



## ДИНАМИКА ДВУХ НЕИДЕНТИЧНЫХ СВЯЗАННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С УДВОЕНИЯМИ ПЕРИОДА НА ПРИМЕРЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ РЕССЛЕРА

*А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов*

Рассматривается система, состоящая из двух связанных осцилляторов Ресслера. Проводится подробное исследование устройства плоскости параметров, управляющих бифуркациями удвоения периода подсистем. Определяются режимы динамики в различных областях данной плоскости при помощи методов построения карт динамических режимов и карты старшего ненулевого ляпуновского показателя. Проводится сравнение картины синхронизации на плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов Ресслера с аналогичными картинками для более простых систем: связанных осцилляторов Ван дер Поля и связанных логистических отображений. При помощи расчета мультипликаторов исследуется устройство границ областей синхронизации, производится поиск последовательности точек бифуркаций коразмерности два.

### Введение

В последнее время сложная динамика связанных систем исследовалась в большом количестве работ. Существенное место среди них занимают работы, в которых изучаются связанные осцилляторы либо отображения, демонстрирующие переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода при изменении некоторого управляющего параметра [1-7]. На сегодняшний день наиболее полно изучена динамика таких систем с идентичными по значению параметров подсистемами. Для них определены все возможные режимы динамики и сценарии перехода к хаосу [1,2,5,6]. Возможен, однако, альтернативный подход к исследованию систем, демонстрирующих удвоения периода. Действительно, каждая из подсистем характеризуется некоторым управляющим параметром, ответственным за удвоения. Будем теперь независимо регулировать каждый из этих параметров. Тогда естественным образом возникает задача об устройстве плоскости этих параметров. Одной из первых, выполненных в таком контексте, была работа [3], в которой изучалась система связанных неидентичных логистических отображений. Было показано, что в окрестности диагонали на плоскости управляющих параметров линии удвоений обрываются и возникает область квазипериодических движений. Более детально устройство этой области с

обсуждением особенностей языков синхронизации было проведено в [4]. Там же показано, что на плоскости управляющих параметров неидентичных связанных логистических отображений имеются специфические критические точки коразмерности два, к которым накапливаются точки обрыва линий удвоения периода. Представлены также плоскости параметров, управляющих удвоениями для связанных осцилляторов Дуффинга под внешним гармоническим воздействием. Для автоколебательных систем третьего порядка аналогичный подход был развит в работе [7], в которой было обнаружено, что в этом случае острова квазипериодичности располагаются вдали от диагонали на плоскости параметров, управляющих удвоениями. Однако детальное изучение возможных бифуркаций, типов критического поведения и обсуждение природы возникновения островов квазипериодичности проведено не было. В настоящей работе проводится подробный анализ режимов динамики в различных областях плоскости управляющих параметров системы связанных осцилляторов Ресслера, исследуется устройство картины бифуркаций, проводится сравнение плоскостей управляющих параметров связанных осцилляторов Ресслера, осцилляторов Ван дер Поля и системы связанных логистических отображений.

### 1. Устройство плоскости управляющих параметров

Система Ресслера является одним из классических объектов нелинейной динамики. Это искусственно сконструированная модель, которая имеет достаточно простой вид и при этом может демонстрировать хаотическое поведение [8]. Динамика автономного осциллятора Ресслера задается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay, \\ \frac{dz}{dt} &= b + (x - c)z,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $x, y, z$  – динамические переменные;  $a, b, c$  – параметры. Чтобы организовать связь двух осцилляторов Ресслера, были введены дополнительные слагаемые, пропорциональные некоторому коэффициенту  $\mu$ , во вторые уравнения систем автономных осцилляторов. Связь осуществляется по второй переменной  $y_{1,2}$ . В результате получили систему

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -y_1 - z_1, \\ \frac{dy_1}{dt} &= x_1 + a_1y_1 + \mu(y_2 - y_1), \\ \frac{dz_1}{dt} &= b + (x_1 - c)z_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -y_2 - z_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= x_2 + a_2y_2 + \mu(y_1 - y_2), \\ \frac{dz_2}{dt} &= b + (x_2 - c)z_2.\end{aligned}\tag{2}$$

В данном разделе статьи численно изучается динамика системы при различных значениях управляющих параметров  $a_1$  и  $a_2$ , которые могут быть как близкими друг другу, так и сильно различающимися. Параметры  $b$  и  $c$  остаются неизменными. Выбраны такие их значения, для которых с увеличением управляющего параметра  $a$  динамика автономного осциллятора Ресслера (1) демонстрирует каскад бифуркаций удвоения периода.

Начнем обсуждение с карт динамических режимов (рис. 1), полученных численно для плоскости управляющих параметров системы связанных осцилляторов Ресслера (2). Цифрами и соответствующими оттенками серого цвета обозначены периоды циклов, которые определялись в каждой точке плоскости параметров как количество пересечений аттрактора с сечением Пуанкаре. Белый цвет означает хаотическое либо квазипериодическое поведение системы.

Область синхронизации на карте динамических режимов имеет три части (назовем их «ветви»), две вытянуты вдоль координатных осей, одна – вдоль диагонали. Благодаря тому, что одиночный осциллятор Ресслера при увеличении управляющего параметра проходит полный каскад бифуркаций удвоения периода, переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода наблюдается также при движении вдоль любой из ветвей области синхронизации. Под термином «синхронизация» мы подразумеваем в данном случае такие режимы динамики, при которых частоты колебаний двух связанных осцилляторов совпадают либо кратны, а также режим хаотической синхронизации систем.

На карте динамических режимов (см. рис. 1) между ветвями области синхронизации расположены области белого цвета, режим динамики внутри которых (хаотический либо квазипериодический) неизвестен. С целью определения типа поведения системы внутри этих белых участков была построена карта старшего ненулевого ляпуновского показателя для той же плоскости управляющих параметров (рис. 2). На ней оттенками серого цвета показана величина старшего отличного от нуля ля-

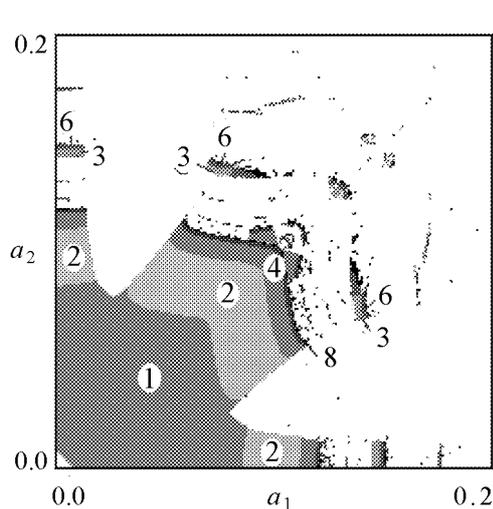


Рис. 1. Карта динамических режимов плоскости управляющих параметров системы связанных осцилляторов Ресслера (2), построенная при  $\mu = 0.02$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 8.5$

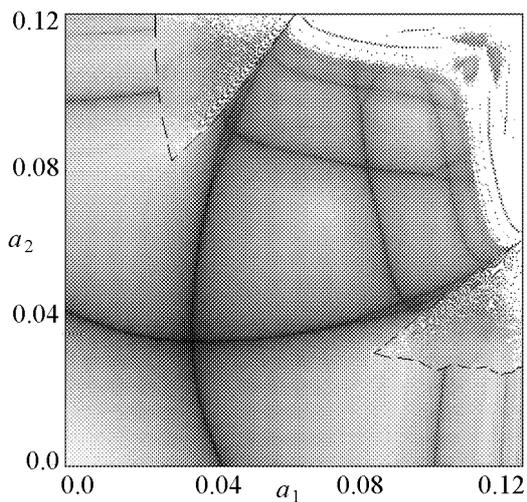


Рис. 2. Карта наибольшего ненулевого ляпуновского показателя системы (2). Значения параметров  $\mu = 0.02$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 8.5$

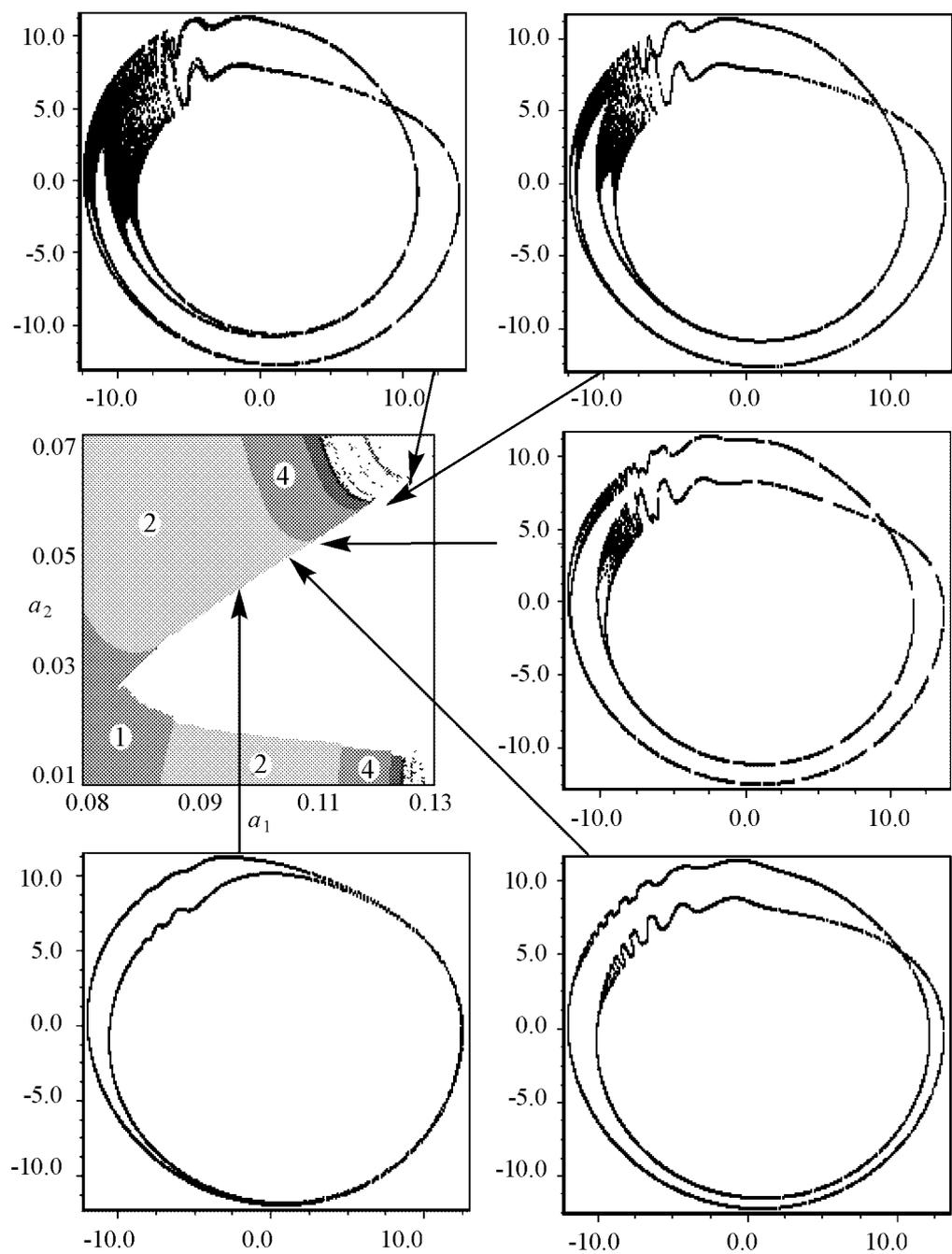


Рис. 3. Увеличенный фрагмент карты динамических режимов системы (2), содержащий область квазипериодических движений, и инвариантные кривые, построенные для различных точек плоскости управляющих параметров

пуновского показателя системы (2) при условии, что все показатели не больше нуля. Таким образом, понятно, что серый цвет соответствует периодическому или квазипериодическому аттрактору системы. Белый цвет означает, что, по крайней мере, один из показателей положителен и имеет место сложное поведение системы. Мы

не определяем, соответствует ли оно хаосу или гиперхаосу [9,10]. Границы области синхронизации на рис. 2, обозначенные штриховыми линиями, совпадают с границами, полученными методом построения карт динамических режимов (см. рис. 1).

На рис. 2 между ветвями области синхронизации можно видеть серый цвет, если значения управляющих параметров невелики. В то же время, анализ карты динамических режимов показывает, что в этих областях нет периодических движений. Таким образом, это могут быть только области квазипериодического поведения системы. Это, соответственно, приводит к выводу, что на боковых границах ветвей синхронизации, обозначенных штриховыми линиями на рис. 2, имеет место бифуркация перехода от периодического движения к квазипериодическому. Однако устройство этих границ требует проведения более тщательного исследования.

Ветви области синхронизации ограничены со стороны больших значений управляющих параметров белым цветом, где имеет место сложное поведение системы. Примечательно, что и области квазипериодики также ограничены сверху белым цветом, следовательно, на границе происходит переход к хаосу через разрушение квазипериодического движения. Этот сценарий перехода к хаосу не наблюдался для одиночного осциллятора Ресслера, однако стал возможен для связанной и существенно несимметричной системы. На рис. 3 приведены инвариантные кривые системы связанных осцилляторов Ресслера, построенные в сечении Пуанкаре для различных точек плоскости управляющих параметров, в которых динамика системы является квазипериодической или хаотической. Инвариантная кривая при увеличении управляющих параметров меняет свою форму, образуя «складки», которые затем становятся более плотными, происходит переход к хаосу, инвариантная кривая разрушается. Из рисунка можно заключить, что в системе возможна бифуркация удвоения разрушившихся торов, условия которой описываются в работе [11].

## 2. Сравнение с более простыми случаями

Бифуркационная картина на плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов Ресслера имеет общие черты как с устройством плоскости параметров, управляющих бифуркацией Андронова – Хопфа в связанных осцилляторах Ван дер Поля – Дуффинга, так и с устройством плоскости параметров связанных логистических отображений.

Устройство плоскости управляющих параметров системы, состоящей из двух осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга, связанных диссипативной связью, подробно исследовалось в работе [12]. На рис. 4, а приведена карта динамических режимов такой системы:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x + \beta x^3 + \mu \left( \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - y^2) \frac{dy}{dt} + y + \beta y^3 + \mu \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

На плоскости управляющих параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , которые в этих осцилляторах отвечают за бифуркацию Андронова – Хопфа, за появление и размер предельного цикла подсистем, существует три ветви области синхронизации типа 1/1, а между ними – область квазипериодического поведения и множество узких язычков кратной

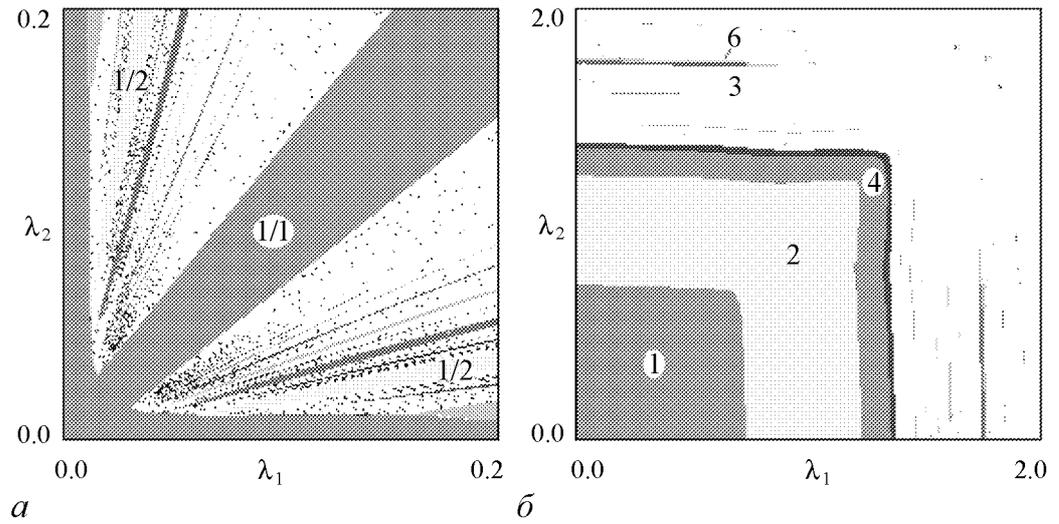


Рис. 4. Карты динамических режимов на плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга (3) для  $\beta = 1, \mu = 0.3$  (а) и связанных логистических отображений (4) для значения коэффициента связи отображений  $\varepsilon = 0.03$  (б)

синхронизации типа  $m/n$ , где  $m$  и  $n$  – целые числа. Ветви области синхронизации системы (3) не имеют внутренней структуры и представляют собой «лучи», уходящие на бесконечность. На представленной карте динамических режимов системы связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга областей хаотического поведения нет. Сравнивая рис. 1 и рис. 4, а можно заключить, что появление областей квазипериодичности в связанных системах Ресслера обусловлено наличием в системе предельных циклов и аналогично механизму появления квазипериодичности в неидентичных связанных осцилляторах Ван дер Поля – Дуффинга.

Обратимся теперь к плоскости управляющих параметров связанных логистических отображений:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda_1 x_n^2 + \varepsilon(y_n - x_n), \\ y_{n+1} &= 1 - \lambda_2 y_n^2 + \varepsilon(x_n - y_n). \end{aligned} \quad (4)$$

На рис. 4, б, отвечающем небольшой связи  $\varepsilon = 0.03$ , имеет место единая область, в которой существует цикл периода 1. Она ограничена со стороны больших значений управляющих параметров линией бифуркации удвоения периода и областью существования цикла периода 2, которая, в свою очередь, ограничена областью цикла периода 4, и т.д. Линии бифуркаций удвоения периода накапливаются к линии Фейгенбаума, за которой поведение системы (4) становится хаотическим.

На плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов Ресслера (см. рис. 1), так же как для связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга (см. рис. 4, а), область синхронизации разделена на три ветви, однако они не являются лучами бесконечной длины, поскольку ограничены линиями Фейгенбаума аналогично случаю связанных логистических отображений (см. рис. 4, б). Внутри ветвей области синхронизации на плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов Ресслера имеет место каскад бифуркаций удвоения периода, также характерный для системы связанных логистических отображений. Следует отметить

тот факт, что при увеличении параметра связи осцилляторов Ресслера ветви области синхронизации расширяются и за счет своей конечной длины полностью сливаются друг с другом. Таким образом, линии Фейгенбаума, ограничивающие ветви, также сливаются в одну, и устройство плоскости параметров [7] становится полностью идентичным устройству плоскости параметров связанных логистических отображений, изображенному на рис. 4, б.

### 3. Устройство границ области синхронизации

Для описания устройства границ ветвей области синхронизации на рис. 5 представлены линии различных бифуркаций, которые найдены численно путем расчета мультипликаторов системы (2). На диаграмме показана только диагональная ветвь.

Для получения значений мультипликаторов проводился поиск точек пересечения траектории с сечением Пуанкаре  $x_1 = 0$ . Таким образом, мы изучали некое отображение пятого порядка, которое имеет в точности пять мультипликаторов, являющихся собственными значениями матрицы монодромии этого отображения. Чтобы вычислить значения производных, из которых составлена матрица монодромии, с течением времени отслеживались изменения величин набора малых возмущений траектории движения, заданных изначально в плоскости некоторого сечения Пуанкаре, путем решения системы (2) совместно с набором уравнений для флуктуаций (5) вплоть до следующего пересечения траектории с данным сечением Пуанкаре, и так далее несколько раз в зависимости от периода цикла.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{x}_1}{dt} &= -\tilde{y}_1 - \tilde{z}_1, \\
 \frac{d\tilde{y}_1}{dt} &= \tilde{x}_1 + a_1\tilde{y}_1 + \mu(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1), \\
 \frac{d\tilde{z}_1}{dt} &= \tilde{x}_1 z_1 + \tilde{z}_1 x_1 - c\tilde{z}_1, \\
 \frac{d\tilde{x}_2}{dt} &= -\tilde{y}_2 - \tilde{z}_2, \\
 \frac{d\tilde{y}_2}{dt} &= \tilde{x}_2 + a_2\tilde{y}_2 + \mu(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2), \\
 \frac{d\tilde{z}_2}{dt} &= \tilde{x}_2 z_2 + \tilde{z}_2 x_2 - c\tilde{z}_2.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

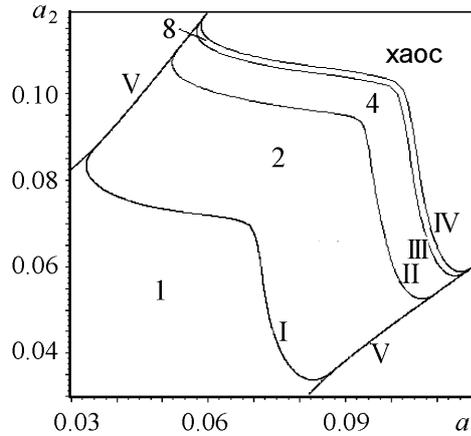


Рис. 5. Линии бифуркаций на плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов Ресслера. I, II, III, IV – линии бифуркаций удвоения периода. V – линии бифуркации жесткого перехода от периодического поведения к квазипериодическому. Арабские цифры обозначают периоды циклов. Значения параметров  $\mu = 0.02$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 8.5$

Для устойчивости предельного цикла необходимо, чтобы все его мультипликаторы по модулю были меньше единицы. Суперкритическая бифуркация удвоения периода имеет место, когда наименьший действительный мультипликатор становится меньше минус единицы. Для бифуркации перехода от периодического движения к квазипериодическому необходимо, чтобы наибольший действительный мультипликатор обратился в единицу.

На рис. 5 цифрами I, II, III и IV обозначены линии бифуркаций удвоения периода циклов, имеющих периоды 1, 2, 4 и 8, соответственно. Если увеличивать од-

новременно оба управляющих параметра, наблюдается каскад этих бифуркаций и переход к хаосу. На линиях, обозначенных цифрой V, имеет место суперкритическая бифуркация жесткого перехода, если двигаться из области синхронизации. Если пересекать эти линии в противоположном направлении, происходит синхронизация через захват частоты. Необходимо отметить, что во всех областях на представленном участке плоскости управляющих параметров все пять корней соответствующего характеристического уравнения, являющиеся мультипликаторами, действительные.

На рис. 6, *a* и *б* показаны увеличенные фрагменты рис. 5, на рис. 6, *в* – схема, эквивалентная рис. 6, *б*. Цифрой I обозначена линия бифуркации удвоения периода цикла периода 1, которая пересекает в точках  $T_1$  и  $T_2$  линию перехода к квазипериодическому движению от циклов периода 1 (линия II) и периода 2 (линия III), соответственно. Внутри треугольника  $MT_1T_2$  оба предельных цикла периода 1 и 2 устойчивы. Они реализуются при различных начальных условиях. В этой области наблюдается мультистабильность. На всем протяжении линии I на рис. 6, за исключением отрезка  $T_1T_2$ , происходит суперкритическая бифуркация удвоения периода. На отрезке  $T_1T_2$  происходит субкритическая бифуркация удвоения периода.

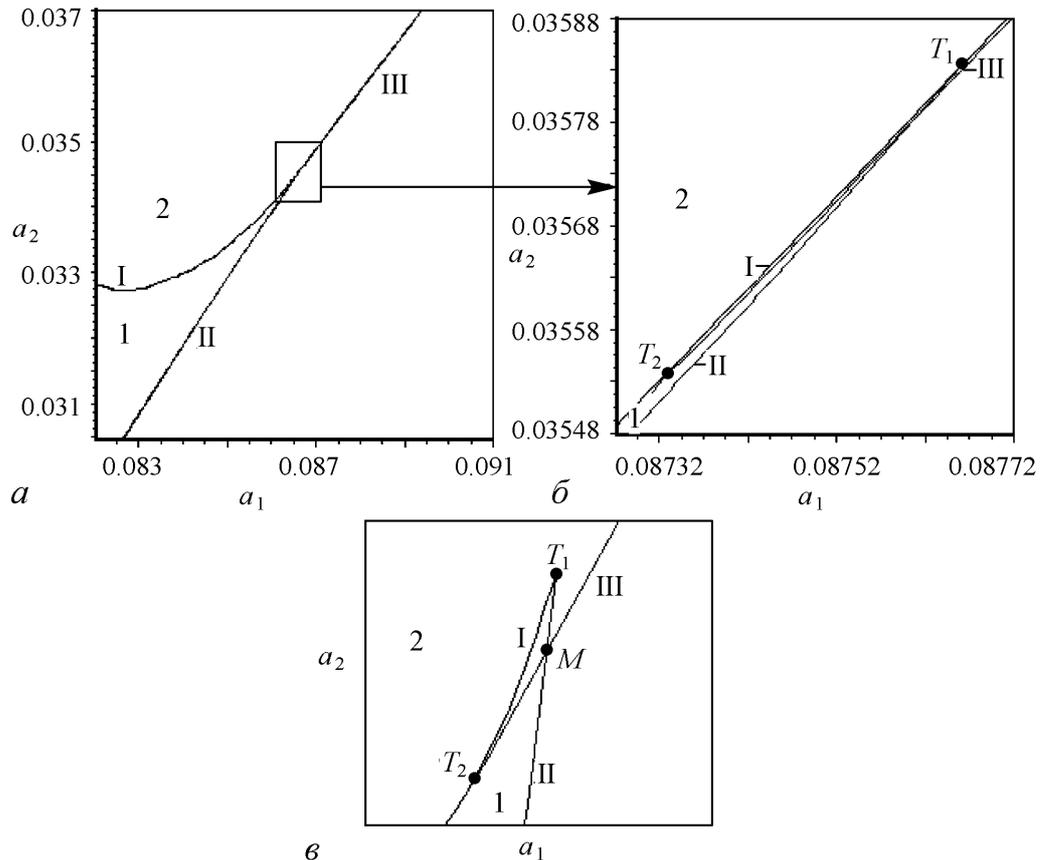


Рис. 6. Линии бифуркаций на плоскости управляющих параметров связанных осцилляторов Ресслера:  $a$ ,  $б$  – построенные численно с различным масштабом;  $в$  – показанные схематически в окрестности точек  $T_1$  и  $T_2$  бифуркаций коразмерности 2. I – линия бифуркации удвоения периода. II, III – линии бифуркаций перехода от периодических движений с периодами циклов 1 и 2, соответственно, к квазипериодическому поведению. Значения параметров  $\mu = 0.02$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 8.5$

Устройство бифуркационной картины вблизи пересечения линий удвоения периода 2 и линий бифуркации жесткого перехода оказывается идентичным структуре, показанной на рис. 6. Отчасти аналогичное устройство бифуркационной картины было обнаружено для системы Ресслера под внешним гармоническим воздействием [13].

В точке  $T_1$  на рис. 6 имеет место бифуркация коразмерности 2, где наибольший мультипликатор цикла периода 1 обращается в единицу, а наименьший равен минус единице. Численно найдена последовательность точек типа  $T_1$  для циклов с периодами 1, 2, 4, 8 и 16, представленная в таблице. (Значения параметров  $\mu = 0.02$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 8.5$ .)

Таблица

Период цикла	Значения управляющих параметров	
	$a_1$	$a_2$
1	0.87617	0.035816
2	0.109722	0.053413
4	0.116812	0.058778
8	0.118244	0.059874
16	0.118394	0.059987

В пределе эта последовательность точек сходится к критической точке, которая, как и в случае неавтономной системы Ресслера, является точкой так называемого С-типа критичности [13]. Она является концевой для фейгенбаумовской линии, располагающейся внутри области синхронизации. (К сожалению, из-за погрешности компьютерного счета, возрастающей с ростом периода цикла, невозможно определить бифуркационные точки высокого порядка и обосновать свойства универсальности в данном случае.)

#### 4. Мультистабильность на плоскости управляющих параметров осцилляторов

Авторы работы [5,6] показали, что любая система, состоящая из двух идентичных связанных осцилляторов, демонстрирующих переход к хаосу через удвоение периода, имеет два аттрактора: симметричный и несимметричный, соответствующие синфазной и противофазной синхронизации системы. Оба аттрактора возникают, когда некий управляющий параметр превышает значение, соответствующее бифуркации Хопфа или бифуркации удвоения периода рассматриваемых осцилляторов в несвязанном состоянии. При слабой связи и постепенном увеличении управляющего параметра несимметричный аттрактор становится хаотическим через квазипериодический переход к хаосу, в то время как симметричный аттрактор – через каскад бифуркаций удвоения периода, как и в несвязанных осцилляторах. Несимметричный аттрактор может также становиться хаотическим через последовательность бифуркаций удвоения периода, однако доказано, что такое поведение не является всеобщим.

Появление этих двух аттракторов может быть продемонстрировано, в частности, и на примере симметричной системы связанных осцилляторов Ресслера (2) с равными по значению управляющими параметрами двух подсистем  $a_1 = a_2 = a$ . На рис. 7,  $a$  и  $b$  приведены бифуркационные деревья, иллюстрирующие эволюцию симметричного и несимметричного аттракторов этой системы при увеличении управляющего параметра. Эти диаграммы получены численно путем достаточно длительного наблюдения за динамикой системы для каждого значения управляющего параметра и выбора последней полученной точки аттрактора в качестве начальных значений для расчета при немного измененном значении параметра  $a$ . При расчете

диаграммы на рис. 7, *a* мы стартовали от наименьшего значения управляющего параметра и постепенно его увеличивали, а для получения бифуркационного дерева на рис. 7, *б*) – от наибольшего значения параметра и его уменьшали. Бифуркационное дерево на рис. 7, *a*, которое полностью идентично бифуркационному дереву для одиночного осциллятора Ресслера, демонстрирует каскад бифуркаций удвоения периода системы, поскольку при синфазной синхронизации после длительного переходного процесса устанавливается ситуация, когда  $y_1 = y_2$ , и, следовательно, осцилляторы не могут влиять друг на друга. Для асимметричного решения (см. рис. 7, *б*) напротив, не наблюдаются удвоения для циклов периода 2 и выше. Вместо этого при увеличении  $a$  происходит бифуркация Хопфа предельного цикла, и плотно заполненная точками часть бифуркационного дерева на рис. 7, *б* соответствует квазипериодическому поведению системы (2). Этот сценарий перехода к хаосу в связанных системах различной природы был детально изучен [5]. Для меньших значений управляющих параметров цикл периода 2 асимметричного решения является неустойчивым, и единственным устойчивым решением становится симметричный аттрактор.

Таким образом, численное исследование идентичных связанных систем Ресслера демонстрирует, что симметричное и несимметричное решения могут быть

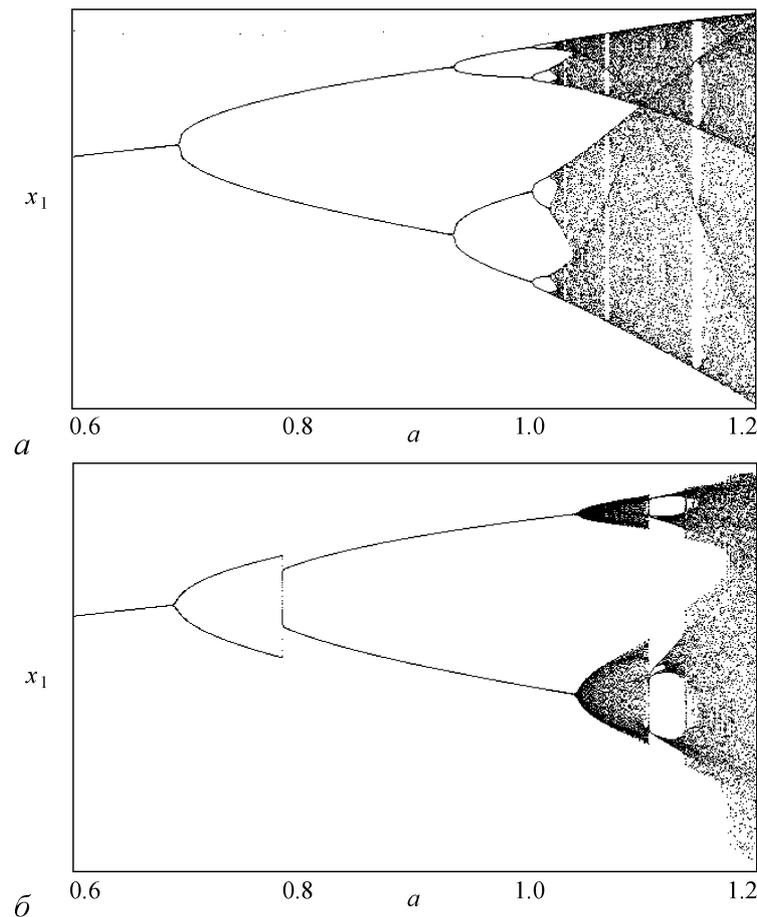


Рис. 7. Бифуркационные деревья системы связанных осцилляторов Ресслера. Значения параметров  $\mu = 0.02$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 8.5$

устойчивыми для одних и тех же значений управляющего параметра и могут быть получены путем выбора различных начальных условий.

Обратимся теперь к ситуации, когда  $a_1 \neq a_2$  и формы предельных циклов двух связанных осцилляторов различны даже при синфазной синхронизации. В этом случае уже нельзя говорить о симметричном и асимметричном решениях. Тем не менее может иметь место синфазная синхронизация либо фазовая синхронизация с отличной от нуля разностью фаз (несинфазная синхронизация). На рис. 8 приведена карта динамических режимов системы связанных осцилляторов Ресслера на плоскости управляющих параметров и увеличенный фрагмент ее центральной части. Она построена на той же плоскости и для тех же значений параметров, что и на рис. 1, однако карты на рис. 1 и рис. 8 различны, поскольку иллюстрируют два различных «слоя», соответствующие двум сосуществующим аттракторам системы (2). Аттрактор на рис. 1 характеризуется синфазным типом синхронизации и в случае равных управляющих параметров осцилляторов становится симметричным. Второй аттрактор (см рис. 8) характеризуется несинфазным типом фазовой синхронизации и соответствует асимметричному решению при  $a_1 \neq a_2$ .

Штриховыми линиями на рис. 8, б обозначены линии, на которых асимметричный аттрактор становится неустойчивым при движении в сторону уменьшения управляющих параметров  $a_1$  и  $a_2$ . Это линии складок и они пересекаются в точке сборки.

Белый цвет в середине области противофазной синхронизации соответствует квазипериодическому поведению системы и можно видеть, что для связанных осцилляторов с немного различными управляющими параметрами может иметь место квазипериодический переход к хаосу, если эти параметры одновременно возрастают. (Стоит отметить, что именно такой тип квазипериодического поведения наблюдался в [3,4] на примере связанных логистических отображений.) Однако, если управляющие параметры будут различаться сильнее, появляется фейгенбаумовский каскад, поскольку область, соответствующая асимметричному аттрактору, частично ограничена снаружи линиями Фейгенбаума (см. рис. 8, б).

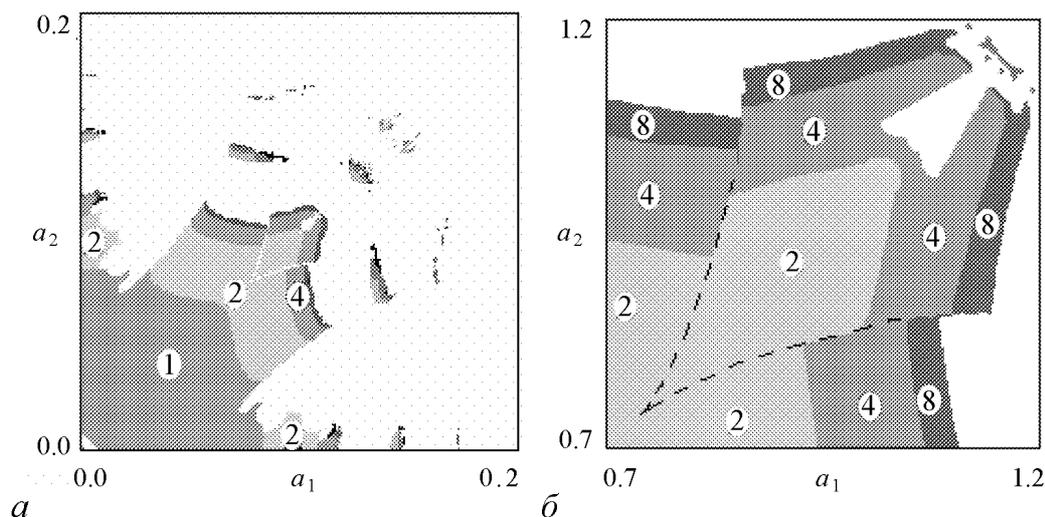


Рис. 8. Карта динамических режимов на плоскости управляющих параметров системы (2) и ее увеличенный фрагмент. Значения параметров  $\mu = 0.02$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 8.5$

## 5. Заключение

Проведено исследование плоскости управляющих параметров неидентичных связанных осцилляторов Ресслера, являющихся классическими в нелинейной динамике системами третьего порядка, способными демонстрировать переход к хаосу через удвоения периода. Обнаружены общие черты устройства бифуркационных картин связанных осцилляторов Ресслера, а также связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга и связанных логистических отображений. Исследование границ области синхронизации показало наличие сложной структуры линий и точек бифуркаций в окрестностях критических точек коразмерности два, являющихся концевыми для фейгнебаумовских линий. Можно ожидать, что аналогичные элементы устройства плоскости управляющих параметров будут характерны для других систем связанных осцилляторов третьего порядка.

*Работа поддержана грантами CRDF REC-006, РФФИ – 03-02-16074.*

### Библиографический список

1. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
2. *Mosekilde E., Maistrenko Y., Postnov D.* Chaos synchronization. Application to living systems // World Scientific Series on Nonlinear Science. 2002. Series A. Vol. 42. P. 440.
3. *Jian-Min Yuan, Mingwei Tung, Da Hsuan Feng, and Lorenzo M. Narducci.* Instability and irregular behaviour of coupled logistic equations // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 28, № 3. P. 1662.
4. *Кузнецов А.П., Седова Ю.В., Сатаев И.П.* Устройство пространства управляющих параметров неидентичных связанных систем с удвоениями периода // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 5. С. 46.
5. *Reike C., Mosekilde E.* Emergence of quasiperiodicity in symmetrically coupled, identical period-doubling systems // Phys. Rev. E52. 1995. P. 1418.
6. *Rasmussen J., Mosekilde E., Reick C.* Bifurcations in two coupled Rössler systems // Mathematics and Computers in Simulation. 1996. Vol. 40. P. 247.
7. *Иванченко М.В., Осипов Г.А., Шалфеев В.Д.* Иерархии регулярной и хаотической синхронизации в системе связанных осцилляторов Ресслера // Труды (шестой) научной конференции по радиофизике / Ред. А.В. Якимов. Н. Новгород, 2002. С.114.
8. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
9. *Yanchuk S., Maistrenko Y., Mosekilde E.* Loss of synchronization in coupled Rössler systems // Physica D. 2001. Vol. 154. P. 26.
10. *Yanchuk S., Kapitaniak T.* Chaos-hyperchaos transition in coupled Rössler systems // Physics Letters A. 2001. Vol. 290. P. 139.
11. *Stagliano J., Wersinger J., Slaminka E.* Doubling bifurcations of destroyed tori // Physica D. 1996. Vol. 92. P. 164.
12. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* Особенности устройства пространства параметров двух неидентичных связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 4. С. 3.

13. *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Universality and scaling for the breakup of phase synchronization at the onset of chaos in a periodically driven Rössler oscillator // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64, № 4, 046214.

*Саратовский филиал ИРЭ РАН*

*Поступила в редакцию 28.11.2005*  
*После доработки 25.02.2006*

**DYNAMICS OF TWO NONIDENTICAL COUPLED  
SELF-SUSTAINED SYSTEMS WITH PERIOD DOUBLINGS  
ON THE EXAMPLE OF RÖSSLER OSCILLATORS**

*A.P. Kuznetsov, V.I. Paksyutov*

The system of two coupled Rössler oscillators is considered. Detailed investigation is carried out on the plane of parameters which control the period-doubling bifurcations in the subsystems. Dynamical regimes in different points of the control parameter plane are determined using the methods of the bifurcation plot and the highest nonzero Lyapunov exponent plot computation. The synchronization picture of two coupled Rössler oscillators is compared with synchronization pictures of more simple systems: two coupled Van der Pol oscillators and coupled logistic maps. The boundary structure of synchronization areas is investigated by calculation of the system multipliers, and the sequence of codimension-two points is found.

*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики». E-mail: [alkuz@sgu.ru](mailto:alkuz@sgu.ru); [www.sgtnd.tserv.ru](http://www.sgtnd.tserv.ru)



*Паксютов Владимир Игоревич* – родился в Саратове (1982). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского в 2004 году. Аспирант кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается научной работой по направлению: динамические режимы и синхронизация в автоколебательных системах различной природы. С 2000 года – постоянный участник ежегодной научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых», принял участие в нескольких международных конференциях. Имеет 10 научных публикаций.

