Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 2, 2006 УДК 51–77

КАНОНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В ЭКОНОМИКЕ

Д.И. Трубецков

Статья носит обзорный характер и ее подзаголовком может быть фраза «По страницам прочитанных книг». Главная цель статьи – показать, что практически все канонические модели нелинейной динамики используются в современной математической экономике.

Что есть время? Каким образом происходят перемены? Существует ли универсальный закон, управляющий ходом перемен? А если он существует, то возможно ли его постичь? С самого начала цивилизации человечество встает перед этими вопросами. Они присущи как западной, так и восточной культуре, и не только в рамках науки. Раздумья об эволюции сами по себе представляют эволюционный процесс, как вследствие сложности проблемы, так и по причине ограниченности нашего понимания.

...Рассматриваются проблемы, связанные с динамикой экономических систем. Экономическая эволюция систематически исследовалась, начиная еще с Адама Смита, хотя единой теории так и не возникло. Встав на плечи предшественников, мы попытаемся заглянуть несколько дальше обычного.

<...>Воодушевленные современными работами математиков и представителей естественных наук в области нелинейных динамических систем, некоторые экономисты приступили к объяснению сложных экономических явлений, вводя в динамический анализ факторы неустойчивости и нелинейности. Эти исследования дали начало новому направлению в анализе экономических явлений.

В.-Б. Занг

Введение

В последние годы методы нелинейной динамики стали использоваться в экономике. Появились не только статьи, но и книги, например, книга В.-Б. Занга «Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории» (М.: Мир, 1999), цитаты из которой приведены здесь в качестве эпиграфа; книга Т. Пу «Нелинейная экономическая динамика» (Ижевск: НИЦ «РХД», 2000); книга

Э. Петерса «Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка» (М.: Мир, 2000).

Книги написаны математиками для экономистов, поэтому большую часть в них занимает математический аппарат. Книги полны оптимизма, хотя Занг пишет следующее: «Как и в вопросах прогнозирования погоды, широкая публика остается невысокого мнения об экономическом прогнозировании. И наука о прогнозировании погоды, и экономическое прогнозирование пытаются предсказать результат развития очень больших систем, компоненты которых сложнейшим образом взаимодействуют между собой. Изолирующие и упрощающие методы, которые играют центральную роль в развитии науки, для анализа таких систем малопригодны. Более того, поскольку подобные большие взаимодействующие системы часто нестабильны, предсказать поведение таких систем на больших временах практически невозможно» (С. 177).

Цель настоящего обзора – продемонстрировать, как канонические модели нелинейной динамики используются в экономике. Будут рассмотрены следующие модели:

- уравнение Ван дер Поля и его модификация;
- модель «хищник – жертва»;
- модель Лоренца;
- возникновение хаоса по сценарию Ньюхауса – Рюэля – Такенса;
- сценарий Фейгенбаума;
- модель Колмогорова – Петровского – Пискунова.

Начнем, однако, с моделей традиционной экономики, чтобы лучше понять происшедшие в ней революционные перемены из-за отказа от линейного подхода и перехода к анализу нелинейного эволюционного процесса с его неустойчивостями, разрывами, структурными изменениями. Конечно, как пишет Занг, – «основные концепции традиционной экономики – концепция рационального поведения и идеальной конкуренции играют фундаментальную роль и для развития синергетической экономики».

Теории равновесия в экономике (статическая экономика)

Идею равновесия экономика явно позаимствовала из теоретической механики. Механикам конкуренция равновесия была известна задолго до публикации в 1766 году Адамом Смитом «Благосостояния наций». Конечно, все помнят пушкинские строки:

Зато читал Адама Смита
И был великий эконом.
Что мог легко судить о том,
Как государство богатеет.
И как живет, и почему
Не нужно золота ему,
Когда простой продукт имеет.

Кстати, в «Толковом словаре живого великорусского языка» В.И. Даля находим такую информацию: «Экономъ – греч. хорошiй хозяин, домострой, скопидомъ, разсчетливый, сберегающiй что можно; домоправитель, домостроитель, правящiй хозяйствомъ, расходомъ денегъ и припасовъ, ключникъ».

Анализ равновесий весьма полезен, несмотря на то, что нет такой экономики, которая могла бы находиться в состоянии покоя.

Смит сформулировал наиболее важный вывод теории равновесия: конкурирующая система может достигать такого распределения ресурсов, которое в определенном смысле оказывается эффективным. Полную формулировку общей теории равновесия обычно связывают с именем Вальраса, который обращал особое внимание на вопрос существования конкурентных равновесий, гарантированных равновесными ценами.

Рассмотрим в качестве примера принцип соответствия Самуэльсона и его ограничения. Его «Основы экономического анализа» базируются в целом на двух весьма общих гипотезах: 1) условия равновесия эквивалентны условиям максимизации (минимизации) некоторой величины; 2) система находится «в устойчивом» равновесии либо в движении.

Первая гипотеза в большинстве случаев означает справедливость сравнительного традиционного статического анализа, из которого можно вывести много важных теорем экономики. Из второй гипотезы следует справедливость принципа соответствия между сравнительной статикой и динамикой.

В качестве примера рассмотрим процесс, когда предложение и спрос уравновешены. Предполагается, что при любой цене, если спрос превышает предложение, цена будет расти; если предложение превышает спрос, то цена будет падать. Это можно записать в виде уравнения

$$\frac{dp}{dt} = H[D(p, a) - S(p)], \tag{1}$$

где $H(0) = 0$; $dH/dt > 0$; p – цена; α – параметр, соответствующий внешним факторам; D и S представляют соответственно спрос и предложение. Пусть для простоты $H = 1$. Вблизи точки равновесия $p = p_0$ уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{dD}{dp} - \frac{dS}{dp}\right)(p - p_0) + \ldots, \tag{2}$$

где опущены высшие степени $(p - p_0)$. Тогда решение (2) можно записать следующим образом:

$$p(t) = p_0 + [p(0) - p_0]e^{(D_p - S_p)t}, \quad \frac{dD}{dp} = D_p; \quad \frac{dS}{dp} = S_p. \tag{3}$$

Если равновесие устойчиво, то при $t \to +\infty$ $p(t) \to$ p$_0$ в том, и только в том случае, когда

$$D_p - S_p < 0. \tag{4}$$

Когда кривая предложения имеет положительный наклон, условие (4) выполняется. Если же наклон отрицательный, он должен быть менее крутым, чем у кривой спроса.

Таким образом, если выполнены условия устойчивости, то, когда растет спрос, должна расти цена, то есть результаты сравнительного статического анализа могут быть выведены из условий устойчивости.

Соотношения между условиями устойчивости и результатами сравнительной статики названы Самуэльсоном «принципом соответствия». Заметим, что справедливость принципа соответствия зависит от предварительного предположения об устойчивости экономических систем.

Рассмотрим фирму, для которой заданы функции спроса и производственных издержек. Предположим, что фирма облагается налогом величиной r на единицу продукции. Тогда доход фирмы определяется как

$$D = xp(x) - C(x) - rx, \tag{5}$$

где x, p и C – объем производства, цена продукции, минимальные суммарные производственные издержки, соответственно.

Фирма определяет уровень производства для каждой заданной величины налога. При каждой заданной налоговой ставке существует равновесный объем выпуска. Рассмотрим, как в соответствии с изменением величины налога меняется объем производства, определенный фирмой.

Пусть фирма выбирает такой объем производства, который максимизирует ее доход. Решение, максимизирующее D в уравнении (5) будет равновесной величиной. Необходимыми и достаточными условиями локального максимума являются $D_x = 0$, $D_{xx} < 0$ $\left(\dfrac{dD}{dx} = D_x,\ \dfrac{d^2D}{dx^2} = D_{xx}\right)$. Из $D_x = 0$ имеем

$$[xp(x) - C(x)]_x - r = 0, \tag{6}$$

откуда можно определить точку равновесия $x = g(r)$. Продифференцируем (6) по r. Тогда

$$[xp(x) - C(x)]_{xx}\frac{dx}{dr} = 1, \tag{7}$$

Но, поскольку $[xp(x) - C(x)]_{xx}$ должно быть меньше нуля, из (7) находим, что и

$$\frac{dx}{dr} < 0. \tag{8}$$

Это означает, что, если фирма находится в равновесии до и после налогообложения, увеличение налога всегда вызовет падение производства.

Вид функций $p(x)$ и $C(x)$ не определялся выше. Требовалось лишь, чтобы задача имела регулярное максимальное решение. Таким образом, по известной информации о том, что фирма максимизирует прибыль, можно предсказать поведение фирмы при изменении налоговой политики. Этого достаточно, для того чтобы определить направление изменения x после налогообложения.

Это – типичный пример того, что понимается под сравнительным статическим анализом.

Динамические теории роста в экономике

Экономический рост – классический предмет экономики, вклад в который на раннем этапе внесли Адам Смит, Д. Рикардо, Т.-Р. Мальтус, К. Маркс, Дж. Милль и другие. Сейчас эта теория претерпела серьезные изменения. В частности, вопреки теориям Рикардо и Мальтуса сегодня доля земледельцев не выглядит возрастающей, население не растет быстрее, чем продукты, а роль сельского хозяйства по отношению к промышленности заметно снижается.

В развитии современной теории роста важную роль сыграли работы Самуэльсона, Солоу, Моришимы, Хикса, Леонтьева и других.

В качестве примера рассмотрим модель экономического роста Солоу.

Существуют два производственных фактора: капитал K и труд L (численность населения). Технология не подвержена изменениям. Процесс производства описывается некоторой достаточно гладкой функцией

$$Y = F(K, L), \tag{9}$$

где Y – поток продукции, зависящий от конкретных значений K и L. Предполагается, что L экспоненциально возрастает с постоянным темпом роста n

$$L = L_0 e^{nt}.$$

Допускается также, что постоянная доля S общего объема производства идет на сбережение и, выпадая из сферы потребления, добавляется к суммарному капиталу. Если пренебречь процессом обесценивания капитала, то имеем $\dfrac{dK}{dt} = SY$, $K(0) > 0$. В случае, если Y определяется функцией (9), приходим к соотношению

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - nk, \quad \text{где } k = \frac{K}{L},\ f(k) = \frac{F(K, L)}{L} = F(k, 1). \tag{10}$$

Функция $f(k)$ обладает следующими свойствами:

$$f(0) = 0,\ f'(k) > 0 \text{ при } k \geq 0,\ f''(k) < 0 \text{ при } k \geq 0.$$

Если n и s удовлетворяют неравенству

$$0 < n/s < f''(0),$$

то существует единственное положительное значение k_0, такое, что $\dfrac{sf(k_0)}{n} = k_0$ (существование равновесия).

Динамику экономического развития модели Солоу можно описать следующим образом: стартуя из любой произвольной точки, экономика всегда равномерно сходится к единственному значению «капитал – труд» на больших временах. Более того, вдоль равновесной траектории роста капитал возрастает с той же скоростью, что и численность населения – это простое и красивое следствие модели роста Солоу.

Важно, что в модели Солоу после определения динамики объема капитала на душу населения может быть рассчитана динамика всех остальных переменных – K, Y, потребления, накопления, заработной платы, суммы арендных платежей.

В качестве второго примера рассмотрим знаменитую модель Леонтьева «затраты – выпуск». Василий Васильевич Леонтьев заслуживает отдельного внимания к себе как один из самых выдающихся ученых-экономистов XX столетия. «Международная «Энциклопедия общественных наук» сравнивает его вклад с той ролью, какую в теории экономики сыграли Адам Смит и Джон Мейнард Кэйнс, а этих гигантов можно, пожалуй, назвать Ньютоном и Эйнштейном этой науки» (А.В. Аникин. «Василий Леонтьев, или Экономика на шахматной доске». Природа. 2000. № 7. С. 61).

Основная идея Леонтьева достаточно проста. Экономика изображается как система отраслей с любой степенью дробности в виде таблицы наподобие шахматной доски. На пересечении каждой пары отраслей имеем цифры, выражающие продажу (передачу) продукции одной отрасли в другую, скажем угля в электроэнергетику или хлопка в текстильную промышленность. Отсюда можно исчислить коэффициенты прямых затрат (технические коэффициенты), которые показывают, сколько единиц продукции одной отрасли необходимо для производства единицы продукции другой отрасли. Эти величины могут иметь как натуральное, так и денежное выражение, каждое из которых имеет собственную ценность. Добавляя по горизонтали шахматной таблицы к материальным затратам конечное потребление и накопление (инвестиции), получаем валовой продукт по использованию. Добавляя по вертикали доходы факторов производства, получаем продукт по созданию (производству). Уже эта стадия дает очень ценную информацию.

Однако Леонтьев пошел дальше, применив к этим материалам методы линейной алгебры. Продукция каждой отрасли выражается линейным уравнением, которое суммирует прямые затраты отраслей. Теперь экономика представлена как система линейных уравнений, решение которой, возможно лишь с помощью мощных компьютеров, выглядит в виде матрицы, так называемой инверсии (или обратной матрицы) Леонтьева. Она содержит данные о полных затратах на производство продукции каждой отрасли и рисует замечательно богатую по содержанию картину экономики с ее сложной системой структурных связей.

Леонтьев показал себя выдающимся организатором. В 1948 году он создал Гарвардский центр экономических исследований, который стал ведущим в мировом масштабе учреждением по развитию метода затраты – выпуск. Вокруг Леонтьева, который около 25 лет возглавлял этот центр, сложилась группа исследователей-единомышленников, его соавторов по многим последующим публикациям, в том числе по книге «Исследования структуры американской экономики», которая вышла в 1953 году и в 1958-м появилась в русском переводе.

Такой путь прошел Леонтьев как ученый, когда впервые оказался в СССР. Приезд видных иностранных ученых-экономистов был в то время еще большой редкостью. Надо полагать, что вопрос о приглашении Леонтьева рассматривался и решался где-то на высоком уровне, и власти рассчитывали извлечь из этого визита какие-то выгоды.

Василий Леонтьев (Wassily Leontief) скончался в Нью-Йорке 5 февраля 1999 года на 93 году жизни.

Пусть экономика состоит из n секторов, не имеющих объединенных производств. Скорость роста экономики регулируется правительством. Андерссон и Занг (1988) предложили следующую модель, описывающую динамику цен и производства, соответствующую идеям Леонтьева:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= Ax + g(p,x)Bx - x, \\ \frac{dx}{dt} &= p - Ap - g(p,x)Bp. \end{aligned} \tag{11}$$

В системе уравнений (11) $p = (p_1, \ldots, p_n)$ – «нормированный» вектор цен; $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – «нормированный» выпуск продукции; $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ –

матрицы технологических коэффициентов и коэффициентов инвестиций, соответственно. Функция $g(p, x)$ в (11) описывает скорость экономического роста системы. Скорость роста, как уже указывалось, определяется правительством, которое максимизирует функцию «социальной» полезности, воздействуя на технологические мощности.

Уравнение цен в (11) означает, что, если спрос на i-й товар превышает предложение этого товара, то цена i-го товара, должна возрасти, и наоборот. Уравнение учитывает поведение потребителей. В количественном выражении это соответствует тому, что, если общая себестоимость единицы i-й продукции превышает цену продажи этого товара, то в i-м секторе объем производства должен быть уменьшен, чтобы уменьшить потери.

Экономические циклы – уравнение Ван дер Поля

Обозначим доход через Y. Сбережения S находятся в заданном соотношении s к доходу. Сохраняется неизменное соотношение между основным капиталом K и доходом, ν обозначает коэффициент пропорциональности. Инвестиции I по определению являются темпами изменения основного капитала: $I = \nu\dot{Y}$ и $S = s\dot{Y}$. Будем считать, что при равновесии $I = S$. И предположим далее, что существует адаптивный процесс, при котором доходы возрастают пропорционально разности инвестиций и сбережений, то есть $\dot{Y} \sim (I - SY)$. При этом подобная задержка происходит и при регулировании инвестиций, так что $I \sim \nu\dot{Y} - I$. Таким образом, выбрав удобную единицу измерения времени, чтобы сделать скорость регулирования единичной, имеем следующие уравнения:

$$\dot{Y} = I - sY, \tag{12}$$

$$\dot{I} = \nu\dot{Y} - I \tag{13}$$

или

$$\ddot{Y} - (v - s - 1)\dot{Y} + sY = 0. \tag{14}$$

Уравнение (14) в зависимости от знака $(\nu - s - 1)$ может описывать либо затухающие, либо неустойчивые колебания. При $\nu = s + 1$ имеем периодические колебания.

Введем теперь нелинейную функцию инвестиций в виде

$$\nu\left(\dot{Y} - \frac{1}{3}\dot{Y}^3\right).$$

Окончательно модель имеет вид

$$\dot{Y} = sY = (\nu - s)\dot{Y} - \frac{\nu}{3}\dot{Y}^3$$

или, если $\dot{Y} = z$,

$$\ddot{z} - \left[(\nu - 1 - s) - \nu z^2\right]\dot{z} + sz = 0.$$

Последнее уравнение есть уравнение Ван дер Поля, для которого существование предельного цикла доказано. Зная, что производные дохода меняются периодически, легко показать, что так же меняется и сам доход.

Моделирование региональной динамики – модифицированное уравнение Ван дер Поля

В центре исследований по этой проблеме – внезапные и непредсказуемые нарушения непрерывности развития регионов[1].

Существует гипотеза (Пиремпа, 1925), согласно которой основной причиной возрождения крупных и мелких городов Европы в эпоху позднего средневековья было появление свободной торговли и, как следствие, улучшение транспортировки товаров. Андерссон (1985), основываясь на этой гипотезе, утверждает, что фундаментальные изменения в мировой экономике последнего тысячелетия могут быть объяснены изменением структуры логистических систем, то есть систем снабжения. Иными словами, крупные структурные изменения характера производства, общественных институтов, характера труда и культуры вызываются медленными, ровными изменениями в соответствующих логистических сетях. Логистические сети – это такие пространственные системы, которые могут использоваться для движения товаров, информации, людей и денег в зависимости от производства и потребления товаров. Ниже представлена модель мировых логистических революций (Андерссон, 1986; Андерссон и Баттен, 1988).

Предполагается, что все внезапные и непредсказуемые нарушения (флуктуации), наблюдающиеся в развитии городов, могут быть охвачены или, по крайней мере, качественно аппроксимированы системой дифференциальных уравнений с кубическими нелинейностями

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -T\left(\frac{y^3}{3} - ry - x\right) && \text{– «быстрое уравнение»,} \\ \frac{dx}{dx} &= T^{-1}y && \text{– «медленное уравнение»} \end{aligned} \tag{15}$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(Ty^2 - r\right)\frac{dy}{dt} + T^{-1}y = 0, \tag{16}$$

где r – управляющий параметр; T – коэффициент, имеющий смысл скорости установления (адаптации); переменная y может быть интерпретирована, например, как емкость города в отношении товаропроизводства, x – как его доступность для транспорта и связи.

Уравнение (16) представляет собой модификацию уравнения Ван дер Поля

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \varepsilon\left(1 - y^2\right)\frac{dy}{dt} + y = 0, \quad \text{а именно}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - r\left(1 - \frac{T}{r}y^2\right)\frac{dy}{dt} + T^{-1}y = 0.$$

---

[1] В русском языке термин «регион» используется для обозначения достаточно крупных физико-географических, экономико-географических, геополитических и других территориальных структур. В последние годы под регионом понимается минимальный по территории административно-территориальный ареал, равный субъекту Российской Федерации.

Установлено, что разрывы величины y могут возникать и в том случае, когда величина x плавно меняется в критических интервалах параметров. На рис. 1 представлен цикл быстрых и медленных переменных, в котором могут иметь место повторяющиеся скачки.

Медленное изменение сети инфраструктуры x путем инвестиций физического капитала может привести к тому, что траектории окажутся расположенными в зоне L. Первоначально система находилась в положении A. С изменением x в конце концов достигается точка B, выше которой сама природа производительной емкости города заметно изменяется. В этой точке равновесие теряет свойство устойчивости, и имеет место резкий переход – «фазовый переход». Скорость изменений в неравновесной фазе определяется влиянием капитала, трудовых и других необходимых ресурсов, которые будут использоваться в зарождающемся режиме производства. Но главное – цикличность данного нелинейного процесса. Стоит при достижении зоны H прекратиться инвестициям, и система может «сесть» на траекторию, изображенную в зоне H, пока, наконец, не вернется к первоначальному положению D и затем «свалится» обратно в зону L. Важно осознать характер критических точек B и D. «Фазовый переход» имеет место независимо от того, как медленно увеличивается емкость сетей, а это значит, что развитие города может быть стимулировано просто добавлением в сеть одного маленького, но важного звена. То есть, если система находится вблизи критического состояния, то слабые расхождения в условиях транспортировки могут привести к огромному отличию в конечной товароемкости.

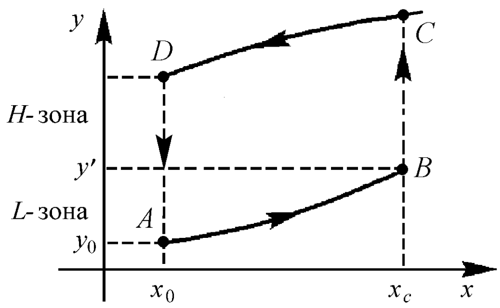

Рис. 1. Цикл быстрых и медленных переменных

По-видимому, модель может быть использована для углубления наших представлений об особенностях реальной эволюции городов.

Согласно Андерссону (1986), развитие городов и межрегиональных экономических связей в мире в период с 1000 по 2000 годы нашей эры можно представить себе в виде четырех революций:

- первая начинается в XI веке в Италии и завершается в XVI веке в Северной Европе;
- вторая берет начало в XVI веке в Испании, Португалии и Италии и оканчивается в XIX веке в Северной Европе;
- третья начинается в Англии в XVIII веке и оканчивается в развивающихся странах предположительно в XXI веке;
- четвертая начинается в Японии, Швейцарии, Западной Германии и Швеции в конце XX века.

Восстановление старых торговых путей и возобновление возможности передвижения через Европу и Азию можно рассматривать как фазы медленного улучшения сетей инфраструктуры, что находит отражение в ослаблении торговых барьеров, дорожных опасностей, стоимости транспортировки и других ограничений передвижения. Этот период соответствует первой логистической революции.

Сейчас мы – свидетели четвертой логистической революции, связанной с возрастанием объема обрабатываемой информации и расширением сетей связи, а также ростом объема научных знаний. Улучшение систем транспорта, в особенности сети транспорта воздушного, неуклонно уменьшает значение географической близости областей и регионов.

Типичный пример для анализа последней революции – Швеция (Андерссон и Баттен, 1988).

Разделим трудовые ресурсы на четыре типа по профессиям. Это профессии, связанные с наукой, с управлением и обработкой информации, с обслуживанием, с производством материальных ценностей. Выбор местоположения объектов наукоемкого производства существенно зависит от возможности привлечения специалистов с высоким уровнем образования и квалификации. Следовательно, в развитии регионов возрастает роль университетов и других высших учебных и научных учреждений. Таким образом, следует осознать, что ключевой характеристикой четвертой логистической революции является неуклонное расширение научной базы x. Соотношение между x и емкостью производства y описывается уравнениями (15). Траектория движения в этом случае аналогична представленной на рисунке.

Занг отмечает, что в промышленности уже сейчас (имеется в виду 1991 год) можно обнаружить изменения в структуре капиталовложений.

Так, в 1977 году небольшое число фирм размещало больше 17% затрат в исследования и разработки (R&D).

А в 1985 году число фирм, направляющих более 17% затрат в R&D, составило более $1/4$ совокупного производственного капитала (химическое производство, станкостроение, самолетостроение, космическая техника, оборудование для «высоких технологий», машиностроение и робототехника).

Модель классовой борьбы (модель хищник – жертва)

В нелинейной теории колебаний одна из наиболее известных моделей – модель «хищник – жертва», которая описывается системой двух дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha\,(y_1 - y)\,x, \\ \frac{dy}{dt} &= \beta\,(x - x_1)\,y, \end{aligned} \tag{17}$$

где x и y – численность популяций, x_1 и y_1 – их стационарные значения, α и β – постоянные. Эта модель используется для описания динамики малых городских ареалов. В этом случае переменная x в (17) означает плотность землепользования, y – земельную ренту, α, β, x_1, y_1 – некоторые параметры.

Интересное приложение модели было дано Гудвином. Его модель построена для описания классовой борьбы. Рассмотрим два типа граждан: рабочих и капиталистов. Рабочие тратят весь свой доход wL на потребление, капиталисты накапливают свой доход $Y - wL$, где Y – продукция производства. Цена потребительских товаров отнормирована к единице. Пусть K означает капитал, $a = a_0 e^{gt} = \dfrac{Y}{L}$ –

производительность труда, возрастающую с постоянной скоростью g, $k = \dfrac{K}{Y}$ – коэффициент капиталоемкости продукции, а $N = N_0 e^{nt}$ – предложение на рынке рабочей силы, которое увеличивается с темпом роста n. Доля затрат на оплату труда по отношению к национальному доходу составляет $\dfrac{wL}{Y} = \dfrac{w}{a}$. Следовательно, доля прибыли капиталистов составляет $\left(1 - \dfrac{w}{a}\right)$. Поскольку сбережения определены как $S = Y - wL = \left(l - \dfrac{w}{a}\right) Y$, доля инвестиций составляет $\dfrac{dK}{dt} = S = \left(1 - \dfrac{w}{a}\right) Y$ или $\dfrac{dK/dt}{K} = \left(l - \dfrac{w}{a}\right) /K$, при этом выбытием капитала пренебрегаем. При постоянном значении капиталоемкости $k = \dfrac{K}{Y}$ получаем

$$Y \frac{dK}{dt} = K \frac{dY}{dt}.$$

Далее, поскольку $a_0 e^{gt} = a = \dfrac{Y}{L}$, имеем

$$g = \frac{dY}{dt}\frac{1}{Y} - \frac{dL}{dt}\frac{1}{L}.$$

Тогда окончательно получим

$$\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = \left(1 - \frac{w}{\alpha}\right)\frac{1}{k} - g.$$

Введем новые переменные: $y = \dfrac{w}{a}$ – доля затрат на оплату труда; $x = \dfrac{L}{N}$ – коэффициент занятости. После простых преобразований находим

$$\frac{dx}{dt} = x\left[\frac{1-y}{k} - (g+n)\right], \tag{18}$$

$$\frac{dy}{dt} = y\left[\frac{1}{w}\frac{dw}{dt} - \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right]. \tag{19}$$

Будем считать ставку заработной платы быстрой переменной, удовлетворяющей условиям

$$\frac{dw}{dt} = wf(x), \quad \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} f(x) < 0, \quad f'(x) > 0.$$

Линейная аппроксимация этого соотношения $\dfrac{dw}{dt}\dfrac{1}{w} = -r + bx$ приводит к уравнению

$$\frac{dy}{dt}\frac{1}{y} = -r + bx - g.$$

Таким образом получаем модель Гудвина в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x\left[\frac{1}{k} - (g+n) - \frac{y}{k}\right], \\ \frac{dy}{dt} &= y\left[-(g+r) + bx\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Очевидно, что модель (20) совпадает с моделью (17), поэтому все выводы общего характера, справедливые для системы (17), справедливы и для модели Гудвина.

Формальное сходство модели Гудвина и модели Лотки – Вольтерры «хищник – жертва» позволяет установить аналогию между явлениями классовой борьбы и борьбой биологических сообществ.

Заметим, что модель Гудвина, учитывающая взаимодействие между уровнем занятости и законодательно установленной долей отчислений на оплату труда, весьма напоминает классические модели политической экономии (ее иногда называют неомарксистской). Модель вновь привлекла внимание к трудам экономистов-классиков, таких как Рикардо, Смит, Маркс.

Понятно, что модель может приводить к колебательным решениям, но она структурно неустойчива: малые изменения функциональной формы будут влиять на качественное поведение системы.

Как известно, рассмотренные нами системы (17) и (20) являются консервативными. Последние, как правило, имеют периодические решения и поэтому широко используются для моделирования явлений, подобных осцилляциям популяций хищников и жертв, взаимосвязи городской земельной ренты и интенсивности землепользования, безработицы и динамики экономического роста и т.д.

Динамика городов и модель Эдварда Лоренца

Рассмотрим в пространстве метрополии небольшую городскую систему, которая в отношении экономической деятельности «мала» по сравнению с метрополией. Это значит, что любые изменения экономических условий в городской системе не влияют на все пространство метрополии, которое остается структурно устойчивым в течение времени наблюдения. Имеем дело с краткосрочной динамикой, следовательно, пространство метрополии можно рассматривать как стационарное окружение. Очевидно, что это предположение несправедливо на больших временах.

Предполагается, что фирмы и постоянное население свободны в выборе местонахождения и в городском пространстве, и во «внешнем мире».

Поскольку городское пространство очень мало, выбор положения и распределение фирм и домохозяев в городе не может влиять на расположение других составных частей метрополии.

Предполагается, что характеристики городского пространства описываются следующими тремя переменными: X – продукция, производимая городской системой; Y – численность коренного населения; Z – земельная рента.

Продукция городской промышленности может идти на потребление населения или экспортироваться вовне.

Предполагается, что возможна следующая динамика города:

$$\frac{dX}{dt} = a_1(a_2Y - a_3X), \tag{21}$$

$$\frac{dY}{dt} = c_1(c_2X - c_3Y) - c_4XZ, \tag{22}$$

$$\frac{dZ}{dt} = d_1XY - d_2Z, \tag{23}$$

где a_i, c_i, d_i – положительные параметры. Параметр a_2 – спрос на городскую продукцию, нормированный на душу населения; a_3 – уровень предложения продукции внутри города. Эти два параметра могут зависеть от переменных, поскольку спрос жителей на городскую продукцию и предложение ее на городском рынке предполагаются зависящими от объема производства и численности населения. На небольших временных интервалах их можно считать константами.

Тогда $a_2 Y$ – общий спрос жителей на городскую продукцию, $a_3 X$ – общий поток городской продукции на городской рынок. Следовательно, уравнение (21) означает, что темп изменения городской продукции пропорционален избытку спроса. Если спрос больше предложения, то производство имеет тенденцию к расширению и наоборот. Коэффициент a_1 имеет смысл скорости установления.

Предполагаем, что изменение численности городского населения задается двумя слагаемыми $c_1(c_2 X - c_3 Y)$ и $-c_4 XZ$. Величину c_2 мы интерпретируем как спрос на труд со стороны фирм для производства единицы продукции. Тогда $c_2 X$ – общий спрос на труд на городском рынке труда. Параметр c_3 – отношение численности городских жителей, выбирающих работу в городе, к общей численностью городского населения. Величина $c_3 Y$ – общая величина предложения труда на городском рынке. Следовательно, $(c_2 X - c_3 Y)$ – избыток спроса на труд в городе. Он влияет на направление миграции. Слагаемое $(-c_4 XZ)$ учитывает влияние на миграцию величины земельной ренты, так как люди выбирают для проживания местности с низкой ценой на землю.

В уравнении (23) предполагается, что любое изменение величины земельной ренты отрицательно влияет на ее текущий уровень: если земельная рента очень высока, то увеличивать ее дальше трудно. Слагаемое $d_1 XY$ означает, что на изменения земельной ренты положительно влияют X и Y.

Если провести преобразование

$$\begin{gathered} t = \frac{t^*}{c_1 c_3}, \quad \sigma = \frac{a_1 a_3}{c_1 c_3}, \quad r = \frac{a_2 c_2}{a_3 c_3}, \quad b = \frac{d_2}{c_1 c_3}, \\ x = \left(\frac{c_4}{d_1}\right)^{1/2} \frac{d_1 X}{c_1 c_3}, \quad y = \left(\frac{c_4}{d_1}\right)^{1/2} \frac{d_1 a_2 Y}{a_3 c_1 c_3}, \quad z = \frac{c_4 a_2 Z}{a_3 c_1 c_3}, \end{gathered} \tag{24}$$

то (21) – (23) превращается в систему Лоренца

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = xy - bz.$$

Свойства этой системы известны: 1) траектории не являются периодическими; 2) поведение в фазовом пространстве не соответствует переходному (неустойчивому) процессу, так как в зависимости от того, как долго продолжается численное интегрирование, траектория продолжает движение, не приближаясь ни к какой периодической орбите, ни к какому стационарному состоянию; 3) топология фазового портрета не зависит от выбора начальных условий; 4) предсказать, как будет вести себя траектория в течение сколь-нибудь длительного промежутка времени, невозможно.

Хаос в модели международной экономики
(сценарий Ньюхауса – Рюэля – Такенса)

Международная торговля между экономиками, в которых наблюдаются предельные циклы, может привести к хаосу (возникновению странного аттрактора). Международную торговлю в некотором смысле можно рассматривать как возмущение изолированных экономик.

Лоренцем (1987) предложена следующая модель.

Рассмотрим три экономики (национальные, региональные или городские), каждая из которых описывается упрощенными детерминированными уравнениями Кейнса:

$$\begin{aligned} \frac{dY_i}{dt} &= \alpha_i \left[I_i(Y_i, r_i) - S_i(Y_i, r_i) \right], \\ \frac{dr_i}{dt} &= \beta_i \left[L_i(Y_i, r_i) - \frac{M_i}{p_i} \right], \end{aligned} \tag{25}$$

где индекс i – номер экономики; Y – доход; r – процентная ставка; L – функция спроса на деньги; M – постоянное номинальное денежное предложение; p – фиксированные цены товаров; $I(Y, r)$ – функция спроса на инвестиции ($I_Y > 0$, $I_r < 0$); $S(Y, r)$ – функция сбережений ($S_Y > 0$, $S_r > 0$); α и β – положительные параметры установления.

Система (25) может быть записана как объединение трех независимых систем с одной степенью свободы, обладающих при соответствующих условиях предельными циклами. Если все три экономики являются осциллирующими, то общее движение системы состоит из движения по трехмерному тору T^3, который погружен в пространство R^6.

Введение в изолированные системы фактора международной торговли (экспорта и импорта) с помощью функций

$$\mathrm{Ex}_i = \mathrm{Ex}_i(Y_j, Y_k) \quad (i \neq j, k), \quad \mathrm{Im}_i = \mathrm{Im}_i(Y_i)$$

приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dY_i}{dt} &= \alpha_i \left[I_i(Y_i, r_i) - S_i(Y_i, r_i) + \mathrm{Ex}_i(Y_j, Y_k) - \mathrm{Im}_i(Y_j) \right], \\ \frac{dr_i}{dt} &= \beta_i \left[L_i(Y_i, r_i) - \frac{M_i^*}{p_i} \right], \quad i, j, k, = 1, 2, 3; \quad j, k, \neq i, \end{aligned} \tag{26}$$

где M_i^* – фиксированное предложение денег в i-й экономике, отражающее баланс платежных равновесий.

Система уравнений (26) описывает динамику трех связанных осцилляторов, когда по сценарию Ньюхауса – Рюэля – Такенса может возникнуть странный аттрактор.

Макроэкономическая модель роста (Хаавельдо, 1954) и экономический хаос в дискретной модели (сценарий Фейгенабума)

Модель имеет вид

$$\frac{dN}{dt} = N\left(a - \frac{\beta N}{Y}\right), \quad a, \beta > 0,$$
$$Y = AN^{\alpha}, \quad A > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{27}$$

где N – численность населения; Y – реальный объем производства; α, β, a, A – константы. Подстановка второго уравнения в первое приводит к уравнению

$$\frac{dN}{dt} = N\left(a - \frac{\beta N^{(1-\alpha)}}{A}\right). \tag{28}$$

Уравнение (28) аналогично логистическому, используемому в теории биологических популяций. Если ввести дискретное время и заменить производные по времени первыми разностями, то (28) примет вид

$$N_{t+1} = N_t\left[(1+a) - \frac{\beta N_t^{1-\alpha}}{A}\right]. \tag{29}$$

Введением новой переменной

$$N_t = x_t\left[\frac{A(1+a)}{\beta}\right]^{1/1-\alpha} \tag{30}$$

уравнение (29) превращается в

$$x_{t+1} = (1+a)x_t(1 - x_t^{1-\alpha}) = F(x_t, a, \alpha). \tag{31}$$

Проанализируем (31) для случая $\alpha = 1/2$, меняя a, то есть будем исследовать уравнение

$$x_{t+1} = (1+a)x_t(1 - x_t^{1/2}) = F(x_t, a, 1/2). \tag{32}$$

Очевидно, что мы придем к сценарию Фейгенбаума перехода к хаосу.

Модель популяции и ее пространственного распространения (Хотеллинг, 1921)

Обозначая плотность численности популяции через p, а плотность через s, Хотеллинг написал уравнение:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A(s-p) + B\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}\right), \tag{33}$$

где A и B – постоянные, представляющие соответственно темпы роста и распространения. Поскольку вводилось понятие насыщенной плотности популяции, то, если реальная плотность была выше, популяция уменьшалась, ниже – увеличивалась. Обоснование пространственной диффузии строилось на том, что при увеличении популяции (рабочей силы) сокращается выпуск продукции на душу населения, при этом происходит уменьшение доходов, и люди движутся из более населенных мест к менее населенным областям.

Выбирая единицы измерения численности популяции, времени и пространства так, чтобы все три постоянные (скорость роста, распространения и насыщенной плотности) стали единичными, получим уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (1-p)p + \nabla^2 p, \tag{34}$$

решения которого сейчас хорошо известны. В одномерном случае условие стационарности имеет вид

$$(1-p)p + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0. \tag{35}$$

Умножим уравнение (35) на $\dfrac{\partial p}{\partial x}$. Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(p^2) - \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}(p^3) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2,$$

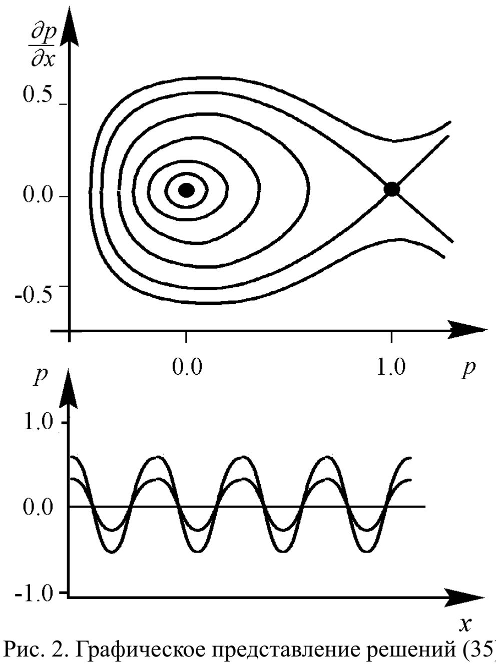

Рис. 2. Графическое представление решений (35)

и первый интеграл будет таким:

$$\frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 = E. \tag{36}$$

Кривые уровня «энергии» приведены на фазовой плоскости $p,\ \partial p/\partial x$ (рис. 2).

То, что периодические решения захватывают отрицательные значения p, которые не имеют смысла, конечно же, абсурд (см. рис. 2). Эти решения теряют всякий смысл, когда мы рассматриваем их в неограниченном пространстве. Но кто мешает рассматривать их только над изолированными кусками пространства, где численность популяции положительна? Экологи называют такие участки «ареалами».

Один из недостатков модели Хотеллинга состоит в том, что запас средств существования принимается равным заданной постоянной, не зависящей от времени и численности населения (рабочей силы). Поэтому модель Хотеллинга больше подходит не для человеческих популяций.

Человек, в отличие от животных, может производить свои собственные средства существования, и благодаря техническому прогрессу (разделению труда и накоплению капитала) со временем это производство становится все более эффективным. В конечном счете, при уже установленном определенном запасе средств существования нет раз и навсегда фиксированного отношения между ним и «насыщенной популяцией», для которой доля изменения численности населения в точности равна нулю.

Следуя Т. Пу (1985), заменим слагаемое роста $\partial p/\partial t$ на $[p(1+q-\gamma p)]$, где введена простейшая производственная функция с возрастающим вначале, но в конечном итоге снижающимся эффектом масштаба

$$q = \alpha\left(\beta p^2 - p^3\right).$$

В результате получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} = p\left[1 + \alpha\left(\beta p^2 - p^3\right) - \gamma p\right]. \qquad (37)$$

Коэффициент α определяет технологическую эффективность, а β представляет масштаб производства. Таким образом, переход от возрастающего к снижающемуся эффекту масштаба происходит при $p = \beta/2$; производительность максимальна при $p = 2\beta/3$ и сокращается при $p = \beta$ до нуля[2].

Коэффициент γ представляет приемлемый доход на душу населения, который приводит к стационарности. Введение нелинейности более высокого порядка приводит к модели с несколькими интервалами чередования роста и сокращения численности, что позволяет надеяться на получение экономически осмысленных пространственных моделей популяции с чередующимися скоплениями и разрежениями.

Как видоизменить диффузионное слагаемое в уравнении Хотеллинга? Согласно его собственному обоснованию популяция распространяется от мест с большей плотностью к местам с меньшей плотностью заселения, потому что сокращение доходов от производства на душу населения может отрицательно сказаться на численности населения. В модифицированной модели нужно использовать явную производственную функцию для введения потока переселенцев к выпуску продукции на душу населения, а не к плотности населения. Следовательно, предполагаем, что чистый поток мигрантов $p\nabla\left(q/p\right)$ имеет направление наибольшего увеличения (градиента) производства на душу населения. Его интенсивность пропорциональна максимальному отношению разницы пространственных уровней жизни, а плотность населения отвечает количеству потенциальных переселенцев, которые могут прореагировать на эти различия. Источником плотности (расходимости) этого потока является

[2] Оказалось, что последняя уменьшающаяся часть определяется без предположения о свободной реализации, но, если мы сохраним ее, можно считать, что она отвечает увеличивающимся трудностям избавления от производственных отходов. Выберем подходящие единицы измерения времени и численности населения, чтобы сделать скорость роста и стационарную популяцию (в модели Хотеллинга) единичными. Заметим, что сохранен «естественный» запас средств существования (фрукты, дичь, рыба), которые поддерживали человечество на ранних ступенях развития.

слагаемое

$$-\nabla\left(p\nabla\frac{q}{p}\right), \qquad (38)$$

где знак минус означает, что мы рассматриваем силу притяжения, а не отталкивания.

Есть и другая причина диффузии (Скеллман, 1953). Нечеловеческие популяции, вообще говоря, сознательно мигрируют в более богатые пищей места. В человеческих популяциях это отвечает возрастанию радиуса передвижения, вызываемому улучшением условий перевозки как одной из составляющих увеличивающегося жизненного уровня. Таким образом, этот второй член в выражении диффузии имеет вид

$$\nabla^2\left(\frac{q}{p}p\right). \qquad (39)$$

Складывая оба выражения (38) и (39), отвечающие распространению, получаем

$$\nabla^2\left(\frac{q}{p}\right)-\nabla\left(p\nabla\frac{q}{p}\right)=\nabla\left(\frac{q}{p}\nabla p\right). \qquad (40)$$

Окончательно имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t}=p(1+q-\gamma p)+\nabla\left(\frac{q}{p}\nabla p\right), \qquad (41)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=p(1+\alpha\left(\beta p^2-p^3\right)-\gamma p)+\frac{1}{6}\nabla^2\alpha\left(3\beta p^2-2p^3\right). \qquad (42)$$

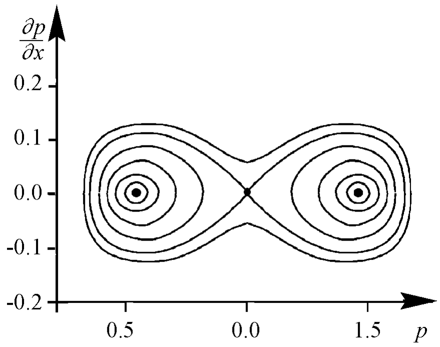

Рис. 3. Стационарные решения модифицированной модели Хотеллинга

Стационарные решения модифицированной модели Хотеллинга (замкнутые орбиты в фазовом пространстве) представлены на рис. 3. Зависимости $p(x)$ – пространственные волны двух разных уровней. В отличие от случая первоначальной модели Хотеллинга, они никогда не заходят в область с отрицательной численностью популяции.

Заключение

Эти методические заметки появились в результате прочтения книг, указанных во введении. Материалы заметок частично были изложены в виде лекций на VI Международной школе ХАОС’01 (Саратов, октябрь 2001), а также на Международной школе «Нелинейная динамика, хаос, катастрофы и управление» (Рига, Латвия, июль 2002). Примеры, приведенные в заметках, могут быть полезны при чтении лекций как доказательство разнообразия приложений канонических моделей нелинейной динамики. Список литературы не приводится, поскольку он соответствует указанным книгам.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 27.03.2006

CANONICAL MODELS OF NONLINEAR DYNAMICS IN ECONOMICS

D.I. Trubetskov

This paper is the book review. Its main purpose is to show that practically all kinds of canonical models of nonlinear dynamics are used in the present mathematical economics.

Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.