарные структуры в системах вида (1) с нелинейностью парциального элемента (3). В разделе 2 представлены результаты численного исследования стационарных структур в зависимости от начальных условий и параметров в решеточных системах с обоими типами нелинейности в случае локальных связей. В заключении обсуждаются полученные результаты и делаются выводы.

1. Стационарные структуры в решетке частотно-управляемых генераторов

В настоящем разделе уточняется используемое в этой статье понятие «стационарной структуры». Далее, достаточный критерий высокой мультистабильности, известный для системы (1) с нелинейностью (2), переносится на систему с нелинейностью (3), которая может рассматриваться как модель решетки частотно-управляемых генераторов.

Заметим, что типы аттракторов в системах (1) с нелинейностью общего вида даже в случае симметричных связей не ограничиваются только устойчивыми состояниями равновесия. В общем случае могут наблюдаться другие типы аттракторов, например, предельные циклы или хаотические аттракторы. Однако даже в таких случаях при определенных условиях можно говорить о стационарных структурах, не уточняя типа аттрактора. В этой статье термином «стационарная структура» будем обозначать такой режим в системе, при котором она совершает движение на аттракторе с неизменными во времени знаками переменных состояния. Таким образом, каждая такая структура характеризуется определенной матрицей знаков $Y = (y_{ij})$ с элементами, равными 1 или (-1) .

С точки зрения задач обработки изображений, представляется важным вопрос, найдется ли для любой заданной матрицы знаков $Y = (y_{ij})$ соответствующая стационарная структура в системе. Если это условие выполнено, будем говорить, что система обладает высокой мультистабильностью. В этом случае решеточная система размером $K \times L$ имеет, по крайней мере, $2^{K \times L}$ аттракторов.

Известно [1], что система (1) с нелинейностью (2) и нулевым внешним воздействием $\gamma_{ij} = 0$ при условии

$$\delta_{00} - D > 1, \quad D = \sum_{k,l \neq 0} |\delta_{kl}| \quad (4)$$

имеет в фазовом пространстве $2^{K \times L}$ устойчивых состояний равновесия, соответ-

ствующих всевозможным матрицам знаков Y , и обладает, таким образом, высокой мультистабильностью.

Рассмотрим систему (1) с нелинейностью (3) и нулевым внешним воздействием. Как было упомянуто во введении, эта модель описывает динамику частот в решетке связанных автогенераторов с частотным управлением. Уравнения движения такой системы имеют вид

$$\dot{x}_{ij} = -x_{ij} + \sum_{k,l} \delta_{kl} G(x_{i+k,j+l}), \quad (5)$$

где $i = \overline{1, K}, j = \overline{1, L}$.

Положим, что условие (4) выполнено для системы (5). Покажем, что система в этом случае обладает высокой мультистабильностью.

Уравнение (5) можно записать в виде

$$\dot{x}_{ij} = f(x_{ij}) + \sum_{k,l \neq 0} \delta_{kl} G(x_{i+k,j+l}), \quad (6)$$

где

$$f(x) = \delta_{00} G(x) - x. \quad (7)$$

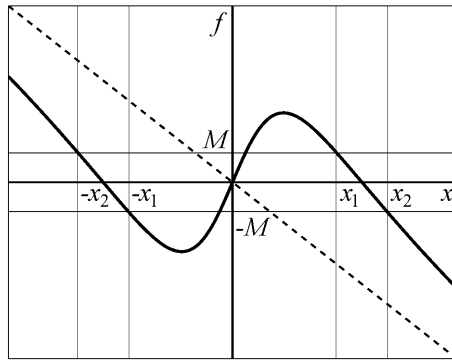


Рис. 1. График функции $f(x)$ (7) при $\delta_{00} > 0.5$

Функция $f(x)$ является нечетной, имеет асимптоту $y = -x$, и в случае $\delta_{00} > 0.5$ (в то время как условие (4) гарантирует, что $\delta_{00} > 1$) имеет два симметричных экстремума. Точки экстремума по модулю меньше 1. График функции $f(x)$ в рассматриваемом случае приведен на рис. 1.

Введем обозначения x_1 и M следующим образом:

$$x_1 = \sqrt{2(\delta_{00} - D) - 1}, \quad (8a)$$

$$M = f(x_1) = \frac{D\sqrt{2(\delta_{00} - D) - 1}}{\delta_{00} - D}. \quad (8b)$$

Заметим, что условие (4) гарантирует $x_1 > 1$, $M > 0$. Таким образом, точка x_1 расположена на падающей ветви $f(x)$, и уравнение

$$f(x) = -M \quad (9)$$

имеет три корня, причем только один из них – положительный. Обозначим этот положительный корень через x_2 . Заметим также, что $x_2 > x_1$. Все три величины x_1 , x_2 , M отмечены на рис. 1.

Рассмотрим 2^N (где $N = K \times L$) N -мерных гиперкубов (N -кубов) E_Y в фазовом пространстве системы

$$E_Y = \{x_{ij} \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq y_{ij} x_{ij} \leq x_2, \quad i = \overline{1, K}, j = \overline{1, L}\}, \quad (10)$$

где y_{ij} есть элементы матрицы знаков \mathbf{Y} . Покажем, что каждый из этих N -кубов содержит, по крайней мере, один аттрактор.

Рассмотрим точку в фазовом пространстве системы, лежащую на одной из граней какого-либо из N -кубов $E_{\mathbf{Y}}$. Это означает, что одна из фазовых координат данной точки (обозначим эту координату x_{ij}) равна по абсолютной величине x_1 или x_2 , а значения остальных удовлетворяют неравенству

$$x_1 < |x_{mn}| < x_2, \quad m \neq i, n \neq j. \quad (11)$$

Оценим производную по времени от переменной x_{ij} в этой точке в соответствии с уравнением (6).

Функция $G(x)$ нечетна и имеет два экстремума: минимум и максимум в точках $x = -1$ и $x = 1$, соответственно. На интервале аргумента $(1, +\infty)$ эта функция, монотонно убывая, стремится к нулю. Тогда из левой половины двойного неравенства (11) с учетом того, что $x_1 > 1$ и нечетности функции $G(x)$, вытекает оценка

$$|G(x_{mn})| < G(x_1), \quad m \neq i, n \neq j. \quad (12)$$

Заметим, что то же неравенство справедливо для формальных членов суммы в (6) с индексами m и/или n , выходящими за пределы решетки. Согласно граничным условиям соответствующие величины x_{mn} полагаются равными нулю, а значит, для них имеем $G(x_{mn}) = 0$.

Теперь сумма в правой части уравнения (6) может быть оценена следующим образом:

$$\left| \sum_{k,l \neq 0} \delta_{kl} G(x_{i+k,j+l}) \right| < DG(x_1) = M, \quad (13)$$

где M задано выражением (8а). В справедливости равенства в (13) можно убедиться подстановкой выражения для x_1 (8а) в функцию $G(x)$, заданную выражением (3).

В соответствии с (8б), а также с учетом определения x_2 как корня уравнения (9) имеем

$$f(\pm x_1) = \pm M, \quad f(\pm x_2) = \mp M. \quad (14)$$

Окончательно из уравнения (6) с учетом выражений (13), (14) получаем тогда следующие оценки:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ij}|_{x_{ij}=x_1} &> 0, & \dot{x}_{ij}|_{x_{ij}=x_2} &< 0, \\ \dot{x}_{ij}|_{x_{ij}=-x_1} &< 0, & \dot{x}_{ij}|_{x_{ij}=-x_2} &> 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, на каждой из граней, ортогональных к координатной оси x_{ij} , векторное поле системы направлено внутрь соответствующего куба. Поскольку приведенное рассуждение справедливо для любой пары индексов ij , векторное поле на всех гранях каждого из 2^N N -кубов $E_{\mathbf{Y}}$ направлено внутрь. Следовательно, каждый из этих N -кубов содержит, по крайней мере, один аттрактор.

Итак, система (5) при условии (4) в самом деле имеет хотя бы один аттрактор для каждой из $2^{K \times L}$ всевозможных матриц знаков, то есть обладает высокой мультистабильностью.

2. Трансформация изображений в двух решеточных системах: численные результаты

Как было упомянуто во введении, одно из основных предполагаемых приложений решеток бистабильных элементов – обработка изображений. Такая система, как правило, рассматривается как преобразователь, входом которого является профиль начальных условий на двумерной решетке, а выходом – стационарная структура, сформировавшаяся в решетке. В данном разделе численно исследуются системы вида (1) с локальными отрицательными связями и нулевым внешним воздействием с двумя типами нелинейности: (2) и (3). Далее будем обозначать эти системы буквами F и G , соответственно. Основной задачей является выяснение характера трансформации обеими системами полутоновых изображений в зависимости от параметров и сравнение свойств двух систем.

Уравнения движения исследуемых систем имеют вид

$$\dot{x}_{ij} = -x_{ij} + \delta_0 \Phi(x_{ij}) - \delta [\Phi(x_{i+1,j}) + \Phi(x_{i-1,j}) + \Phi(x_{i,j+1}) + \Phi(x_{i,j-1})], \quad (16)$$

где $i = \overline{1, K}$, $j = \overline{1, L}$; $\Phi(x) = F(x)$ (2) для системы F , $\Phi(x) = G(x)$ (3) для системы G . На параметры накладываются ограничения $\delta_0 > 1$, чтобы обеспечить бистабильность парциального элемента, а также $\delta > 0$, что соответствует отрицательной связи. Граничные условия полагаются нулевыми.

Условие (4) в применении к (16) имеет вид

$$\delta_0 - 4\delta > 1. \quad (17)$$

В соответствии с предыдущим разделом, для обеих систем F и G это условие является достаточным условием высокой мультистабильности.

Согласно [6], в системе F при условии (17) любые начальные условия вида $\text{sign}\{x_{ij}(0)\} = y_{ij}$, $|x_{ij}(0)| > 1$ трансформируются в устойчивое состояние равновесия с координатами

$$c_{ij}^Y = \delta_0 y_{ij} - \delta [y_{i+1,j} + y_{i-1,j} + y_{i,j+1} + y_{i,j-1}], \quad (18)$$

имеющее ту же матрицу знаков, что и начальные условия. С точки зрения обработки изображений, такое преобразование может быть охарактеризовано как устранение полутонов и выделение контуров темных и светлых областей во входном изображении [8]. Для этого изображение, подлежащее обработке, представляется в форме профиля начальных условий так, чтобы темные и светлые области в изображении имели в профиле начальных условий противоположные знаки. Тогда в установившейся структуре элементы, лежащие на границе областей разных знаков, будут характеризоваться значениями переменной состояния, превышающими по модулю величину $\delta_0 - 4\delta$. Для получения контура тогда достаточно провести пороговую обработку полученной структуры по модулю со значением порога между $\delta_0 - 4\delta$ и $\delta_0 - 2\delta$.

К полутоновым изображениям общего вида, однако, этот результат напрямую не применим. Преобразование таких изображений в системах F и G является предметом численного исследования в данном разделе.

Все примеры, приведенные далее, были получены с использованием черно-белого полутонового фотографического изображения (рис. 2) в качестве тестового

входного изображения. Размер решетки был выбран в соответствии с пиксельным размером изображения: $K = L = 125$. Уровень яркости каждого пиксела кодировался действительным числом от 0 до 1; значение 0 соответствовало уровню черного, 1 – уровню белого. Начальные условия системы задавались следующим образом:

$$x_{ij}(0) = A(2b_{ij} - 1), \quad (19)$$

где b_{ij} – уровень яркости ij -го пиксела; параметр A определяет «амплитуду» начальных условий, так что уровни черного и белого во входном изображении соответствуют значениям $(-A)$ и A в начальных условиях, соответственно.

Численное интегрирование уравнений движения осуществлялось методом Рунге – Кутты четвертого порядка.

Было установлено (см. также [9]), что трансформация полутоновых входных изображений в обеих системах в общем случае может иметь более сложный характер, чем тот, который был описан выше для начальных условий специального вида. Типичной является ситуация, когда матрицы знаков установившейся структуры и начальных условий различаются присутствием в последней участков, заполненных мелкомасштабной структурой в виде шахматной доски или полос, которую далее будем называть «шахматным паттерном».

Шахматный паттерн преимущественно формируется в окрестности линии смены знака профиля начальных условий, а также в окрестности линий излома этого профиля (это нестрогое понятие здесь обозначает линии, где сам профиль начальных условий либо его дискретный градиент – разность значений между соседними элементами – испытывает относительно большой скачок). При фиксированных параметрах системы образование шахматного паттерна происходит тем интенсивнее, чем меньший дискретный градиент имеет профиль начальных условий в районе линии смены знака либо чем ближе к нулю этот профиль в районе линии излома, а также чем ближе направление линии смены знака или линии излома к направлению вдоль диагонали решетки.

Если интенсивность шахматного паттерна достаточно мала, то есть матрицы знаков установившейся структуры и начальных условий достаточно близки (о количественной мере этой близости и ее зависимости от параметров системы и начальных условий см. ниже), то обе исследуемые решеточные системы могут использоваться для осуществления операции выделения контуров в полутоновых изображениях тем же способом, как это было описано выше.

При этом в системе G , благодаря наличию у нелинейности парциального элемента спадающих ветвей, оказывается возможным варьировать толщину получаемых контурных линий путем изменения величины порога. Пример выполнения этой операции в системе G приведен на рис. 3. Как видно из рисунков, понижение порога приводит к заметному утолщению контурных линий.

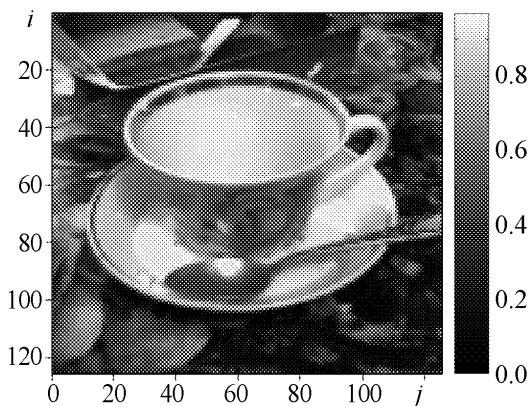


Рис. 2. Тестовое входное изображение

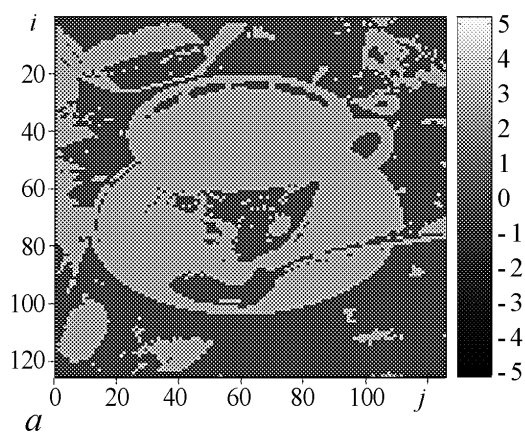
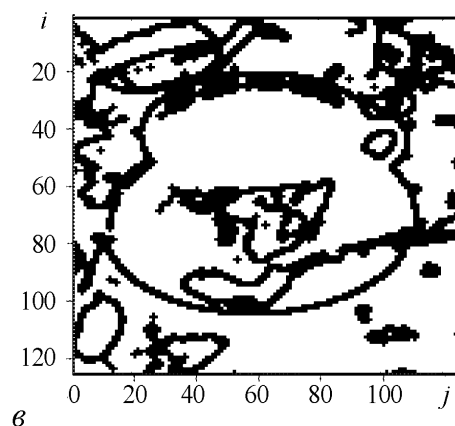
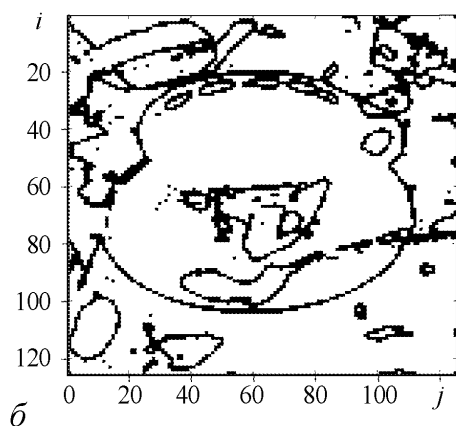


Рис. 3. Выделение контуров в системе G при $\delta_0 = 6$, $\delta = 1$, $A = 7$: a – установившаяся структура; \bar{b}, \bar{e} – отмечены элементы с абсолютным значением переменной состояния, превышающим порог $2.5(\bar{b})$ и $1.9(\bar{e})$



Дальнейшее детальное исследование эффекта формирования шахматного паттерна выполнялось с начальными условиями, меньшими 1 по абсолютной величине для всех элементов:

$$|x_{ij}(0)| < 1, \quad i = \overline{1, K}, \quad j = \overline{1, L}, \quad (20)$$

поскольку именно для таких начальных условий удастся выявить универсальные закономерности формирования структур. Значения параметра A в (19), таким образом, выбирались в интервале $(0,1)$.

Как показали эксперименты, матрица знаков стационарного состояния, устанавливающегося в системе F при фиксированных начальных условиях (20), как правило, не меняется при одновременном изменении параметров δ_0 и δ , если отношение $\delta/(\delta_0 - 1)$ при этом остается постоянным. Для системы G аналогичную роль играет отношение $\delta/(2\delta_0 - 1)$. В этой системе, когда указанное отношение фиксировано, зависимость результирующей матрицы знаков от δ_0 и δ присутствует, однако в некоторой области параметров является слабой (см. ниже).

Следующее рассуждение, хотя и не является математически строгим, позволяет понять природу этой закономерности.

Заметим, что внутри области фазового пространства $|x_{ij}| < 1$ уравнения системы F линейны и могут быть записаны в виде

$$\dot{x}_{ij} = (\delta_0 - 1)x_{ij} - \delta[x_{i+1,j} + x_{i-1,j} + x_{i,j+1} + x_{i,j-1}]. \quad (21)$$

Отношение $\delta/(\delta_0 - 1)$ определяет форму траекторий этой системы, поскольку для фиксированного значения отношения изменение параметров δ_0 и δ эквивалентно замене времени. Если начальные условия удовлетворяют неравенству (20), то основную роль в формировании результирующей матрицы знаков играет динамика системы именно в рассматриваемой области фазового пространства. Поэтому указанное отношение в самом деле может играть роль управляющего параметра при формировании структур в системе F .

В то же время уравнения системы G не являются линейными ни в одной области фазового пространства. Однако отношение $\delta/(2\delta_0 - 1)$ определяет форму траекторий системы в окрестности начала координат, где располагается неустойчивое состояние равновесия. В самом деле, линеаризация уравнений системы G в окрестности нуля дает

$$\dot{x}_{ij} = (2\delta_0 - 1)x_{ij} - 2\delta[x_{i+1,j} + x_{i-1,j} + x_{i,j+1} + x_{i,j-1}]. \quad (22)$$

Траектории этой линеаризованной системы определяются указанным отношением.

Для удобства дальнейшего количественного исследования эффекта формирования шахматного паттерна введем обозначение

$$\kappa_F = \frac{4\delta}{\delta_0 - 1} \quad (23)$$

для работы с системой F и обозначение

$$\kappa_G = \frac{8\delta}{2\delta_0 - 1} \quad (24)$$

для работы с системой G . В дальнейшем будем рассматривать пары (δ_0, κ_F) и (δ_0, κ_G) как управляющие параметры соответствующих систем вместо исходных параметров δ_0 и δ . Заметим, что для обеих систем при фиксированном значении δ_0 параметр δ , определяющий силу связей, пропорционален $\kappa_{F,G}$.

В соответствии с приведенными выше наблюдениями, зависимость результирующей матрицы знаков в обеих системах от δ_0 при фиксированном $\kappa_{F,G}$ ожидается слабой, а от $\kappa_{F,G}$ при фиксированном δ_0 – наоборот, сильной.

В экспериментах будем придерживаться области значений параметров

$$\delta_0 > 1, \quad (25a)$$

$$0 < \kappa_{F,G} < 1. \quad (25б)$$

Для системы F эта область есть совместное решение неравенства $\delta > 0$ и условия высокой мультистабильности (4), выраженное через параметры δ_0 и κ_F . Несмотря на то, что для системы G условие (4) выполняется лишь в части области (25а,б), будем придерживаться указанной области параметров из соображений единообразия.

Для количественного измерения интенсивности шахматного паттерна введем расстояние между двумя матрицами знаков (расстояние Хемминга) как количество позиций, в которых элементы двух матриц имеют противоположные знаки, нормированное на общее число элементов решетки. Расстояние между матрицами знаков начальных условий и установившегося состояния будем называть ошибкой воспроизведения и обозначать символом e . Случай $e = 0$ соответствует точному воспроизведению матрицы знаков. Противоположная ситуация, когда исходное изображение полностью разрушено, характеризуется значением $e \approx 0.5$.

Приведем сначала экспериментальные результаты, демонстрирующие слабую зависимость ошибки воспроизведения в обеих системах от δ_0 при фиксированном значении κ_F (κ_G). На рис. 4 представлены графики зависимости ошибки воспроизведения в системах F и G . Амплитуда начальных условий A была задана равной 0.5 для системы F и 0.25 для системы G (данный выбор мотивирован ниже).

Графики для системы F не демонстрируют зависимости e от δ_0 за исключением скачкообразного изменения около первой расчетной точки $\delta_0 = 1$ (оно объясняется тем, что при $\delta_0 = 1$ вся область фазового пространства $|x_{ij}| < 1$ состоит из состояний равновесия). В системе G зависимость e от δ_0 имеет место (на рис. 4 она хорошо заметна при $\kappa_G = 0.7$); с увеличением δ_0 , однако, эта зависимость быстро ослабевает.

Далее, изучим зависимость матрицы знаков результирующей структуры от амплитуды начальных условий A . На рис. 5 представлены графики зависимости ошибки воспроизведения в системе F (сплошная кривая) и в системе G (штриховая кривая) от A . Для обеих систем эта зависимость – убывающая. Это согласуется с приведенным выше качественным наблюдением, что шахматный паттерн образуется тем более интенсивно, чем меньше абсолютная величина начальных условий в районе линий излома и чем меньше крутизна наклона профиля начальных условий в окрестности линии смены знака.

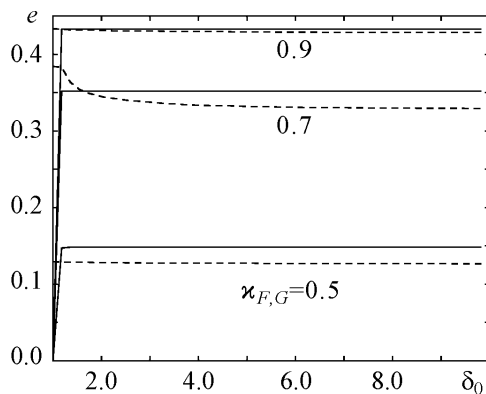


Рис. 4. Зависимость ошибки воспроизведения от δ_0 для различных фиксированных значений $\kappa_{F,G}$ в системах F и G (сплошная и штриховая кривые, соответственно)

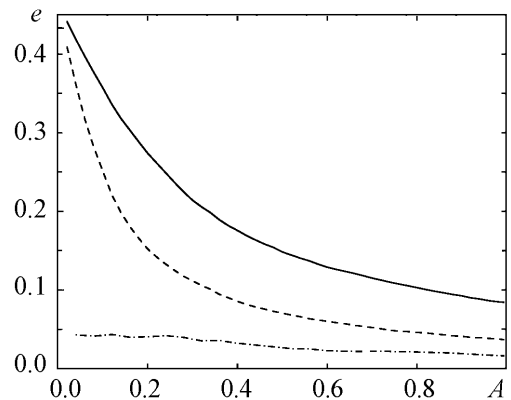


Рис. 5. Зависимость ошибки воспроизведения от A при $\delta_0 = 1.5$, $\kappa_F = \kappa_G = 0.5$ в двух системах, а также зависимость расстояния между результирующими матрицами знаков от A в системах F и G с амплитудами начальных условий A и $A/2$, соответственно

Заметим, что график для системы G выглядит похожим на график для системы F , сжатый вдоль оси абсцисс в два раза. Это позволяет высказать предположение, что результирующие матрицы знаков в обеих системах могут быть близки, если начальные условия в системе G уменьшены вдвое по сравнению с начальными условиями системы F , в то время как параметры $\kappa_{F,G}$ в этих системах равны.

Чтобы проверить это утверждение, вычислим зависимость расстояния между результирующими матрицами знаков от параметра A в системах F и G с амплитудами начальных условий A и $A/2$, соответственно, на основании тех же результатов численного расчета, по которым были построены два описанных выше графика. График этой зависимости построен на рис. 5 штрихпунктирной линией. Как видно из графика, найденное расстояние в самом деле достаточно мало (не превышает пяти процентов) во всем исследуемом диапазоне значений A , что согласуется с высказанным предположением, хотя это наблюдение и не является строгим результатом.

Наконец, исследуем зависимость ошибки воспроизведения в обеих системах от $\kappa_{F,G}$ при фиксированных значениях δ_0 и A . Чтобы проиллюстрировать эффект масштабирования начальных условий, обсуждавшийся в двух предыдущих абзацах, положим $A = 0.5$ для системы F и $A = 0.25$ для системы G . Графики для системы F с параметром δ_0 , принимающим значения 1.2, 1.5, 6.0 и 10.0, сливаются в один, изображенный на рис. 6 сплошной линией. Графики для системы G при параметре δ_0 равном 1.2 и 1.5 изображены пунктирной и штриховой линиями, соответственно. Графики же при δ_0 равном 6.0 и 10.0 сливаются в один, изображенный штрихпунктирной линией. В соответствии с представленными графиками, зависимость ошибки воспроизведения от $\kappa_{F,G}$ во всем исследуемом диапазоне является монотонно возрастающей. Зависимости e от δ_0 в системе F не наблюдается вообще, в то время как в системе G эта зависимость заметна при больших значениях κ_G и достаточно малых значениях δ_0 , где система не обладает высокой мультистабильностью. При меньших значениях κ_G или больших значениях δ_0 эта зависимость ослабевает. Заметим еще, что графики для систем F и G с амплитудой начальных условий A , вдвое большей для системы F по сравнению с системой G , достаточно близки друг к другу, что согласуется с наблюдением о масштабировании начальных условий, обсуждавшимся выше.

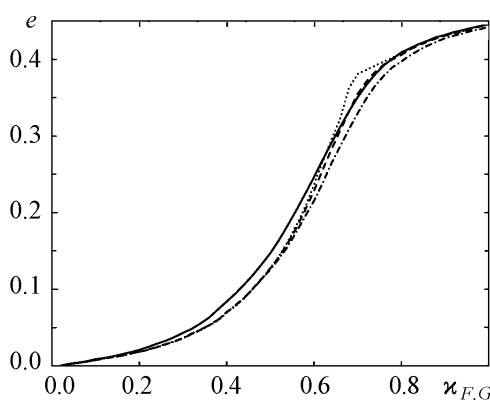


Рис. 6. Зависимость ошибки воспроизведения от $\kappa_{F,G}$ в двух системах для различных фиксированных значений δ_0 : 1.2, 1.5, 6.0 и 10.0

Заключение

В настоящей работе изучалась динамика решеточных систем из связанных би-стабильных элементов первого порядка с двумя различными типами нелинейности базового элемента. Особое внимание в этом исследовании уделялось трансформации

начальных условий, рассматриваемых как представление некоторого изображения, в стационарную структуру, устанавливающуюся в системе.

Была аналитически исследована система с нелинейностью парциального элемента (3) и нулевым внешним воздействием, являющаяся простейшей моделью решетки связанных автогенераторов с управлением по частоте. Достаточное условие высокой мультистабильности, известное для решеток с нелинейностью (2) – CNN, было перенесено на эту систему.

Две решеточные системы с локальными отрицательными связями и нелинейностями (2) и (3) были исследованы численно. Был описан эффект формирования шахматного паттерна в обеих системах, а также была изучена зависимость этого эффекта от начальных условий и параметров системы. При этом были отмечены сходства и различия в свойствах двух исследуемых систем.

Таким образом, было показано, что изменение нелинейности парциальных элементов при определенных условиях не приводит к нарушению функционирования системы, применяемой для обработки изображений. Более того, был приведен пример, в котором такое изменение позволило реализовать в системе новые возможности (управление толщиной контурных линий).

Данная работа была выполнена при поддержке РФФИ, грант №03-02-17543.

Библиографический список

1. *Chua L.O., Yang L.* Cellular neural networks: Theory //IEEE Trans. Circuits. Syst. 1988. Vol. 35. P. 1257.
2. *Chua L.O., Yang L.* Cellular neural networks: Applications //IEEE Trans. Circuits. Syst. 1988. Vol. 35. P. 1273.
3. *Nekorkin V.I., Makarov V.A., Kazantsev V.B., Velarde M.G.* Spatial disorder and pattern formation in lattices of coupled bistable elements //Physica D. 1997. Vol. 100. P. 330.
4. *Яхно В.Г.* Процессы самоорганизации в распределенных нейроподобных системах. Примеры возможных применений //Нейроинформатика 2001. Лекции по нейроинформатике. М.: МИФИ, 2001. С. 103.
5. *Chua L., Roska T.* Cellular neural networks and visual computing – Foundations and application. Cambridge University Press, 2002.
6. *Zou F., Nossek A.* Bifurcation and Chaos in Cellular Neural Networks //IEEE Trans. Circuits. Syst. 1993. Vol. 40, № 3. P. 166.
7. *Zou F., Schwarz S., Nossek J.A.* Cellular neural networks design using a learning algorithm //Proc. Int. Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications CNNA-90. Budapest, 1990. P. 73.
8. *Канаков О.И., Шалфеев В.Д.* Применение решетки бистабильных элементов с неидентичными характеристиками к задачам обработки изображений //Труды VI научной конференции по радиофизике, посвященной 100-летию со дня рождения М.Т. Греховой 7 мая 2002 /Ред. А.В.Якимов. Н.Новгород, 2002. С. 116.
9. *Kanakov O.I., Shalfeev V.D.* Influence of the type of nonlinearity of the basic ele-

ment on pattern formation in a homogeneous CNN //Proc. Symp. Topical Problems of Nonlinear Wave Physics (NWP-2003). Nizhny Novgorod: Institute of Applied Physics RAS, 2003. P. 40.

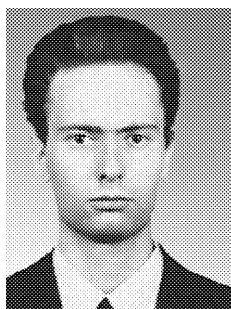
*Нижегородский
государственный университет*

Поступила в редакцию 17.08.2005

FORMATION OF STATIONARY PATTERNS IN LATTICES OF BISTABLE ELEMENTS WITH TWO TYPES OF NONLINEARITY

O.I. Kanakov, V.D. Shalfeev

Laws of pattern formation in lattices of nonlinear-coupled first-order bistable elements with two types of the element nonlinearity are studied and compared. The results are interpreted in terms of the application to edges detection in images. It is shown by the examples considered, that the replacement of the element nonlinearity does not influence significantly the image processing system functionality under certain conditions.



Канakov Олег Игоревич – родился в 1981 году в Нижнем Новгороде, окончил Нижегородский государственный университет в 2004 году по специализации "Нелинейные колебания и волны". Продолжает обучение в аспирантуре ННГУ. Является соавтором 16 печатных работ, в том числе 2 статей в международных журналах.



Шалфеев Владимир Дмитриевич – родился в 1941 году, окончил Горьковский университет в 1963 году. Заведующий кафедрой теории колебаний Нижегородского государственного университета и отделом нелинейной динамики Института прикладной физики РАН, доктор физико-математических наук, профессор, действительный член Академии инженерных наук РФ. Область научных интересов: динамика нелинейных систем, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структуры. Соавтор монографий «Системы фазовой синхронизации», «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации». E-mail: shalfeev@rf.unn.ru