*К 100-летию со дня рождения С.П. Стрелкова*

Изв. вузов «ПНД», т. 13, № 5–6, 2005 УДК 533.6.071.87

# О НЕКОТОРЫХ ПОНЯТИЯХ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ СВЯЗЯМИ

*В.И. Смыслов*

Описание основных понятий, относящихся к собственным колебаниям неконсервативных систем с несимметричными связями, в частности, таких как комплексные собственные формы и частоты, комплексные нормальные координаты.

По представлению ООН 2005 год объявлен годом физики. Важнейшую часть физики составляет наука о колебаниях, которая охватывает явления в масштабах от атома до Вселенной. Отечественный вклад в науку о колебаниях и в ее приложения к практическим задачам достаточно велик. В решении целого ряда колебательных задач, относящихся к аэроупругости, большая заслуга принадлежит Сергею Павловичу Стрелкову. На основе одной из написанных им книг [1] учились и успешно работали инженеры, ученые многих НИИ, вузов, КБ и других предприятий. К сожалению, это издание стало библиографической редкостью, а некоторые его положения, так случилось, даже открываются заново.

Поводом к изложенному в настоящей заметке послужил выход книги С.В. Аринчева [2], составленной на базе спецкурсов для студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана (специальности «Ракетостроение» и «Космические летательные аппараты и разгонные блоки»). В последнее время в вузах появился целый ряд научно-технических книг и учебников; некоторые, к сожалению, не отвечают требуемому качеству. В связи с этим представляется необходимым уточнить или напомнить ряд основных понятий, в первую очередь имеющих отношение к специфическим задачам динамической аэроупругости, теории колебаний и теоретической механики, на примере линейных систем с конечным числом степеней свободы.

Достаточно общее уравнение *собственных колебаний*[1] системы имеет вид:

$$\mathrm{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathrm{H}\dot{\mathbf{q}} + \mathrm{K}\mathbf{q} = 0, \tag{1}$$

[1] Не вдаваясь в варианты описания сил, зависящих от скорости.

где **q** – вектор обобщенных координат (смещений, углов); M, K и H – матрицы, соответственно, инерционных, упругих сил и сил демпфирования, которые могут относиться к упругой конструкции, воздушному потоку, системе автоматического управления (САУ) и другим.

## 1. Неконсервативные системы

Первые из таких систем, достаточно широкого класса, являются ***неконсервативные*** динамические системы. При их анализе зачастую проводится сопоставление с *консервативными* системами, известным признаком которых[2] (см., например, у А.А. Андронова [3], в справочнике [4] и др.) является неизменность количества энергии. Все прочие системы являются неконсервативными. В инженерной практике огромное число задач относится к неконсервативным системам (хотя в расчетах зачастую используется схематизация исследуемых систем, как консервативных). Для консервативных систем в уравнении (1) $H\dot{\mathbf{q}} = 0$, а матрицы M и K симметричные, с положительными диагональными элементами. Эти матрицы приводятся к диагональному виду одновременно.

Одним из общих признаков классификации систем в теоретической механике является характер *консервативных* или *неконсервативных сил* (рис. 1). Для последних отсутствует потенциал и, следовательно, работа сил при переходе системы из одного состояния в другое зависит от способа перехода, в отличие от таких консервативных сил, как упругие или силы тяжести.

В неконсервативных системах четко выделяется класс *диссипативных систем* – с рассеянием энергии (зависящей от скорости колебаний), в которых, если нет других неконсервативных сил, принципиально не возникает потеря динамической устойчивости. Для них справедливы свойства матриц M и K, относящихся к консервативным системам, а матрица H – симметричная.

*Возникновение неустойчивости* в неконсервативных системах – одно из основных явлений, составляющих предмет исследования динамической аэроупругости, науки, в которой важнейшими системами являются упругие тела или конструкции, взаимодействующие с потоком (основным источником энергии). Во многих случаях в этом взаимодействии участвует САУ, элементы которой имеют дополнительный источник энергии. Отличительной особенностью последней разновидности неконсервативных систем является наличие несимметричной связи[3] между отдельными степенями свободы – колебаниями соответствующих обобщенных координат (см. [1, 5]). Зачастую в этом случае используется идея (привычная для всех, занимающихся задачами флаттера) И. Рокара [6] о происхождении динамической неустойчивости систем, в которых по каким-либо причинам происходит сближение частот. То значение параметра, которое соответствует их равенству, определяет границу устойчивости. Особый термин для того же класса неконсервативных систем – Г. Циглера [5], который называет их *циркуляционными*, по названию неконсервативных сил, не зависящих от скорости колебаний (в отличие от диссипативных сил).

[2] Не смешивать с понятием *автономные системы*, которые могут включать источник энергии, лишь бы отсутствовали внешние воздействия, зависящие от времени, [3].

[3] Системы являются *активными*, в отличие от пассивных, [1].

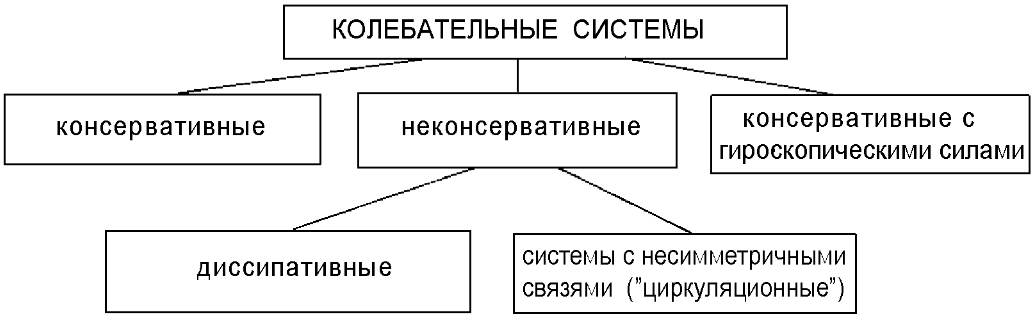


Рис. 1. Классификация колебательных систем (по характеру сил)

Системы с гироскопическими силами (зависящими от скорости), встречающиеся в некоторых задачах аэроупругости, называются в [5] *гироскопическими консервативными* системами. Здесь матрица H – кососимметричная.

Неконсервативные силы со стороны потока, вызывающие несимметричное («невзаимное») воздействие колебания одного вида на колебания другого (например, кручения крыла на его изгиб), может дополняться любыми взаимодействиями, связанными с наличием однонаправленных элементов САУ (в первую очередь – силовых приводов).

Введенное в книге [2] «обобщенное» определение неконсервативной системы как такой, где «при парном взаимодействии степеней свободы первая из двух соответствующих обобщенных сил тождественно равна нулю, а вторая зависит от обобщенной координаты, соответствующей первой обобщенной силе», является ошибочным. Эта формулировка относится лишь к частному случаю из множества неконсервативных систем с несимметричной связью (названному С.П. Стрелковым в [7] системой с необратимыми связями). Недопустимо придавать общий характер частной (хотя и важной) задаче. Поэтому неправомерно называть (чтобы не вводить в заблуждение читателя книги) «теорией колебаний неконсервативных систем» [2] предмет рассмотрения, притом неполного, одного лишь класса ***систем с несимметричными связями***. Вместе с тем, можно лишь приветствовать факт обращения автора [2] к указанной теме, крайне важной для задач динамической аэроупругости, учитывая малое количество книг по этому вопросу.

## 2. Комплексные частоты

Другое понятие для рассматриваемых неконсервативных систем – ***комплексная частота***, было специально введено (по аналогии с понятием комплексного корня) почти полвека назад С.П. Стрелковым [1, 7], оно вошло в обиход и стало в задачах аэроупругости привычным. Вектор частного решения уравнения (1) имеет вид

$$\mathbf{q}_k = C_k \mathbf{q}_{0k} e^{\lambda_k t}, \quad \lambda_k = \mathrm{Re}\,\lambda_k + j\mathrm{Im}\,\lambda_k = \delta_k \pm j\omega_k, \tag{2}$$

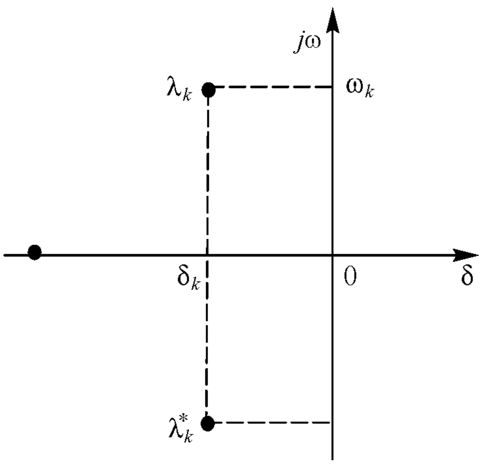


Рис. 2. Комплексные собственные частоты на плоскости корней: $\delta_k$ – действительная и $\omega_k$ – мнимая часть корня

где $\mathbf{q}_{0k}$ – вектор амплитуд, $C_k$ – константа, определяемая начальными условиями. Здесь подразумевается, что на комплексной плоскости корней $\lambda$ мнимая часть $(\omega)$ есть собственно частота гармонического сомножителя, а действительная часть $(\delta)$ – показатель затухания (рис. 2). Его знак определяет характер решения: расходящегося или затухающего, то есть выходит корень характеристического уравнения в правую полуплоскость (на плоскости корней) или в левую. В системе без демпфирования на той же плоскости действительные части корней нулевые, а частоты располагаются на мнимой оси[4]. Очевидно, понятия собственных частот для консервативной и неконсервативной систем в принципе различны.

## 3. Собственные формы

Представляется излишним и неудачным дополнять известное понятие ***собственной формы*** консервативной системы таким определением, как «пропорциональная» (в книге [1]). Классическое понятие собственной формы, как совокупности *коэффициентов распределения* [1, 8] амплитуд собственных колебаний (на собственной частоте), относится лишь к консервативной системе. При этом все величины действительные, в терминах матричной алгебры – это собственный вектор $\mathbf{q}_{0k}$, а квадрат частоты $\lambda^2$ – собственное значение. Физический или инженерный смысл колебаний системы без затухания по собственной форме – фазовые сдвиги между колебаниями координат всех точек отсутствуют или составляют 180 градусов, и отношение амплитуд в любой момент времени остается постоянным, то есть мгновенные фотографии упругой конструкции отличаются лишь константой – общим множителем, положительным или отрицательным. Имеются характерные точки – *узловые*, в которых амплитуда колебаний всегда нулевая.

Важным свойством собственных форм является их ортогональность, равенство нулю суммы произведений соответствующих коэффициентов распределения $k$-й и $m$-й собственных форм (относящихся к различным собственным частотам) с инерционными или упругими весовыми коэффициентами:

$$(\mathbf{q}_{0k})^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\mathbf{q}_{0m} = (\mathbf{q})_{0k}^{\mathrm{T}}\mathrm{K}\mathbf{q}_{0m} = 0, \tag{3}$$

где $(\mathbf{q}_{0k})^{\mathrm{T}}$ – транспонированный вектор $\mathbf{q}_{0k}$.

Физический смысл условий ортогональности для консервативных систем следующий. Сумма произведений элементов векторов формы и упругих $\mathrm{K}\mathbf{q}_{0m}$ (или инерционных $\mathrm{M}\mathbf{q}_{0m}$) сил равна нулю, если векторы относятся к разным собственным частотам. В этом случае равна нулю и работа упругих (или инерционных) сил одного тона на перемещениях другого. Для одинаковых частот указанная сумма произведений равна значению эффективной жесткости (или массы) данного тона.

[4]Действительными значения частоты оказываются с учетом комплексно-сопряженной части общего решения.

Такие характеристики, как набор («спектр») собственных частот и собственных форм конкретной упруго-массовой системы, являются основными, характеризующими колебательные свойства упругой конструкции вне потока.

Ситуация меняется при рассмотрении неконсервативной системы с демпфированием. В этом случае появляется комплексная собственная частота, привычное понятие собственной формы оказывается неприменимо. Лишь в частном случае неконсервативной системы (в ограниченном диапазоне изменения неконсервативных сил и при отсутствии сил, зависящих от скорости колебаний) можно найти значения действительных собственных частот и соответствующих коэффициентов распределения, однако эти данные имеют ограниченную ценность. Пример такого случая – колебания в потоке на докритической скорости без учета сил конструкционного и аэродинамического демпфирования, при этих колебаниях с изменением режима потока изменяются частота и «форма».

Для неконсервативной системы с затуханием С.П. Стрелковым [1, 7] было введено понятие ***комплексной собственной формы***, в которой коэффициенты распределения амплитуд (элементы вектора $\mathbf{q}_{0k}$) – комплексные величины, они образуют не один, а *два вектора*, условно – действительный и мнимый.

$$\begin{aligned}&\mathbf{q}_k = C_k\mathbf{q}_{0k}e^{\lambda_k t} + \boldsymbol{C}_k^*\mathbf{q}_{0k}^*e^{\lambda_k^* t} = 2e^{\delta_k t}[(\mathrm{Re}\mathbf{q}_{0k})\cos\omega_k t - (\mathrm{Im}\mathbf{q}_{0k})\sin\omega_k t],\\ &\mathbf{q}_{0k} = (\mathrm{Re}\mathbf{q}_{0k}) + j(\mathrm{Im}\mathbf{q}_{0k}).\end{aligned} \tag{4}$$

В отличие от консервативной системы каждая амплитуда здесь характеризуется еще и показателем затухания (положительным или отрицательным) и меняется со временем. Фазовые сдвиги между колебаниями координат отдельных точек отличаются теперь от 0 или 180 градусов. Признаком такой формы является допустимость ее представления двумя наборами амплитуд – двумя «фотографиями»: в первый определенный момент времени и во второй момент, через четверть периода. Обе картины могут быть совершенно различными, даже с разным числом «узлов». Наглядным представлением колебаний по такой форме служит пучок векторов – «звездочка» на комплексной плоскости, вращающийся в соответствии с собственной частотой, все амплитуды которого убывают или возрастают с одинаковым показателем затухания [1], их годографы – спирали (рис. 3, где элементы вектора $\mathbf{q}_{0k}$ обозначены как $\mathrm{Re}\mathbf{q}_{0k}$, $\mathrm{Im}\mathbf{q}_{0k}$). В противоположность этому собственную форму консервативной системы представляет набор векторов, расположенных вдоль одной прямой, вращающейся в соответствии с собственной частотой, все амплитуды неизменны и годографы векторов – концентрические окружности, проекции векторов на действительную ось достигают экстремальных значений одновременно.

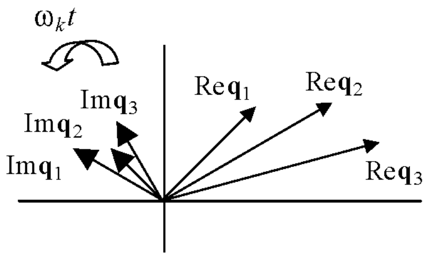

Рис. 3. Комплексная собственная форма

Там же С.П. Стрелковым [1, 7] были введены и условия ортогональности комплексных собственных форм, более сложные, чем в варианте консервативной системы, использующие в этом случае собственные векторы сопряженной (или транспонированной) системы, так называемые условия биортогональности. В случае неконсервативных систем наглядность условий ортогональности пропадает, поскольку они представляют определенные соотношения между собственной формой исходной системы и транспонированной [7], последняя практически не имеет отношения к рассматриваемой системе.

Для уравнения (1) при отсутствии сил демпфирования, $H\dot{\mathbf{q}} = 0$, и при недиагональной матрице K – несимметричной упругой связи, условия ортогональности записываются наиболее просто, они подобны соотношению (3):

$$(\mathbf{q}_{0k})^{\mathrm{T}} \mathrm{K}\, \mathbf{w}_{0m} = 0, \tag{5}$$

с тем отличием, что $\mathbf{w}_{0m}$ – собственный вектор сопряженной (транспонированной) системы, с транспонированной матрицей $\mathrm{K}^*$, взамен K.

При преобразовании уравнения (1) к уравнению в координатах $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ («фазовых») условия ортогональности для неконсервативной системы с несимметричными связями записываются в виде:

$$(\mathbf{u}_{0k})^{\mathrm{T}}\, \mathbf{w}_{0m} = 0, \tag{6}$$

где $(\mathbf{u}_{0k})^{\mathrm{T}}$ - собственный вектор исходной системы, $\mathbf{w}_{0m}$ – собственный вектор сопряженной системы (соответствующий корень – $\lambda_m^*$, притом $\lambda_m \neq \lambda_k$).

## 4. Нормальные координаты

Еще одним основным понятием для упругих систем являются ***нормальные координаты***, называемые также *главными*. Их можно определить как такие, в которых колебания будут гармоническими при любых начальных условиях. Классический термин относится лишь к консервативным системам, при этом в нормальных координатах уравнения колебаний системы оказываются независимыми (друг от друга), при любых видах связей, описывающих эти колебания в других координатах. Этот чрезвычайно удобный вид записи, очень наглядный, широко используется в аэроупругости, колебания каждой нормальной координаты как раз и являются колебаниями по одной из собственных форм. Матрица Q – преобразования к нормальным координатам $\eta$, в которых становятся диагональными одновременно матрицы инерции $\mathrm{M}^0$ и жесткости $\mathrm{K}^0$, называется *модальной*, ее столбцы – векторы собственных форм:

$$\mathbf{q} = \mathrm{Q}\eta; \quad \mathrm{M}^0 = \mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\mathrm{Q}; \quad \mathrm{K}^0 = \mathrm{Q}^{\mathrm{T}} KQ, \tag{7}$$

В прикладных задачах модальная матрица, как правило, не имеет обратной, она прямоугольная, поскольку число обобщенных – «физических» координат на порядок больше числа рассматриваемых собственных тонов.

Применительно к неконсервативным системам с комплексными собственными частотами было специально введено (тоже С.П. Стрелковым [4, 7]) понятие ***комплексных нормальных координат***, соответствующих упомянутым комплексным собственным формам, с тем же наглядным представлением. Естественно, в этих координатах гармонических колебаний быть не может, каждая нормальная координата $\eta_k$ определяет интенсивность, комплексную частоту (затухание и частоту) колебаний всех физических координат. Иными словами, по всем этим координатам комплексная нормальная координата дает распределение амплитуд и фазовых сдвигов:

$$\begin{gathered} \eta_k = C_k e^{\lambda_k t} = (\mathrm{Re}\,\eta_k) + j(\mathrm{Im}\,\eta_k); \\ \mathbf{q}_k = \Sigma(\eta_k \mathbf{q}_{0k}) + \Sigma(\eta_k^* \mathbf{q}_{0k}^*) = \Sigma[(\mathrm{Re}\,\eta_k)(\mathrm{Re}\,\mathbf{q}_{0k}) - (\mathrm{Im}\,\eta_k)(\mathrm{Im}\,\mathbf{q}_{0k})]. \end{gathered} \tag{8}$$

Данная нормальная координата соответствует затухающему колебанию с соответствующим показателем затухания и частотой, и при этом с ее помощью могут быть получены значения всех физических координат.

## 5. Частный случай неконсервативных систем

Особый, но часто используемый в аэроупругости вид неконсервативных систем определяется представлением сил демпфирования в виде сил эквивалентного вязкого трения, пропорциональных упругим, инерционным силам или их линейным комбинациям. В этом случае с помощью модальной матрицы Q оказывается возможным переход к *нормальным координатам консервативной системы*, в которых колебания системы с демпфированием происходят независимо для каждой собственной частоты и система уравнений (1) распадается на ряд независимых:

$$m_k^0 \ddot{\eta}_k + h_k^0 \dot{\eta}_k + k_k^0 \eta_k = 0, \tag{9}$$

где $m_k^0$, $h_k^0$ и $k_k^0$ – обобщенные массы, демпфирование и жесткость, скалярные элементы соответствующих диагональных матриц. Таким образом, колебания полной диссипативной системы представляются набором независимых колебательных одностепенных систем в нормальных координатах той же упруго-массовой конструкции, но без учета демпфирования. Эта несколько усложненная, но корректная формулировка не всегда выдерживается, что приводит в ряде случаев к ошибкам в публикациях, по существу безошибочных в прочих отношениях (см., например [4, 8]). Указанное представление характеристик демпфирования оправдано во многих задачах динамической аэроупругости, в первую очередь, благодаря относительно малым (по большей части) величинам логарифмических декрементов колебаний соответствующих тонов. Это позволяет существенно упростить расчетные параметрические исследования и анализ экспериментальных данных, где важную роль играет также наглядность представления результатов, в частности, относящихся к отдельным собственным тонам.

## 6. О некоторых свойствах систем с несимметричными связями

Автор книги [2] приводит понятия нормальных комплексных координат, соотношений биортогональности, комплексной собственной формы практически так же, как их вводил С.П. Стрелков, см. [1]. Досадным обстоятельством является то, что, несмотря на сравнительно широкий набор библиографических ссылок, включающих также Труды ЦАГИ, «Ученые Записки ЦАГИ» (авторы А.Ф. Минаев, В.Г. Буньков, М.С. Галкин, В.Н. Поповский и др.), в их число в книге [2] не вошел ни широко известный учебник по теории колебаний С.П. Стрелкова [1], ни более ранняя его публикация [7].

В целом к достоинствам учебного пособия [1], полезным для рассмотрения задач аэроупругости, следует отнести акцентирование *особенностей систем с несимметричными связями* и целый ряд примеров. На предельно простой искусственной двухстепенной системе с однонаправленной связью демонстрируются такие свойства, как снижение собственной частоты с увеличением жесткости (и рост частоты с увеличением инерции) и соответствующее изменение коэффициентов чувствительности. Сближение частот по мере увеличения скоростного напора («аэродинамической жесткости») – рутинный эффект, например, в задачах классического флаттера, см. также его обсуждение у И. Рокара [6]. В той же книге приведен парадоксальный, на первый взгляд для специалистов аэроупругости, факт для системы с несимметричными связями: понижения границы устойчивости (например, уменьшение критической скорости флаттера) с увеличением демпфирования. Это детально иллюстрируется в [2] на упомянутой двухстепенной системе, так же как изменение собственной формы с изменением коэффициента однонаправленной связи, изменение числа узлов и другие эффекты. Интерес представляют также примеры простых систем увеличения динамической устойчивости с помощью различных видов обратной связи, продольных колебаний жидкостной ракеты и другие.

**Библиографический список**


1. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний: Учебник для университетов и вузов. М.: ГИТТЛ, 1950. 2-е изд. М.: Наука, 1964.
2. *Аринчев С.В.* Теория колебаний неконсервативных систем (с примерами на компакт-диске): Учеб. пособие для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
3. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
4. Вибрации в технике: Справочник. Т.1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978.
5. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М., 1971.
6. *Рокар И.* Неустойчивость в механике. М., 1959.
7. *Стрелков С.П.* К теории колебаний в дискретных неконсервативных линейных системах // Труды ЦАГИ, вып. 722, 1958.
8. *Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С.* Теория колебаний: Учеб. для вузов / Под общ. ред. К.С.Колесникова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003.
9. *Колесников К.С., Сухов В.Н.* Упругий летательный аппарат как объект автоматического управления. М., 1974.
10. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., 1961.


*Центральный Аэрогидродинамический институт*

*Поступила в редакцию 15.06.2005*

## ABOUT SOME CONCEPTS OF OSCILLATION THEORY OF NONCONSERVATIVE SYSTEMS WITH ASYMMETRICAL COUPLINGS

*V.I. Smyslov*

The description of base concepts concerning to self-oscillations of nonconservative systems with asymmetrical couplings is given, in particular, such as the complex proper forms and frequencies, and complex normal coordinates.

*Смыслов Всеволод Игоревич* – родился в Ленинграде (1931), окончил физический факультет МГУ (1954). После окончания МГУ работает в Центральном аэрогидродинамическом институте. Доктор технических наук (1989, ЦАГИ) в области теории колебаний, аэроупругости, теории автоматического управления, моделирования колебательных процессов, методов и средств воспроизведения вибраций, автоматизации экспериментальных исследований. Лауреат премии им. Н.Е. Жуковского.