



## ДИНАМИКА ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНО СВЯЗАННЫХ ФАЗОУПРАВЛЯЕМЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С МАЛОИНЕРЦИОННЫМИ ЦЕПЯМИ УПРАВЛЕНИЯ

*В.В. Матросов*

Изучается динамика ансамбля, состоящего из двух параллельно связанных систем фазовой автоподстройки с малоинерционными цепями управления. Рассматриваются вопросы устойчивости синхронных режимов ансамбля, изучаются механизмы возникновения квазисинхронных колебаний, анализируются области существования синхронных, квазисинхронных и асинхронных режимов. Полученные результаты сравниваются с аналогичными результатами моделирования динамики ансамбля с каскадным типом соединения, выделяются общие свойства и принципиальные различия.

### Введение

В настоящее время проявляется большой интерес к исследованию динамического поведения связанных активных элементов. Этот интерес обусловлен тем, что при объединении в ансамбль связываемые элементы приобретают ряд новых свойств, которые представляют интерес для различных приложений. Среди активных элементов особый класс составляют фазоуправляемые генераторы (системы фазовой автоподстройки – ФАП), поскольку их математические модели содержат угловые координаты, то есть фазовые пространства этих моделей представляют собой либо окружность, либо цилиндры. Системы в цилиндрических фазовых пространствах допускают большее разнообразие движений, чем динамические системы, определенные в декартовых системах координат [1]. При объединении системы, заданные на окружности или цилиндрах, порождают модели с существенно большим разнообразием аттракторов, чем эти системы имели до объединения. Так, например, две системы, заданные на окружности, обладающие только двумя типами стационарных движений, при объединении порождают систему на торе, которая содержит счетное множество различных аттракторов, а следовательно, и бифуркаций [2, 3]. Возникающие новые движения являются образом новых динамических режимов, не свойственных парциальным системам. Для эффективного использования этих режимов крайне важно понимать механизмы их возникновения, а также, как с помощью параметров ансамблей можно управлять свойствами этих режимов.

Представляемая статья продолжает исследования динамики малых ансамблей фазоуправляемых систем. Наличие локальных цепей управления у этих систем позволяет даже в рамках двух систем конструировать различные ансамбли. К настоящему времени достаточно хорошо изучены динамические свойства малых ансамблей каскадно связанных систем [3–10]. В данной работе анализируется динамика двух параллельно связанных фазовых систем. С помощью компьютерного моделирования, основанного на методах теории бифуркаций, проводится анализ различных сечений пространства параметров. Цель исследований состоит в выявлении особенностей параллельного объединения, в изучении влияния связей на динамику ансамбля и структуру пространства параметров.

### 1. Структурная схема, математические модели и динамические режимы двух параллельно связанных систем фазовой автоподстройки

Структурная схема параллельного объединения двух ФАП (ПФАП) в ансамбль представлена на рис. 1. Здесь опорным сигналом для обоих управляемых генераторов ансамбля является сигнал  $S_0(t)$ . Этот сигнал поступает на фазовые детекторы  $\Phi Д_1$  и  $\Phi Д_2$ , где сравнивается с сигналами  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$  управляемых генераторов  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , соответственно.

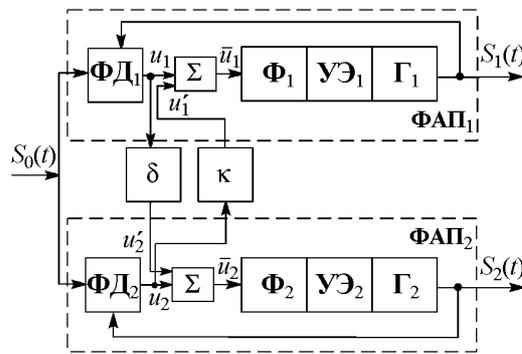


Рис. 1. Структурная схема параллельного соединения двух ФАП

В результате на выходе  $\Phi Д_1$  и  $\Phi Д_2$  вырабатываются напряжения  $u_1$  и  $u_2$ , пропорциональные разности фаз колебаний управляемых генераторов и опорного сигнала. Далее сигналы фазовых рассогласований  $u_1$  и  $u_2$  поступают на сумматоры  $\Sigma$ , где суммируются с преобразованными напряжениями  $u'_1 = \kappa u_2$  и  $u'_2 = \delta u_1$ . Суммарные сигналы  $\bar{u}_1 = u_1 - \kappa u_2$  и  $\bar{u}_2 = u_2 + \delta u_1$  используются для управления генераторами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Операторные уравнения, описывающие динамику такой системы, имеют вид [11, 12]

$$\begin{aligned} \frac{p\varphi_1}{\Omega_1} &= \frac{\Omega_1^0}{\Omega_1} - K_1(p)[F(\varphi_1) + \kappa F(\varphi_2)], \\ \frac{p\varphi_2}{\Omega_2} &= \frac{\Omega_2^0}{\Omega_2} - K_2(p)[F(\varphi_2) + \delta F(\varphi_1)], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $p \equiv d/dt$ ,  $\varphi_i$  – текущее фазовое рассогласование;  $\Omega_i^0$  – начальная частотная расстройка  $i$ -го управляемого генератора относительно опорного сигнала;  $\Omega_i$  характеризует полосу удержания  $i$ -го генератора;  $K_i(p)$  – коэффициент передачи фильтра низких частот  $\Phi_i$ ;  $F(\varphi_i)$  – характеристика фазового дискриминатора ( $i = 1, 2$ ).

В предположении одинаковых полос удержания парциальных систем  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ , синусоидальных характеристик фазовых дискриминаторов  $F(\varphi_{1,2}) = \sin(\varphi_{1,2})$  и при использовании в цепях управления фильтров первого порядка с коэффициентами передачи  $K_{1,2}(p) = (1 + T_{1,2}p)^{-1}$ , из уравнений (1) получается

следующая динамическая система:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1, & \varepsilon_1 \frac{dy_1}{d\tau} &= \gamma_1 - \sin \varphi_1 - y_1 - \kappa \sin \varphi_2 \equiv P_1(\varphi_1, y_1, \varphi_2, y_2), \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= y_2, & \varepsilon_2 \frac{dy_2}{d\tau} &= \gamma_2 - \sin \varphi_2 - y_2 - \delta \sin \varphi_1 \equiv Q_1(\varphi_1, y_1, \varphi_2, y_2), \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\tau = \Omega t$  – безразмерное время;  $\varepsilon_i = \Omega T_i$  – безразмерные параметры фильтров,  $T_i$  – постоянные времени фильтров;  $\gamma_i = \Omega_i^0 / \Omega$  – относительные начальные частотные расстройки управляемых генераторов;  $\kappa = \kappa / \Omega$ ;  $\delta = \delta / \Omega$ . Система (2) определена в четырехмерном цилиндрическом фазовом пространстве  $V = \{\varphi_1(\text{mod}2\pi), y_1, \varphi_2(\text{mod}2\pi), y_2\}$ .

При  $\varepsilon_1 \ll 1$ ,  $\varepsilon_2 \ll 1$  система (2) имеет устойчивую интегральную поверхность  $W_1 : \{P_1(\varphi_1, y_1, \varphi_2, y_2)=0, Q_1(\varphi_1, y_1, \varphi_2, y_2)=0\}$ , движения на которой определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= \gamma_1 - \sin \varphi_1 - \kappa \sin \varphi_2, \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= \gamma_2 - \sin \varphi_2 - \delta \sin \varphi_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (3) в силу периодичности ее правых частей по переменным  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  с периодом  $2\pi$  является нелинейной динамической системой на тороидальной фазовой поверхности  $T = \{\varphi_1(\text{mod}2\pi), \varphi_2(\text{mod}2\pi)\}$ . Она описывает динамику ПФАП с идеализированными единичными фильтрами ( $K_{1,2}(p) = 1$ ) в цепях управления и отражает динамические процессы, протекающие в ПФАП с малоинерционными цепями управления. Модели (2) и (3) есть уравнения двух систем маятникового типа, объединенных нелинейными связями, поэтому исследование этих уравнений может представлять интерес и для других приложений, где процессы описываются динамическими системами типа взаимосвязанных ротаторов.

В основе исследования динамических режимов ансамблей ФАП по их математическим моделям лежит взаимно-однозначное соответствие между аттракторами модели и динамическими режимами управляемых генераторов [7]: состояния равновесия отвечают режимам глобальной синхронизации, когда все генераторы ансамбля синхронизированы относительно опорного сигнала; аттракторы колебательные соответствуют режимам глобальной квазисинхронизации, когда все генераторы ансамбля функционируют в квазисинхронном режиме; колебательно-вращательные – режимам частичной квазисинхронизации, когда одни генераторы ансамбля находятся в квазисинхронном режиме, а другие – в режиме биений; наконец, вращательные аттракторы отражают глобальный режим биений, когда все генераторы ансамбля функционируют в режиме биений. Таким образом, изучение областей существования различных типов динамических режимов в пространстве параметров сводится к анализу областей существования аттракторов того или иного типа. Наиболее полную информацию о поведении ансамбля удастся получить, когда динамика ансамбля описывается двумерными моделями. В настоящее время существуют методики, позволяющие провести достаточно полный бифуркационный анализ этих моделей. В силу существенной нелинейности модели (3) этот анализ проводится путем компьютерного моделирования с использованием программного комплекса ДНС [13]. Напомним, что динамические системы на торе содержат счетное множество различных

аттракторов, провести их полное рассмотрение не представляется возможным. Поэтому мы ограничимся рассмотрением колебательных и колебательно-вращательных аттракторов модели (3), которые определяют динамические режимы, представляющие наибольший интерес для практических приложений.

## 2. Синхронные режимы и точность синхронизации

Синхронные режимы ПФАП с единичными фильтрами в цепях управления определяются устойчивыми состояниями равновесия модели (3). При  $(\gamma_1, \gamma_2, \kappa, \delta) \in C_S$  в фазовом торе  $T$  существует четыре состояния равновесия

$$\begin{aligned} O_1(\varphi_1^*, \varphi_2^*), & \quad O_2(\varphi_1^*, \pi - \varphi_2^*), \\ O_3(\pi - \varphi_1^*, \pi - \varphi_2^*), & \quad O_4(\pi - \varphi_1^*, \varphi_2^*), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\varphi_1^* = \arcsin \frac{\gamma_1 - \kappa\gamma_2}{1 - \delta\kappa}, \quad \varphi_2^* = \arcsin \frac{\gamma_2 - \delta\gamma_1}{1 - \delta\kappa}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} C_0 = & \left\{ \max \left[ \frac{(\kappa\delta - 1) \cdot \text{sign}(1 - \kappa\delta) \cdot \text{sign}\delta + \gamma_2}{\delta}, (\kappa\delta - 1)\text{sign}(1 - \kappa\delta) + \kappa\gamma_2 \right] < \right. \\ & \left. < \gamma_1 < \min \left[ \frac{(1 - \kappa\delta) \cdot \text{sign}(1 - \kappa\delta) \cdot \text{sign}\delta + \gamma_2}{\delta}, (1 - \kappa\delta)\text{sign}(1 - \kappa\delta) + \kappa\gamma_2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Устойчивые состояния равновесия  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_4$  определяют синхронные режимы  $I_{S1}$ ,  $I_{S2}$  и  $I_{S4}$ , соответственно. Так как при значениях параметров из области  $C_0$  на торе  $T$  всегда есть устойчивое состояние равновесия, то область  $C_S$  существования синхронных режимов совпадает с  $C_0$ . Примечательно, что области  $C_S$  в случае параллельного и каскадного соединения ФАП с идеализированными фильтрами в цепях управления ( $K_{1,2}(p) = 1$ ) совпадают, различия имеют место в размерах областей существования конкретных синхронных режимов, различающихся точностью синхронизации. Распределение синхронных режимов по области  $C_S$  определяется бифуркационными кривыми смены устойчивости состояний равновесия модели (3). Установлено, что при  $\kappa\delta < 1$  устойчивым является состояние равновесия  $O_1$ , а при  $\kappa\delta > 1$  – либо  $O_2$ , либо  $O_4$ . Смена устойчивости состояний равновесия  $O_2$  и  $O_4$  происходит одновременно при значениях параметров, удовлетворяющих уравнениям

$$\gamma_1 = \frac{1 + \kappa}{1 + \delta}\gamma_2, \quad \gamma_1 = \frac{\kappa - 1}{1 - \delta}\gamma_2. \quad (7)$$

Прямые смены устойчивости на плоскости  $(\gamma_1, \gamma_2)$  являются диагоналями параллелограмма  $C_0$ . Распределение синхронных режимов модели (3) в сечениях  $(\kappa, \gamma_1)$  и  $(\delta, \gamma_1)$  области  $C_S$  представлено на рис. 2. Здесь штрихпунктирными линиями выделена область  $C_S$ , внутри которой сплошными линиями проведены границы областей существования синхронных режимов для ПФАП, а штриховыми линиями – для каскадного соединения двух ФАП (КФАП). Точки  $B_{1,2}$  соответствуют обращению в нуль первой ляпуновской величины  $L$  [14]. Слева от точек  $B_{1,2}$  смена устойчивости

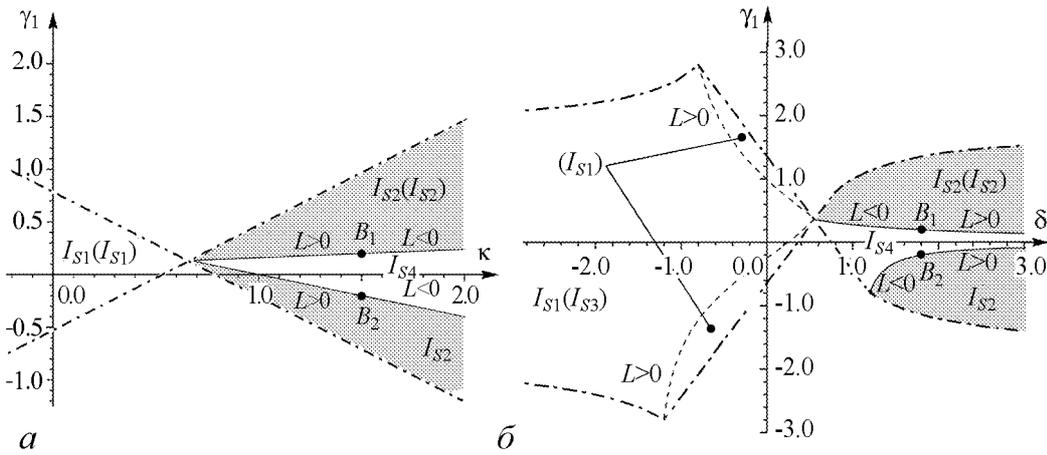


Рис. 2. Структуры области  $C_S$  существования синхронных режимов модели (3);  $\delta = 1.5$  (а),  $\kappa = 1.8$  (б);  $\gamma_2 = 0.2$

синхронного режима  $I_{S4}$  происходит мягко, а справа она носит жесткий характер. В скобках указаны динамические режимы для ансамбля с каскадным типом соединений. Из представленных картин видно, что степень влияния параметров связей на синхронные режимы при каскадном и параллельном соединениях различна. В области, где  $1 - \kappa\delta < 0$ , сильнее сказываются дополнительные связи в каскадном соединении, а при  $1 - \kappa\delta > 0$  – в параллельном.

На рис. 3 приведены диаграммы, иллюстрирующие изменения точности синхронизации колебаний управляемых генераторов ПФАП и КФАП с опорным сигналом при вариациях начальной частотной расстройки  $\gamma_1$  для  $\kappa = 1.8$ ,  $\gamma_2 = 0.2$ ,  $\delta = -0.7$  (рис. 3, а) и  $\delta = 1.7$  (рис. 3, б). На рис. 3, а штрихпунктирные линии ограничивают область  $C_S$ , пунктирные линии соответствуют смене устойчивости синхронных режимов, линии 1 и 2 отражают эволюцию ошибок синхронизации первого и второго генераторов ансамбля ПФАП в режиме  $I_{S1}$ , штриховые линии 5, 6 и линии 3, 4 – ансамбля КФАП в режимах  $I_{S1}$  и  $I_{S3}$ . Из анализа этих линий следует, что

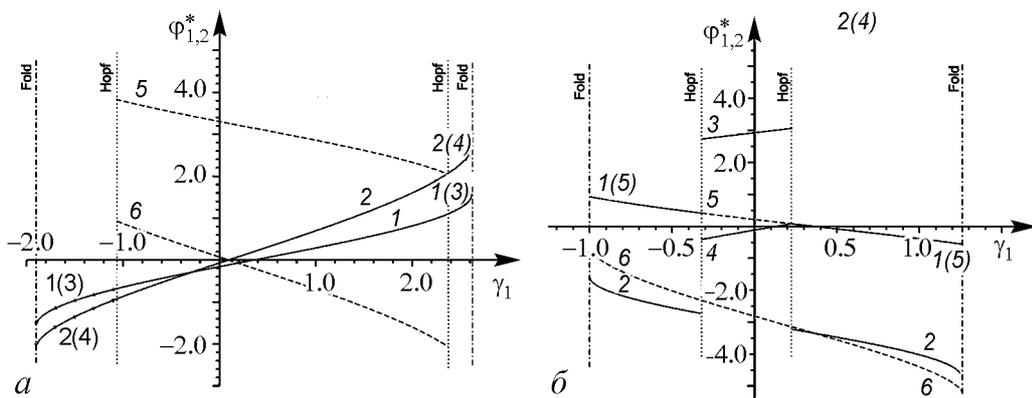


Рис. 3. Эволюция ошибок синхронизации синхронных режимов ПФАП при вариациях параметра  $\gamma_1$  для  $\delta = -0.7$  (а) и  $1.7$  (б).  $\kappa = 1.8$ ,  $\gamma_2 = 0.2$

на границах области  $C_S$  ошибки синхронизации ПФАП и КФАП одинаковы, по мере уменьшения начальной частотной расстройки возникают качественные изменения, обусловленные жесткой сменой устойчивости синхронного режима  $I_{S3}$  в модели КФАП. В результате бифуркации Андронова – Хопфа появляется синхронный режим  $I_{S1}$ , ошибки синхронизации которого отличаются от ошибок синхронизации режима  $I_{S3}$  на  $\pi$ . Таким образом, при рассматриваемых значениях параметров в ансамбле КФАП, в отличие от ансамбля ПФАП, наблюдается противофазная синхронизация. Как показали исследования, существует и обратная ситуация, когда противофазный синхронный режим имеет место в ПФАП, а в КФАП такой режим отсутствует. Этот случай иллюстрирует рис. 3, б. Здесь линии 1 и 2 характеризуют точность синхронизации первого и второго генераторов ПФАП в режиме  $I_{S2}$ , а линии 3 и 4 – в режиме  $I_{S4}$ , штриховые линии 5 и 6 отражают ошибки синхронизации первого и второго генераторов КФАП в режиме  $I_{S2}$ . Отметим, что в рассматриваемом примере совпадение точности синхронизации на границах области  $C_S$  для каскадного и параллельного соединений имеет место лишь для первых генераторов ансамблей. Обнаруженный эффект противофазной синхронизации может представлять интерес для передачи информации на основе манипуляции фазы.

### 3. Динамические режимы и структура пространства параметров в случае слабых связей

На рис. 4, а представлено разбиение плоскости  $(\gamma_1, \gamma_2)$  начальных частотных расстроек модели (3) в случае, когда обе связи являются слабыми  $\delta=0.5$ ,  $\kappa=0.7$ . Рис. 4, б отражает структуру пространства параметров (3) в случае, когда одна из связей является сильной  $\kappa=1.8 > 1$ , другая – слабой  $\delta=0.2 < 1$ , при этом совокупность связей остается слабой ( $\delta\kappa < 1$ ). На представленных диаграммах штрихпунктирной линией выделена область  $C_0$ .

При значениях параметров из области  $C_0$  в фазовом пространстве модели (3) всегда существует устойчивое состояние равновесия  $O_1$  (рис. 5, а), определяющее

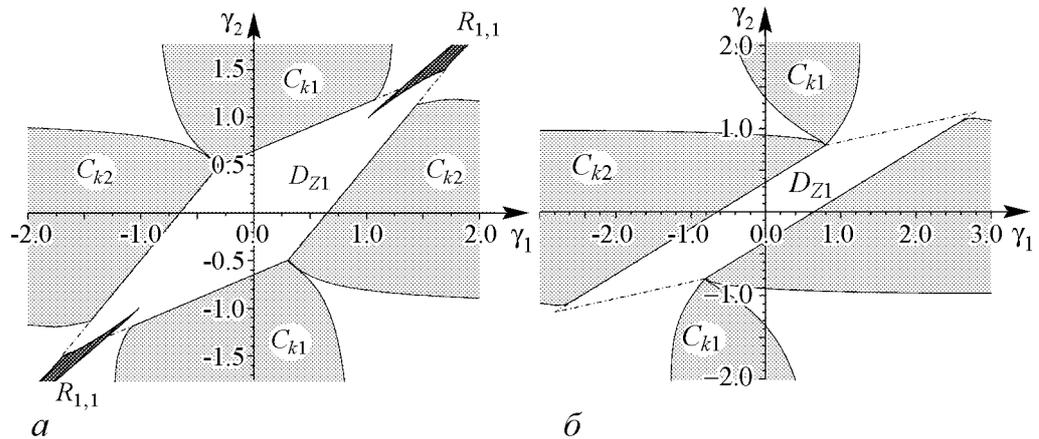


Рис. 4. Структура пространства параметров ПФАП с малоинерционными цепями управления в случае слабых связей для  $\delta = 0.5$ ,  $\kappa = 0.7$ (а) и  $\delta = 0.2$ ,  $\kappa = 1.8$  (б)

синхронный режим  $I_{S1}$ . Поэтому область  $C_{S1}$  существования (удержания) режима  $I_{S1}$  совпадает с областью  $C_0$ . При выходе из  $C_{S1}$  в области  $C_{k2}$  состояния равновесия исчезают, в фазовом пространстве системы (3) рождается пара колебательно-вращательных предельных циклов, охватывающих фазовый тор  $T$  в направлении  $\varphi_1$  (рис. 5, б). Устойчивый цикл  $L_{1,0}$  определяет режим, в котором первый генератор работает в режиме биений, а второй – в режиме квазисинхронизма, в ПФАП устанавливается режим частичной квазисинхронизации  $I_{k2}$ . Границами областей  $C_{k2}$  служат бифуркационные кривые образования двойных предельных циклов и петли сепаратрис седло-узла второго рода. При выходе из области  $C_{S1}$  в область  $C_{k1}$  исчезновение состояний равновесия сопровождается рождением колебательно-вращательных предельных циклов, охватывающих тор в направлении  $\varphi_2$  (рис. 5, в). Устойчивый цикл  $L_{0,1}$  соответствует тому, что второй генератор работает в режиме биений, а первый – в режиме квазисинхронизма, в ПФАП возникает режим частичной квазисинхронизации  $I_{k1}$ . Границами областей  $C_{k1}$  служат бифуркационные кривые двойных предельных циклов и петли сепаратрис седло-узла второго рода. Вне областей  $C_{S1}$ ,  $C_{k1}$  и  $C_{k2}$  в фазовом пространстве модели (3) имеют место движения, охватывающие тор как в направлении  $\varphi_1$ , так и в направлении  $\varphi_2$ . Эти движения характеризуются числом вращения  $\nu$  [2], если  $\nu$  число рациональное и  $\nu \neq 0, \nu \neq \infty$ , то ему отвечают вращательные предельные циклы (рис. 5, г), если  $\nu$  иррациональное, то имеет место квазиобмотка тора  $T$  (рис. 5, д). Все вращательные аттракторы определяют глобальный режим биений.

На рис. 4, б в области  $C_0$  состояние равновесия  $O_1$  устойчиво глобально, поэтому область  $C_0$  является также областью  $D_{Z1}$  захвата в синхронный режим  $I_{S1}$ . В случае, когда обе связи слабые (см. рис. 4, а), глобальная устойчивость синхронного режима  $I_{S1}$  может нарушаться за счет возникновения в фазовом пространстве

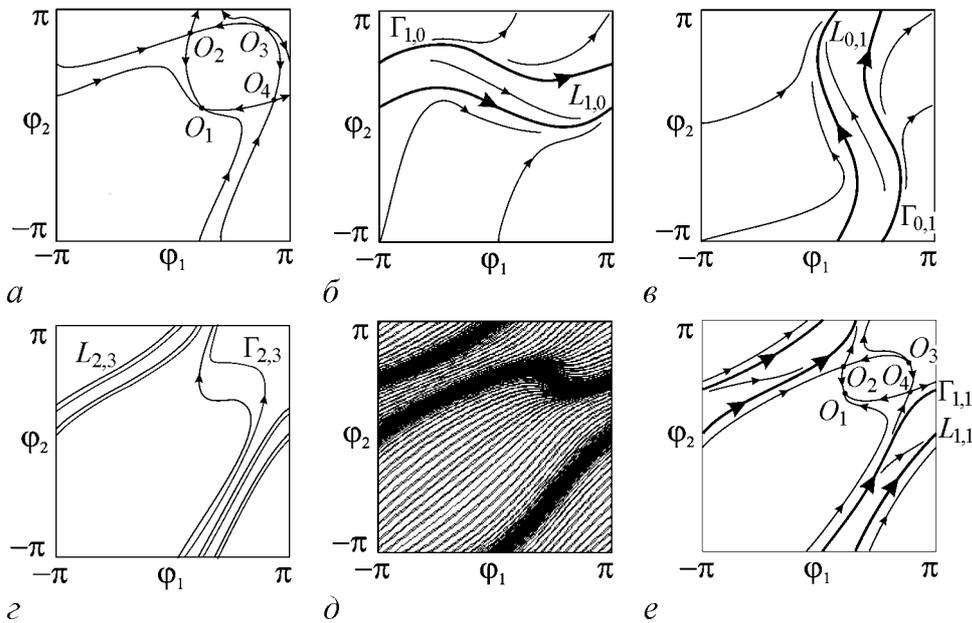


Рис. 5. Фазовые портреты модели (3) в случае слабых связей

модели (3) устойчивого вращательного цикла  $L_{1,1}$  (рис. 5, e). Область  $R_{1,1}$  существования цикла  $L_{1,1}$  на рис. 4, a выделена темным цветом. Эта область вклинивается в область  $C_0$ , поэтому здесь область захвата  $D_{z1} = C_0 \setminus R_{1,1}$  в режим  $I_{S1}$  меньше области  $C_{S1}$ .

#### 4. Динамические режимы и структура пространства параметров в случае сильных связей

Параметрический портрет системы (3) на плоскости  $(\gamma_1, \gamma_2)$  в случае сильных связей представлен на рис. 6. Здесь штрихпунктирная линия ограничивает область  $C_0$ . Остальные линии отражают следующие бифуркации: линии 1 и 2 – кривые смены устойчивости состояний равновесия  $O_2$  и  $O_4$ , смена устойчивости состояния равновесия  $O_4$  происходит мягко, а  $O_2$  – жестко; линия 3 ограничивает область существования колебательных предельных циклов. Она состоит из кривой касательной бифуркации (между точками  $b_1$  и  $b_2$ ) и кривой петель сепаратрис первого рода (не охватывающих фазовый тор  $T$ ); линии 4, 6 и 8, 10 – кривые касательных бифуркаций колебательно-вращательных предельных циклов, охватывающих  $T$  в направлении  $\varphi_2$  и  $\varphi_1$ , соответственно; линии 5, 7 и 9, 11 отвечают образованию петель сепаратрис второго рода, охватывающих  $T$  в направлении  $\varphi_2$  и  $\varphi_1$ , соответственно.

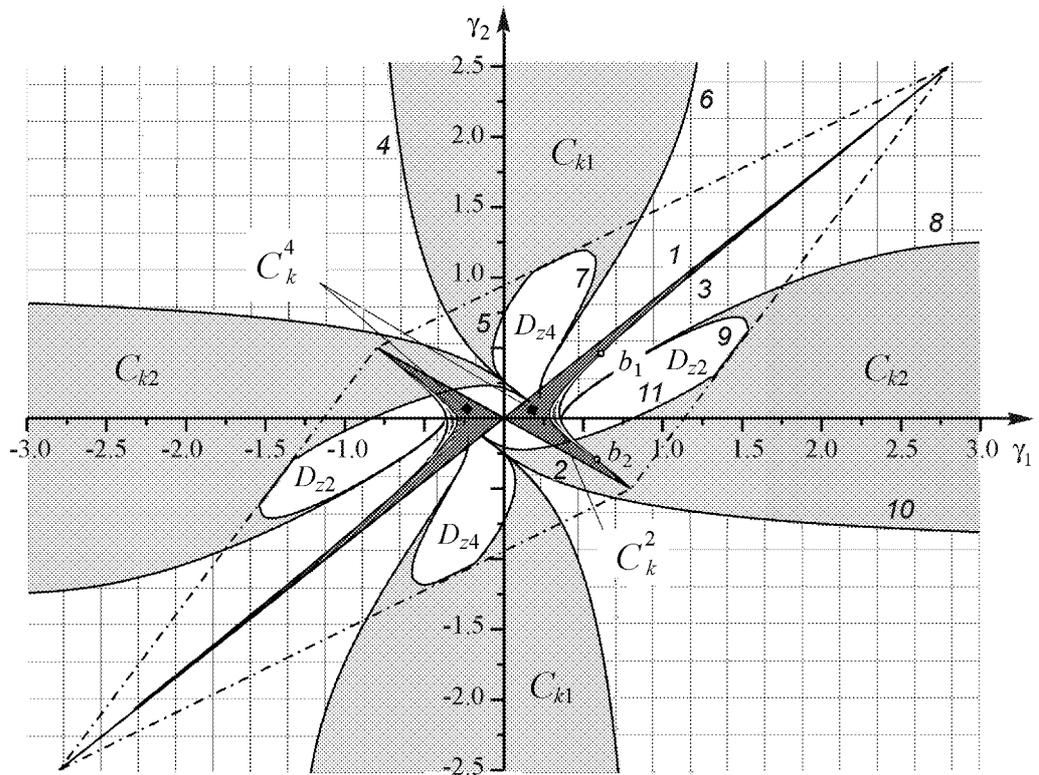


Рис. 6. Структура пространства параметров ПФАП с малоинерционными цепями управления в случае сильных связей:  $\delta = 1.5$ ;  $\kappa = 1.8$

Система (3) инвариантна относительно замены  $(\gamma_1, \gamma_2, \varphi_1, \varphi_2)$  на  $(-\gamma_1, -\gamma_2, -\varphi_1, -\varphi_2)$ , поэтому остальные линии на рис. 6 не пронумерованы, так как они переходят в пронумерованные линии в результате вышеуказанного преобразования. Перейдем к анализу областей, образованных приведенными бифуркационными кривыми, и реализующихся в этих областях динамических режимов. Ограничимся рассмотрением синхронных и квазисинхронных режимов, которым в фазовом пространстве отвечают устойчивые состояния равновесия, колебательные и колебательно-вращательные предельные циклы.

Диагонали параллелограмма  $C_0$  делят его на четыре части. В левой и правой частях устойчивым является состояние равновесия  $O_2$  и, следовательно, это есть области  $C_{S2}$  существования синхронного режима  $I_{S2}$ . В верхней и нижней частях  $C_0$  устойчиво  $O_4$  и, следовательно, эти части образуют область  $C_{S4}$ , где существует синхронный режим  $I_{S4}$ . Синхронные режимы  $I_{S2}$  и  $I_{S4}$  являются глобально устойчивыми в областях  $D_{Z2}$  и  $D_{Z4}$ , которые ограничены линиями 1, 3 и 5, 7, 9, 11. Области  $D_{Z2}$  и  $D_{Z4}$  являются областями захвата в синхронные режимы  $I_{S2}$  и  $I_{S4}$ , соответственно, границами этих областей служат кривые бифуркаций Андронова – Хопфа и петель сепаратрис второго рода. Области захвата в синхронный режим выделены белым цветом.

Фазовые портреты, отвечающие областям  $D_{Z2}$  и  $D_{Z4}$ , представлены на рис. 7, а и б, соответственно. Эти портреты есть результат компьютерного моделирования, дополненный обозначениями состояний равновесия и стрелками, указывающими направление движения по фазовым траекториям<sup>1</sup>, здесь  $x(1) \sim \varphi_1$ ,  $x(2) \sim \varphi_2$ . Примечательно, что область  $D_{Z4}$  состоит из двух частей, разделенных узкой областью существования режимов биений. Глобальная устойчивость состояний равновесия нарушается возникновением устойчивых предельных циклов. Одновременно с устойчивыми состояниями равновесия на торе Т может существовать несколько аттракторов различного типа, поэтому сценарии развития динамики ансамбля при вхождении в области захвата весьма разнообразны и зависят как от параметров системы, так и от состояния системы.

Линии 1 и 3 ограничивают область  $C_k^4$  существования глобального квазисинхронного режима  $I_{k4}$ , в котором оба генератора ансамбля находятся в квазисинхронном режиме. Режиму  $I_{k4}$  на фазовом торе отвечает колебательный предельный цикл  $L_0^4$ , охватывающий состояние равновесия  $O_4$  (рис. 7, в). Состояние равновесия  $O_2$  охватывает неустойчивый колебательный цикл  $\Gamma_0^2$ . Этот цикл ограничивает бассейн притяжения  $\Pi_{O2}$  состояния равновесия  $O_2$ , при  $(\varphi_1, \varphi_2) \in \Pi_{O2}$  в ПФАП реализуется синхронный режим  $I_{S2}$ . На рис. 6 область  $C_k^4$  выделена темным цветом, границами этой области служат бифуркационные кривые: Андронова – Хопфа, петли сепаратрис первого рода седла  $O_1$ , охватывающей  $O_4$ , двойных предельных циклов первого рода (между точками  $b_1$  и  $b_2$ ). Точки  $b_1$  и  $b_2$  служат началом еще одной бифуркационной кривой петли сепаратрис первого рода седла  $O_1$ , охватывающей состояние равновесия  $O_2$ . Эта кривая предшествует бифуркации двойных предельных циклов. В результате бифуркации петли, охватывающей  $O_2$ , на торе Т возникает устойчивый колебательный предельный цикл  $L_0^2$ , охватывающий  $\Gamma_0^2$ . Одновременно с циклом  $L_0^2$

<sup>1</sup>При компьютерном моделировании с помощью комплекса ДНС особые фазовые траектории, образующие фазовый портрет, рисуются разными цветами, поэтому дополнительных надписей не имеют. Предельные циклы на фазовых портретах, как правило, характеризуются уплотнением фазовых траекторий в их окрестности.

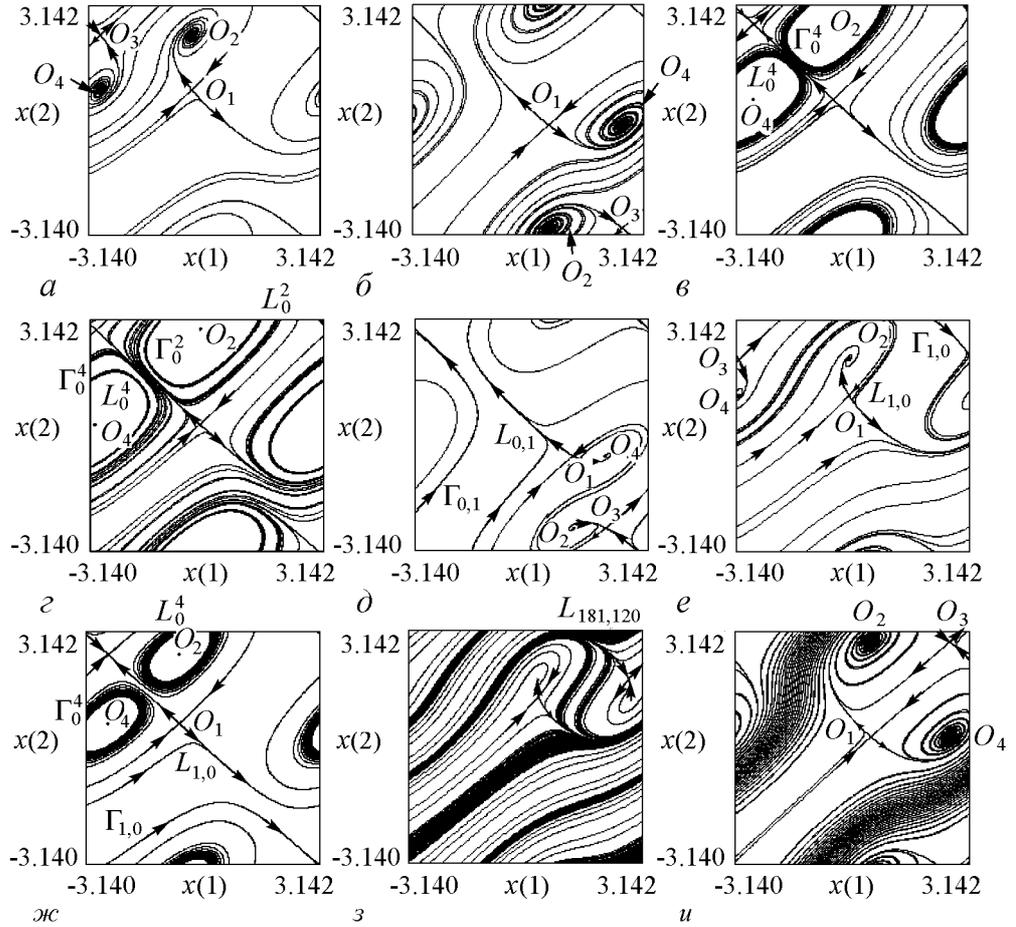


Рис. 7. Фазовые портреты модели (3) в случае сильных связей

из петли сепаратрис седла  $O_3$  возникает неустойчивый предельный цикл  $\Gamma_0^4$ , охватывающий  $L_0^4$  (рис. 7, *г*). Таким образом, бифуркационные кривые двойного предельного цикла и петель сепаратрис выделяют на плоскости параметров области  $C_k^2$ , при значениях параметров из которых на торе  $T$  существует  $L_0^2$ . На рис. 6 область  $C_k^2$  отмечена более светлым цветом, чем  $C_k^4$ . Цикл  $L_0^2$  определяет режим глобальной квазисинхронизации  $I_{k2}$ , который отличается от режима  $I_{k4}$  большей глубиной модуляции и средним значением по фазе. Так как  $C_k^2$  пересекается с  $C_k^4$ , то эта область является областью мультистабильного поведения. Здесь в зависимости от начальных условий возможно установление режимов  $I_{S2}$ ,  $I_{k2}$ ,  $I_{k4}$  (см. рис. 7, *г*).

Области  $C_{k1}$  и  $C_{k2}$  есть области существования режимов частичной квазисинхронизации  $I_{k1}$  и  $I_{k2}$ . Этим режимам на торе  $T$  отвечают устойчивые колебательно-вращательные предельные циклы  $L_{0,1}$  и  $L_{1,0}$  соответственно. На рис. 6 эти области выделены светло-серым цветом, их границами служат бифуркационные кривые петель сепаратрис и двойных предельных циклов второго рода. Вне области  $C_0$  режимы  $I_{k1}$  и  $I_{k2}$  являются глобально устойчивыми (фазовые портреты эквивалентны портретам на рис. 5, *б*, *в*), в областях пересечения с  $C_0$  они всегда живут совместно с

синхронными режимами (рис. 7 д, е), а также существуют значения параметров, где они реализуются совместно с режимами глобальной квазисинхронизации (рис. 7, ж).

В областях, выделенных штриховкой на торе  $T$ , могут существовать вращательные аттракторы, отвечающие за установление глобальных режимов биений. Вне области  $C_0$  это либо вращательные предельные циклы, либо квазипериодические траектории (фазовые портреты эквивалентны портретам на рис. 5, з, д). В области  $C_0$  могут существовать только вращательные предельные циклы, но различной сложности, от простых, содержащих по одному обороту на  $2\pi$  вдоль координат  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , до сложных, включающих многочисленные провороты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . В результате многочисленных оборотов, число которых, как правило, по переменным  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  не одинаково, сложные предельные циклы по своему виду больше схожи с хаотическими аттракторами, чем с регулярными (рис. 7, з). Области существования режимов биений образуют в области  $C_0$  слоистую структуру, аналогичную слоистой структуре пространства параметров, выявленную в каскадном типе соединения – при движении в заштрихованной области  $C_0$  области глобальной устойчивости синхронных режимов чередуются с областями режимов биений. В этой части пространства параметров переходные процессы к глобально устойчивым синхронным режимам могут быть достаточно длительными и иметь сложный вид. Фазовый портрет системы (3), где переходные процессы к синхронному режиму могут иметь сложный вид, представлен на рис. 7, и. Здесь состояние равновесия  $O_4$  является устойчивым, а  $O_2$  – неустойчивым. Если начальное состояние системы расположить в окрестности  $O_2$ , то переход к  $O_4$  окажется длительным и будет иметь сложный вид. Сложный переходный процесс к режиму  $I_{S2}$  можно наблюдать также при разрушении предельного цикла  $L_{181,120}$  на рис. 7, з.

### Заключение

В данной работе в рамках динамических моделей (2) и (3) проведено исследование динамических режимов параллельного соединения двух фазоуправляемых систем с малоинерционными цепями управления. Проведенное на основе модели (3) компьютерное исследование позволило выявить роль связей при параллельном объединении систем в ансамбль.

Установлено, что объединение фазовых систем слабыми связями приводит к появлению регулярных квазисинхронных режимов, не свойственных парциальным системам. Области существования квазисинхронных режимов не пересекаются с областями существования синхронных режимов и режимов биений, поэтому квазисинхронные режимы всегда глобально устойчивы. В случае, когда обе связи слабые ( $\kappa < 1$ ,  $\delta < 1$ ), область захвата в синхронный режим меньше области удержания этого режима. За счет изменения силы связи, оставаясь в рамках совокупной слабой связи ( $\kappa\delta < 1$ ), можно добиться совпадения областей захвата и удержания синхронного режима. Глобальных квазисинхронных режимов, когда оба генератора работают в квазисинхронном режиме, в ПФАП со слабыми связями быть не может.

Объединение фазовых систем сильными связями приводит к появлению ряда новых эффектов, не свойственных ансамблю со слабыми связями. При наличии сильных связей в ансамбле возникают глобальные квазисинхронные режимы. Области существования этих режимов всегда располагаются внутри области  $C_0$ , поэтому,

во-первых, они имеют ограниченные размеры, во-вторых, эти режимы не могут быть глобально устойчивыми. Области существования режимов частичной квазисинхронизации и биений проникают в область существования синхронных режимов, что приводит к возникновению слоистой структуры пространства параметров, появлению мультистабильности и гистерезисных явлений. Области захвата в синхронные режимы не совпадают с областью удержания, области захвата в синхронный режим состоят из нескольких подобластей.

Сравнительный анализ результатов исследований каскадного и параллельного типов соединений свидетельствует, что многие явления, обнаруженные ранее при изучении каскадного соединения, сохраняются. Например, наличие нескольких синхронных режимов, возникновение режимов глобальной и частичной квазисинхронизации, бифуркационные механизмы возникновения квазисинхронных режимов, существование слоистой структуры пространства параметров и т.д. Различия же наблюдаются в соотношениях параметров систем и связей, когда реализуются те или иные режимы. В частности, при параллельном типе соединения, в отличие от каскадного соединения, режимы глобальной квазисинхронизации возникают в области малых частотных расстройек, при слабых связях квазисинхронные режимы всегда глобально устойчивы, области захвата в синхронный режим состоят из нескольких подобластей.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-02-17409), а также программы «Университеты России» (проект УР.03.01.179).*

#### **Библиографический список**

1. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.
2. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1967.
3. Матросов В.В. Некоторые особенности динамического поведения каскадного соединения двух фазовых систем // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т.5, №6. С.52.
4. Корзинова М.В., Матросов В.В. Моделирование нелинейной динамики каскадного соединения фазовых систем // Изв.вузов. Радиофизика. 1993. Т.36, №8. С.815.
5. Матросов В.В., Корзинова М.В. Коллективная динамика каскадного соединения фазовых систем // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. №2. С.10.
6. Матросов В.В., Корзинова М.В. Синхронные и автоколебательные режимы каскадного соединения фазовых систем // Вестник ННГУ. Нелинейная динамика – синхронизация и хаос. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1996. С.77.
7. Матросов В.В., Касаткин Д.В. Динамические режимы связанных генераторов с фазовым управлением // Радиотехника и электроника. 2003. Т.48. №6. С.637.
8. Матросов В.В., Касаткин Д.В. Анализ процессов возбуждения хаотических колебаний во взаимосвязанных генераторах с фазовым управлением // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т.11, №4. С.31.

9. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Особенности динамики трех каскадно связанных генераторов с фазовым управлением // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т.12, №1. С.159.
10. *Мишагин К.Г., Матросов В.В., Шалфеев Д.В., Шохнин В.В.* Экспериментальное исследование генерации хаотических колебаний в ансамбле двух каскадно связанных фазовых систем // Письма в ЖТФ. 2005. Т.31, №24. С.31.
11. *Капранов М.В.* Взаимодействующие многосвязанные СФС // Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белостиной. М.: Радио и связь, 1982. С.55.
12. *Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д.* Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: Изд-во ИПФАН, 1989.
13. *Матросов В.В.* Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Учебно-методическая разработка. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 54 с.
14. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.

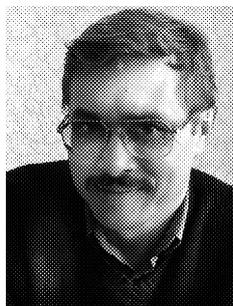
*Нижегородский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 27.11.2005*

## DYNAMICS OF TWO PARALLEL PHASE-LOCKED-LOOPS WITH LOW-INERTIA CONTROL LOOPS

*V.V. Matrosov*

Dynamics of an ensemble of two parallel phase-locked-loop systems with low-inertia control loops is investigated. Stability of synchronous modes of the ensemble is considered. Mechanisms of arising of quasi-synchronous oscillations are studied. Domains of existence of synchronous, quasi-synchronous, and asynchronous modes are analysed. The results obtained are compared with analogous data of modeling dynamics of an ensemble with cascade coupling; their common features and basic differences are distinguished.



*Матросов Валерий Владимирович* – родился в 1960 году. Окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Горьковского государственного университета по специальности «прикладная математика» (1982). С 1984 по 1999 – научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ, с 1999 года – доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ. Кандидат физико-математических наук (1994), доцент (2001). Область научных интересов – динамика нелинейных систем, динамический хаос, синхронизация и управление хаосом, математическое моделирование. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, является соавтором двух учебных пособий.  
E-mail: matrosov@rf.unn.ru.