



ИНИЦИИРОВАННЫЕ КОРОТКИМИ ИМПУЛЬСАМИ УСТОЙЧИВЫЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ В СИСТЕМЕ С НЕУСТОЙЧИВЫМ ПРЕДЕЛЬНЫМ ЦИКЛОМ

А.П. Кузнецов, Л.В. Тююкина

Рассматривается динамика системы с неустойчивым предельным циклом под периодической последовательностью δ -импульсов. Показано, что при наличии в системе кубической нелинейности в узкой области значений параметров внешнего воздействия наблюдаются устойчивые квазипериодические режимы и режимы захвата фазы (синхронизация). Изучено влияние основных параметров системы на возникновение таких режимов.

Введение

Явление синхронизации известно очень давно и тем не менее продолжает привлекать внимание исследователей. Классическая ситуация синхронизации состоит в том, что на автоколебательную систему с устойчивым предельным циклом воздействуют внешним периодическим (обычно гармоническим) сигналом [1–8]. В этом случае возможны режимы захвата частоты и квазипериодические режимы, соответственно, внутри и вне языков Арнольда на плоскости амплитуда – частота внешнего воздействия. При этом в фазовом пространстве реализуется либо устойчивый тор, либо устойчивый и седловой предельные циклы, возникающие на этом торе.

Эталонной системой для изучения явления синхронизации является находящаяся под гармоническим воздействием система Ван дер Поля, в которой имеет место бифуркация Андронова – Хопфа рождения устойчивого предельного цикла при переходе управляющего параметра λ через нуль,

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = B \cos(2\pi t/T). \quad (1)$$

Здесь x – динамическая переменная, B и T – амплитуда и период внешнего воздействия.

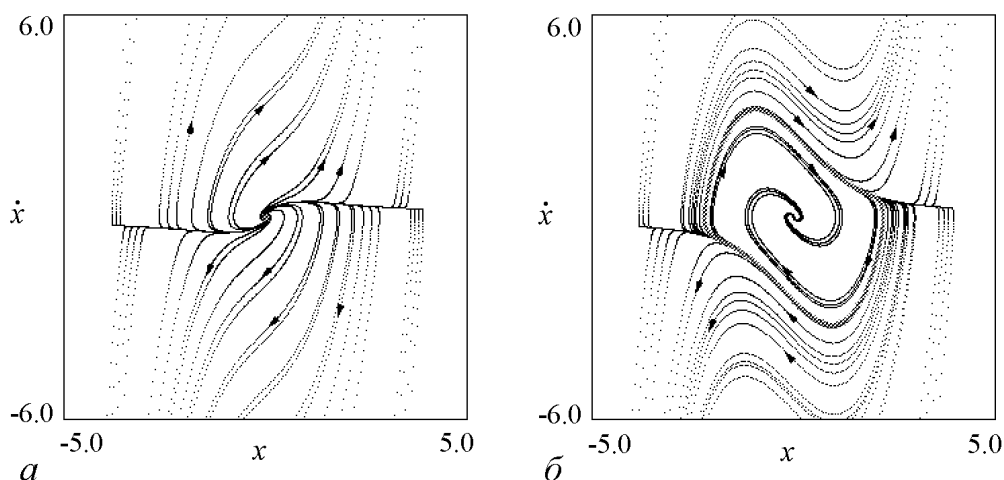


Рис. 1. Фазовые портреты автономной системы (2), $\lambda < 0$ (а) и $\lambda > 0$ (б)

Рассмотрим (пусть отчасти и формально) ситуацию, когда в системе (1) обращено время. В этом случае мы с очевидностью приходим к уравнению

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2)\dot{x} + x = B \cos(2\pi t/T). \quad (2)$$

Понятно, что изменение времени с точки зрения фазового пространства скажется лишь на направлениях «стрелочек» на фазовых портретах. Таким образом, относительно системы (2) можно сказать следующее. В автономном случае при $\lambda > 0$ в фазовом пространстве имеется неустойчивый предельный цикл (рис. 1). При наличии внешнего воздействия в его окрестности в расширенном фазовом пространстве появляется неустойчивый тор, либо неустойчивые и седловые предельные циклы на поверхности этого тора [6]. Таким образом, гармоническое воздействие на систему типа Ван дер Поля с неустойчивым предельным циклом инициирует в его окрестности неустойчивые режимы. На первый взгляд, для режимов, лежащих в окрестности такого неустойчивого предельного цикла, форма внешнего сигнала не должна быть существенной с принципиальной точки зрения. Оказывается, однако, что это не так, и импульсный сигнал может инициировать устойчивый тор и устойчивые предельные циклы на его поверхности в окрестности неустойчивого цикла в том случае, однако, если в системе существенна фазовая нелинейность.

1. Модифицированное уравнение Ван дер Поля под действием периодической последовательностью δ -импульсов

Пусть теперь система (2) находится под внешним периодическим воздействием в виде последовательности δ -функций. Тогда ее уравнение примет вид:

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2)\dot{x} + x = B \sum \delta(t - nT). \quad (3)$$

Здесь по-прежнему B – амплитуда внешнего воздействия, а T – период следования импульсов. На рис. 2 показана построенная численно карта динамических режимов

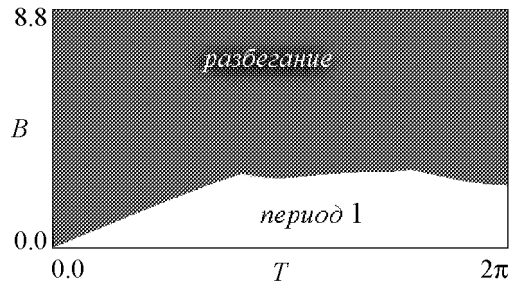


Рис. 2. Карта динамических режимов системы (3) на плоскости амплитуда B – период T внешнего воздействия для $\lambda = 1.2$

квазипериодическим, хаотическим режимам, а также режимам, имеющим большой период. Кроме того, один из серых оттенков используется для обозначения области, в которой траектории системы в фазовом пространстве убегают на бесконечность. На карте, представленной на рис. 2, наблюдаются всего две обширные области – область, отвечающая устойчивому режиму периода 1, и область убегания траектории на бесконечность. Наличие этих двух областей легко объяснимо. При небольших значениях амплитуды воздействия B попавшая внутрь неустойчивого предельного цикла изображающая точка за время автономной эволюции успевает прийти в устойчивый фокус, и внешняя сила не может «выбросить» ее за пределы неустойчивого цикла. Если же амплитуда B велика, то изображающая точка будет «выброшена» за пределы неустойчивого цикла и, как следствие, уйдет на бесконечность.

Модифицируем теперь исследуемую систему. Для этого добавим в автономное уравнение еще одну нелинейность, а именно, нелинейность кубического типа, характерную для осциллятора Дуффинга,

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = 0, \quad (4)$$

где β – параметр нелинейности. Эта нелинейность сказывается, как известно [6], существенным образом на динамике фазы, которая в рамках укороченных уравнений теперь зависит от амплитуды. (Изображающие точки, имеющие одинаковые начальные координаты, в случаях $\beta = 0$ и $\beta \neq 0$ двигаются по-разному – во втором случае фаза меняется быстрее.)

Вновь введем в рассматриваемую систему внешнее периодическое импульсное воздействие

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = B \sum \delta(t - nT). \quad (5)$$

Для исследования системы (5) построим карты динамических режимов на плоскости амплитуда B – период T воздействия при значении параметра фазовой нелинейности $\beta = 1$. Карты для малых λ (например, $\lambda = 0.3$) качественно не отличаются от приведенных на рис. 2. Но уже при $\lambda = 1.2$ (рис. 3, а) видно, что на границе областей периода 1 и разбегания появляется узкая полоса устойчивых квазипериодических режимов и режимов захвата фазы (синхронизации). На увеличенном фрагменте на рис. 4, а очень хорошо просматривается классическая картина языков синхронизации устойчивых режимов, опирающихся своими остриями на границу

области режима периода 1 (исключение составляет область периода 2). При увеличении параметра λ эта картина сохраняется, а внутренняя структура языков синхронизации становится более ярко выраженной (рис. 3, *б* и 4, *б*). Так, внутри области режима периода 2 и внутри большинства языков синхронизации возникают области режимов удвоенного периода с последующим переходом к хаосу через удвоения периода. На рис. 4, *б* хорошо видна область устойчивых режимов характерного вида («crossroad area», по терминологии [22]) на базе цикла периода 4.

Таким образом, имеет место эффект возникновения устойчивых квазипериодических и синхронных режимов, включая режимы удвоенного периода, в окрестности неустойчивого предельного цикла, инициированных периодической последовательностью δ -функций. Численные эксперименты говорят о том, что этот эффект реализуется (по крайней мере, становится заметным) лишь при достаточно больших значениях параметра фазовой нелинейности β и управляющего параметра λ .

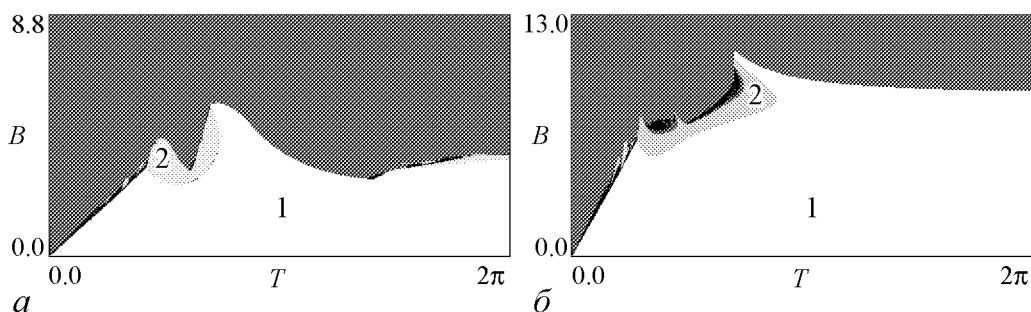


Рис. 3. Карты динамических режимов системы (5) на плоскости амплитуда B - период T внешнего воздействия для $\lambda = 1.2$ (*а*), $\lambda = 3.0$ (*б*). Параметр нелинейности $\beta = 1$

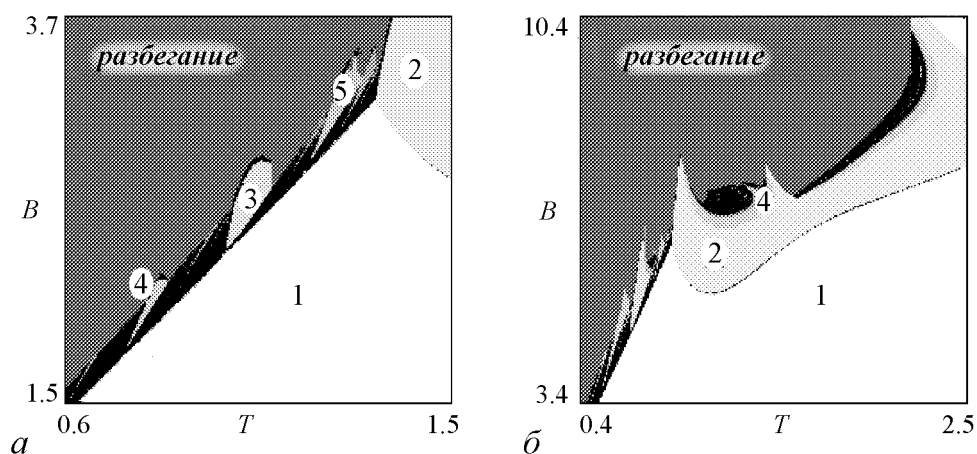


Рис. 4. Увеличенные фрагменты карт динамических режимов системы (5), представленных на рис. 3, *а* (*а*) и 3, *б* (*б*). На них хорошо видна узкая полоса устойчивых синхронных и квазипериодических режимов

Дадим еще несколько характерных иллюстраций. На рис. 5 представлен фрагмент карты динамических режимов системы (5) и соответствующие портреты аттракторов, построенные внутри основных языков синхронизации, а также аттрактор для квазипериодического режима. На рис. 6 показаны бассейны притяжения простейшего периодического и одного из квазипериодических аттракторов. Здесь L –

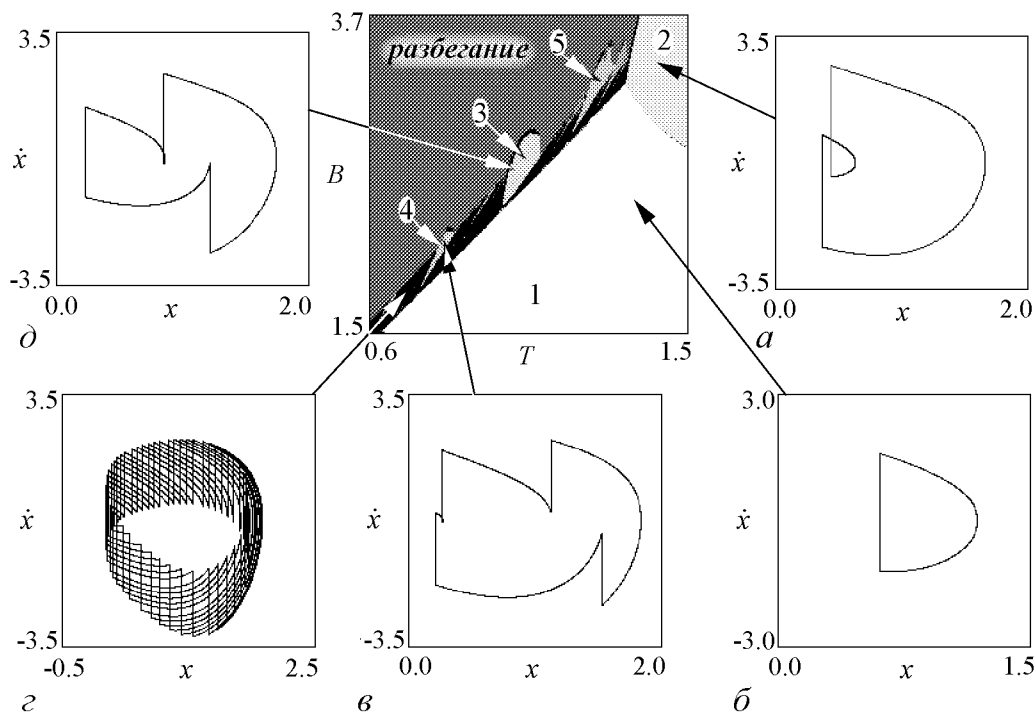


Рис. 5. Система языков синхронизации, возникающая в дифференциальном уравнении (5) при $\lambda = 1.2$ и $\beta = 1$ и портреты аттракторов, построенные для некоторых режимов

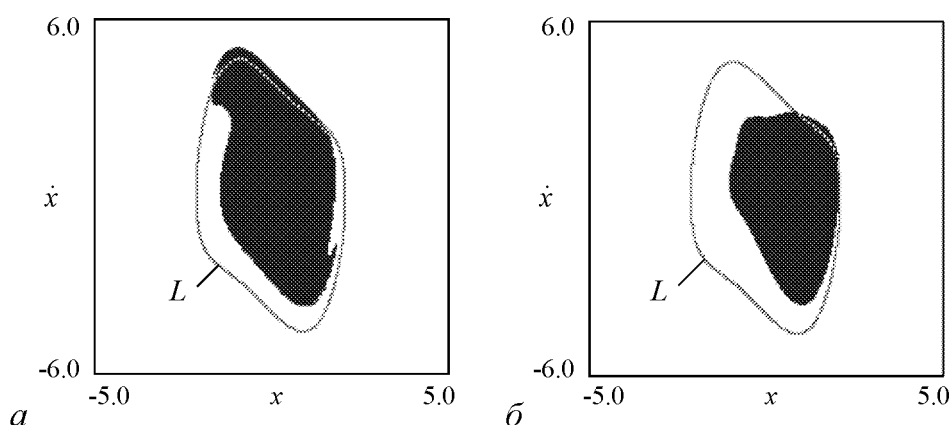


Рис. 6. Бассейны притяжения, построенные для аттракторов периодов 2 (a) и квазипериодического аттрактора ($б$) неавтономной системы (5)

неустойчивый цикл автономной системы, черная область представляет собой бассейн притяжения для аттрактора неавтономной системы (5). Все бассейны построены для сечения Пуанкаре неавтономной системы. Хорошо видно, что возникшие в рассматриваемой системе устойчивые периодические режимы располагаются в окрестности неустойчивого предельного цикла автономной системы.

При достаточно больших значениях параметров λ и β на картах динамических режимов системы (5) на границе области режима периода 1 и области разбегания наблюдается еще одна область режимов, имеющих отличный от единицы период (правая часть рис. 3, *a*, $T \approx 4-5$). Эта область в увеличенном виде для $\beta = 2$ показана на рис. 7, который иллюстрирует ее эволюцию с ростом параметра λ . При небольших λ четко видна система языков синхронизации и структуры типа «crossroad area». С ростом управляющего параметра λ языки синхронизации «опускаются» под область режима периода 1 и исчезают (рис. 7, *б*). В результате при $\lambda = 1.2$ на картах остаются лишь структуры типа «crossroad area». Это также устойчивые режимы, инициированные внешним импульсным сигналом в окрестности неустойчивого цикла, в чем убеждаемся, обратившись к рис. 8. Из сравнения рис. 5 и 8 видно, что в первом случае в промежутке между импульсами фазовая траектория совершает примерно пол-оборота вокруг устойчивого фокуса, а во втором – целый оборот. Естественно ожидать, что при больших значениях периода внешнего воздействия возникнут и другие системы языков синхронизации и структуры типа «crossroad area», отвечающие большему числу оборотов фазовой траектории вокруг устойчивого фокуса.

Итак, динамика системы протекает следующим образом. В промежутке между импульсами (стадия автономной эволюции) фазовая траектория уходит от неустойчивого цикла, однако затем внешний импульс возвращает ее в его окрестность. Затем траектория опять уходит от неустойчивого цикла, а следующий импульс ее опять возвращает в окрестность неустойчивого цикла и т.д. Этим же объясняется и тот факт, что возникшая в системе (5) структура языков синхронизации располагается на границе области режима периода 1 и области убегания траектории на бесконечность. Очевидно, что для возвращения фазовой траектории в окрестность неустойчивого цикла автономной системы необходимо, чтобы внешний импульс действовал

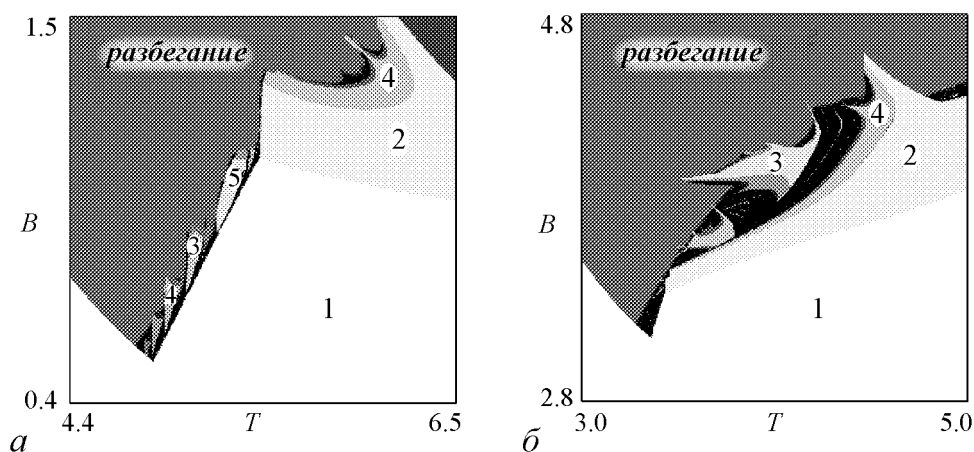


Рис. 7. Эволюция карт динамических режимов системы (5) для второй системы языков синхронизации. Карты построены при $\beta = 2$ и следующих значениях параметров λ : *a* – 0.3; *б* – 1.2

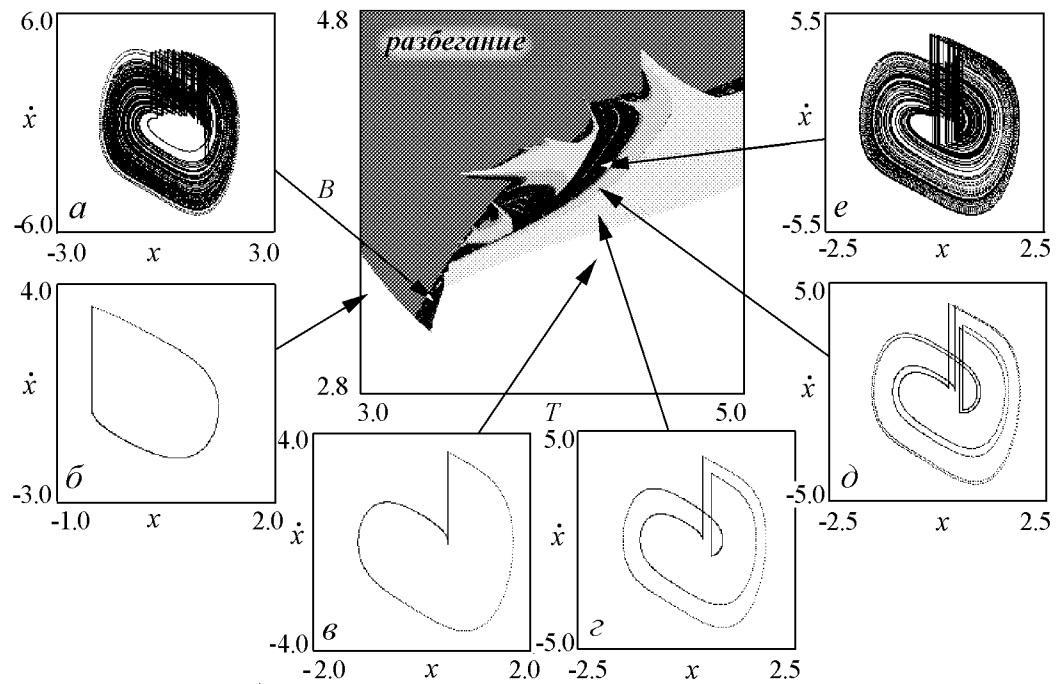


Рис. 8. Вторая область устойчивых режимов, возникающая в системе (5) при $\lambda = 1.2$ и $\beta = 2$ и портреты аттракторов, построенные для некоторых режимов

в строго определенный момент времени и имел определенную амплитуду. С одной стороны, она должна быть достаточно большой, чтобы «выбросить» фазовую траекторию как можно дальше от устойчивого фокуса, а с другой – не очень большой, чтобы траектория не ушла за пределы неустойчивого цикла. Существенную роль в стабилизации неустойчивости, как мы видели из численных экспериментов, играет фазовая нелинейность (см. ниже).

2. Роль кубической нелинейности в процессе стабилизации неустойчивого цикла периодической последовательностью δ -функций

Численные расчеты сигнализируют о том, что для того, чтобы в системе (5) была возможна стабилизация и возникли устойчивые периодические и квазипериодические режимы, необходимо присутствие кубической нелинейности и с достаточно большим параметром β . Причем чем больше β , тем при меньших значениях управляющего параметра λ возникают языки синхронизации, и тем более они «развиты». Чтобы «выявить» роль фазовой нелинейности, было проведено попарное сопоставление фазовых траекторий неавтономной системы (5), построенных в отсутствие фазовой нелинейности и при ее наличии. За траекториями наблюдали в течение времени, чуть большего периода внешнего воздействия T . Сравнимые траектории стартовали из одной точки на фазовой плоскости. Результаты представлены на рис. 9, где изображены также неустойчивые циклы автономной системы в отсутствие фазовой нелинейности и для случая $\beta = 1$. Видно, что вторая траектория движется по орбите большего радиуса, и ее фаза изменяется более ускоренно. Как

итог – первую траекторию импульс выбрасывает за пределы неустойчивого цикла, а вторая успевает заметно приблизиться к устойчивому фокусу в центре рисунка, так что внешний импульс возвращает ее в окрестность предельного цикла.

Еще одна иллюстрация роли фазовой нелинейности представлена на рис. 10. Здесь показаны по паре фазовых траекторий, стартовавших из близких точек. Рис. 10, *a* относится к системе без фазовой нелинейности, а рис. 10, *б* – с существенной нелинейностью. Точки старта помещены вблизи неустойчивого цикла, чтобы сделать наличие неустойчивости в системе более явным. Траектории на рис. 10, *a*, несмотря на импульсное внешнее воздействие, очень быстро расходятся. А на рис. 10, *б* видно, что изображающая точка, которая движется по орбите большего радиуса, опережает другую по фазе. В результате после действия двух импульсов расстояние между орбитами практически равно начальному. Фазовая нелинейность практически полностью компенсировала присущую системе неустойчивость.

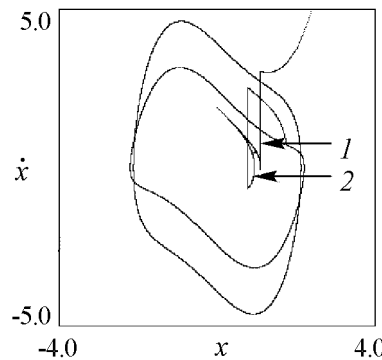


Рис. 9. Неустойчивые предельные циклы и две избранные фазовые траектории неавтономной системы (5), стартующие из одной точки, в случае отсутствия фазовой нелинейности $\beta = 0$ (1) и при $\beta = 1$ (2). Остальные параметры фиксированы и имеют значения: $\lambda = 1.2$, $T = 1.5$ и $B = 3.2$

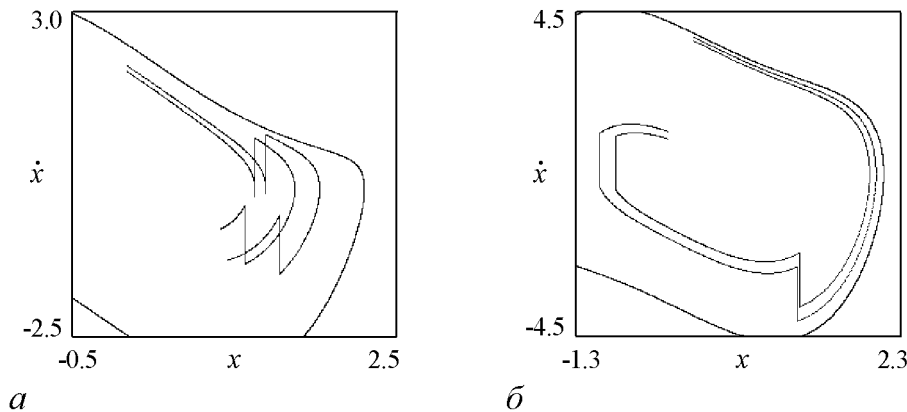


Рис. 10. Вид фазовых траекторий, стартовавших из двух близких точек, в случае, когда $\beta = 0$ (*a*) и $\beta = 1$ (*б*). Остальные параметры $\lambda = 1.2$, $T = 1.5$ и $B = 1.8$

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрена динамика неавтономной системы типа Ван дер Поля – Дуффинга с неустойчивым предельным циклом. Показано, что внешнее воздействие в виде периодической последовательности δ -функций вызывает в неавтономной системе эффект стабилизации неустойчивости и приводит к возникновению устойчивых квазипериодических режимов со встроенной системой языков синхронизации Арнольда, а также областей удвоенного периода и характерных структур «crossroad area», которые локализованы у границы области разбегания траекторий. Аттракторы разных типов устойчивых режимов существуют в окрестно-

сти неустойчивого цикла автономной системы. Этот эффект возможен (по крайней мере, становится заметным при компьютерном моделировании) при наличии достаточно сильной кубической нелинейности в исходной дифференциальной системе.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований грант №03-02-16074 и грантом №У2-Р-06-13 в рамках программы «Фундаментальные исследования и высшее образование».

Библиографический список

1. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
2. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
3. *Ott E.* Chaos in dynamical systems. Cambridge university press, 1993.
4. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
5. *Winfree A.T.* The Geometry of Biological Time. Berlin: Springer, 1980.
6. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
7. *Caldas I.L., Tasson H.* Limit cycles of periodically forced oscillations // Phys. Lett. 1989. Vol. A135. P. 264.
8. *Steeb W.H., Kunick A.* Chaos in limit-cycle systems with external periodic excitation // Int. J. of Nonlinear Mechanics. 1987. №22. P. 349.
9. *Gonzalez D.L. and Piro O.* Chaos in a nonlinear driven oscillator with exact solution // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50, №12. P. 870.
10. *Ding E.J.* Analytic treatment of periodic orbit systematics for a nonlinear driven oscillator // Phys. Rev. 1986. Vol.A34, №4. P. 3547.
11. *Ding E.J.* Analytic treatment of a driven oscillator with a limit cycle // Phys. Rev. 1987. Vol. A35, №6. P. 2669.
12. *Ding E.J.* Structure of parameter space for a prototype nonlinear oscillator // Phys. Rev. 1987. Vol. A36, №3. P. 1488.
13. *Ding E.J.* Structure of the parameter space for the van der Pol oscillator // Physica Scripta. 1988. Vol. 38. P. 9.
14. *Ullmann K. and Caldas I.L.* Transitions in the parameter space of a periodically forced dissipative system // Chaos, Solitons & Fractals. 1996. №11. P. 1913.
15. *Keener J.P., Glass L.* Global bifurcation of a periodically forced nonlinear oscillator // J. Math. Biology. 1984. №21. P. 175.
16. *Glass L., Sun J.* Periodic forcing of a limit-cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations // Phys. Rev. 1994. Vol. 50, №6. P. 5077.
17. *Ding E.J. and Hemmer P.C.* Exact treatment of mode locking for a piecewise linear map // Journal of Statistical Physics. 1987. Vol.46, №1-2. P. 99.
18. *Кузнецов А. П., Тюрюкина Л. В.* Осциллятор Ван дер Поля с импульсным воздействием: от потока к отображениям // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т.9, №6. С. 69.
19. *Glass L., et al.* Global bifurcations of a periodically forced biological oscillator // Phys. Rev. A. 1983. №29. P. 1348.

20. Кузнецов А. П., Тюрюкина Л. В. Синхронизация автоколебательной системы Ван дер Поля – Дуффинга короткими импульсами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т.12, №5. С. 16.
21. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
22. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.

Саратовский филиал ИРЭ РАН
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 24.03.2005
После доработки 14.10.2005

STABLE QUASI-PERIODIC AND PERIODIC REGIMES INITIATED BY THE SHORT PULSES IN SYSTEM WITH UNSTABLE LIMIT CYCLE

A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina

The dynamics of a system with unstable limit cycle under the periodic sequence of delta-pulses is considered. It is shown, that stable quasi-periodic regimes and phase lock regimes (synchronization) are observed within a narrow range of parameters of the external action in the system with cubic nonlinearity. Influence of main system's parameters to the stable quasi-periodic regimes and phase lock regimes is investigated.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики».

E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.tserv.ru



Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, ассистент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами посредством коротких импульсов. Автор 26 научных публикаций, в том числе 7 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов.

E-mail: ludmila@forpost.ru

