Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 1, 2006 УДК 537

ХАОС И НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

Р.Р. Мухин

Статья посвящена историческому развитию одного из ключевых понятий гамильтоновых систем – неинтегрируемости и ее связи с хаотическим поведением системы. Рассмотрена эволюция от понятия полностью интегрируемой системы до понятия частично интегрируемой. Обсуждается связь неинтегрируемости с такими фундаментальными понятиями нелинейной динамики как колмогоровская устойчивость, системы с разделенным фазовым пространством, диффузия Арнольда, паутина Заславского и др.

Феномен динамического хаоса или просто хаоса находит свое проявление в самых различных областях науки и является предметом многочисленных исследований. Хаотическая динамика тесно связана с таким тонким и сложным понятием, как интегрируемость дифференциальных уравнений. Установление того факта, что неинтегрируемость обусловлена сложным характером поведения динамических систем, явилось крупнейшим достижением. Последовательное и систематическое изложение вопросов неинтегрирумости как отдельного раздела теории вперые дал В.В. Козлов [1], эти вопросы вошли также отдельной главой в широко известный обзор [2]. В более поздней книге Козлова [3] результаты значительно дополнены. Сложилась самостоятельная часть теории гамильтоновых систем, предметом которой стали вопросы неинтегрируемости. Гамильтонов формализм представляет важнейшую часть теории динамических систем, сфера его применения продолжает расширяться, он входит существенной составной частью в целый ряд математических теорий. В данной работе делается попытка проследить в историческом развитии некоторые стороны одного фундаментального аспекта неинтегрируемости – ее связи со сложным поведением системы.

Проблема неинтегрируемости возникла на пересечении нескольких направлений исследований. Интегрирование уравнений динамики со времен Ньютона является важнейшей проблемой как для самой математики, так и для ее приложений.

Понятие об интегрировании претерпело длительную эволюцию, и огромное стимулирующее влияние здесь оказали прикладные проблемы, в первую очередь задачи, пришедшие из небесной механики. В математике XVIII – первой половины XIX веков под интегрированием понималось интегрирование в явном виде, включая сюда и интегрирование в квадратурах. При этом вопрос о самой интегрируемости не ставился, это считалось само собой разумеющимся. Задачи подразделялись на проинтегрированные и непроинтегрированные. Довольно скоро стало ясно, что во многих практически важных случаях задачу не удается свести к квадратурам. Сюда, в первую очередь, относится знаменитая проблема трех тел, которая до наших дней остается неисчерпаемым источником новых задач и новых идей. Дальнейшее развитие пошло несколькими путями. С одной стороны, усилия были направлены на разработку практических методов, когда с помощью разложения в бесконечные ряды, непрерывные дроби или численным интегрированием уравнений движения можно было получить решение с требуемой степенью точности. Вполне становится понятной позиция известного математика XVIII века И. Ламберта, полагавшего все задачи динамики в этом смысле разрешимыми [4].

Описанный подход, несмотря на его во многих практически важных случаях достаточность, оставался внутренне неудовлетворительным. Это отчетливо видно в свете развернувшейся в первой половине XIX века глубокой реформы математического анализа, заложившего новые каноны математической строгости и обоснованности [5]. Кроме того, приближенные решения не давали ответа на некоторые насущные вопросы прикладных задач, например, в небесной механике – о характере движения небесных тел на неограниченном промежутке времени. Последнее имеет непосредственное отношение к проблеме устойчивости Солнечной системы.

В русле новых тенденций в математике стала рассматриваться и проблема интегрирования. В 20–40-х годах XIX века утверждалась методология, направленная на выявление условий и границ истинности каждого утверждения. Особое значение получили теоремы существования, в частности, теоремы существования и единственности решений дифференциальных уравнений, и четкое различие необходимых и достаточных условий. Одной из форм выражения новой идейной атмосферы была постановка вопроса о неразрешимости той или иной задачи [6]. В это время Н.Х. Абелем была доказана неразрешимость в радикалах общего алгебраического уравнения пятой степени, П. Ванцелем – невозможность решения с помощью циркуля и линейки восходящих еще к античности задач об удвоении куба и трисекции угла. Сюда же примыкает и работа 1841 года Ж. Лиувилля «Новые замечания об уравнении Риккати» [7], в которой была доказана невозможность в общем случае интегрирования этого уравнения в квадратурах. Эта работа является очень примечательной и ее можно принять за отправную точку широко развернувшихся в дальнейшем исследований о неинтегрируемости тех или иных классов уравнений. К этому же времени относится и первая строгая постановка вопроса об интегрируемости. Это было сделано в 1855 году Э. Буром и Ж. Лиувиллем, связавшими интегрирование гамильтоновой системы в квадратурах с существованием достаточно большого набора ее первых интегралов [1, 8, 9], что направило по новому пути поиски точных решений. Справедливости ради надо заметить, что главные заслуги здесь принадлежат малоизвестному математику Буру, традиция же их относит одному Лиувиллю (интегрируемость по Лиувиллю), хотя результаты последнего более скромные [10].

Как едко отмечает Д.В. Аносов, это тот случай, когда имущему добавляется, а у неимущего отнимается.

В вопросе об интегрировании на протяжении XIX века прослеживаются две тенденции. С одной стороны, происходило постепенное снижение интереса к поиску методов интегрирования дифференциальных уравнений в квадратурах [6], с другой – прикладные задачи поддерживали обостренное внимание к таким методам, и главной питательной средой здесь служила все та же проблема трех тел.

Поворотным пунктом в понимании принципиального различия между интегрируемыми и неинтегрируемыми системами стали фундаментальные работы А. Пуанкаре [11–13]. В первой из них (1881–1886) объединены четыре мемуара под общим названием «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» [11]. Вторую работу «О проблеме трех тел и уравнениях динамики» [12] составил мемуар, выдвинутый на конкурс на премию шведского короля Оскара II (1890). Третьей работой (1892–1899) является трехтомник «Новые методы небесной механики» [13]. В названии подчеркнуто радикальное отличие от другого фундаментального труда – пятитомной «Небесной механики» П.С. Лапласа, в которой подведен итог развития данной области до начала XIX века. У Лапласа и Пуанкаре не просто два разных подхода к одному и тому же кругу проблем, отличие носит глубинный характер. Здесь две разные философии, с одной стороны, принцип жесткого детерминизма Лапласа («демон Лапласа»), с другой – идеи о сложном поведении, неоднозначности, неопределенности. Поначалу Пуанкаре изложил не совсем явно эти идеи. Они существовали у него как бы в зародыше и развились в его более поздних работах, а главным образом, достались в наследство XX веку. В указанных трудах Пуанкаре вводит в круг идей и понятий, положивших начало целому ряду новых областей математики. Поразительное богатство наследия Пуанкаре легло в основу многих исследований нескольких поколений математиков и не исчерпано до сих пор. Со времен Ньютона, в течение двух веков продолжалось господство количественных методов, когда сложилась парадигма явных решений, точных формул, долговременного предсказания поведения системы. В противовес сложившимся представлениям Пуанкаре показал, что в подавляющем большинстве дифференциальные уравнения неинтегрируемы, интегрируемые случаи встречаются крайне редко. Произошла переоценка ценностей, указанные работы Пуанкаре положили начало новому этапу – качественным методам исследования, что значительно расширило класс изучаемых динамических систем.

Качественная теория означала переход к принципиально иной стратегии исследования. Преобладающими стали топологические и теоретико-групповые методы, проникновение вероятностного описания. Было осознано, что математические проблемы динамики связаны с качественным поведением траекторий во всем фазовом пространстве, на смену локальному подходу должно прийти глобальное рассмотрение.

Следующий значительный шаг в качественной теории был сделан Дж. Биркгофом. Под влиянием идей Пуанкаре у Биркгофа произошло смещение в определении главного объекта исследования. Им становится динамическая система – понятие, претерпевшее длительное развитие от механической системы с конечным числом степеней свободы до произвольной системы безотносительно к ее происхождению, эволюция которой однозначно определяется начальными состояниями.

Главным трудом Биркгофа в этой области является ставшая классической монография «Динамические системы» [14], вышедшая в 1927 году, в которой подведены итоги его исследований до времени издания книги. Биркгофом выдвинута программная задача исследования динамических систем – определить качественный характер всех возможных типов движений динамической системы и взаимоотношений между этими движениями. Эта грандиозная задача вряд ли может быть решена в полной общности. Первые шаги были предприняты самим Биркгофом.

Биркгоф вводит понятие транзитивной системы, явившейся предтечей доказанной им через несколько лет после выхода книги и носящей его имя эргодической теоремы. Теорема Биркгофа составила один из главных результатов, положивших начало эргодической теории – статистической теории динамических систем. Процитируем Биркгофа: «Для проблем классической динамики транзитивность означает, что любая малая частица при своем движении описывает все многообразие M состояний движения, исключая лишь нигде не плотное множество движений, а интегрируемость означает, что для какой-то частицы это не будет справедливо. ... Между самым общим транзитивным случаем и весьма специальным случаем интегрируемой до конца системы лежит бесконечное разнообразие промежуточных возможных случаев, зависящих от частных свойств дифференциальных уравнений» [14, с. 209-212] (цитировано по последнему русскому изданию). И далее: «...для некоторых задач можно ввести вспомогательные аналитические соотношения, с помощью которых мы можем удовлетворительно исследовать решения соответствующих уравнений. В этом случае система может быть названа «интегрируемой». Если, однако, мы попытаемся сформулировать точное определение интегрируемости, то оказываются возможными различные определения, каждому из которых присущ известный теоретический интерес. Рассмотрим вкратце понятие интегрируемости, не забывая при этом указания Пуанкаре, что система дифференциальных уравнений может быть только более или менее интегрируемой» [14, с. 254-255].

Наиболее просто устроены полностью интегрируемые системы, что и делает их привлекательными. При канонических преобразованиях сохраняется структура гамильтоновых уравнений. Особенно удобным для интегрирования этих уравнений оказывается тип канонических переменных «действие–угол», введенных в 1860 году французским астрономом Ш. Делоне [15]. Для систем с двумя степенями свободы О. Штауде, а затем для многомерного случая П. Штеккелем (в диссертации) было показано, что движение системы, для которой уравнение Гамильтона – Якоби допускает разделение переменных, является квазипериодическим [16–18]. В переменных действие–угол $(I - \theta)$ гамильтониан $H(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ зависит только от новых импульсов – переменных действия $I_1, I_2, \ldots, I_n$, определяемых как

$$I_k = \oint\limits_C p_k dq_k \,,$$

где q_k, p_k – пара сопряженных координат и импульсов, интеграл берется по полному периоду движения. Угловые переменные θ_k при завершении периода будут изменяться на 2π. Например, в случае одной степени свободы уравнения движения приобретают вид

$$\dot{I} = 0, \ \dot{\theta} = \omega\,(I)$$

и легко интегрируются: $I = const$, $\theta = \omega(I)t + \alpha$, движение происходит по окружности. Для систем с двумя степенями свободы имеются две частоты ω_1 и ω_2 и движение происходит на торе. Если соотношение между частотами выражается рациональным числом, то есть

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = 0, \tag{1}$$

где n_1 и n_2 не равные одновременно нулю целые числа, то траектория на торе замыкается и движение будет периодическим. Здесь мы имеем дело с хорошо известным понятием резонанса. При иррациональном соотношении между частотами траектория никогда не замыкается, всюду плотно навиваясь на тор, и движение будет квазипериодическим.

Переменные действие–угол оказались мощным средством для решений уравнений динамики, хотя в течение нескольких десятилетий они оставались погребенными в недрах астрономической литературы и были неизвестны широкому кругу механиков и физиков. Положение изменилось с рождением квантовой теории [1, 18]. Введение переменных действие–угол в квантовую теорию является, в первую очередь, заслугой К. Шварцшильда (1916) [19]. На языке переменных действие–угол очень удобно формулировать условия квантования. Эти переменные составили основу старой квантовой теории, систематическому изложению которой посвящена классическая монография А. Зоммерфельда [20], являвшаяся наиболее читаемой среди физиков того времени.

Описанный характер движения с двумя степенями свободы остается справедливым и в многомерном случае. Но сначала приведем по поводу интегрирования небольшую выдержку из классической книги А. Уинтнера: «...динамическую систему следует называть «интегрируемой» тогда (но не только тогда), когда она может быть расщеплена с помощью «явных» преобразований координат и времени на совокупность динамических систем, каждая из которых имеет одну степень свободы» [4, с. 179]. Идеи в этом направлении восходят к У. Гамильтону и К.Г. Якоби, разработавших общий метод интегрирования уравнений динамики, основанный на введении специальных канонических координат, и к Буру и Лиувиллю. С другой стороны, условия квантования способствовали пониманию того, что в общем случае совместные уровни полного набора интегралов в инволюции гомеоморфны инвариантным торам. Развитие этих идей привело к понятию полной интегрируемости, когда в системе с n степенями свободы имеется n независимых интегралов в инволюции [1]. Напомним, что в системе имеется полный набор интегралов $F_1, F_2, \ldots, F_n$ в инволюции, если все скобки Пуассона $\{F_i, F_j\} = 0$. Важное обобщение теоремы Лиувилля принадлежит Арнольду (1963) [21]. Теорема Лиувилля – Арнольда описывает геометрию интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы. В переменных действие–угол движение будет происходить на многомерных торах, что позволяет делать качественные выводы о поведении траекторий в целом. В неинтегрируемом случае во всем фазовом пространстве не существует полного набора независимых интегралов, и траектории не ложатся на многообразия малого числа измерений [2].

Систематическому изложению современного понимания всего круга вопросов о математической структуре уравнений динамики посвящена книга Арнольда «Математические основы классической механики» 1974 года [22]. Книга Арнольда оказала огромное влияние на утверждение теории гамильтоновых систем как самостоятельной области математики в рамках теории динамических систем. Так нередко случается в истории науки, когда появляется труд, сконцентрировавший полученные результаты и давший толчок к осознанию того, что сложилась и приобрела самостоятельное значение новая область. Примеров тому немало, укажем на книгу А.А. Андронова, А.А. Витта и С.Э. Хайкина «Теория колебаний» (1937) или С. Банаха «Теория линейных операторов» (1932). С появлением последней стало возможным говорить, что окончательно сформировался функциональный анализ как новый раздел математики.

Как замечает Козлов [1], каждое поколение исследователей по-своему интерпретирует существо проблемы интегрирования гамильтоновых систем. Однако общим моментом различных подходов является наличие независимых интегралов – законов сохранения. Хорошо известно, что интегралы системы находятся в тесной связи с их скрытыми алгебраическими свойствами, где на первом месте – свойства симметрии [23]. Широко известно замечание Г. Вейля, что знание свойств симметрии позволит проникнуть во внутреннее строение объекта [24]. Чем выше степень симметричности системы, тем более упорядочены ее траектории. Как выявить интегрируемость данной системы и скрытые симметрии, лежащие в основе ее интегрируемости? Для решения этой задачи не существует систематического подхода. Установление интегрируемости, как и ее антипода – неинтегрируемости, для конкретной системы часто оказывается нетривиальной задачей. Выяснение условий нарушения симметрии объекта или его других скрытых алгебраических свойств дает возможность прояснить особенности перехода к сложной динамике.

Один из основных подходов при приближенном изучении неинтегрируемых систем – предположение малых отклонений от интегрируемых систем. На этом пути усилиями крупнейших математиков XVIII–XIX вв. были развиты многочисленные методы, составившие различные формы теории возмущений. Задача о влиянии возмущений на полностью интегрируемую гамильтонову систему представлялась столь важной, что Пуанкаре отнес ее к «основной проблеме» динамики [13, т. 1]. Задача оказалась труднейшей и не поддавалась многолетним усилиям до появления работ А.Н. Колмогорова [25, 26], В.И. Арнольда [27], Ю. Мозера [28], которые составили основу теории КАМ. Сам термин «теория КАМ» был предложен Б.В. Чириковым [29].

Случай функциональной независимости частот относят к невырожденным случаям. Условие невырожденности имеет вид

$$\det\left|\frac{\partial \omega_i}{\partial I_j}\right| = \det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}\right| \neq 0, \tag{2}$$

где H_0 – невозмущенный гамильтониан, I_i – первые интегралы движения. Главный результат теории КАМ заключается в том, что при достаточно малом возмущении и невырожденности невозмущенной гамильтоновой системы большинство инвариантных торов не разрушается, а лишь немного деформируется, оставаясь топологически торами. В невырожденных системах инвариантные торы $I_i = \mathrm{const}$ определены однозначно, независимо от выбора координат действие–угол, в построении которых возможен некоторый произвол [22]. Нерезонансные торы образуют нигде не плотное замкнутое множество с положительной мерой.

Сохранение нерезонансных торов с квазипериодическим движением на них получило название колмогоровской устойчивости [30]. Характерной особенностью рядов теории возмущений является появление в их членах так называемых малых знаменателей, связанных с соизмеримостью частот взаимодействующих явлений. В этом случае

$$\sum_i n_i \omega_i = 0. \tag{3}$$

Вследствие резонанса ряды теории возмущений оказываются расходящимися. В качестве хорошо известного из астрономической литературы примера можно указать малый знаменатель $2\omega_1 - 5\omega_2 \approx 0$, где $\omega_1 = 299".1$ и $\omega_2 = 120".5$ – частоты движения Юпитера и Сатурна [31]. Теория КАМ разрешила главную трудность «основной проблемы» динамики – появление малых знаменателей. Согласно старой работе Э. Ферми [32] любая нелинейность в системах с достаточно большим числом степеней свободы приводит к полному разрушению интегралов движения и система становится неинтегрируемой. Хотя доказательство Ферми было неубедительным и вызвало критику со стороны математиков (см. [33]), весьма распространенным было убеждение в универсальности поведения нелинейных систем, когда под действием возмущения происходит разрушение квазипериодического движения на торах и требуется переход к статистическому описанию. Вопреки этим представлениям теория КАМ установила, что при наложении малого возмущения разрушению подвергнутся лишь резонансные торы, мера которых мала. Один из главных результатов современной нелинейной динамики состоит в том, что реальные системы не являются ни полностью упорядоченными, ни полностью хаотичными, имеет место сосуществование порядка и хаоса. В утверждении такого взгляда к числу основных истоков относится теория КАМ. Колмогоровскую устойчивость можно отнести к случаю слабой неинтегрируемости.

Еще Биркгоф изучал поведение гамильтоновых систем в окрестности положений равновесия с формальной точки зрения, то есть не заботясь о сходимости получающихся степенных рядов [14]. Он предложил формальное каноническое преобразование (нормализация Биркгофа) для гамильтониана. Если преобразование к нормальной форме выражается сходящимися рядами, то соответствующие уравнения полностью интегрируются. Нормализацию Биркгофа можно распространить и на случай периодических траекторий. В общем случае ряды, вводимые при нормализации Биркгофа, оказываются расходящимися [34].

Существует еще один результат, в течение нескольких десятилетий считавшийся формальным, и его важность выяснилась лишь в 1960-е годы. В работах [34, 35] Э. Уиттекер ввел понятие *дополнительных интегралов*. Установленная Пуанкаре неинтегрируемость динамических систем в общем случае относится к существованию однозначного (относительно некоторого параметра) интеграла. Тем не менее могут существовать интегралы для отдельных значений параметров или для отдельных значений начальных условий. Однако ряды для таких дополнительных интегралов в общем случае не могут быть равномерно сходящимися.

Работы Г. Контопулоса [36, 37] способствовали выяснению новых черт дополнительных интегралов. Он показал с помощью вычислительных экспериментов, что эти интегралы представляют не просто формальный результат, а остаются постоянными в течение очень большого промежутка времени, всего времени численного интегрирования. К этому же кругу идей относится работа М. Хенона и К. Хейлеса [38], которая по отчетливости полученных результатов может считаться образцовой. В этой работе рассмотрена система из двух частиц с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3$$

и были изучены движения на трехмерном многообразии $H = E$, $E > 0$. На нем была выделена двумерная поверхность (p_y, y) при $x = 0$ и отмечались точки, в которых частные решения пересекали эту поверхность. При малых значениях энергии $(E = 1/12)$ эти точки образовывали семейство замкнутых кривых. Здесь эти кривые не воспроизводятся, так как они широко известны и вошли во многие руководства по нелинейной динамике (см., например, [39]). При $E = 1/8$ картина существенным образом изменилась, часть кривых начала распадаться, но наряду с распавшимися кривыми имелась область островков устойчивости. С дальнейшим увеличением E область устойчивости все уменьшалась и при $E = 1/6$ все гладкие кривые практически исчезли. Описанная картина была позднее интерпретирована как стохастическое разрушение интегралов движения, когда при разных значениях параметра E движение изменялось от преимущественно регулярного до преимущественно хаотического [40]. Эта работа Хенона и Хейлеса [38], первоначально оставшаяся непонятой, оказала затем большое влияние на формирование представлений нелинейной динамики.

Обратимся теперь к одной из последних работ Ферми, выполненной совместно с Дж. Пастом и С. Уламом [41]. Побудительным мотивом послужил давний интерес Ферми к нелинейным проблемам и возможность их изучения с помощью недавно созданных ЭВМ. В указанной работе изучался вопрос о распределении энергии в цепочке из 64 нелинейных осцилляторов, нелинейность вводилась как возмущение исходной линейной задачи. Рассматриваемая система являлась неинтегрируемой и не допускала аналитических решений, что и побудило ее численное исследование. Общепринятой была точка зрения, что в системах с большим числом степеней свободы действуют законы статистической механики, и ожидалось равномерное распределение энергии между всеми модами. Вопреки ожидаемой термолизации система демонстрировала устойчивый квазипериодический характер движения без заметных признаков хаотичности. Возникший парадокс получил название проблемы Ферми – Пасты – Улама (ФПУ-проблема).

ФПУ-проблема явилась одним из поворотных пунктов в развитии нелинейной динамики. В 2005 году как раз исполнилось 50 лет со дня публикации работы Ферми, Пасты и Улама [41] (май 1955) и этому событию целиком посвящен выпуск журнала «Chaos» [42]. В ФПУ-проблеме сошлись, как в фокусе, несколько важнейших аспектов. Во-первых, она привела к созданию нового метода интегрирования нелинейных эволюционных уравнений – обратного преобразования рассеяния и теории солитонов (см., например, [43]). Сформировался важнейший раздел современной математической физики. Во-вторых, ФПУ-проблема послужила одним из исходных пунктов, положивших начало новому методу научного исследования – вычислительного эксперимента наряду с теорией и натурным (лабораторным) экспериментом. И, наконец, ФПУ-проблема явилась одним из истоков исследований, которые привели к открытию гамильтонова хаоса.

Вычислительные эксперименты Ферми, Пасты и Улама [41] были продолжены в работах Чирикова с сотрудниками [30, 44] и Заславского и Сагдеева [45]. Исследования новосибирской школы, частью которых явились указанные работы, положили начало новому этапу в развитии нелинейной динамики, приведшему к современным представлениям о связи хаоса и неинтегрируемости, о соотношении регулярности и нерегулярности в гамильтоновых системах. Эти исследования получили дальнейшее развитие в Институте физики (Красноярск), Институте космических исследований (ИКИ, Москва), Институте им. Р. Куранта (Нью-Йорк) и других научных центрах.

Вернемся к указанным работам Чирикова и его сотрудников [30, 44]. В основу рассмотрения был положен критерий перекрытия нелинейных резонансов. Согласно их результатам возникший парадокс находит естественное объяснение в теории КАМ: при достаточно малом возмущении в нелинейной системе сохраняются колмогоровские торы с квазипериодическим характером движения на них. Колмогоровская устойчивость существует до некоторого критического возмущения, при котором начинается проявление хаотичности (или, по терминологии [30, 44], стохастичности). Было показано, что при возбуждении низших мод хаотическое поведение возможно лишь для очень больших нелинейных возбуждений. Это дало объяснение ФПУ-проблемы, поскольку в [41] в качестве начального условия было выбрано возбуждение первой моды. Наоборот, для высших мод и большого числа осцилляторов хаотичность начинается при очень малой нелинейности.

Заславский и Сагдеев провели рассмотрение с помощью отображений, что является более общим методом, чем метод перекрытия резонансов [40, 45]. Такой подход позволяет исследовать не только ФПУ-проблему, но и тонкие эффекты в различных нелинейных волновых полях.

Выше отмечалось, что нерезонансные торы под действием возмущения лишь немного деформируются, оставаясь топологически торами. Множество резонансных торов хоть и имеет малую меру, но является всюду плотным. Другими словами, резонансные торы подходят к нерезонансным сколь угодно близко и в реальной системе нет возможности различить эти два класса торов. Однако системы с двумя степенями свободы при достаточно малом возмущении являются выделенными. В этом случае определяющим моментом становится особая топология фазового пространства, и связано это с тем, что размерность энергетической поверхности на единицу больше размерности тора, поэтому резонансные торы лежат между инвариантными нерезонансными торами, оказываясь вложенными друг в друга. Это приводит к тому, что переход между двумя резонансными торами становится возможным только через нерезонансные торы. Поскольку нерезонансные торы сохраняются, траектории из разрушенного резонансного тора оказываются зажатыми между системами нерезонансных торов, что обеспечивает колмогоровскую устойчивость [29].

В многомерных системах ситуация радикальным образом меняется. При числе степеней свободы $n > 2$ n-мерные инвариантные торы уже не делят гиперповерхность постоянной энергии размерности $2n - 1$ на несвязанные куски. В этом случае становится возможным объединение стохастических слоев в связанную систему на энергетической поверхности. По образовавшейся таким образом всюду плотной паутине возможно движение системы по всей энергетической поверхности, оставаясь внутри стохастического слоя. Эта гипотеза была высказана Арнольдом, который привел пример дифференциального уравнения, описывающего движение вдоль стохастического слоя [46, 47]. Такая неустойчивость многомерных систем является универсальной, поскольку она присутствует при любых сколь угодно малых возмущениях, а не только при достаточно сильных, как в случае стохастической неустойчивости. Для нее Чириков предложил термин «диффузия Арнольда» [29], ставший общепринятым. Диффузия Арнольда приводит к неустранимой области хаоса в фазовом пространстве.

Чириковым были получены грубые оценки скорости диффузии Арнольда для широкого класса нелинейных гамильтоновых систем [29]. Строгие оценки скорости диффузии сверху провел Н.Н. Нехорошев [48, 49]. Для системы с гамильтонианом

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta)$$

при всех начальных условиях $I(t)$ будет находиться вблизи $I(0)$ в течение экспоненциально большого промежутка времени $[0, T]$, то есть

$$\|I(t) - I(0)\| < \varepsilon^b$$

при всех $t \in [0, T]$, где

$$T = \exp\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^a\right],$$

a, $b > 0$. Из-за экспоненциально малой величины эффекта можно говорить о «почти интегралах движения».

Поначалу диффузия Арнольда выглядела совершенно странным и экзотическим явлением, и было непонятно, имеет ли она какое-либо отношение к физической реальности. Доказательство присутствия диффузии Арнольда в физических системах представляет собой крайне сложную задачу. Систематическое изучение этого необычного явления было осуществлено Чириковым с сотрудниками [29, 50–52]. Было отмечено следующее важное обстоятельство. В реальных системах из-за случайных внешних возмущений при любых начальных условиях имеет место обычная диффузия. Она приводит систему к ближайшему стохастическому слою, после чего вступает в игру более быстрая диффузия Арнольда вдоль слоя. Таким образом, комбинация двух явлений может привести к существенному усилению эффекта – качественно новой особенности хаотического поведения.

В настоящее время можно утверждать, что диффузия Арнольда – реально присутствующее явление в физических системах, хотя при математически строгом рассмотрении остается пока не решенным ряд вопросов [53]. Продолжается расширение области ее проявлений. Чириков говорит о диффузии Арнольда в экспериментах по удержанию электронов в магнитной ловушке, расширении пучка протонов в накопителях ускорителей, гибели астероидов, частоты вращения которых попадают в резонанс с Юпитером. Еще сам Арнольд отмечал возможность диффузии в проблеме трех тел [46]. Это предположение подтвердилось в недавних исследованиях [54, 55]. Кроме того, диффузия Арнольда была обнаружена еще в одной старой классической задаче небесной механики – задаче Д'Аламбера о вращении вокруг неподвижной звезды сплющенной у полюсов планеты [56].

Пуанкаре показал, что при общих условиях гамильтонова система не имеет аналитических интегралов движения, которые можно представить в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра, кроме аддитивных интегралов энергии, импульса и момента [13]. Отсюда вытекает расходимость рядов различных вариантов теории возмущений. Пуанкаре обнаружил также явления качественного характера в поведении фазовых траекторий, препятствующие появлению новых интегралов. Среди них – рождение изолированных периодических движений и расщепление асимптотических поверхностей.

Напомним некоторые важнейшие понятия, тесно связанные с неинтегрируемостью [57]. Каждый добавочный интеграл приводит к существенным ограничениям в поведении траекторий. Из этого вытекает, что сложный характер движения возможен лишь в неинтегрируемых системах, неинтегрируемые возмущения разрушают интегралы движения. Еще сам Пуанкаре при устранении ошибки в своем мемуаре по проблеме трех тел отметил, что области неустойчивости могут находиться в окрестности сепаратрисы [12, 58]. Неподвижная гиперболическая точка p характеризуется устойчивым $\mathrm{W}^{\mathrm{s}}(p)$ и неустойчивым $\mathrm{W}^{\mathrm{u}}(p)$ инвариантными многообразиями, через точки которых проходят фазовые траектории, стремящиеся к p при $t \to \infty$ и $t \to -\infty$. В интегрируемых системах эти асимптотические поверхности совпадают, мы имеем дело с вырожденным случаем. Если инвариантные многообразия одномерны, их называют сепаратрисами. Возмущение снимает вырождение, приводя к расщеплению асимтотических поверхностей. Трансверсальные пересечения (пересекающиеся без касания) устойчивого и неустойчивого многообразий приводят к образованию гомоклинической структуры в близлежащей области фазового пространства, где движение носит сложный, хаотический характер. В окрестности расщепленных асимтотических поверхностей, как установил Пуанкаре, ряды теории возмущений расходятся, система является неинтегрируемой [1, 57].

Впервые детальные исследования окрестности сепаратрисы были проведены В.К. Мельниковым [58, 59] (см. также работу Арнольда [47]), и метод Пуанкаре – Арнольда – Мельникова стал стандартным инструментом для исследования расщепления сепаратрисы [57]. Систематическому изучению стохастической неустойчивости в окрестности сепаратрисы посвящены многочисленные работы физиков новосибирской школы (результаты и подробная библиография приведены в [40, 52]). Надо отметить отличия как в методах изучения, так и в языке у математиков и физиков. Указанные математические работы явились составной частью результатов деятельности отечественной школы динамических систем, переживавшей в 1950–1970-е годы период расцвета, и добившейся выдающихся достижений. Работы физиков исходили из двух строгих математических результатов – теории КАМ и эргодической теории, полукачественных физических подходов и вычислительных экспериментов. Первая оценка ширины области разрушения сепаратрисы, получившей название «стохастический слой», для специальной динамической системы была сделана в работе Г.М. Заславского, Р.З. Сагдеева и Н.Н. Филоненко [60]. Стохастический слой представляет минимальную область фазового пространства, где зарождается хаотическое движение, что имеет существенное значение для различных физических приложений. Приведем один результат, полученный из физических соображений, очень удобный для проведения оценок. Для оценки границы между двумя качественно различающимися видами движения – регулярным и хаотическим из параметров системы в ряде случаев можно составить безразмерную величину K. При $K < 1$ движение системы устойчиво, регулярно, а при $K \geq 1$ движение приобретает неустойчивый, хаотический характер. Последнее неравенство принимается в качестве критерия перехода к хаотическому движению.

Еще со времен классических исследований А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова значительное внимание уделялось критическим элементам – положениям равновесия, периодическим траекториям, сепаратрисам, поскольку в них содержится значительная информация о динамической системе. В последующем упор стали делать на выяснение структуры семейства интегральных кривых, заполняющих некоторую область, то есть на проведение исследований динамических систем в целом. Для интегрируемых гамильтоновых систем с n степенями свободы периодические решения образуют $(n-1)$-мерные семейства. Доказательство неинтегрируемости (как правило) гамильтоновых систем основано на том факте, что в общем случае периодические решения на поверхности фиксированной энергии изолированы [61]. Заметим, что даже нахождение периодических решений, представляющих простейший объект теории динамических систем после положений равновесия, часто является нетривиальной задачей.

В данном круге проблем выступают на первый план топологические соображения. Рассмотрим систему с двумя степенями свободы. Ее пространством положений является поверхность М, представляющая собой сферу с некоторым числом приклеенных ручек к. Это число к – топологический инвариант поверхности, называемый ее родом. Опуская детали, выделим основной результат: при роде поверхности к ≥ 2, то есть, когда М не гомеоморфна сфере S^2 или тору T^2, система неинтегрируема [1, 3]. При к ≥ 2 замкнутая аналитическая поверхность не может быть конфигурационным пространством аналитической интегрируемой системы. В этом случае имеется большое число неустойчивых периодических траекторий, на которых первые интегралы зависимы. По словам В.В. Козлова, этот результат не был замечен классиками из-за их пристрастия к локальному рассмотрению динамических систем [3].

Приведенные результаты имеют интересные и многочисленные математические и физические интерпретации [62, гл. 19]. Мерой средней скорости экспоненциального разбегания соседних траекторий служат показатели Ляпунова. Системы с хаотической динамикой характеризуются положительным показателем Ляпунова и перемешивающим характером движения. Однако существуют системы с нулевым показателем Ляпунова, но в то же время со случайным движением. В таких системах происходит слабое перемешивание в фазовом пространстве. Они получили название псевдоинтегрируемых систем, а само явление – псевдохаоса. Псевдохаос демонстрируют различные биллиардные системы, он наблюдается при распространении звука в неоднородной среде, в поведении силовых линий магнитного поля в плазменных установках и др.

Вернемся к глубокому замечанию Пуанкаре, что системы могут быть только более или менее интегрируемыми. При величине параметра $K \gg 1$ система становится локально неустойчивой почти всюду [29]. Здесь надо сделать оговорку, что под «почти всюду» понимается не исключение областей нулевой меры, как принято в эргодической теории, а относится это к областям малой, но конечной меры. Такое незначительное, на первый взгляд, различие приводит к очень важным последствиям. Эргодическая теория дает статистическое описание динамических систем, когда сложное поведение, хаотичность, присутствует, так сказать, в чистом виде. Реальные системы являются неоднородными, в них всегда имеются области устойчивого движения малой меры. Такие системы называются системами с разделенным фазовым пространством [29, 63]. Разделенное фазовое пространство, другими словами, сосуществование областей с регулярным и хаотическим движением представляет одну из самых удивительных особенностей хаоса и одновременно является главным препятствием для математически строгого описания. Последнее, казалось бы, можно осуществить выделением областей с регулярным движением, что относится к случаю интегрируемых систем, а для нерегулярного движения использовать статистическое описание. Однако простое исключение из области неустойчивости «вкраплений» с регулярным движением не приводит к упрощению ситуации, поскольку эргодическая компонента заполняет область фазового пространства очень сложной формы и, вероятно, топологии. Я.Г. Синай высказал гипотезу, что устойчивые области фазового пространства образуют всюду плотное множество, пронизывающие эргодическую компоненту [64].

Итак, простая картина движения, когда отдельно существуют области регулярности и хаоса с более или менее четко выраженной границей, является сильно идеализированным представлением. Часть фазового пространства с хаотической динамикой получила название стохастического моря. В реальных системах присутствует бесконечное число эллиптических точек, окруженных островками инвариантных кривых. Наличие этих островков влияет на близлежащие траектории, что приводит к изменению структуры фазового пространства. Особую проблему составляет граничная область вблизи островков. Дело в том, что вокруг выбранного островка существует цепочка вторичных островков, которые, в свою очередь, окружены цепочками следующего уровня и т.д. Таким образом, имеется сложная самоподобная иерархическая структура фрактального характера. Если вспомнить, что островок в стохастическом море соответствует области начальных условий, при которых движение является регулярным, то становится ясной условность понятия интегрируемости в системах с разделенным фазовым пространством. Эта условность представляет отражение того факта, что регулярная и хаотическая компонента переплетены, обладают очень сложной топологией, которая трансформируется при изменении параметров системы.

Выработка представлений о статистических системах и статистическом описании основывалась на наличии систем с очень большим числом степеней свободы. Простейшими моделями статистических систем являются модели газов, движение частиц которых является сложным, хаотическим. В основе методов статистического описания лежит положение об однородности, однотипности характера движения. Сложная топология фазового пространства реальных систем вследствие сосуществования областей хаоса и регулярности делает затруднительным непосредственное использование имеющихся методов статистического описания. В динамических системах с разделенным фазовым пространством мы сталкиваемся с другим, более высоким уровнем сложности, чем в чисто статистических системах.

Указанные трудности делают неизбежным индуктивный подход, когда во главу угла ставятся обобщения, аналогии, полукачественные физические соображения. Огромную роль при этом играет вычислительный эксперимент, который служит не только для получения конкретных численных результатов, а является эвристическим средством для выяснения основных черт интересующего явления. Если же подходить с позиций установленных канонов математического анализа, вычислительный эксперимент при всех своих достоинствах остается лишь предварительным этапом исследования, поскольку его результаты необходимо интерпретировать методами строгой математики. В качестве одного из немногих таких примеров можно привести аттрактор Лоренца [65, 66]. В этих работах был проведен расчет на ЭВМ основных траекторий, затем были применены методы теории бифуркаций и воссоздана картина эволюции структуры фазового пространства.

Во многих задачах физики и механики нарушается условие невырожденности (2) и теория КАМ становится неприменимой [31]. Такая ситуация имеет место в весьма общем случае собственного вырождения, когда движение невозмущенной системы описывается меньшим числом частот n_0, чем число степеней свободы n. Например, к случаю собственного вырождения относится задача о движении заряженной частицы в сильном магнитном поле, а также многие задачи небесной механики. Для последних роль невозмущенной системы играет задача двух тел ($n_0 = 1$, $n = 3$) и определитель

$$\det\left|\frac{\partial \omega_i}{\partial p_j}\right| = \left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j}\right| \equiv 0.$$

Арнольд провел важное обобщение теории КАМ на случай собственного вырождения [67–69]. Он показал, что главный результат теории КАМ остается справедливым: при действии малых возмущений на интегрируемую гамильтонову систему для большинства начальных условий движение сохраняет квазипериодический характер на инвариантных торах.

Отказ от условия невырожденности (2) не только расширяет класс динамических систем, доступных для анализа. Рассмотрение в ряде физических задач вырожденных систем или систем, близких к вырождению, привело к открытию совершенно новых явлений и к существенному расширению представлений о зарождении хаоса и неинтегрируемости в гамильтоновой динамике.

Указанное направление развилось из нелинейных задач плазменной физики и главные заслуги принадлежат Заславскому с сотрудниками. Одной из таких задач, очень важной для физических приложений, была проблема разрушения магнитных поверхностей, которые соответствуют инвариантным торам [60]. Разрушение происходит под действием возмущения, что приводит к образованию областей фазового пространства с хаотической динамикой. Эти области очень малы, однако при выполнении некоторых общих условий относительно размерности системы области хаоса неустранимы. Случай таких областей малой меры получил название слабого хаоса [70]. Как бы ни были малы области хаоса, их наличие означает принципиальную неинтегрируемость системы. Слабый хаос может реализоваться в виде стохастических слоев или в виде стохастической паутины. Из теории КАМ следует существование стохастической паутины при числе степеней свободы $n > 2$ (диффузия Арнольда). Для вырожденных систем положение существенным образом меняется [71–73]. Сам механизм образования стохастической паутины в главных чертах такой же, как и в невырожденном случае. С ростом возмущения увеличивается ширина стохастического слоя и при перекрытии щелей между сепаратрисами стохастические слои соединяются, что приводит к образованию стохастической паутины. Но в вырожденных системах стохастическая паутина или, как она часто именуется в зарубежной литературе, паутина Заславского существует уже при меньшей размерности, $n = 1.5$. Другое отличие состоит в скорости диффузии, которая вдоль каналов значительно превосходит экспоненциально малую скорость диффузии Арнольда. Указанные отличия очень важны как для многочисленных приложений в физике плазмы, в физике ускорителей, в астрофизике и др., так и в принципиальном отношении. Здесь мы как раз сталкиваемся со случаем, где отчетливо видна справедливость замечания Пуанкаре об интегрируемости в большей или меньшей степени.

Рассмотрим подробнее работу [72], посвященную важной задаче плазменной физики – взаимодействию частицы с волновым пакетом в поперечном магнитном поле. Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_H^2 x = -\frac{e}{m} \sum_k E_k \sin(kx - \omega_k t). \tag{4}$$

Невозмущенная часть уравнения (4) является линейной, условие невырожденности (2) оказывается невыполненным и теория КАМ непосредственно неприменима. При рациональных соотношениях между частотами ω_k и ω_H фазовая плоскость $(x, \dot{x})$ покрывается стохастической паутиной, внутри ячеек которой движение регулярное. Хаотическое движение рождает на фазовой плоскости дальний порядок.

Обратимся еще к одной особенности паутины Заславского. В ряде случаев покрытие ею фазовой плоскости имеет замечательно симметричную форму, что характеризует неожиданную связь между совершенно разнородными явлениями, когда хаос (а следовательно, неинтегрируемость) формирует упорядоченность. На рис. 1, 2 приведены некоторые структуры, образованные паутиной Заславского. Сразу же отметим наличие запрещенной в кристаллах симметрии 5-го порядка, здесь проглядывается явное сходство со структурами квазикристаллического типа. В 1984 году Д. Шехтманом с сотрудниками [74] в быстро охлаждаемых образцах алюминиево-марганцевого сплава было обнаружено образование структур, имеющих икосаэдрическую группу симметрии. Они содержат оси симметрии 5-го порядка, что несовместимо с трансляционной инвариантностью кристаллов. В отличие от жидкости и аморфных тел, в квазикристаллах присутствует дальний порядок. Последнее для сто-

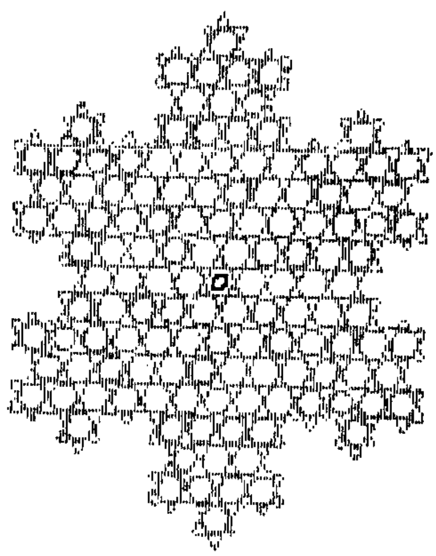


Рис. 1.

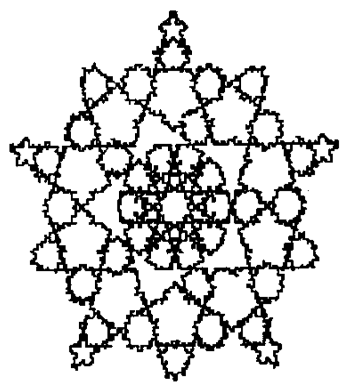


Рис. 2.

хастической паутины, покрывающей фазовую плоскость, находит свое выражение в глобальном характере хаоса. Случайные блуждания образуют фигуры не только 5-го, но также 7 и 8-го порядков. Характерный размер структуры определяет область существования инвариантных торов. Появление динамических структур обусловлено наличием особых точек и особых траекторий в фазовом пространстве, что своеобразным путем проявляется посредством случайных блужданий.

Образование правильных структур хаотическим движением демонстрирует типичное для нелинейной динамики сосуществование порядка и хаоса. Только форма сосуществования в данном случае является довольно неожиданной. Ведь привычным являлась связь интегрируемости, выражающей регулярный характер движения, со свойствами симметрии. Теперь же с симметрией, регулярностью связано противоположное свойство динамических систем – неинтегрируемость, которая ассоциируется, наоборот, со сложностью, нерегулярностью. Связи между различными аспектами динамических систем, такими как интегрируемость и неинтегрируемость, упорядоченность и хаос, являются более глубокими и богатыми, чем это представлялось. Сопроводим изложенное словами Чирикова, которыми заканчивается одна из его работ: «Мы бесконечно благодарны Природе за неисчерпаемое разнообразие ее простейших проявлений» [75, с. 425].

Проявления симметрии на этом не заканчиваются. Она предстает в новой форме на границах фигур паутины. Эти границы имеют самоподобную фрактальную структуру и чем точнее мы хотим определить форму границы, тем более сложная структура будет открываться. Симметрия оказывается приближенной, поэтому правильнее говорить о квазисимметрии. Видимо, именно квазисимметрия является в природе правилом, а полная симметрия, скорее, исключением.

Обратимся к другой стороне проблемы интегрируемости. Результаты своих исследований по качественной теории дифференциальных уравнений Пуанкаре предваряет словами: «...в громадном большинстве случаев, с которыми нам приходится иметь дело, эти уравнения не могут быть проинтегрированы с помощью уже известных нам функций, например, с помощью функций, определяемых квадратурами. И если бы мы захотели ограничиться только теми случаями, которые можно изучить при помощи определенных или неопределенных интегралов, то область наших исследований оказалась бы чрезвычайно суженной, и огромное большинство вопросов, встречающихся в приложениях, осталось бы нерешенным. Необходимо, следовательно, изучать функции, определяемые дифференциальными уравнениями сами по себе, не пытаясь сводить их к более простым функциям, так же как это было сделано по отношению к алгебраическим функциям, которые сначала пытались свести к радикалам, а теперь изучают непосредственно» [11, с. 11]. Другими словами, без интегрирования, лишь по виду самого уравнения нужно построить картину расположения кривых, удовлетворяющих этому уравнению. Здесь фактически Пуанкаре сформулировал одну из программ изучения динамических систем.

Указанная программа допускает весьма содержательное обобщение, которое можно сформулировать следующим образом: по виду самого уравнения попытаться решить вопрос об его интегрируемости. В такой постановке задача восходит к работам С.В. Ковалевской и П. Пенлеве [76, 10] и связана с аналитической структурой уравнений. Говоря о Ковалевской, мы имеем в виду ее классическую работу о движении тяжелого волчка относительно неподвижной точки. Ее подход ведет в комплексную область для выяснения вопроса о том, в каких случаях все решения являются мероморфными функциями времени. Напомним, что под мероморфной функцией понимается аналитическая функция комплексного переменного, не имеющая других конечных особых точек, кроме полюсов. Ковалевская, видимо, основывалась на более ранних исследованиях И. Фукса по дифференциальным уравнениям первого порядка, который тоже использовал технику комплексного переменного. Такое обращение в комплексную область выглядит вполне закономерным, если вспомнить, что и Фукс, и Ковалевская были учениками К. Вейерштрасса, являющегося одним из главных творцов теории аналитических функций.

Для уравнений движения волчка (уравнений Эйлера) издавна были известны три интеграла, и вопрос об интегрировании сводился к отысканию четвертого интеграла. Для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений особенности определяются коэффициентами уравнений, и они локализованы, то есть находятся в фиксированных точках комплексной плоскости. Для нелинейных уравнений положение меняется, особенности уже могут быть подвижными и их локализация определяется начальными условиями. Ковалевская изучила условия, при которых единственной подвижной особенностью решений в комплексной плоскости будут полюсы, четвертый интеграл получается уже как побочный результат. Она показала, что уравнения Эйлера имеют недостающий интеграл движения лишь при четырех комбинациях параметров, три из которых были получены ранее, и теперь добавилась еще одна, получившая название «случай Ковалевской». Заметим, что общее утверждение о связи подвижных полюсов и интегрируемости, на котором основан результат Ковалевской, остается недоказанным. Можно вспомнить многократно подтверждавшееся глубокое замечание Ж. Адамара, что «наиболее короткий и наилучший путь между двумя истинами в действительной области часто проходит через мнимую область» [77, с. 115].

Следующий шаг был сделан Пенлеве и его учениками (подробности можно найти в [76]). Они проанализировали класс обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, не имеющих других подвижных особенностей кроме полюсов. Были рассмотрены уравнения типа

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(\frac{dy}{dx}, y, x), \tag{5}$$

где F – аналитическая по x и рациональная по y и $\dfrac{dy}{dx}$ функция. Пенлеве обнаружил 50 типов уравнений с желаемыми аналитическими свойствами. Это аналитическое свойство называют свойством Пенлеве, и оно является критерием интегрируемости. Из указанных уравнений 44 типа могут быть проинтегрированы, и решение выражается через известные функции (включая эллиптические функции). Оставшиеся шесть типов, называемые уравнениями Пенлеве, имеют трансцендентные мероморфные решения.

Применение идеи Ковалевской к гамильтоновым уравнениям приводит к еще одному препятствию их интегрируемости [1, 3]. Было замечено, что в большинстве проинтегрированных случаев известные первые интегралы продолжаются в комплексную область до голоморфных или мероморфных функций. Ветвление решений в общем случае препятствует появлению новых однозначных первых интегралов. Еще В.В. Голубев предложил расширение задачи Пенлеве [78]: выяснение связи между ветвлением решений как функций комплексного времени и наличием однозначных первых интегралов. Значительный вклад в решение задачи Пенлеве – Голубева внесли В.В. Козлов и С.Л. Зиглин [79–81], показавшие, что при определенных условиях общего характера эта задача имеет положительное решение.

Глобальная интегрируемость гамильтоновых систем в открытом подмножестве фазового пространства не является типичной ситуацией. Когда гамильтонова система зависит от параметра, в общем случае может оказаться, что интегрируемость существует для изолированных значений параметра.

Как видим, понятие интегрируемости имеет очень сложный, многоплановый и неоднозначный характер. В этом отражается сложность поведения динамических систем, богатство их связей. Время простого описания прошло. Новый этап в развитии знаний потребовал принципиально новых взглядов, нового языка, новой системы понятий. Неинтегрируемость вошла составной, неотъемлемой частью в один из важнейших разделов современной математики и, в более широком контексте, нелинейной динамики.

В процессе работы я пользовался советами и консультациями Г.М. Заславского (Институт им. Р. Куранта Нью-Йоркского университета) и А.И. Нейштадта (ИКИ РАН). Они внимательно ознакомились с первоначальным вариантом и сделали ряд конструктивных замечаний. За все им я искренне благодарен.

Библиографический список

1. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, вып. 1. С. 3.
2. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985.
3. *Козлов В.В.* Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1995.
4. *Уинтнер А. А.* Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967.
5. *Молодший В.Н.* О. Коши и революция в математическом анализе первой четверти XIX века // Истор.-матем. исслед. 1978. Вып. 23. С. 32.
6. *Демидов С., Петрова С.С., Симонов Н.Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Математика XIX в. М.: Наука, 1987. С. 80.
7. *Liouville J.* Remarques nouvelles sur l’equation de Riccati // J.Math. Pures et Appl. 1841. P. 1.
8. *Bour J.* Sur l’integration des équations differentielles de la Mécanique Analytic // J.Math. Pure et Appl. 1855. Vol. 20. P. 185.
9. *Liouville J.* Note à l’occasion du memoire précident de M. Edmond Bour // Ibid. P. 201.
10. *Аносов Д.В.* О развитии теории динамических систем за последнюю четверть века // Студенческие чтения МК НМУ. Вып. 1. М.: МЦНМО, 2000. С. 74.
11. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
12. *Poincaré H.* Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique // Acta Math. 1890. Vol. 13. P. 1.

13. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики // Избр. труды: В 3 т. М.: Наука, 1971, т. 1; 1972, т. 2.
14. *Биркгоф Д.* Динамические системы. Ижевск: РХД, 1999.
15. *Delauney C.E.* Theorie du Mouvement de la Lune. Paris, 1860.
16. *Staude O.* Über eine Gattung doppelt reel periodischer Funktionen zweier Varanderlicher // Math. Ann. 1887. Bol. 29. S. 468.
17. *Stäckel P.* Über die integration der Hamilton-Jakobischen Differentialgleichung mittels der Separation der Variabein. Habilationschrift, Halle, 1891.
18. *Джеммер М.* Эволюция понятий квантовой механики. М.: Наука, 1985.
19. *Schwarzschild K.* Zur Quantenhypotese // Berliner Berichte. 1916. S. 548.
20. *Sommerfeld A.* Atombau und Spektrallinien. Braunschweig: Vieweg, 1919; Рус. пер.: Зоммерфельд А. Строение атома и спектры. М.-Л., 1926.
21. *Арнольд В.И.* Об одной теореме Лиувилля, касающейся интегрируемых проблем динамики // Сиб. матем. журн. 1963. Т. 4, № 2. С. 471.
22. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
23. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995.
24. *Вейль Г.* Симметрия. М.: Наука, 1968.
25. *Колмогоров А.Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. 1954. Т. 98, № 4. С. 527.
26. *Колмогоров А.Н.* Общая теория динамических систем и классическая механика // Межд. матем. конгресс в Амстердаме 1954. М.: Физматгиз, 1961. С. 187.
27. *Арнольд В.И.* Доказательство теоремы А.Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, вып. 5. С. 13.
28. *Moser J.* On invariant curves of area-preserving mappings of an annuals // Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math.-Phys. K1. IIa. 1962. №1. P. 1.
29. *Чириков Б.В.* Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Докт. дисс. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1969.
30. *Израйлев Ф.М., Чириков Б.В.* Статистические свойства нелинейной струны // ДАН СССР. 1966. Т. 166, № 1. С. 57.
31. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, вып. 6. С. 91.
32. *Fermi E.* Beweis dass ein Mechnisches Normalsystem in Allgemeinen Quasi-ergodisch ist // Phys. Zs. 1923. Bol. 24. S. 261; Рус. пер.: Ферми Э. Научн. труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. С. 115.
33. *Зигель К.* Лекции по небесной механике. М.: ИЛ, 1959.
34. *Джакалья Г.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979.
35. *Уиттекер Э.* Аналитическая динамика. М.: ОНТИ, 1937.
36. *Contopoulos G.* On the existence of a third integral of motion // Astron. J. 1962. Vol. 67, №1. P. 1.
37. *Contopoulos G.* A classification of the integrals of motion // Astron. J. 1963. Vol. 138, №4. P. 1297-1.

38. *Henon M., Heiles C.* The applicability of the third integral of motion; some numerical experiments // Astron. J. 1964. Vol. 69, №1. P. 73.
39. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.Мир, 1984.
40. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
41. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Studies in nonlinear problems // Los-Alamos report – 1940. 1955; Рус. пер.: Ферми Э. Научн. труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 647.
42. Chaos. 2005. Vol. 15. 015101.
43. Солитоны. М.: Мир, 1983.
44. *Израилев Ф.М., Хисамутдинов А.И., Чириков Б.В.* Численные эксперименты с нелинейной цепочкой. Препринт 252. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1968. 38 с.
45. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* О пределах статистического описания нелинейного волнового поля // ЖЭТФ. 1967. Т. 52, вып. 4. С. 1081.
46. *Арнольд В.И.* О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы // ДАН СССР. 1964. Т. 156, № 1. С. 9.
47. *Арнольд В.И.* Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем // Тр. Межд. конгресса математиков. Москва – 1966. М.: Мир, 1968. С. 387.
48. *Нехорошев Н.Н.* О поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым // Функц. анализ и его приложения. 1971. Т. 5, вып. 4. С. 82.
49. *Нехорошев Н.Н.* Метод последовательных канонических замен переменных // Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. Добавление. М.: Мир, 1973. С. 150.
50. *Гадияк Г.В., Израйлев Ф.М., Чириков Б.В.* Предварительные численные эксперименты по диффузии Арнольда. Препринт 74-49. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1974. 24 с.
51. *Гадияк Г.В., Израйлев Ф.М., Чириков Б.В.* Численные эксперименты по универсальной неустойчивости в нелинейных колебательных системах (диффузия Арнольда) // VII. Int. Konf. uber nichtlineare Schwingungen. B. II, 1. Berlin: Akademie-Verlag, 1977. S. 315.
52. *Chirikov B.V.* A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Phys. Rep. 1979. Vol. 52, №5. P. 263.
53. *Лошак П.* Каноническая теория возмущений: подход, основанный на совместных приближениях // Успехи мат. наук. 1992. Т. 47, вып. 6. С. 59.
54. *Xia Z.* Arnold diffusion in the elliptic restricted three-body problem // J.Dynamics and Diff. Equations. 1993. Vol. 5, №2. P. 219.
55. *Xia Z.* Arnold diffusion and oscillating solutions in the planar three-body problem // J.Diff. Equations. 1994. Vol. 110. P. 289.
56. *Chierchia L., Gallavotti G.* Drift and diffusion in phase space // Ann. de l’Institut Poincaré, B. 1994. Vol. 60. P. 1.
57. *Алексеев В.М.* Лекции по небесной механике. М.: УРСС, 1999.
58. *Мельников В.К.* Качественное описание сильного резонанса в нелинейной системе // ДАН СССР. 1963. Т. 148, № 6. С. 1257.
59. *Мельников В.К.* Устойчивость центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. общества. 1963. Т. 12. С. 3.

60. *Filonenko N.N., Sagdeev R.Z., Zaslavsky G.M.* Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities. Part II // Nucl. Fusion. 1967. Vol. 7. P. 253.
61. *Мозер Ю.* Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, вып. 5. С. 109.
62. *Zaslavsky G.M.* Hamiltonian chaos and fractional dynamics. Oxford: Oxford Univ. Press, 2004.
63. *Израйлев Ф.М., Чириков Б.В.* Стохастичность простейшей динамической модели с разделенным фазовым пространством. Препринт 191. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1968. 64 с.
64. *Синай Я.Г.* Асимптотика числа замкнутых геодезических на компактных многообразиях отрицательной кривизны // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30, № 6. С. 1275.
65. *Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П.* О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Тр. Моск. матем. общества. 1982. Т. 44. С. 150.
66. Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981.
67. *Арнольд В.И.* О рождении условно-периодического движения из семейства периодических движений // ДАН СССР. 1961. Т. 138, № 1. С. 13.
68. *Арнольд В.И.* О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. 1962. Т. 142, № 4. С. 758.
69. *Арнольд В.И.* О классической теории возмущений и проблеме устойчивости планетных систем // ДАН СССР. 1962. Т. 145, № 3. С. 487.
70. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991.
71. *Заславский Г.М.,Филоненко Н.Н.* Стохастическая неустойчивость захваченных частиц и условия применимости квазилинейного приближения // ЖЭТФ. 1968. Т.54, вып. 5. С. 1590.
72. *Заславский Г.М., Захаров М.Ю., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* Стохастическая паутина и диффузия частиц в магнитном поле // ЖЭТФ. 1986. Т.91, вып. 5. С. 500.
73. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* Минимальный хаос, стохастическая паутина и структура с симметрией «квазикристалл» // УФН. 1988. Т. 156, вып. 2. С. 193.
74. *Shechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn I.W.* Metallic phase with long-rage orientational order and no translational symmetry // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P. 1951.
75. *Chirikov B.V., Izrailev F.M.* Some numerical experiments with a nonlinear mappings: stochastic component // Colloq. Intern. du C.N.R.S. Transformations ponctuelles et leur applications. Toulouse-1973. Paris, 1976. P. 409.
76. *Tabor M.* Modern dynamics and classical analysis // Nature. 1984. Vol. 30. P. 277.
77. *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: Сов. радио, 1970.
78. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

79. *Козлов В.В.* Несуществование однозначных интегралов и ветвление решений в динамике твердого тела // ПММ. 1978. Т. 42 (3). С. 400.

80. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980.

81. *Зиглин С.Л.* Самопересечение комплексных сепаратрис и несуществование интегралов в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // ПММ. 1981. Т. 45 (3). С. 564.

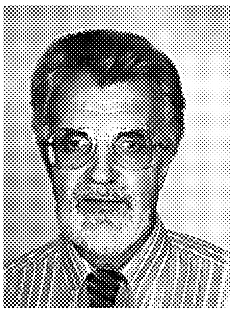
Старооскольский технологический институт

Поступила в редакцию 13.07.2005

CHAOS AND NONINTEGRABILITY IN HAMILTONIAN SYSTEMS

R.R. Mukhin

The article is devoted to historical development of one key aspect of Hamiltonian systems – nonintegrability, and its relation with chaotic behavior of the system. Evolution from the concept of quite integrable system to partly integrable one is shown. The relation of nonintegrability with such fundamental concepts as Kolmogorov stability, systems with divided phase space, Arnold diffusion, Zaslavsky web and others is discussed.



Мухин Равиль Рафкатович – родился в Челябинской области (1947), окончил Московский инженерно-физический институт (1976). После защиты кандидатской диссертации (1991, Институт органического синтеза и углехимии АН Казахстана) работал в Карагандинском государственном университете. В настоящее время работает в Старооскольском технологическом институте (Старый Оскол Белгородской области). Сейчас область научных интересов – история физики, в особенности, история нелинейной динамики. Имеет публикации.
E-mail:mukhiny@mail.ru