

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОГОГРУППОВОЙ ПОПУЛЯЦИОННОЙ МОДЕЛИ В ВИДЕ ОДНОГРУППОВОЙ МОДЕЛИ СО МНОГИМИ ПАРАМЕТРАМИ

И.Н. Панкратова

В качестве одного из вариантов нелинейной модели для описания динамики многогрупповой биологической популяции предложена динамическая система, порожденная многомерным логистическим отображением. В некоторых частях компактного фазового пространства данное отображение демонстрирует поведение, нетипичное для одномерного однопараметрического логистического отображения. В биологической модели это проявляется, в первую очередь, в скачкообразном изменении численности как самой популяции в целом, так и ее возрастных групп при малых изменениях возрастной структуры популяции. Кроме того, популяция при изменившейся возрастной структуре может сохранить тип поведения. Изучается механизм возникновения такого поведения многогрупповой популяции.

Введение

С того времени, как Лесли предложил нелинейную модель для описания динамики численности популяции с неперекрывающимися поколениями [1], были предложены различные ее обобщения и модификации [2–4]. Мы предлагаем свой вариант нелинейной модели, где лимитирующий по численности популяции фактор выбран в отличном от модели Лесли виде.

Пусть \mathbf{x} – вектор относительных численностей (плотностей) возрастных групп популяции; A – матрица коэффициентов взаимосвязей групп между собой, включая коэффициенты рождаемости и выживаемости (матрица параметров), и $(1 - \sum_1^n x_i)$ – лимитирующая функция, отвечающая предположению об ограниченности ресурсов. Модель динамики плотностей многогрупповой сезонно размножающейся биологической популяции в условиях стационарной экосистемы с ограниченными ресурсами зададим динамической системой f^m

$$f: R^n \rightarrow R^n, \quad f\mathbf{x} = (1 - \sum_1^n x_i)A\mathbf{x}.$$

Учет естественных ограничений на вектор \mathbf{x} позволяет выделить в R^n компактное множество $K^n = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{x} \geq 0, \sum_1^n x_i \leq 1\}$, которое можно взять в качестве фазового пространства. Инвариантность множества K^n (в положительном направлении), то есть выполнение условия $fK^n \subseteq K^n$, обеспечивается выбором матрицы A : A – неотрицательная матрица ($a_{ij} \geq 0 \forall i, j = \overline{1, n}$) и $\|A\| = \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 4$. Впервые динамическая система $\{f^m, K^n, Z^+\}$, $Z^+ = N \cup \{0\}$, была предложена для изучения в качестве биологической модели многогрупповой популяции в начале 1990-х годов (см., например, [5,6]). В частности, полагая $A = L$, где L – матрица Лесли с коэффициентами рождаемости $a_{1,i} = b_i$, $i = \overline{1, n}$, и выживаемости $a_{i,i-1} = a_i$, $i = \overline{2, n}$ ($a_{i,j} = 0$ для всех других индексов матрицы Лесли), получаем нелинейный аналог модели Лесли. В отличие от других линейных и нелинейных моделей Лесли и их вариантов, встречающихся в научной литературе, для которых зачастую возможно существование только равновесных и циклических решений, предложенная нами модель позволяет получать все виды динамики, в том числе и хаотические режимы, которые наиболее характерны для динамики биологических популяций.

При $n = 1$ x есть общая плотность популяции, $A \equiv \lambda = \text{const}$ – коэффициент размножения, и мы получаем хорошо известную модель, описывающую механизм саморегуляции биологической популяции одного вида в условиях ограниченности ресурсов. Модель задается одномерной динамической системой χ_λ^m

$$\chi_\lambda: R \rightarrow R, \quad \chi_\lambda x = \lambda(1 - x)x.$$

Здесь $f \equiv \chi_\lambda$ – логистическое отображение и $x \in I = [0, 1] \subset R$ при $\lambda \in (0, 4]$ [7, 8]. Отметим, что одномерное однопараметрическое представление отображения f существует также на собственных направлениях матрицы A ввиду линейного изоморфизма между f и χ_λ на собственных направлениях, где в качестве λ выступает собственное значение матрицы A , соответствующее выбранному собственному направлению [6].

К настоящему времени теория, развитая для одномерного логистического отображения, является эффективным методом исследования многих сложных нелинейных явлений, возникающих как в модельных, так и в реальных многомерных системах. Целый ряд свойств рассматриваемого многомерного логистического отображения, в частности, однопараметрической динамики, возникающей в многомерной системе, получены в рамках теории одномерных непрерывных отображений (см., например, [9]). Наряду с этим многомерное логистическое отображение обладает некоторыми качественно новыми свойствами, которые существенным образом отличаются от свойств одномерного однопараметрического логистического отображения.

1. Двумерное логистическое отображение

Для многомерного отображения f установлено, что его динамику во всем фазовом пространстве K^n можно описать совокупностью отображений, заданных в виде суперпозиций одномерных логистических отображений с разными числовыми параметрами (количество параметров не превышает размерности системы). Более точно результат состоит в следующем [10, 11].

Пусть $\omega_f(\mathbf{x})$ – ω -предельное множество траектории $f^m \mathbf{x}$.

Теорема. Для любого \mathbf{x} из K^n существует инвариантное относительно f множество $J_p \subset K^n$ для некоторого $1 \leq p \leq n$, $p \in N$ такое, что J_p состоит из p отрезков лучей $J_{p,1}, \dots, J_{p,p}$, инвариантных относительно отображения f^p , и $\omega_f(\mathbf{x}) \subseteq J_p$. На J_p отображение f^p имеет одномерное представление на каждом $J_{p,i}$

$$f^p|_{J_{p,i}} = \chi_{\lambda_p} \circ \dots \circ \chi_{\lambda_1}, \quad (*)$$

где $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_p > 0$ – некоторые числа.

При доказательстве теоремы используются свойство расщепления пространства на инвариантные циклические подпространства и установленный в [6] факт, что ω -предельные множества системы f^m расположены на конечном числе $p \leq n$ отрезков лучей.

Одномерные суперпозиции $\chi_{\lambda_p} \circ \dots \circ \chi_{\lambda_1}$, $p \leq n$, $p \in N$, удовлетворяющие утверждению теоремы, являются отображениями последования (отображениями Пуанкаре) для многомерного отображения f .

Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ при $p = n$ удовлетворяют условию $\prod_1^n \lambda_i = \lambda^n$, где $\lambda > 0$ – максимальное собственное значение матрицы A (мы полагаем λ строго положительным, иначе динамика отображения f в K^n сводится к тривиальной); при $p < n$ $\prod_1^p \lambda_i = \bar{\lambda}^p$, где собственное значение $\bar{\lambda}$ может быть уже другим, $0 \leq \bar{\lambda} \leq \lambda$ (очевидно, что для нас представляют интерес только значения $\bar{\lambda} > 0$). Эти равенства легко получить с учетом циклическости множества J_p . Поскольку отображение f действует на K^n , отображение $\chi_{\lambda_p} \circ \dots \circ \chi_{\lambda_1}$ с необходимостью действует на $I = [0, 1]$. При этом $0 < \lambda_i \leq 4$, $i = \overline{1, p}$.

Сделаем несколько существенных замечаний относительно чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. На циклическом множестве J_p набор чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ сохраняется при последовательном переходе с одного отрезка луча на другой, в то время как одномерный вид отображения f^p получается из (*) с помощью циклической перестановки его сомножителей. Согласно теореме о расщеплении пространства на инвариантные циклические подпространства множество J_p содержится в некотором циклическом множестве M_p вида $M_p = R^p \cap K^n$, где $R^p \subseteq R^n$ – p -мерное инвариантное циклическое подпространство, $p \leq n$, $p \in N$. Множество M_p состоит из континуума циклических множеств вида J_p , отрезки лучей которых при $p > 1$ образуют полые пирамиды вокруг одномерного инвариантного множества, расположенного на неотрицательном собственном направлении матрицы A , отвечающем собственному значению λ (или $\bar{\lambda}$). На M_p отображение f^p также имеет одномерный вид (*), но $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ являются уже параметрами.

Для любой нетривиальной траектории $f^m \mathbf{x}$ точки \mathbf{x} введем в рассмотрение вектор $|f^m \mathbf{x}|^{-1} f^m \mathbf{x}$, который назовем *возрастной структурой популяции* и который определяет соотношения между плотностями возрастных групп в общей численности популяции (в момент времени m). Согласно приведенной выше теореме структура популяции, управляемой системой f^m , с течением времени либо стабилизируется ($p = 1$), либо существует асимптотически периодическое ее изменение с периодом $p > 1 \forall x \neq 0$. Норма вектора \mathbf{x} понимается как $|\mathbf{x}| = \sum_1^n x_i$.

Относительно динамики популяции теорема утверждает, что многогрупповая популяционная модель, заданная системой f^m , асимптотически имеет такое же поведение, как семейство одногрупповых популяционных моделей, заданных одномерными динамическими системами $(\chi_{\lambda_p} \circ \dots \circ \chi_{\lambda_1})^m$, $p \in N$, $1 \leq p \leq n$. Здесь в качестве p выступает число репродуктивных возрастных групп популяции; числа $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ – это коэффициенты размножения репродуктивных групп.

В силу одномерных представлений отображений последования (*) правомерно свести изучение свойств отображения f к изучению свойств отображений $\chi_{\lambda_p} \circ \dots \circ \chi_{\lambda_1}$, зависящих от p параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, $p \in N$. Более того, можно ограничиться случаем $p = 2$, поскольку новые по сравнению с одномерным отображением χ_λ (и его итерациями) свойства возникают уже у двухпараметрического отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Поэтому в дальнейшем мы будем изучать отображение

$$\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}, \quad 0 < \lambda_1, \lambda_2 \leq 4, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda^2.$$

Распишем его действие на произвольный вектор $\mathbf{x} \in I$. Имеем

$$\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1} \mathbf{x} = \lambda^2(1 - \chi_{\lambda_1} \mathbf{x})(1 - \mathbf{x})\mathbf{x}.$$

Отсюда видно, что удобнее рассматривать область параметров (λ_1, λ) , а не (λ_1, λ_2) . Очевидно, что при $0 < \lambda \leq 4$ и $0 < \lambda_1 \leq 4$ суперпозиция $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ имеет смысл и существует на I вместе со всеми своими итерациями, то есть $(\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1})^m x \in I$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Однако параметр λ_1 нельзя выбрать произвольным, в частности, произвольно малым для заданного λ ввиду ограничения $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda^2$, так как $\lambda_2 \leq 4$. Отсюда следует, что $\lambda_{1 \min} \leq \lambda_1 \leq 4$, где $\lambda_{1 \min}$ выбирается из условия: $4\lambda_{1 \min} = \lambda^2$. Таким образом, имеем следующую область изменения параметров (λ_1, λ) :

$$\Lambda = \{ (\lambda_1, \lambda) \mid \lambda_{1 \min} \leq \lambda_1 \leq 4, \quad 0 < \lambda \leq 4, \quad \lambda_{1 \min} = \lambda^2/4 \}.$$

Первое свойство отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$, нехарактерное для отображения χ_λ , относится к существованию областей значений параметров, в которых неподвижные точки отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ (и его итераций $(\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1})^m$, $m = 2, 3, \dots$) появляются и исчезают и нарушается их устойчивость; это ведет либо к скачкообразной смене их положения в фазовом пространстве, либо к смене типа аттрактора.

Действительно, рассмотрим неподвижные точки отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$, то есть корни уравнения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1} x = x$. После несложных преобразований получаем следующее уравнение для корней:

$$x^3 + (1/\lambda_1 - 1/3)x + 2/27 + 1/\lambda_1 \cdot (1/\lambda^2 - 1/3) = 0.$$

Дискриминант уравнения имеет вид

$$D(\lambda, \lambda_1) = -108(Q(\lambda, \lambda_1)^2/4 + P(\lambda_1)^3/27),$$

где

$$P(\lambda_1) = 1/\lambda_1 - 1/3, \quad Q(\lambda, \lambda_1) = 2/27 + 1/\lambda_1 \cdot (1/\lambda^2 - 1/3).$$

Дальнейшие результаты удобно излагать, используя язык теории катастроф [12], так как в рамках именно этой теории можно дать объяснение возникающих

метаморфоз отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$. Тогда приведенное выше кубическое уравнение задает *многообразие катастроф* в пространстве $x\lambda_1\lambda$, которое имеет вид поверхности со сборкой. Проецируя точки этой поверхности на область параметров Λ , замечаем, что линия $D = 0$ задает так называемое *бифуркационное множество* (параметров) и делит область значений параметров Λ на три части, в которых существуют одна, две и три неподвижных точки отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$. Эта линия состоит из двух ветвей, выходящих из точки $(\lambda, \lambda_1) = (3.0; 3.0)$ (*точка сборки*) и образующих кривой угол. Тогда при $\lambda, \lambda_1 < 3.0$ ($D < 0$) существует только одна нетривиальная неподвижная точка (при $\lambda \leq 1.0, \lambda_{1 \min} \leq \lambda_1 \leq 4.0$ является единственной притягивающей неподвижной точкой отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$).

На рис. 1 показаны три части области параметров $\{(\lambda_1, \lambda) \mid 3.0 \leq \lambda \leq 4.0, 3.0 \leq \lambda_1 \leq 4.0\}$, где $D > 0$ и существуют три различных нетривиальных неподвижных точки (подобласть внутри кривого угла); $D < 0$ и существует только одна нетривиальная неподвижная точка (подобласть вне кривого угла) и $D = 0$ – линия, на которой существуют три нетривиальных неподвижных точки, две из которых совпадают. Здесь λ_1 – ось абсцисс и λ – ось ординат.

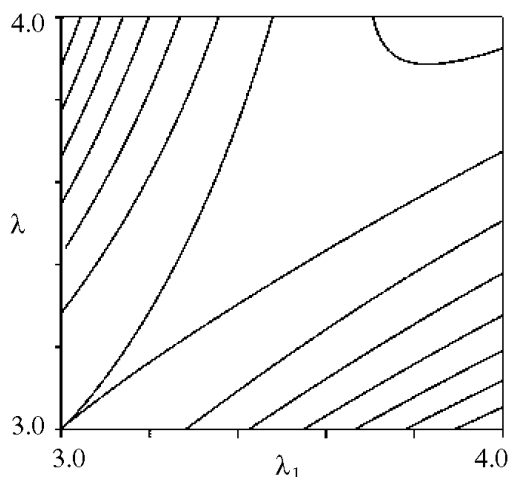


Рис. 1. Линия $D = 0$, выходящая из точки $(\lambda_1, \lambda) = (3.0; 3.0)$, в области $\{(\lambda_1, \lambda) \mid 3.0 \leq \lambda_1 \leq 4.0, 3.0 \leq \lambda \leq 4.0\}$

При изменении значений параметров λ_1, λ мы пересекаем линию $D = 0$, где нарушается устойчивость положений неподвижных точек. Данное свойство легко обнаруживается при рассмотрении бифуркационных диаграмм для отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$. Достаточно даже обратиться к (одномерным) срезам бифуркационных диаграмм для отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$, где вдоль оси абсцисс меняется один из параметров λ_1 или λ , другой параметр при этом фиксирован, а по оси ординат откладываются значения переменной x , расположенные на аттракторе, которые получаются при итерациях отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$. Рис. 2 иллюстрирует этот феномен. На рисунке представлен срез бифуркационной диаграммы для отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ при значениях $\lambda = 3.6, 3.24 \leq \lambda_1 \leq 4.0$. При значениях $\lambda_1 \approx 3.346$ и $\lambda_1 \approx 3.873$ ($D = 0$) видно, что здесь скачкообразно меняются типы аттракторов отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ (в двух различных подобластях области $3.346 \leq \lambda_1 \leq 3.873$, где $D > 0$, аттракторами являются неподвижные точки).

При значении $\lambda_1 \approx 3.51$ ($D > 0$) также происходит смена типа аттрактора отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$, и мы наблюдаем нарушение устойчивости положения цикла периода 2 (нарушение устойчивости положения неподвижных точек отображения $(\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1})^2$) и смену типа аттрактора.

Второе свойство отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ заключается в существовании «петель», состоящих из конечного (или бесконечного) числа притягивающих периодических траекторий отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ (то есть внутри этих «петель» мы наблюдаем прямые и обратные бифуркации удвоения периода притягивающих траекторий, а также хаос, антихаос и т.д.).

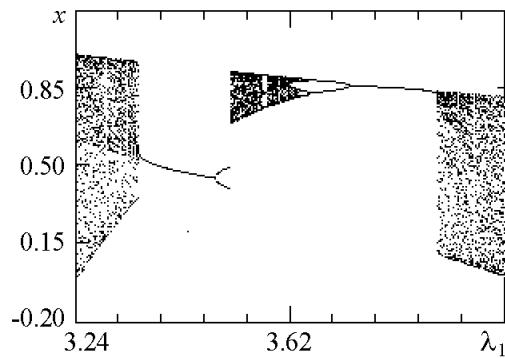


Рис. 2. Срез бифуркационной диаграммы для отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ при $\lambda = 3.6$; $3.24 \leq \lambda_1 \leq 4.0$. При $\lambda_1 \approx 3.346$ и $\lambda_1 \approx 3.873$ $D = 0$

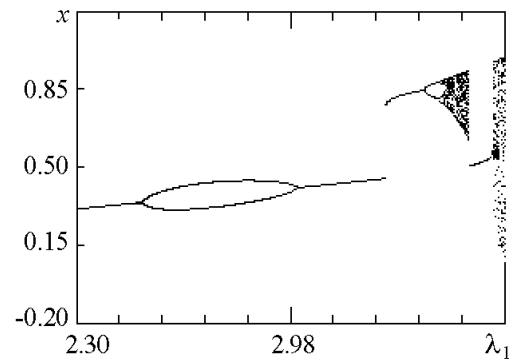


Рис. 3. Срез бифуркационной диаграммы для отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ при $\lambda_1 = 3.35$; $0.8 \leq \lambda \leq 3.66$. При $\lambda \approx 2.46$, $\lambda \approx 3.02$ происходят соответственно вход в область притяжения цикла периода 2 и выход из нее

Одна из причин существования «петель» заключается в том, что при непрерывном изменении значений параметров происходит пересечение областей притяжения циклов периода $k \cdot 2^n$, $k \in N$, $n = 0, 1, 2, 4, \dots$: вначале происходит вход в эти области, а затем – выход из них и пересечение областей притяжения циклов, но уже в обратном порядке $\dots, n, n - 1, n - 2, \dots$. На рис. 3 представлен срез бифуркационной диаграммы для отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ при значении $\lambda_1 = 3.35$, поясняющий данное свойство. Здесь $0.8 \leq \lambda \leq 3.66$. При значениях $\lambda \approx 2.46$ и $\lambda \approx 3.02$ происходят соответственно вход в область притяжения цикла периода 2 и выход из нее. Кроме того, на диаграмме можно также наблюдать нарушение устойчивости положений неподвижных точек при значениях $\lambda \approx 3.269$, $\lambda \approx 3.608$ ($D = 0$) и $\lambda \approx 3.54$ ($D > 0$).

Отметим еще раз, что динамика отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ по сравнению с однопараметрической отображения χ_λ усложняется из-за возможности пересечения подобластей параметров, в которых отображение имеет разные динамические свойства, при вариации значений параметров. Все эти особенности динамики отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ можно обнаружить на бифуркационных диаграммах для данного отображения в области Λ . Большой интерес здесь представляет окрестность точки $(\lambda_1, \lambda) = (3.0; 3.0)$.

Заключение

Допуская возможность существования биологических популяций, динамика которых описывается системой f^m , можно дать прогноз динамики популяций, принимая во внимание их самоорганизацию и стабильность. Мы имеем в виду, в первую очередь, стабильность возрастной структуры популяции (вектор $|f^m \mathbf{x}|^{-1} f^m \mathbf{x}$), которая со временем либо стабилизируется, либо существует ее периодическое изменение для любой начальной плотности популяции $\mathbf{x} \neq 0$. Асимптотическая устойчивость структуры популяции позволяет определять число репродуктивных возраст-

ных групп (число p в $(*)$) для корректного описания динамики популяции. Заметим, однако, что хотя структура популяции является устойчивым признаком популяции и асимптотически меняется периодическим образом, плотность популяции и ее возрастных групп может меняться произвольным образом, включая периодическое и хаотическое изменения. Вычислим $\lambda = \left(\prod_1^p \lambda_i\right)^{1/p}$ – максимальное собственное значение матрицы A и определим область параметров $\lambda_1 \dots \lambda_p$. Позже мы можем «забыть» про матрицу A (и внутригрупповые взаимосвязи) и контролировать динамику популяции, меняя коэффициенты репродуктивности возрастных групп $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ в одногрупповой модели.

В дополнении отметим, что если все n возрастных групп являются репродуктивными, то матрица A биологической модели является неотрицательной импримитивной с индексом импримитивности n [13], система f^m называется в этом случае канонической [14] и модель тождественна модели Лесли с матрицей $L = A^*$, где A^* – транспонированная к A матрица.

Библиографический список

1. *Leslie P.H.* The use of matrices in certain population mathematics // *Biometrika*. 1945. Vol. 33. P. 183.
2. *Geramita J.M. and Pullman M.J.* An introduction to the application of non-negative matrices to biological systems // *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics*. Kingston, Ontario, Canada: Queen's Univ. 1984, № 68.
3. *Caswell H.* Matrix population models: construction, analysis and interpretation. Sunderland, Massachusetts, USA: Sunauer Associates Inc., 1989.
4. *Логофет Д.О.* Еще раз о нелинейной модели Лесли: асимптотическое поведение траекторий в примитивном и импримитивном случаях // *Докл. АН СССР*. 1991. Т. 318, № 5. С. 1077.
5. *Панкратова И.Н., Рахимбердиев М.И.* О предельных множествах системы дискретных уравнений со скалярной нелинейностью // *Известия НАН РК, сер. физ.-мат.* 1993, № 5. С. 56.
6. *Панкратова И.Н.* О предельных множествах многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения // *Дифференц. уравнения*. 1996. Т. 32, № 7. С. 995.
7. *Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В.* Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова Думка, 1989.
8. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // *Успехи физ. наук*. 1983. Т. 141, № 2. С. 343.
9. *Панкратова И.Н.* Динамические свойства многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения для типичных случаев однопараметрической динамики // *Известия МОН, НАН РК, сер. физ.-мат.* 2001, № 5. С. 55.
10. *Панкратова И.Н.* Одномерные представления многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения // *Математический журнал*. Алматы. 2004. Т. 4, № 1. С. 62.

11. Панкратова И.Н. Сведение многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения к одномерному // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 11. С. 1570.
12. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.
13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. С. 355.
14. Панкратова И.Н., Рахимбердиев М.И. Канонический вид многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения // Математический журнал. Алматы. 2003. Т. 3, № 1. С. 54.

Институт математики

*Министерства образования и науки РК
Алматы, Казахстан*

Поступила в редакцию

После доработки

10.09.2005

30.09.2005

REPRESENTATION OF MANY-GROUP POPULATION MODEL AS ONE-SPECIES POPULATION MODEL WITH MANY PARAMETERS

I.N. Pankratova

We propose a dynamic system determined by a many-dimensional logistic map as a variant of a nonlinear model for dynamics of a biological many-group population. In some parts of a compact phase space the map displays a behavior which is atypical for a one-parameter one-dimensional logistic map. For a many-group population model it means stepwise changes of a total population density and densities of population age groups. We have an opportunity of getting a total population age groups changing periodically with the same period in many various parts of a phase space. A mechanism of dynamics originated in this manner for such a many-group population is discussed.



Панкратова Ирина Николаевна – родилась в 1958 году, окончила математический факультет Казахского государственного университета им. С.М.Кирова в 1980 году. Работает в институте математики МОН РК в должности старшего научного сотрудника, кандидат физико-математических наук (1994). Имеет более 60 научных публикаций. Область научных интересов: многомерная многопараметрическая нелинейная динамика и ее применения в биологии и других областях науки. E-mail: irina@math.kz