



## БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В ДИСКРЕТНОЙ АНГАРМОНИЧЕСКОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

*А.В. Шабунин, А.А. Акопов, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова*

Рассматривается динамика режимов бегущих волн в кольце осцилляторов Ван дер Поля с диффузионной связью. Строятся области существования и устойчивости в пространстве управляющих параметров. Исследуется типичность появления режимов с разными длинами волн и закономерности их исчезновения. Исследуется влияние ангармоничности на явление мультистабильности пространственно-периодических режимов. Рассматривается переключение между мультистабильными состояниями под действием внешнего шума.

### Введение

Регулярные, хаотические и стохастические процессы в распределенных автоколебательных системах в последние десятилетия являются предметом пристального внимания специалистов в различных областях математики, физики, химии, биологии и других наук. При моделировании пространственно-временной динамики таких сред обычно используют либо модели, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных, либо ансамбли связанных осцилляторов, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями [1, 2].

Одним из характерных режимов в активных одномерных средах является режим автоволн, бегущих вдоль пространственной координаты среды с постоянной фазовой скоростью. Подобные режимы могут возникать в цепочках локально связанных осцилляторов с периодическими граничными условиями. При этом колебания в соседних осцилляторах имеют равные амплитуды и различающиеся на постоянную величину фазы колебаний. В цепочках конечной длины число возможных режимов бегущих волн конечно. Аттракторы, соответствующие режимам с разными длинами волн, могут сосуществовать в фазовом пространстве при одних и тех же значениях параметров, демонстрируя тем самым явление мультистабильности.

Синхронизация колебаний в ансамблях осцилляторов с регулярным поведением – одна из традиционных областей исследований для нелинейной динамики. Первые работы в этом направлении известны с середины прошлого века [3]. Рассматривалась, как правило, задача частотной синхронизации в цепочке осцилляторов с гармоническим поведением [4–7]. В работе [6] было обращено внимание на

то, что в подобных системах возможны режимы с разными фазовыми сдвигами между осцилляторами, то есть сосуществуют разные пространственные моды. Условия существования и устойчивости разных пространственных мод в ансамблях осцилляторов, колебания в которых возникают через бифуркацию Андронова – Хопфа, были получены для разных типов связей в работах Эрментроута [8–10]. Детальное описание динамики пространственно-однородных и неоднородных волн, возникновение пространственно разупорядоченных колебательных режимов и особенности переходов между режимами с разными длинами волн для ансамбля автогенераторов с жестким возбуждением можно найти в работе [11].

Большинство указанных работ используют в качестве модели либо фазовые уравнения, либо укороченные уравнения для амплитуд и фаз, решениями которых являются гармонические колебания. В то же время, представляется интересным вопрос, как ведут себя ансамбли «реальных» регулярных осцилляторов, в которых присутствуют такие явления, как ангармоничность и неизохронность. Одной из попыток ответить на данный вопрос можно считать работу Даидо [12], в которой он моделирует ангармоничность введением дополнительного слагаемого в уравнение для фазового осциллятора. При этом, при большой ангармоничности в кольце осцилляторов наблюдается появление пространственной разупорядоченности (так называемые странные волны). Моделирование ангармоничности в работе Даидо носит достаточно искусственный характер. Кроме того, обнаруженные эффекты наблюдаются в его модели при очень больших значениях ангармоничности, не наблюдаемых в более реалистичных моделях. Будут ли подобные режимы возникать в реальных ангармонических осцилляторах? Какие еще особенности поведения там возможны? Мы рассматриваем различные пространственные моды в кольце диффузионно связанных генераторов Ван дер Поля, принципиально не ограничиваясь случаем малой нелинейности, то есть квазигармоническими колебаниями. Кроме того, мы исследуем типичность появления разных волновых мод при случайных и пространственно-периодических начальных условиях.

Исследования последних лет показали, что в распределенных нелинейных системах и средах шум может играть конструктивную роль, индуцируя новые режимы, приводя к образованию различных пространственно упорядоченных структур и переводя, таким образом, систему в более организованное состояние [14, 15]. Воздействие шума также позволяет осуществлять управляемые переходы между сосуществующими колебательными режимами в системах с мультистабильностью [16, 17]. Каким образом внешний шум влияет на волновые режимы в ансамбле осцилляторов? Можно ли использовать флуктуации для переходов между сосуществующими бегущими волнами? Данные вопросы также оказались в центре внимания настоящей работы.

## 1. Исследуемая система и рассматриваемые колебательные режимы

Рассмотрим цепочку осцилляторов Ван дер Поля с симметричной диссипативной связью, замкнутую в кольцо,

$$\ddot{x}_i - (\varepsilon - x_i^2)\dot{x}_i + x_i - \gamma(\dot{x}_{i+1} - 2\dot{x}_i + \dot{x}_{i-1}) = 0, \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N; \quad x_1 = x_{N+1}, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_{N+1}.$$

Здесь параметр  $\varepsilon$  определяет динамику одиночного осциллятора,  $\gamma$  – коэффициент связи. Исследования проводились для цепочки из 30 осцилляторов ( $N = 30$ ).

Осциллятор Ван дер Поля представляет собой классическую автоколебательную систему и его динамика хорошо известна. При отрицательных значениях параметра  $\varepsilon$  в фазовом пространстве  $(x, \dot{x})$  существует единственный аттрактор – устойчивое состояние равновесия в начале координат. Увеличение  $\varepsilon$  приводит к бифуркации Андронова – Хопфа (при  $\varepsilon = 0$ ), в результате которой состояние равновесия теряет устойчивость и в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл. При значении параметра  $\varepsilon$ , близком к бифуркационному ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ), предельный цикл соответствует квазигармоническим колебаниям с малой амплитудой. При дальнейшем увеличении  $\varepsilon$  амплитуда колебаний увеличивается, а их форма искажается, что соответствует появлению в спектре гармонических составляющих на кратных частотах. При больших  $\varepsilon$  колебания становятся релаксационными.

В цепочке осцилляторов (1) при нулевой связи будут наблюдаться периодические колебания с равными амплитудами и произвольными начальными фазами. При этом, вследствие периодических граничных условий полный набег разностей фаз между колебаниями осцилляторов вдоль кольца должен быть кратен  $2\pi$

$$\sum_{i=1}^N (\varphi_{i+1} - \varphi_i) = 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Если ограничиться рассмотрением режимов, для которых разности фаз между колебаниями соседних осцилляторов являются постоянными, то есть  $\varphi_{i+1} - \varphi_i = \Delta\varphi$  для всех  $i$  (бегущие вдоль кольца с постоянной фазовой скоростью волны), то в цепочке из  $N$  осцилляторов возможно конечное число подобных режимов. Действительно, поскольку  $\Delta\varphi \in [-\pi, \pi]$ , то рассматривая волны, распространяющиеся в прямом направлении ( $\Delta\varphi \geq 0$ ), и учитывая, что длина волны  $\Lambda_k = 2\pi/\Delta\varphi_k = N/k$  есть (вследствие дискретности пространственной координаты  $i$ ) целое число, получим, что  $k$  может представлять собой всевозможные целые делители числа  $N$  от 0 до  $N/2$ . Для рассматриваемой цепочки из 30 осцилляторов  $k$  принимает следующие значения: 0, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15. Значение  $k = 0$  соответствует пространственно-однородному режиму, а прочие значения  $k$  – режимам бегущих волн с длинами волны  $\Lambda_k = 30, 15, 10, 6, 5, 3, 2$ . Число  $k$  может выступать индексом бегущей волны. При максимальном значении  $k = 15$  имеют место противофазные колебания соседних осцилляторов ( $\Delta\varphi = \pi$ ). Аналогичные режимы бегущих волн существуют и для отрицательных значений  $k$ . Это волны, распространяющиеся в противоположном направлении ( $\Delta\varphi < 0$ ). Для однородного режима ( $k = 0$ ) и противофазного режима ( $k = 15$ ) изменение знака  $k$  не приводит к появлению нового режима. Любым другим значениям  $k$  и  $-k$  соответствуют различные волны. Таким образом, в цепочке из 30 осцилляторов может существовать следующий набор циклических волн, распространяющихся с постоянной фазовой скоростью:

$$\{C^k\} = \{C^{-10}, C^{-6}, C^{-5}, C^{-3}, C^{-2}, C^{-1}, C^0, C^1, C^2, C^3, C^5, C^6, C^{10}, C^{15}\}$$

## 2. Области существования и устойчивости гармонических бегущих волн

Рассмотрим области существования и устойчивости для указанных выше волновых режимов при условии гармонических колебаний в каждом из осцилляторов. Эта задача может быть решена аналитически стандартными методами (см. например [8, 13]). В настоящем разделе мы приводим результаты соответствующих выкладок, проделанных для цепочки осцилляторов (1). Если колебания в осцилляторах

близки к гармоническим, то удобно перейти к укороченным уравнениям для комплексных амплитуд, используя замену переменных

$$x_i = \frac{1}{2}((a_i(t) \exp(jt) + a_i^*(t) \exp(-jt)), \quad j = \sqrt{-1}. \quad (2)$$

Используя метод усреднения, получим уравнения для комплексных амплитуд

$$\dot{a}_i = \frac{\varepsilon}{2}a_i - \frac{a|a|^2}{8} + \frac{\gamma}{2}(a_{i+1} + a_{i-1} - 2a_i), \quad i = 1, 2, 3 \dots N, \quad a_1 = a_{N+1},$$

или, переходя к вещественным амплитудам  $\rho_i$  и фазам  $\varphi_i$ , запишем

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_i &= \frac{\varepsilon}{2}\rho_i - \frac{\rho_i^3}{8} + \frac{\gamma}{2}(\rho_{i+1} \cos(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + \rho_i \cos(\varphi_i - \varphi_{i-1}) - 2\rho_i), \\ \dot{\varphi}_i &= \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} \sin(\varphi_{i+1} - \varphi_i) - \frac{\rho_{i-1}}{\rho_i} \sin(\varphi_i - \varphi_{i-1}) \right), \\ \rho_1 &= \rho_{N+1}, \quad \varphi_1 = \varphi_{N+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу идентичности всех элементов кольца в уравнениях (3) можно положить, что все амплитуды равны  $\rho$ , и разности фаз между любыми соседними осцилляторами равны  $\Delta\varphi_k$ . Тогда для  $\rho$  и  $\varphi_i$  справедливы уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^{(k)} &= \frac{\dot{\varepsilon}_k}{2}\rho^{(k)} - \frac{(\rho^{(k)})^3}{8}, \\ \varphi_{i+1} - \varphi_i &= \Delta\varphi_k = 2\pi \frac{k}{N} = \text{const}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\dot{\varepsilon}_k = \varepsilon - 2\gamma(1 - \cos \Delta\varphi_k)$ , индекс  $(k)$  означает принадлежность решения волне с индексом  $k$ . Амплитудное уравнение (4) совпадает по форме с укороченным уравнением одиночного осциллятора Ван дер Поля. Соответственно, как и в одиночном осцилляторе, при переходе параметра  $\dot{\varepsilon}_k$  через ноль решение  $\rho^{(k)} = 0$  теряет устойчивость, что соответствует бифуркации Андронова – Хопфа для состояния равновесия в нуле координат в исходной системе (1). При этом возникает новое решение  $\rho^{(k)} = 2\sqrt{\dot{\varepsilon}_k}$ , соответствующее бегущей волне с заданным значением индекса  $k$ . Таким образом, линии  $\varepsilon = 2\gamma(1 - \cos \Delta\varphi_k)$  являются бифуркационными. При увеличении параметра  $\varepsilon$  сначала выполняется бифуркационное условие  $\varepsilon = 0$ , соответствующее пространственно-однородному режиму ( $\Delta\varphi = 0$ ). Затем, при  $\varepsilon = 2\gamma(1 - \cos(2\pi/N))$  бифуркационное условие выполняется для режимов с  $k = \pm 1$ , соответствующих бегущим в противоположных направлениях волнам с длиной  $\Lambda_1 = N$ . Аналогичные бифуркации имеют место для всей последовательности возможных индексов  $k$ . При этом новые режимы рождаются неустойчивыми (за исключением однородного состояния). Последним возникает пара неустойчивых бегущих волн с  $\Lambda_{15} = 2$  на линии  $\varepsilon = 4\gamma$ . Таким образом, на линии  $b_0$  (рис. 1) рождается устойчивая неподвижная точка, соответствующая пространственно-однородному режиму  $x_i(t) = 2\sqrt{\varepsilon} \cos(t)$ , а на линиях  $b_1 - b_{15}$  – седловые неподвижные точки, соответствующие бегущим вдоль кольца автоволнам  $x_i(t) = 2\sqrt{\varepsilon_k} \cos(t - \frac{2\pi k}{N}i)$ . При определенных значениях управляющих параметров данные пространственно-периодические режимы могут приобрести устойчивость. Условия устойчивости можно получить, используя стандартный метод определения устойчивости по первому приближению.

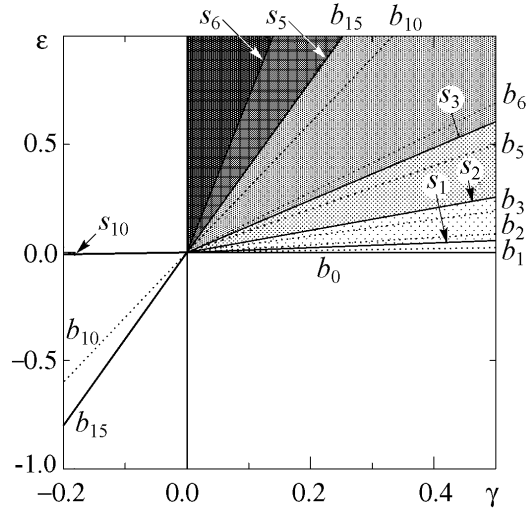


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма режимов в системе (3). Сплошная линия  $b_0$  соответствует рождению пространственно-однородного режима колебаний; пунктирные линии  $b_k$  – границы существования режимов бегущих волн с волновым числом  $k$ ; сплошные линии  $s_k$  – границы областей устойчивости соответствующих волновых режимов. Области существования устойчивых режимов бегущих волн обозначены серым цветом: более темный фон соответствует области устойчивости для более коротковолнового режима

Для кольца из гармонических осцилляторов применение данного метода описано, например, в работе [13]. Для системы уравнений (3) анализ устойчивости дает следующие собственные значения для матрицы линеаризации:

$$\lambda_{0,1}^{(k)} = 0,$$

$$\lambda_{0,2}^{(k)} = -\dot{\epsilon}_k,$$

$$\lambda_{i,1(2)}^{(k)} = -\frac{\dot{\epsilon}_k}{2} \pm \sqrt{\frac{\dot{\epsilon}_k^2}{4} + \gamma^2 \sin^2(\Delta\varphi_k) \sin^2\left(\frac{2\pi i}{N}\right) - \gamma \cos(\Delta\varphi_k) (1 - \cos(\frac{2\pi i}{N}))},$$

$$i = 1 \div N - 1.$$

Нулевое собственное значение  $\lambda_{0,1}^{(k)}$  является следствием инвариантности решений системы (3) относительно выбора начальной фазы. Переход через ноль собственных значений  $\lambda_{0,2}^{(k)}$  соответствует рождению рассматриваемой неподвижной точки при бифуркации состояния равновесия в начале координат. Анализ выражений для остальных собственных значений дает следующие условия для областей устойчивости бегущих волн в цепочке гармонических осцилляторов:

$$\epsilon > \gamma \left[ 2 - 4 \cos(\Delta\varphi_k) + \frac{1 + \cos(\frac{2\pi}{N})}{\cos(\Delta\varphi_k)} \right], \quad \cos(\Delta\varphi_k) > 0. \quad (5)$$

Соответствующие линии рождения и линии устойчивости для рассматриваемых пространственно-периодических режимов построены на рис. 1. Линия  $\epsilon = 0$  разграничивает области существования устойчивых длинноволновых режимов  $C^0 - C^6$  ( $\gamma > 0$ ,  $\cos(\Delta\varphi_k > 0$ ) и коротковолновых  $C^{10}$ ,  $C^{15}$  ( $\gamma < 0$ ,  $\cos(\Delta\varphi_k < 0$ ). Рассмотрим сначала область плоскости параметров, соответствующую положительной связи. Сплошная линия  $b_0$  соответствует рождению устойчивого режима пространственно-однородных колебаний. Линии рождения неустойчивых колебательных режимов с разными пространственными периодами изображены на рис. 1 пунктиром и обозначены буквами  $b_k$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$  – индекс соответствующей бегущей волны. На

линиях  $s_1, s_2, s_3, s_5$  и  $s_6$  режимы с соответствующими значениями  $k$  становятся устойчивыми.

Таким образом, в конусе, ограниченном линиями  $\varepsilon = 0$  и  $s_6$  (обозначена на рисунке темным цветом) существуют устойчивые режимы бегущих волн  $C^0, C^1, C^2, C^3, C^5$  и  $C^6$  с длинами волн  $\Lambda = \infty, 30, 15, 10, 6$  и  $5$ , соответственно. Правее линии  $s_6$  (между линиями  $s_6$  и  $s_5$ ) режим  $C^6$  перестает быть устойчивым, в результате чего наблюдаются пять сосуществующих волн  $C^0, C^1, C^2, C^3, C^5$ . Далее, правее линии  $s_5$  остается четыре устойчивых режима  $C^0, C^1, C^2, C^3$  и так далее. В пространстве параметров формируется вложенная структура областей существования устойчивых бегущих волн с разными длинами волны. Чем короче длина волны, тем ближе к линии  $\gamma = 0$  располагается область устойчивости соответствующего колебательного режима. При большой связи, то есть ниже линии  $s_1$  в системе наблюдается только пространственно-однородный колебательный режим.

При отрицательной связи все рассматриваемые выше режимы становятся неустойчивыми. Из состояния равновесия в нуле на линии  $s_{15}$  ( $\gamma < 0$ ) рождается устойчивый режим с длиной волны  $\Lambda = 2$ , когда колебания в соседних осцилляторах происходят в противофазе:  $x_i = -x_{i+1} = -x_{i-1}$ ,  $\dot{x}_i = -\dot{x}_{i+1} = -\dot{x}_{i-1}$ . Данный тип волны наблюдается при любых значениях параметров  $\varepsilon > -4\gamma$ ,  $\gamma < 0$ . Легко видеть, что рождение противофазных колебаний происходит при отрицательных значениях параметра возбуждения  $\varepsilon$ , то есть тогда, когда в одиночном осцилляторе колебания еще отсутствуют. Затем, на линии  $b_{10}$  ( $\gamma < 0$ ) в окрестности ставшего неустойчивым состояния равновесия рождается режим бегущей волны  $C^{10}$  с длиной волны  $\Lambda = 3$ , соответствующей разности фаз между соседними осцилляторами, равной  $2\pi/3$ . На линии  $s_{10}$  данный режим становится устойчивым и может наблюдаться в эксперименте.

Области устойчивости пространственно-периодических режимов, исключая пространственно-однородный  $C^0$  и противофазный  $C^{15}$ , зависят от числа элементов  $N$  в ансамбле (через функцию  $\cos(2\pi/N)$  в выражении (5)). Однако при большой длине цепочки эта зависимость является очень слабой в силу того, что производная от косинуса вблизи максимума близка к нулю. Для цепочки бесконечной длины  $N \rightarrow \infty$  в формуле (5)  $\cos(2\pi/N)$  следует заменить на единицу. При этом получаем условие

$$\varepsilon > \gamma \left[ 2 - 4 \cos(\Delta\varphi_k) + \frac{2}{\cos(\Delta\varphi_k)} \right], \quad \cos(\Delta\varphi_k) \neq 0. \quad (6)$$

Проведенный двухпараметрический анализ областей устойчивости для гармонических бегущих волн показал, что рассматриваемая система является мультистабильной. Пространство параметров состоит из перекрывающихся листов, каждый из которых не ограничен по параметру  $\varepsilon$ , но ограничен по параметру связи  $\gamma$ . Зафиксировав параметр возбуждения  $\varepsilon$  и увеличивая параметр связи, мы сможем пронаблюдать характерные переходы с коротковолновых режимов на более длинноволновые, описанные в работе [11]. Отсутствие ограничения областей устойчивости по параметру возбуждения приводит к тому, что при любом  $\varepsilon > 0$  последовательность этих переходов оказывается одинаковой, то есть для гармонических волн однопараметрический анализ устойчивости является достаточным. Как будет показано ниже, дело обстоит иначе, если волны являются ангармоническими.

### 3. Области существования и устойчивости ангармонических бегущих волн

Рассмотренные области существования и устойчивости имеют место для осцилляторов с гармоническим поведением, описываемых укороченными уравнениями. Перейдем теперь к анализу поведения исходной системы автогенераторов (1). Принципиальное отличие между (3) и (1) заключается в следующем. Состояниям равновесия в фазовом пространстве укороченной системы соответствуют предельные циклы в фазовом пространстве полной системы. При увеличении параметра  $\varepsilon$  в полной системе происходит не только рост амплитуды колебаний, но и изменение их формы, приводящее к генерации новых гармоник в спектре колебаний. При этом укороченные уравнения перестают адекватно описывать динамику системы и указанные выше аналитические выражения для областей устойчивости в своей верхней (по параметру  $\varepsilon$ ) части не будут соответствовать реально наблюдаемому.

Поскольку для колебаний произвольной формы нельзя указать аналитические методы анализа на устойчивость, области существования и устойчивости для бегущих волн в системе (1) определялись нами в численном эксперименте. Для наблюдения и графического представления режимов бегущих волн в системе (1) удобно использовать сечение Пуанкаре. Значения динамических переменных всех осцилляторов ансамбля  $\{x_i\}$  фиксируются в моменты времени, соответствующие обращению в ноль производной по времени от одной из динамических переменных (например,  $\dot{x}_1$ ). Таким образом делаются мгновенные «снимки» состояний осцилляторов (то есть строится профиль бегущей волны) в моменты времени, соответствующие определенной фазе опорного элемента (в нашем случае  $x_1$ ). Изображения режимов с разными длинами волн представлены на рис. 2.

Постоянство разности фаз между соседними осцилляторами вдоль цепочки проиллюстрировано на рис. 3.

Колебательные режимы, приведенные на рис. 2, не исчерпывают всех возможных устойчивых режимов, наблюдающихся в системе (1). В частности, возможно существование бегущих волн, у которых амплитуды колебаний и разность фаз между соседними осцилляторами не постоянны вдоль цепочки. Это характерно для тех случаев, когда длина цепочки не кратна длине волны рассматриваемого режима. Например, на рис. 4 показан профиль режима с четырьмя максимумами ( $k = 4$ ), пространственный период у которого равен пятнадцати ячейкам, так как каждый максимум точно повторяется только через один. В этом случае разность фаз между соседними осцилляторами не одинакова вдоль кольца. Как видно из рис. 4, вдоль цепочки наблюдаются четыре сбоя разности фаз. Аналогичная пространственная модуляция имеет место и для амплитуды колебаний. Наблюдающиеся «дефекты» в распределении амплитуды и фазы вдоль цепочки являются стационарными, поскольку их положение в кольце не меняется. В системе (1) возможны и режимы с нестационарными дефектами, которые будут рассмотрены ниже.

Результаты численного исследования областей устойчивости для бегущих волн при положительных значениях параметра связи показаны на рис. 5. Рождение представленных на рис. 2 волновых режимов происходит строго на тех же линиях  $b_1 - b_{15}$ , что и рождение соответствующих им стационарных состояний в укороченных уравнениях (3) (см. рис. 1). Это естественно, поскольку в момент своего рождения колебания являются гармоническими, а следовательно, точно описываются укороченными уравнениями. Однако при увеличении параметра  $\varepsilon$  форма колеба-

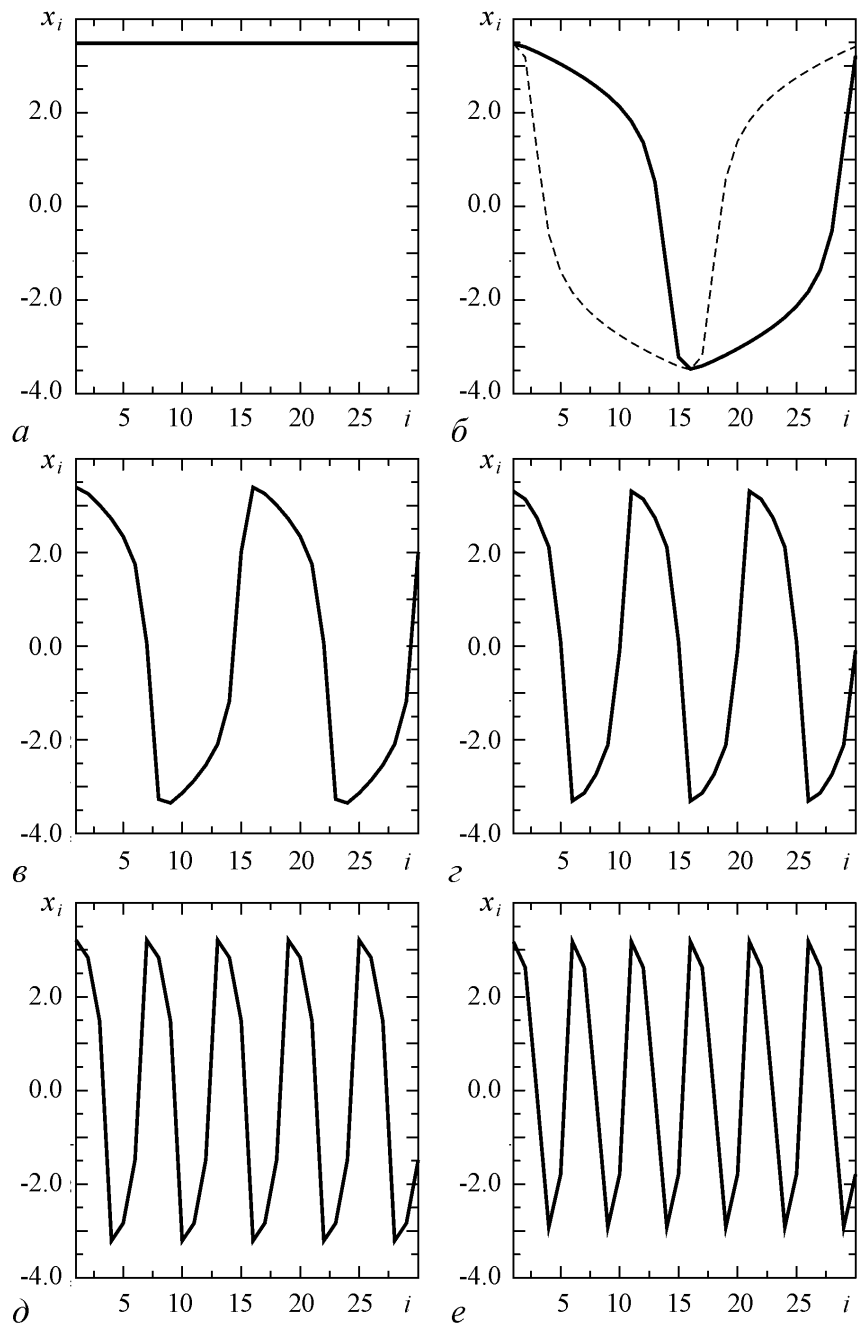


Рис. 2. Колебательные режимы системы (1): пространственно-однородные колебания (а) и режимы бегущих волн, распространяющихся в прямом направлении с длиной волны  $\Lambda = 30$  (б),  $\Lambda = 15$  (в),  $\Lambda = 10$  (г),  $\Lambda = 6$  (д) и  $\Lambda = 5$  (е). По оси абсцисс отложены порядковые номера осцилляторов в цепочке (дискретная пространственная координата), на оси ординат – значение динамической переменной данного осциллятора в сечении  $\dot{x}_1 = 0$ . Штриховой линией на рис. (б) показан профиль волны, распространяющейся в обратном направлении



ний становится ангармонической и в спектре колебаний появляются гармоники на кратных частотах. Таким образом, при удалении от порога возникновения генерации исходная система генераторов Ван дер Поля (1) начинает вести себя иначе, чем упрощенная модель (3). Соответственно, области устойчивости для бегущих волн, представленные на рис. 5, качественно отличаются от соответствующих областей, изображенных на рис. 1. Для сравнения на рис. 5 продублированы границы областей устойчивости  $s_1 - s_6$  с рис. 1 (штриховые линии). Из сопоставления рис. 1 и 5 видно, что, в отличие от гармонических осцилляторов, в цепочке полных уравнений каждый волновой режим, за исключением пространственно-однородного, имеет конечную область устойчивости. При малой связи нижние границы этих областей (линии  $l_1 - l_6$ ) почти совпадают с соответствующими границами ( $s_1 - s_6$ ) для системы (3). Расхождение начинается при больших значениях  $\gamma$  и особенно хорошо заметно в случае коротковолновых режимов. Рассмотрим, например, границы области устойчивости для бегущей волны длиной  $\Lambda = 6$ : линии  $l_5$  и  $h_5$ . До значений коэффициента связи  $\gamma \simeq 0.5$  нижняя граница устойчивости рассматриваемого режима в (1) почти совпадает с пунктирной линией  $s_5$ . Однако при большей связи она существенно отклоняется от прямой линии. Кроме того, для каждого из рассматриваемых режимов, исключая пространственно-однородный, существует граница, ограничивающая область устойчивости сверху. Верхняя и нижняя границы области устойчивости совместно с бифуркационной линией  $\gamma = 0$  замыкают область устойчивости для рассматриваемой бегущей волны. На рис. 5 изображен фрагмент областей устойчивости для значений коэффициента связи  $0 \leq \gamma \leq 1$ , в котором целиком содержатся области устойчивости для волн с  $\Lambda = 5$  и  $\Lambda = 6$ . Области устойчивости для более длинноволновых режимов ведут себя аналогичным образом, но

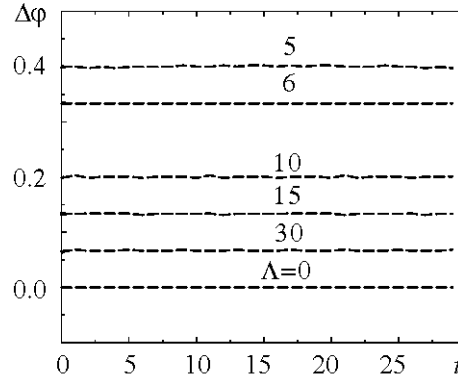


Рис. 3. Распределение разностей фаз соседних осцилляторов вдоль цепочки (соответствуют режимам с тем же волновым периодом, представленным на рис. 2)

для системы (3). Расхождение начинается при больших значениях  $\gamma$  и особенно хорошо заметно в случае коротковолновых режимов. Рассмотрим, например, границы области устойчивости для бегущей волны длиной  $\Lambda = 6$ : линии  $l_5$  и  $h_5$ . До значений коэффициента связи  $\gamma \simeq 0.5$  нижняя граница устойчивости рассматриваемого режима в (1) почти совпадает с пунктирной линией  $s_5$ . Однако при большей связи она существенно отклоняется от прямой линии. Кроме того, для каждого из рассматриваемых режимов, исключая пространственно-однородный, существует граница, ограничивающая область устойчивости сверху. Верхняя и нижняя границы области устойчивости совместно с бифуркационной линией  $\gamma = 0$  замыкают область устойчивости для рассматриваемой бегущей волны. На рис. 5 изображен фрагмент областей устойчивости для значений коэффициента связи  $0 \leq \gamma \leq 1$ , в котором целиком содержатся области устойчивости для волн с  $\Lambda = 5$  и  $\Lambda = 6$ . Области устойчивости для более длинноволновых режимов ведут себя аналогичным образом, но

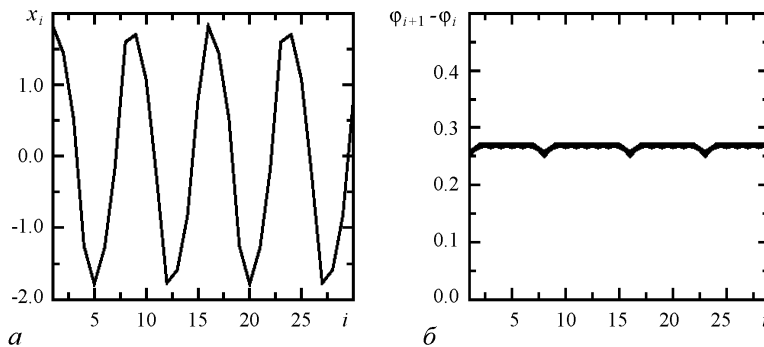


Рис. 4. Пространственный профиль бегущей волны в режиме  $k = 4$  (а) и распределение разностей фаз между колебаниями соседних осцилляторов вдоль цепочки (б)

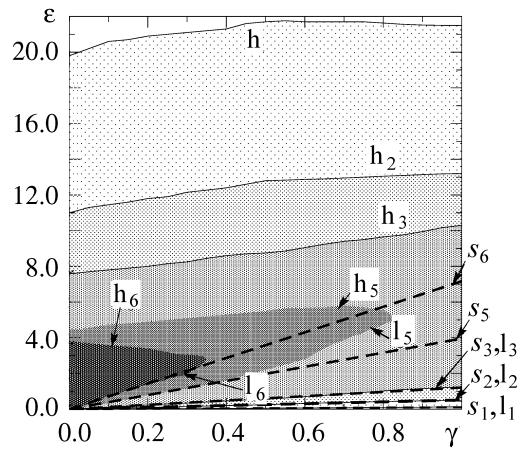


Рис. 5. Границы областей устойчивости режимов бегущих волн в системе (1):  $l_k$  и  $h_k$  – нижняя и верхняя границы области устойчивости для волны  $C^k$ . Области устойчивости обозначены оттенками серого цвета: более коротковолновым режимам соответствует более темный цвет. Штриховыми линиями изображены соответствующие границы областей устойчивости  $s_1$ -  $s_6$  для гармонических осцилляторов (3)

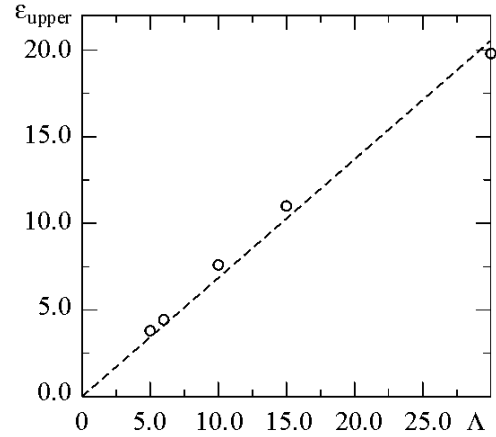


Рис. 6. Зависимость верхней границы области устойчивости режима бегущей волны при слабой связи ( $\gamma \rightarrow 0$ )  $\epsilon_u$  от длины волны  $\Lambda$  (кружочки). Приведена аппроксимирующая прямая

их верхняя и нижняя границы замыкаются при коэффициентах связи, больших единицы. Таким образом, диаграмма режимов для цепочки генераторов Ван дер Поля (1) представляет собой вложенные друг в друга структуры ограниченных областей. Области устойчивости более коротковолновых режимов находятся внутри областей устойчивости для режимов с большими длинами волн. Нижние границы областей устойчивости выходят из точки с координатами ( $\gamma = 0; \epsilon = 0$ ) и при малой связи представляют собой прямые линии (как и в случае гармонических осцилляторов). Верхние границы при малой связи представляют собой почти прямые линии, выходящие каждая из своей точки с координатами ( $\gamma = 0; \epsilon_u^k$ ), где  $k$  – волновое число бегущей волны. Зависимость параметра нелинейности, соответствующего верхней границе области устойчивости режима от длины волны при нулевой связи  $\epsilon_u^k$ , хорошо аппроксимируется прямой линией (рис. 6).

#### 4. Исследование областей притяжения бегущих волн

Система уравнений (1), как аналогичные многомерные системы, при малой связи должна демонстрировать развитую мультистабильность. При этом можно предположить, что помимо описанных выше режимов бегущих волн (включая режим с «дефектами» для  $k = 4$ ) в системе могут наблюдаться и другие колебательные режимы, включая режимы с квазипериодической и хаотической временной динамикой. Поэтому возникает закономерный вопрос, насколько описанные выше режимы бегущих волн являются типичными. Под типичностью мы понимаем вероятность выхода на тот или иной колебательный режим при случайном задании начальных условий. При проведении исследований мы задавали случайным образом  $x_i(0)$ , используя генератор случайных чисел с равномерным распределением, при этом ско-

рости  $\dot{x}_i$  полагались равными нулю. В этом случае и при не слишком больших значениях параметра нелинейности  $\varepsilon \lesssim 10$  в системе устанавливались только обозначенные выше (см. рис. 2 и рис. 4) волновые режимы. Вероятности выхода на разные пространственные моды изображены на рис. 7. Естественно, что значения параметров были выбраны так, чтобы все указанные выше моды были устойчивы. Вероятности двух самых длинноволновых режимов с  $k = 0$  и  $k = 1$  практически одинаковы и близки к значению 0.5. В подавляющем большинстве случаев система выходит именно на них. Для других режимов вероятность с ростом индекса  $k$  падает почти экспоненциально (для наглядности значения по оси  $y$  отложены в логарифмическом масштабе). Выход на режимы с  $k = 5$  и  $k = 6$  в наших экспериментах отмечен не был. Вид зависимости вероятности от индекса  $k$  позволяет предположить, что их вероятность примерно на порядок и на два порядка, соответственно, меньше, чем вероятность для выхода на режим с  $k = 4$ . К сожалению, необходимые в данном случае времена наблюдения вышли за возможности компьютерного эксперимента. При других значениях параметров  $\varepsilon$  и  $\gamma$  наблюдается примерно та же зависимость значений вероятности от индекса  $k$ . При больших значениях связи вероятность выхода на пространственно-однородный режим начинает превалировать над вероятностью выхода на режим с  $k = 1$ .

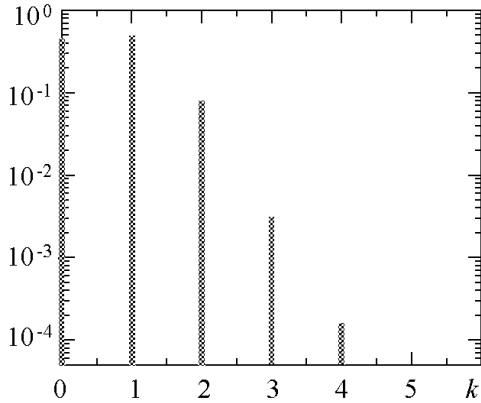


Рис. 7. Вероятность выхода на пространственно-временные режимы, соответствующие разным значениям индекса  $k$  при случайном выборе начальных условий  $x_i$  из диапазона  $x \in [0.1]$ . Значения параметров  $\varepsilon = 2.0$ ,  $\gamma = 0.1$

Нужно заметить, что при другом выборе модели базового осциллятора цепочки выход на пространственно-регулярные режимы бегущих волн может не наблюдаться. Например, в случае ансамбля из гармонических осцилляторов с жестким возбуждением [11] случайный выбор начальных условий ведет к появлению пространственно-разупорядоченных колебаний.

Для того чтобы система вышла на нужный пространственный режим, можно задать начальные условия и специальным образом. Например, задавая начальные условия с пространственным периодом, близким к периоду желаемого режима. Данный способ использовался нами для построения диаграммы на рис. 5. Так же можно попытаться оценить величину бассейна притяжения аттрактора, соответствующего тому или иному пространственно-временному режиму. Естественно, что построение полных бассейнов притяжения, в силу высокой размерности системы, является задачей практически не реализуемой. Оценку области притяжения можно получить, задавая начальные условия с определенным фазовым сдвигом по пространственной координате

$$x_i = \rho \sin(\phi_i) \quad y_i = \rho \cos(\phi_i).$$

Варьируя  $\rho$  и  $\phi$ , мы получили характерную диаграмму для бассейнов притяжения, которая изображена на рис. 8 для двух разных значений параметра связи. При росте параметра связи зоны коротковолновых режимов сужаются или исчезают совсем (мода с  $k = 6$  на рис. 8, б), а зоны длинноволновых режимов, соответственно, расширяются. Из диаграммы видно, что при значениях угла  $\phi$ , меньших  $90^\circ$ , области

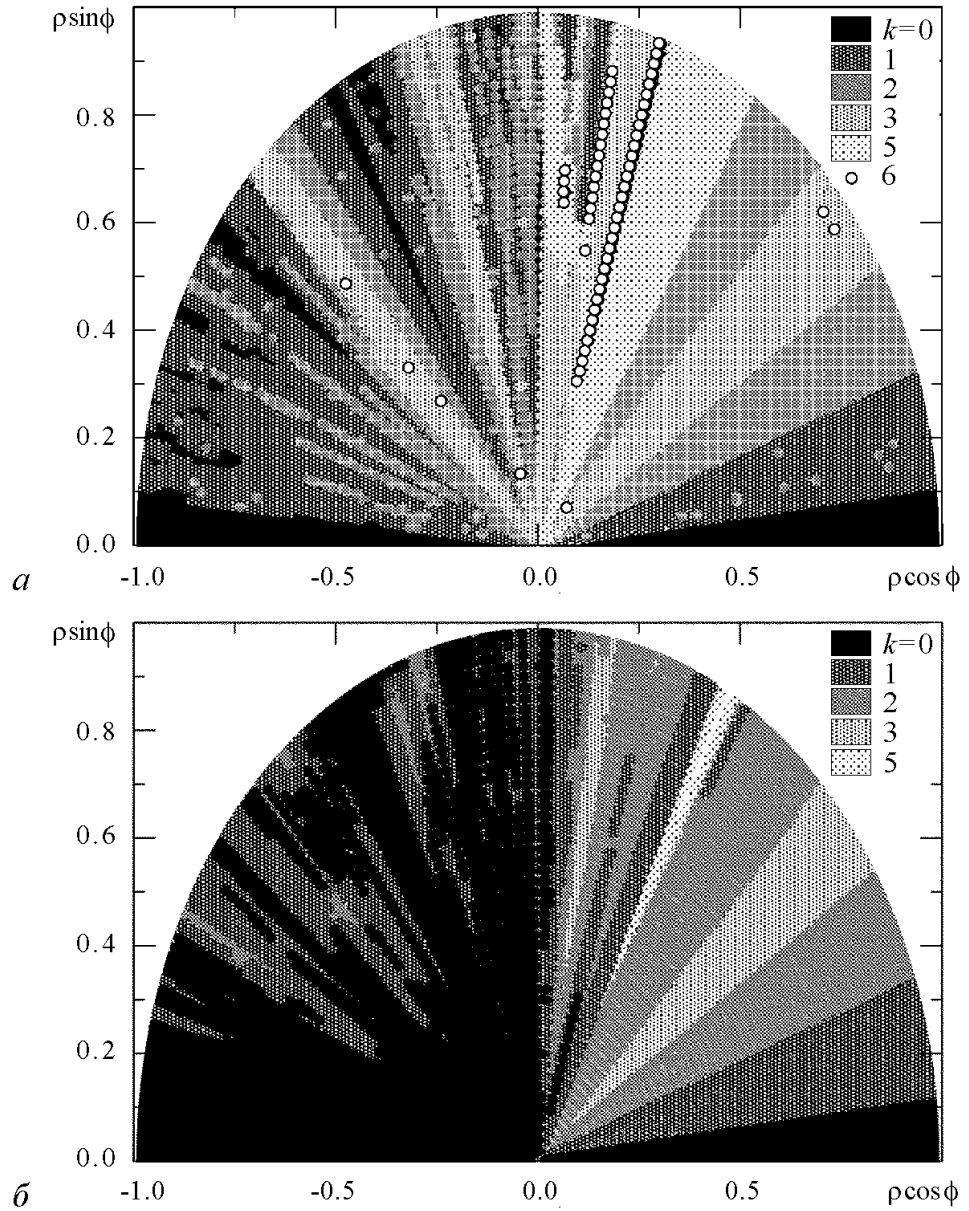


Рис. 8. Диаграмма бассейнов притяжения для разных пространственных мод в полярных координатах:  $x_i = \rho \sin(\phi_i)$ ,  $y_i = \rho \cos(\phi_i)$ ;  $\varepsilon = 2.0$ ;  $\gamma = 0.1$  (а), 0.42 (б)

притяжения разных мод устроены достаточно регулярно: они заполняют сектора, примыкающие к значению угла, равного разности фаз, между колебаниями соседних осцилляторов для данного режима. При значениях угла  $\phi$ , больших  $90^\circ$ , области устойчивости ведут себя менее предсказуемо. Поскольку моды со значениями разностей фаз, больших  $90^\circ$ , при положительной связи неустойчивы, в окрестности выбираемых начальных условий нет устойчивых пространственно-волновых режимов. Вследствие этого фазовым траекториям приходится дольше блуждать к устойчивому состоянию, что, видимо, и определяет более сложное устройство бассейна притяжения для больших углов.

## 5. Волны с движущимися фазовыми дефектами

Если выбрать параметр нелинейности достаточно большим ( $\varepsilon \sim 10$ ), то наряду с уже описанными режимами бегущих волн начинают наблюдаться бегущие волны с движущимися «дефектами». Такие дефекты представляют собой фазовые и амплитудные сбои (то есть точку пространства или номер осциллятора с отличающимся от характерного для данной моды значения разности фаз), которые движутся вдоль кольца с постоянной скоростью. Один из подобных примеров приведен на рис. 9. При наличии одного дефекта временная динамика представляет собой двухчастотные квазипериодические колебания. Если дефектов несколько, то они движутся каждый со своей скоростью, соответственно в фазовом пространстве формируется многомерный тор. Если цепочка осцилляторов достаточно длинная, то возможно формирование торов высокой размерности, что при наличии небольшого шума приведет к поведению, практически не отличимому от хаотического.

Возникновение в кольце осцилляторов квазипериодических колебаний вследствие формирования фазовых дефектов было описано в работе [18]. Однако природа дефекта в нашем случае является иной. В рассматриваемой в [18] системе генераторов с жестким возбуждением исходной причиной возникновения дефектов являлась бистабильность каждого элемента ансамбля. В результате разброса по устойчивым состояниям одиночных осцилляторов, в их ансамбле формировались кластеры синхронных синфазных колебаний. Колебания в разных кластерах характеризовались

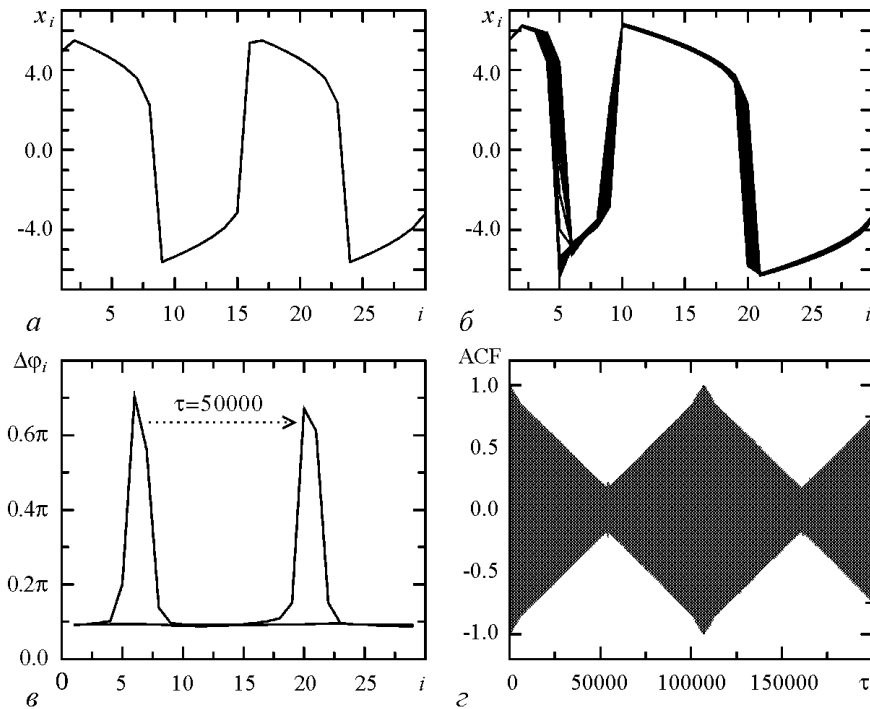


Рис. 9. Исходная волна без «дефекта» с  $k = 2$  (а); волна с фазовым «дефектом» (б); зависимость разности фаз между колебаниями соседних осцилляторов в два разных момента времени (в); автокорреляционная функция, построенная по временной реализации одного из осцилляторов (г). Значения параметров:  $\varepsilon = 10$ ,  $\gamma = 0.01$

разными амплитудами и частотами. При этом на границе между кластерами наблюдался «сбой фазы». В ансамбле ангармонических осцилляторов Ван дер Поля фазовые дефекты возникают в отсутствие частотных и амплитудных кластеров на базе пространственно-периодических режимов. При этом средние амплитуды и частоты во всех осцилляторах ансамбля остаются одинаковыми.

Области пространства параметров, в которых наблюдаются режимы с фазовыми дефектами, существуют при большой нелинейности и малой связи. Для того чтобы выйти на режим с фазовыми дефектами, образованный на базе волны  $C^k$ , необходимо выбрать значения параметров, где «чистый» режим устойчив, и, увеличивая параметр  $\varepsilon$ , пересечь верхнюю границу устойчивости для исходной волны. Переход между «чистым» режимом и режимом с дефектами сопровождается гистерезисом, то есть оба режима сосуществуют в некоторой области пространства параметров.

## 6. Переключения между волновыми режимами под действием внешнего шума

Каждому из рассмотренных выше волновых режимов в многомерном фазовом пространстве системы соответствует определенный аттрактор со своим бассейном притяжения. В отсутствие возмущений фазовая траектория, попав в область притяжения одного из аттракторов, притягивается к нему и остается на аттракторе неограниченно долго. Наличие внешнего шума может приводить к следующим эффектам.

- Искажения волнового режима, фазовые сбои и нарушения однородности в распределении амплитуд.

- Переключения между сосуществующими волновыми режимами.

- Появление новых колебательных режимов, в том числе и в результате объединения всех или части сосуществующих структур в единую.

В данной работе мы рассматриваем влияние некоррелированных источников шума с гауссовым распределением на описанные в предыдущем разделе мультистабильные состояния и исследуем индуцированные шумом переходы между мультистабильными состояниями.

Уравнение ансамбля осцилляторов, в каждый из которых добавлен независимый источник некоррелированного гауссова шума, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i \\ \dot{y}_i &= (\varepsilon - x_i^2)x_i - x_i + \gamma(y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1}) + \sqrt{2D}\xi_i, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\xi_i$  – источник шума в  $i$ -м осцилляторе,  $D$  – интенсивность шума. Выберем значения управляющих параметров таким образом, чтобы при  $D = 0$  все рассматриваемые бегущие волны были устойчивы:  $\varepsilon = 3.0, \gamma = 0.25$ . Задав соответствующие начальные условия, выберем волну с наименьшим пространственным периодом, что соответствует  $k = 6$ . При плавном увеличении интенсивности шума профиль бегущей волны начинает искажаться (рис. 10, *a*). При достижении значения интенсивности шума  $D = 0.0003$  система переходит на волновой режим со значением  $k = 5$  (рис. 10, *б*). Продолжая увеличивать интенсивность шумового воздействия, при достижении значения  $D = 0.007$  можно наблюдать переход на новый пространственный режим, с четырьмя максимумами, что соответствует  $k = 4$  (рис. 10, *в*). Данный волновой режим наблюдается в системе вплоть до значений интенсивности шума  $D = 0.03$  (рис. 10, *г*), после чего происходит переход системы на следующий по длине волны режим с  $k = 3$ , и при  $D = 0.07$  – с  $k = 2$ .

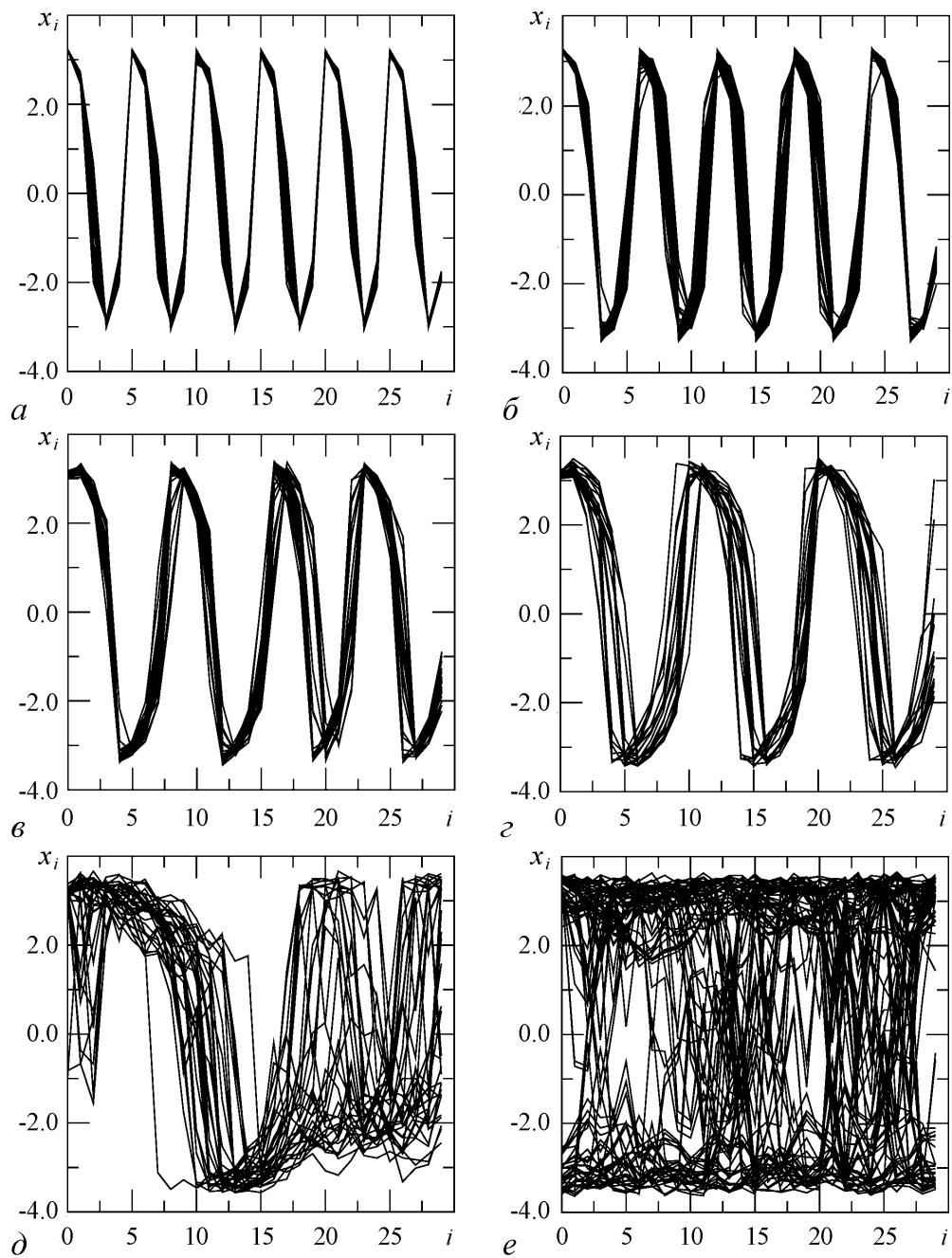


Рис. 10. Переходы между режимами бегущих волн с разными длинами под действием нормально-го белого шума:  $a - \Lambda = 5, D = 0.0002$ ;  $b - \Lambda = 6, D = 0.0003$ ;  $c - \Lambda \approx 7.5, D = 0.007$ ;  $d - \Lambda = 10, D = 0.03$ ;  $e - \Lambda = 30, D = 0.17$ ;  $e -$  пространственно-однородный режим  $D = 0.22$

В диапазоне значений интенсивности шума  $0.17 < D < 0.22$  в цепочке помимо пространственно-однородного колебательного режима существует только режим, объединяющий множество волн в окрестности волны с пространственным периодом,

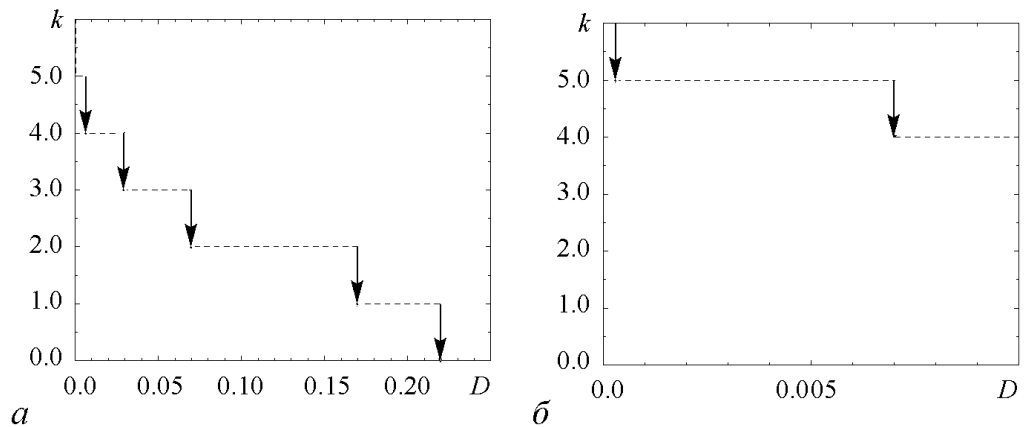


Рис. 11. *a* – диаграмма индуцированных шумом переключений между сосуществующими режимами бегущих волн: зависимость  $k$ , соответствующего минимальной длине волны  $\Lambda$ , наблюдаемой в численном эксперименте, от интенсивности шума  $D$  при  $\varepsilon = 3.0$ ,  $\gamma = 0.25$ ; *b* – фрагмент диаграммы в увеличенном по оси абсцисс масштабе

равным длине цепочки  $\Lambda = 30$  (рис. 10, *d*), а при больших интенсивностях шума – только пространственно-однородный режим (рис. 10, *e*). Диаграммы описанных выше переходов между мультистабильными состояниями приведены на рис. 11. Таким образом, в системе (7) возможны индуцированные шумом переключения между сосуществующими пространственными структурами. В численных экспериментах наблюдались только переходы от коротковолновых режимов к более длинноволновым, так как вероятность обратных переходов мала. Переходы между наиболее длинноволновыми из устойчивых режимов и пространственно-однородным режимом наблюдались только при больших интенсивностях шума. Пороговые интенсивности шума зависят как от длины волны исходного режима, так и от выбранных значений параметров системы. Если параметры выбраны близко к границе зоны устойчивости данного режима (см. рис. 5), то достаточный для перехода уровень шума будет существенно меньшим.

Таким образом, в системе (7) имеются метастабильные состояния, время жизни которых существенно различно. Чем более длинноволновой является рассматриваемая структура, тем более она устойчива к воздействию шума. Флуктуации могут индуцировать переходы между сосуществующими структурами, имеющие односторонний характер: от коротковолновых режимов к более длинноволновым.

### Заключение

В кольце связанных автогенераторов сосуществуют режимы бегущих вдоль кольца волн, пространственный период которых целое число раз укладывается вдоль цепочки. Данные режимы являются типичными для рассматриваемой системы, то есть они с близкой к единице вероятностью реализуются при случайном задании начальных условий. Увеличение связи сужает бассейны притяжения более коротковолновых режимов за счет увеличения бассейнов более длинноволновых. В квазигармоническом приближении области устойчивости бегущих волн не ограничены, они наблюдаются при любых положительных значениях параметра возбуждения.



В цепочке ангармонических осцилляторов области существования пространственно-неоднородных режимов являются ограниченными как по параметру связи, так и по параметру возбуждения. Выход за границу области существования, если он происходит при больших значениях нелинейности и слабой связи, ведет к появлению в бегущей волне одного или нескольких фазовых сбоев, движущихся вдоль кольца каждый со своей скоростью.

Обнаруженные и исследованные режимы являются грубыми и наблюдаются как в чисто детерминированной системе, так и при добавлении внешнего шума. Внешний шум разрушает коротковолновые режимы бегущих волн и индуцирует переходы к более длинноволновым режимам.

*Авторы выражают благодарность Министерству образования и науки РФ и Американскому фонду гражданских инициатив и развития (CRDF) за финансовую поддержку проведенных исследований (грант REC-006).*

### **Библиографический список**

1. Kuramoto Y. Chemical Oscillations Waves and Turbulence. Berlin: Springer, 1984.
2. Cross M.G., Hohenberg P.C. Pattern formation outside of equilibrium // Rev. Mod. Phys. 1993. Vol. 65. № 3. P. 851.
3. Парыгин В.Н. Взаимная синхронизация трех связанных автоколебательных генераторов в случае слабой связи // Радиотехника и электроника. 1956. № 2. С. 197.
4. Малафеев В.М., Полякова М.С., Романовский Ю.М. О процессе синхронизации автогенераторов, связанных через проводимость // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13. С. 936.
5. Мынбаев Д.К., Шиленков М.И. Взаимная фазовая синхронизация генераторов, соединенных по кольцевой схеме // Радиотехника и электроника. 1981. № 2. С. 361.
6. Мальцев А.А., Силаев А.М. Режимы работы цепочки автогенераторов с «жесткими» предельными циклами, связанных с помощью реактивных элементов // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. С. 826.
7. Дворников А.А., Уткин Г.М., Чуков А.М. О взаимной синхронизации цепочки резистивно связанных автогенераторов // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. С. 1388.
8. Ermentrout G.B. The behaviour of rings of coupled oscillators // J. of Math. Biol. 1985. Vol. 23. P. 55.
9. Ermentrout G.B. Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators // SIAM J. of Appl. Math. 1992. Vol. 52. P. 1664.
10. Ren L., Ermentrout G.B. Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators // Physica D. 2000. Vol. 143. P. 56.
11. Nekorkin V.I., Makarov V.A., Velarde M.G. Spatial disorder and waves in a ring chain of bistable oscillators // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6. P. 1845.
12. Daido H. Strange waves in coupled-oscillator arrays: mapping approach // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 1683.
13. Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И. Синхронизмы в системе циклически слабосвязанных осцилляторов // Динамические системы: Межвузовский сборник научных трудов. Н. Новгород: Изд.-во Нижегородского университета. 1991. С. 84.

14. *Garcia-Ojalvo J., Lacasta A. M., Sagues F., Sancho J. M.* Noise-sustained signal propagation // *Europhys. Lett.* 2000. Vol. 50. P. 427.
15. *Sancho J.M., Garcia-Ojalvo J.* Noise-induced order in extended systems: *Stochastic Processes in Physics, Chemistry, and Biology.* Springer, 2000.
16. *Khovanov I. A., Luchinsky D. G., Mannella R., McClintock P. V. E.* Fluctuations and the energy-optimal control of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85. P. 2100.
17. *Luchinsky D.G., Beri S., Mannella R., McClintock P.V.E. , Khovanov I.A.* Optimal fluctuations and the control of chaos // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2002. Vol. 12. P. 583.
18. *Nekorkin V.I., Makarov V.A.* Spatial chaos in a chain of coupled bistable oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 74. P. 4819.

*Саратовский государственный  
университет им. Н.Г. Чернышевского*

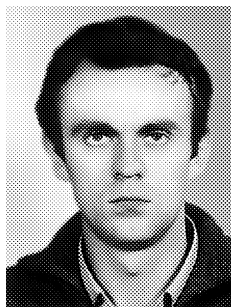
*Поступила в редакцию  
После доработки*

*27.01.2005  
29.07.2005*

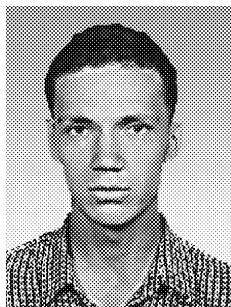
## RUNNING WAVES IN A DISCRETE ANHARMONIC SELF-OSCILLATING MEDIUM

*A.V. Shabunin, A.A. Akopov, V.V. Astakhov, T.E. Vadivasova*

The work is devoted to investigation of dynamics of running waves in the ring of Van-der-Pol oscillators with diffusive coupling. Regions of existence and stability are built in the parameters space. Typicalness of appearance of regimes with different wavelengths and regularities of their disappearance are considered. Influence of anharmonicity on multistability of spatio-periodic regimes is studied.



*Шабунин Алексей Владимирович* – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, кандидат физико-математических наук (1998). Научные интересы - нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций. E-mail: alexey@chaos.ssu.runnet.ru



*Акопов Артем Александрович* – родился в Сочи (1973), окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2000). Аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Имеет 15 публикаций.



*Астахов Владимир Владимирович* – окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил кандидатскую (1983) и докторскую диссертацию (1999). Профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов - теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях. E-mail: [astakhov@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:astakhov@chaos.ssu.runnet.ru)



*Вадивасова Татьяна Евгеньевна* – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время - профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии. E-mail: [tanya@chaos.ssu.runnet.ru](mailto:tanya@chaos.ssu.runnet.ru)