

ВЛИЯНИЕ ШУМА НА АВТОГЕНЕРАТОР СПИРАЛЬНОГО ХАОСА

А.С. Захарова, Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко

Рассматривается влияние белого и цветного шума на динамику автогенератора в режиме спирального (фазо-когерентного) хаоса. Исследуются характеристики мгновенной фазы и спектры хаотических колебаний зашумленного автогенератора. Установлено явление синхронизации хаоса узкополосным внешним шумом. Сравниваются эффекты синхронизации при воздействии узкополосных шумовых сигналов с одинаковыми спектрами и разными плотностями вероятности.

Введение

Исследование влияния шума на поведение нелинейных динамических систем представляет собой актуальную проблему, возникающую на стыке нелинейной динамики и теории стохастических процессов. Важность данной проблемы определяется тем, что процессы, протекающие в реальных системах любой природы, в большинстве случаев нельзя рассматривать как чисто случайные (стохастические) или чисто детерминированные (динамические). Они, как правило, являются результатом совместного действия детерминированного оператора эволюции и случайных сил [1–4]. В реальных системах всегда присутствуют внутренние, принципиально неустранимые, источники шума. Они связаны со множеством случайных микросостояний, на которых путем статистического усреднения определяются макропараметры, задающие состояние динамической системы. Кроме того, система испытывает внешние воздействия со стороны других систем. Во многих случаях эти воздействия также являются случайными процессами. Влияние внутренних и внешних случайных сил (источников шума) на динамическую систему, даже при незначительной интенсивности этих сил, может оказаться весьма существенным. В некоторых случаях шум может служить причиной качественного изменения динамической компоненты поведения системы, то есть приводить к бифуркационным переходам [3, 5, 6]. Результат шумового воздействия на динамическую систему определяется как статистикой шума, так и особенностями динамического поведения системы. Особенно заметным

влияние шума может оказаться в случае структурной неустойчивости динамической системы, например, в точках бифуркаций [7, 8].

Одной из задач в рамках отмеченной проблематики является исследование влияния шума на динамическую систему в режиме хаотических автоколебаний. В этом случае в системе присутствуют одновременно два механизма перемешивания: динамическое перемешивание, задаваемое оператором эволюции, и перемешивание, вносимое случайной силой [9]. Влияние шума на хаотическую динамику до настоящего времени изучено недостаточно. Теоретические исследования устанавливают структурную устойчивость гиперболического хаоса по отношению к слабому шуму [10–12]. Для грубых гиперболических хаотических систем доказано существование инвариантной вероятностной меры, которая слабо меняется при добавлении в систему шума малой интенсивности. Аналогичные результаты получены и для так называемых квазигиперболических аттракторов, например, для аттрактора Лоренца [12, 13]. Однако для динамических систем, моделирующих реальные объекты, грубый гиперболический или квазигиперболический хаос является, скорее, исключением, чем правилом. Хаотические режимы реальных систем и их моделей соответствуют негиперболическим хаотическим аттракторам. Такие аттракторы не являются грубыми. Воздействие шума на негиперболические аттракторы не всегда поддается теоретическому анализу, однако имеющиеся результаты (в том числе численные) показывают, что оно может быть очень существенным [12, 14–17].

Одним из распространенных типов негиперболических хаотических аттракторов является спиральный аттрактор. Он характеризуется высокой степенью фазовой когерентности и наличием узкой спектральной линии на некоторой характерной частоте [9, 18–20]. Режим спирального аттрактора, его спектрально-корреляционные характеристики и характеристики динамики мгновенной фазы, в том числе и при воздействии аддитивного белого шума, на сегодняшний день исследованы в ряде работ [9, 12, 17, 21–25]. Установлено, что, с точки зрения спектрально-корреляционных характеристик, автоколебания в режиме спирального аттрактора подобны гармоническому шуму. Спад автокорреляционных функций колебаний в системе со спиральным аттрактором на больших временах носит экспоненциальный характер, причем декремент определяется коэффициентом эффективной диффузии мгновенной фазы. Для спирального аттрактора она, как правило, очень мала. На этом фоне перемешивание, порождаемое даже относительно слабым шумом, оказывается заметным [9, 17, 21]. Однако, несмотря на проведенные исследования, остается невыясненным ряд вопросов, касающихся влияния интенсивности белого шума на характеристики перемешивания в режиме спирального хаоса.

Если внутренние источники шума в системе можно считать δ -коррелированными (белыми), то внешние случайные воздействия чаще представляют собой узкополосный шум. Наличие характерной частоты в спектре шума (частоты спектрального максимума) является важным фактором, если учесть частотные свойства самой динамической системы. Перестройка характерной частоты и ширины спектральной линии шума может сильно повлиять на характеристики динамического хаоса. Такой эффект был установлен даже для хаотического аттрактора Лоренца, устойчивого к белому шуму [26]. Тем более он должен проявиться для динамической

системы в режиме спирального аттрактора, поскольку в этом случае хаотические автоколебания имеют свою характерную частоту в спектре. Естественно ожидать, что влияния цветного шума будет особенно существенным в случае совпадения характерных частот шума и хаотических автоколебаний. Узкополосный шум, как известно, может синхронизовать частоту периодических автоколебаний [20, 27, 28]. Можно предположить, что в режиме спирального хаоса при воздействии шума с достаточно узкой спектральной линией также наблюдается эффект синхронизации. Однако к чему на самом деле приведет воздействие цветного шума на систему в режиме спирального аттрактора и какую роль при этом может играть ширина спектральной линии шума не известно, поскольку до настоящего времени специальные исследования в этом направлении не проводились.

В данной работе изучается влияние аддитивного шума, как белого, так и цветного, на хаотическую автоколебательную систему в режиме спирального аттрактора. В работе главное внимание уделяется характеристикам мгновенной фазы хаотических автоколебаний, поскольку именно они в основном определяют спектрально-корреляционные свойства спирального хаоса. Исследуется характер поведения во времени дисперсии мгновенной фазы и вычисляется коэффициент эффективной диффузии фазы. При необходимости рассматривается также непосредственно спектральная плотность мощности колебаний. Проведенные в рамках данного исследования численные эксперименты имеют своей целью дать ответы на следующие вопросы.

1. Сохраняется ли характер поведения мгновенной фазы хаотических колебаний при интенсивном δ -коррелированном шумовом воздействии, и как зависит коэффициент эффективной диффузии фазы от интенсивности белого шума?
2. Сохраняется ли квазилинейный закон роста дисперсии мгновенной фазы при воздействии на систему цветного гауссова шума?
3. Как влияет на диффузию фазы и спектральные характеристики хаоса расстройка характерных частот хаотической системы и шумового воздействия, а также ширина спектральной линии шума?
4. Возможен ли эффект вынужденной синхронизации спирального хаоса узкополосным шумом, и будет ли он одинаково проявляться для различных типов шумового воздействия с одинаковыми спектральными характеристиками?

1. Воздействие белого шума на генератор спирального хаоса

1.1. Модель 1. При исследовании влияния белого шума на осциллятор Ресслера [29] анализировалась следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z + \sqrt{2D}\xi(t), \\ \dot{y} &= x + \alpha y, \\ \dot{z} &= \beta + z(x - \mu), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\xi(t)$ – источник стандартного гауссова белого шума: $\langle \xi(t) \rangle \equiv 0$, $\langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$. Параметр D характеризует интенсивность шума. Параметры автогенератора выбирались соответствующими режиму развитого спирального аттрактора:

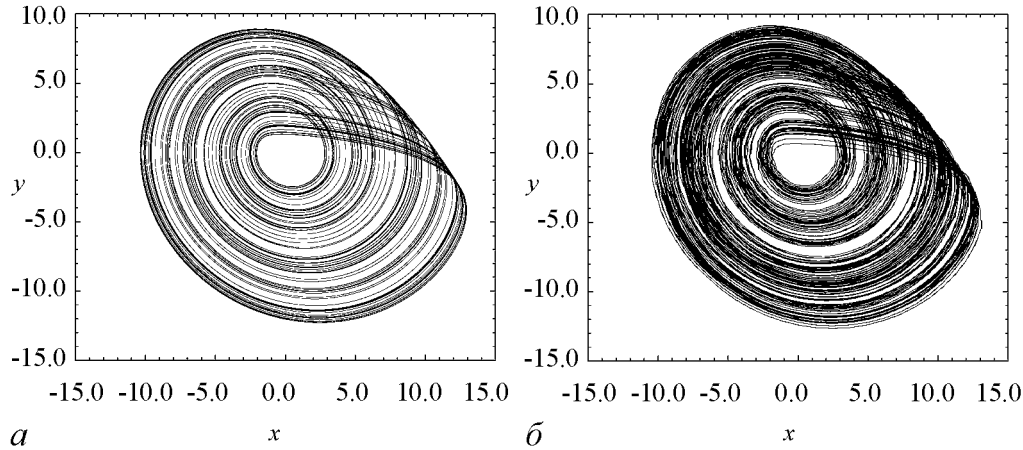


Рис. 1. Проекция аттрактора на плоскость x, y в системе (1) без шума $D = 0$ (а) и при воздействии шума $D = 0.01$ (б)

$\alpha = \beta = 0.2$; $\mu = 6.5$. Как уже говорилось во введении, спиральный аттрактор является фазово-когерентным. Фазовая когерентность проявляется в том, что траектории в некоторой проекции (например, в проекции x, y) с высокой степенью регулярности вращаются вокруг неустойчивого состояния равновесия, которое для системы Ресслера при выбранных параметрах находится почти в начале координат. Аддитивный гауссов белый шум интенсивности $D \leq 10^{-2}$ практически не нарушает регулярности вращения траекторий (то есть не нарушает «когерентности» хаотического аттрактора). Вид x, y -проекции спирального аттрактора в системе (1) без шума ($D = 0$) и в присутствии шума приведен на рис. 1. Таким образом, для модели (1) в исследуемом режиме можно ввести мгновенную фазу хаотических колебаний $\Phi(t)$ как угол поворота радиуса-вектора на плоскости x, y

$$\Phi(t) = \arctg\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \pm \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

При этом средняя частота колебаний, определяемая как

$$\bar{\omega} = \left\langle \frac{d\Phi(t)}{dt} \right\rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t_0 + T) - \Phi(t_0)}{T}, \quad (3)$$

где скобки $\langle \dots \rangle_t$ означают усреднение по времени, совпадает с частотой основного спектрального максимума [30, 31].

1.2. Влияние белого шума на динамику мгновенной фазы хаотического генератора. Для модели (1) при различной интенсивности шума в фиксированные моменты времени были получены вероятностные распределения флуктуаций мгновенной фазы $\phi(t) = \Phi(t) - \langle \Phi(t) \rangle$ на ансамбле траекторий (скобки $\langle \dots \rangle$ означают статистическое усреднение). Типичный вид распределений приведен на рис. 2. Как видно из графиков, плотность вероятности флуктуаций фазы, построенная в отсутствие шума, близка к плотности вероятности, полученной при наличии шума, но на меньшем времени. Таким образом, можно говорить о том, что шум ускоряет процессы перемешивания, происходящие в системе. Рассчитывалась зависимость дисперсии мгновенной фазы от времени

$$\sigma_{\Phi}^2(t) = \langle \phi(t)^2 \rangle. \quad (4)$$

В системе без шума дисперсия фазы нарастает во времени почти линейно. Добавление белого шума приводит к более быстрому росту дисперсии, но не меняет линейный характер зависимости [9, 23, 25]. Скорость роста дисперсии во времени можно охарактеризовать с помощью коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{\text{эфф}}$. Для определения $B_{\text{эфф}}$ осуществлялась линейная аппроксимация зависимости σ_{ϕ}^2 от t по методу наименьших квадратов. Коэффициент эффективной диффузии фазы $B_{\text{эфф}}$ определялся как половина углового коэффициента. Исследуем зависимость $B_{\text{эфф}}$ от интенсивности шума D для модели (1). Как следует из теории квазигармонического автогенератора, находящегося под воздействием белого гауссова шума, при условии развитой генерации и слабого шума мгновенная фаза автоколебаний описывается винеровским процессом с коэффициентом диффузии, прямо пропорциональным интенсивности шума [32–34]. Можно предположить линейный характер зависимости $B_{\text{эфф}}$ от интенсивности шума D и в случае хаотического генератора, но при этом необходимо учесть, что хаотические автоколебания в отсутствие шума обладают собственным коэффициентом эффективной диффузии фазы $B_{\text{эфф}0}$. Тогда получим

$$B_{\text{эфф}} = aD + b, \quad (5)$$

где a – некоторый коэффициент пропорциональности, определяемый характеристиками хаотических колебаний, а $b = B_{\text{эфф}0}$ – коэффициент эффективной диффузии фазы хаотических автоколебаний при $D = 0$. На рис. 3 в логарифмическом масштабе представлена зависимость $B_{\text{эфф}}$ от интенсивности шума D , полученная численно для модели (1). Штриховой линией изображена ее линейная аппроксимация (5). Коэффициенты a и b находились по методу наименьших квадратов. В целом, данные численного эксперимента разбросаны в окрестности линейной зависимости, причем полученное в результате линейной аппроксимации значение $b = 0.0002$ в пределах погрешности совпадает с численно найденным значением коэффициента диффузии $B_{\text{эфф}0} = 0.00018 \pm 0.00002$.

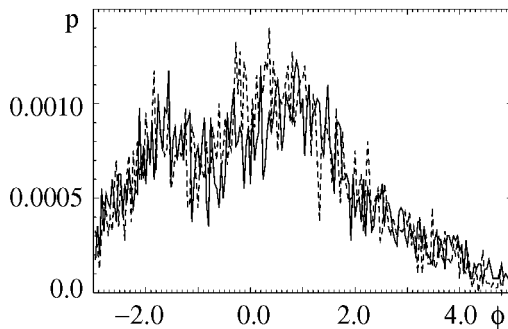


Рис. 2. Распределение флуктуаций фазы в системе (1) в отсутствие шума в момент $t = 10000$ (сплошная линия) и при шуме с интенсивностью $D = 0.01$ в момент $t = 1000$ (пунктир)

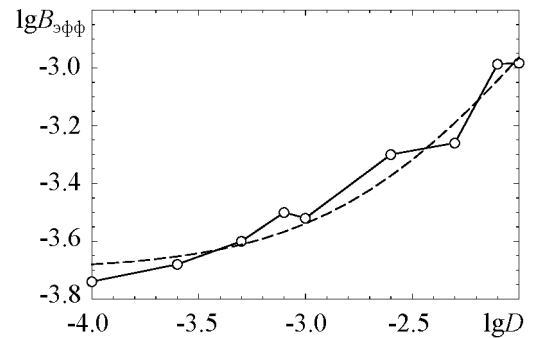


Рис. 3. Зависимость коэффициента эффективной диффузии $B_{\text{эфф}}$ от интенсивности шума D (сплошная линия) и ее линейная аппроксимация по методу наименьших квадратов (штриховая линия)

2. Воздействие цветного шума на генератор спирального хаоса

2.1. Модель 2. Влияние цветного шума на хаотический автогенератор в режиме спирального аттрактора исследовалось на примере следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z + \sqrt{2D}u, \\ \dot{y} &= x + \alpha y, \\ \dot{z} &= \beta + z(x - \mu), \\ \dot{v} &= u, \\ \dot{u} &= -\gamma u - \Omega^2 v + \sqrt{2\gamma}\xi(t),\end{aligned}\tag{6}$$

где $\xi(t)$ – источник стандартного гауссова белого шума, $u(t)$ – двумерный процесс Орнштейна – Уленбека. Параметр Ω определяет частоту спектрального максимума цветного шума, а параметр D задает интенсивность воздействия цветного шума $u(t)$ на хаотический автогенератор Ресслера. Параметры автогенератора выбирались такими же, как и в модели (1): $\alpha = \beta = 0.2$; $\mu = 6.5$.

Процесс $u(t)$ можно рассматривать как результат фильтрации гауссова белого шума линейным контуром. Определив коэффициент передачи линейного преобразования $u(t) = \hat{L}\xi(t)$, легко найти спектральную плотность мощности процесса $u(t)$, учитывая, что спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$ на всех частотах равна единице,

$$W_u(\omega) = \frac{4\gamma\omega^2}{\gamma^2\omega^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2}.\tag{7}$$

Если $\gamma \ll 1$ (контур высокодобротный), то процесс $u(t)$ будет узкополосным. В этом случае из (7) приближенно получаем лоренцеву форму спектра

$$W_u(\omega) \approx \frac{\gamma}{(\gamma/2)^2 + (\omega - \Omega)^2}.\tag{8}$$

Ширина спектра на уровне половинной мощности в этом случае есть $\Delta\omega_{0.5} = \gamma$. Соответствующая спектру (8) автокорреляционная функция узкополосного процесса $u(t)$ имеет вид

$$\psi_u(\tau) = \exp\left(-\frac{\gamma}{2}|\tau|\right) \cos \Omega\tau, \quad \tau = t_2 - t_1.\tag{9}$$

Дисперсия процесса $u(t)$ при малых значениях γ приблизительно равна единице.

На рис. 4, *a* приведена проекция траектории в системе (6) на плоскости x, y . Можно видеть, что воздействие узкополосного цветного шума приводит к нарушению регулярности вращения траекторий на плоскости x, y . Чтобы корректно ввести мгновенную фазу, во многих случаях можно использовать проекцию на плоскость переменных \dot{x}, \dot{y} [35]. На рис. 4, *б* представлен фрагмент проекции \dot{x}, \dot{y} в окрестности начала координат. Хорошо виден регулярный характер вращения траектории

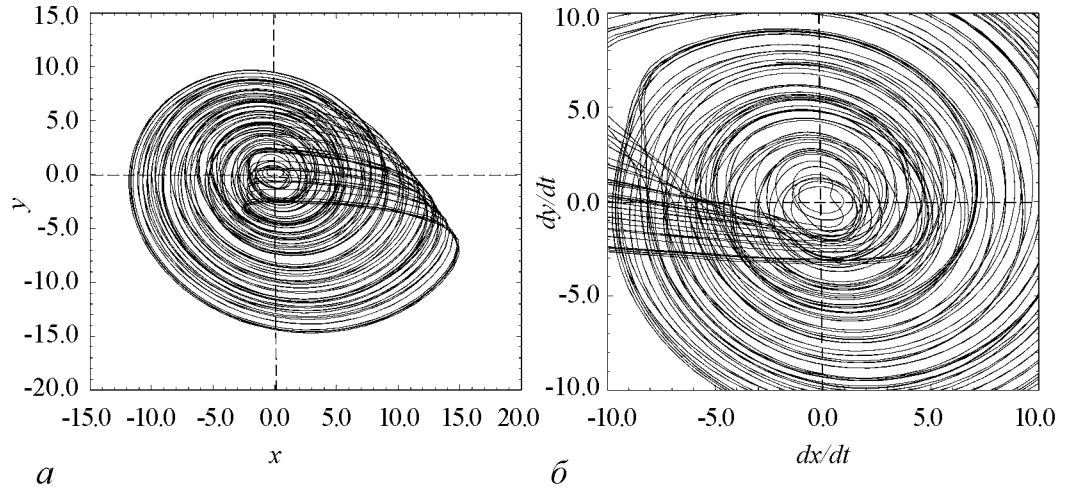


Рис. 4. Проекция траекторий системы (6) с цветным шумом $\gamma = 0.001$, $D = 0.01$ на плоскость x, y (а) и на плоскость \dot{x}, \dot{y} (фрагмент)(б)

вокруг начала координат. Мгновенная фаза колебаний в автогенераторе Ресслера, находящемся под действием цветного шума, вводилась как

$$\Phi(t) = \arctg \left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \right) \pm \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Для системы (6) мгновенная фаза, определенная таким образом, приводит к средней частоте $\bar{\omega}$, совпадающей с частотой основного максимума в спектре автоколебаний, что говорит о корректности определения фазы [30, 31].

2.2. Синхронное воздействие цветным шумом. Под синхронным шумовым воздействием будем понимать возмущение хаотического автогенератора цветным шумом $u(t)$ с частотой спектрального максимума Ω , равной средней частоте автономных хаотических колебаний $\bar{\omega}_0$. В исследуемом режиме спирального хаоса значение средней частоты есть $\bar{\omega}_0 \approx 1.06828 \pm 10^{-5}$. Положим $\Delta = \Omega - \bar{\omega}_0 = 0$. Интенсивность цветного шума зафиксируем постоянной: $D = 0.01$ и рассмотрим, как влияет на характеристики хаотических автоколебаний цветной шум с различным временем корреляции (то есть будем изменять параметр γ).

На рис. 5 представлены спектры шума, соответствующие различным значениям параметра γ , и спектры хаотических автоколебаний в системе Ресслера без шума и при воздействии цветного шума. На рис. 5, в видно, что уширение основной линии результирующего спектра при $\gamma = 0.1$ значительно заметнее, чем при $\gamma = 1.0$ и $\gamma = 0.001$. Таким образом, имеется некоторое значение γ_m , которому соответствует максимальное уширение основной спектральной линии автогенератора при воздействии цветного шума. Если отступать от этого значения как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения параметра, то влияние шума на систему становится более слабым. Это связано с тем, что источник цветного шума имеет фиксированную дисперсию, и при увеличении ширины спектральной линии шума амплитуда спектральной плотности мощности

уменьшается. Для малых значений параметра γ ширина спектра шума становится сравнимой с шириной спектра хаотических автоколебаний, и значительного уширения результирующего спектра также не наблюдается.

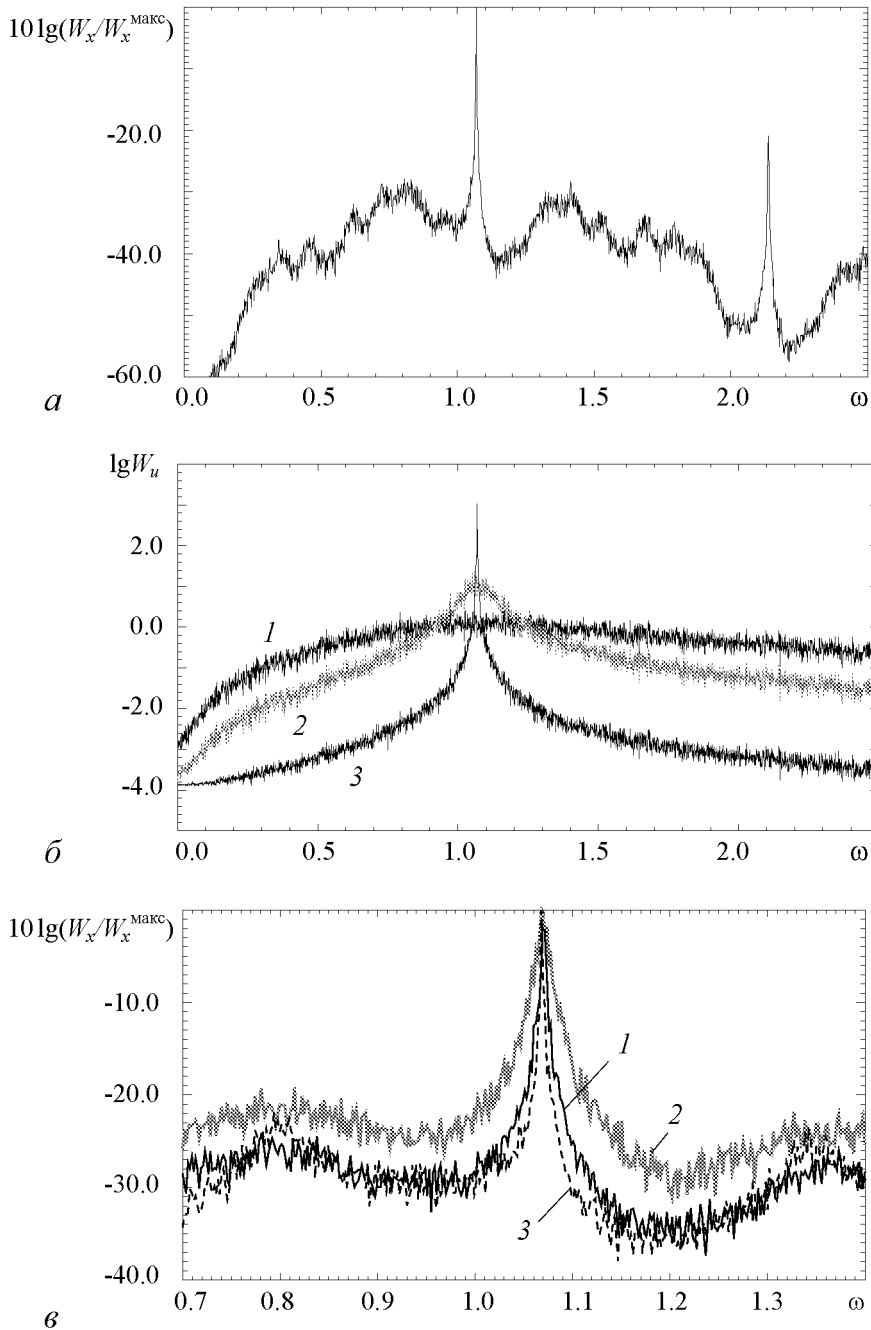


Рис. 5. Спектры мощности шумового воздействия $u(t)$ и хаотических колебаний $x(t)$ в системе (6) при $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 6.5$, $\Omega = 1.06828$, $D = 0.01$: а – нормированный спектр хаотических автоколебаний в системе Ресслера без шума; б – спектры цветного шума для значений $\gamma = 1.0(1), 0.1(2), 0.001(3)$; в – нормированные спектры хаотических автоколебаний при воздействии цветного шума с $\gamma = 1.0(1), 0.1(2), 0.001(3)$

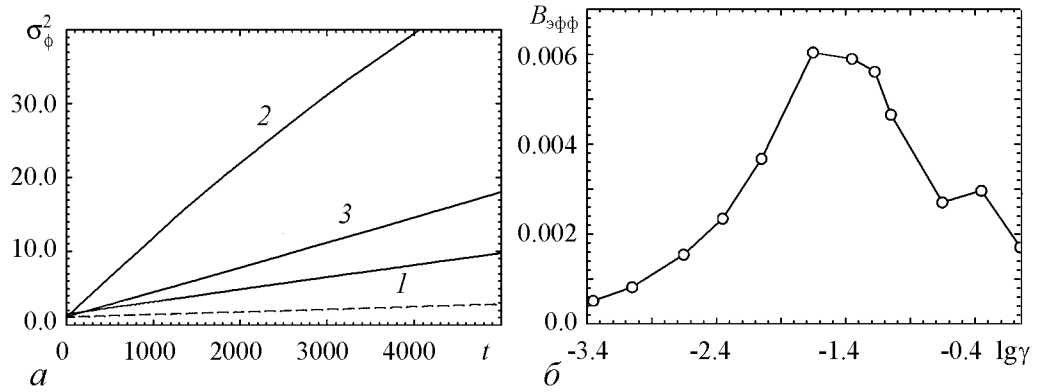


Рис. 6. Статистические характеристики мгновенной фазы хаотических автоколебаний системы (6) при воздействии синхронного цветного шума с интенсивностью $D = 0.01$ и различными значениями параметра γ : a – зависимости дисперсии мгновенной фазы от времени при $\gamma = 0.001$ (1), 0.1 (2) и 1.0 (3), пунктиром обозначена зависимость, соответствующая отсутствию шума; b – зависимость коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{\text{эфф}}$ от параметра γ

Была рассчитана зависимость дисперсии фазы хаотических автоколебаний от времени при воздействии синхронного цветного шума с различным γ (рис. 6, a), а также зависимость $B_{\text{эфф}}$ от параметра γ (рис. 6, b). Как видно из рис. 6, a цветной шум, как и белый, не меняет линейный характер зависимости дисперсии фазы от времени. Скорость роста дисперсии мгновенной фазы при $\gamma = 0.1$ заметно больше, чем при $\gamma = 0.001$ и $\gamma = 1.0$, что полностью согласуется с результатами расчета спектров. Более детальное исследование основной спектральной линии показывает, что ее форма близка к лоренцевой, а ширина на уровне половинной мощности хорошо соответствует значению $B_{\text{эфф}}$, рассчитанному для данного γ . Из графика, представленного на рис. 6, b видно, что максимальное значение $B_{\text{эфф}}$ (и, соответственно, максимальное уширение основной спектральной линии хаотического автогенератора) наблюдается при $\gamma_m \in [0.02; 0.08]$.

2.3. Несинхронное воздействие цветным шумом. Рассмотрим, как влияет на хаотический автогенератор «несинхронность» шумового воздействия при фиксированной скорости спада корреляции и интенсивности цветного шума ($\gamma = 0.1$, $D = 0.01$).

На рис. 7 представлены спектры шумового воздействия с различными расстройками $\Delta = \Omega - \bar{\omega}_0$ и соответствующие спектры хаотических автоколебаний системы Ресслера. Заметное уширение результирующего спектра наблюдается для малых значений расстройки Δ . Таким образом, синхронное воздействие оказывает на хаотическую систему более существенное влияние.

Зависимости дисперсии фазы хаотических автоколебаний от времени при воздействии несинхронного цветного шума с различной расстройкой Δ представлены на рис. 8, a . Более быстрый рост дисперсии мгновенной фазы характерен для малых значений расстройки Δ (линии 1 и 2), что соответствует более значительному уширению спектра. Зависимость коэффициента диффузии фазы хаотических автоколебаний $B_{\text{эфф}}$ от параметра Δ (рис. 8, b) носит нелинейный характер и достигает наибольших значений вблизи нулевой расстройки.

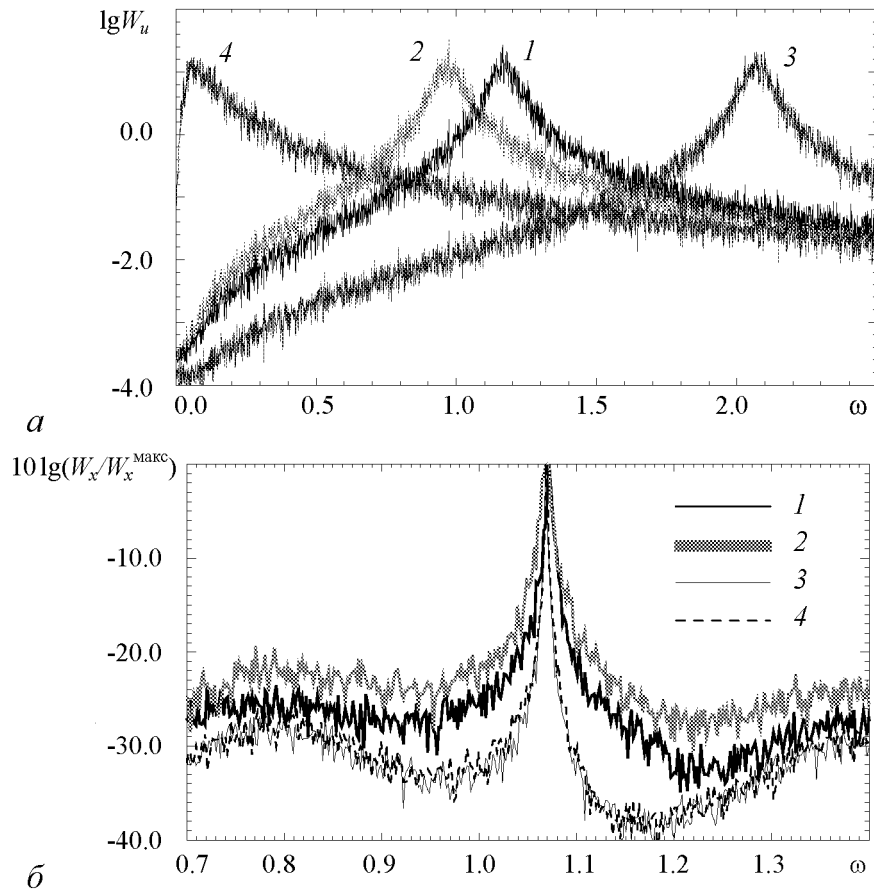


Рис. 7. Спектры мощности шумового воздействия $u(t)$ и хаотических колебаний $x(t)$ в системе (6) при $\alpha = \beta = 0.2$, $\mu = 6.5$, $\gamma = 0.1$, $D = 0.01$: a – спектры шумового воздействия для значений $\Delta = 0.1(1)$; $-0.1(2)$; $1.0(3)$; $-1.0(4)$; b – нормированные спектры хаотических автоколебаний при воздействии цветного шума с $\Delta = 0.1(1)$; $-0.1(2)$; $1.0(3)$; $-1.0(4)$

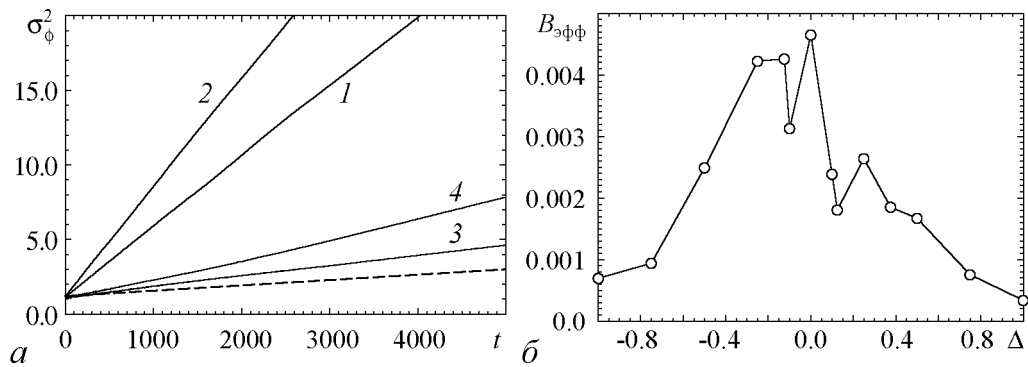


Рис. 8. Статистические характеристики мгновенной фазы хаотических автоколебаний системы (6) при воздействии несинхронного цветного шума с параметрами $D = 0.01$, $\gamma = 0.1$: a – зависимости дисперсии мгновенной фазы от времени, полученные для $\Delta = 0.1(1)$, $-0.1(2)$, $1.0(3)$, $-1.0(4)$, пунктиром обозначена зависимость, соответствующая отсутствию шума; b – зависимость коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{\text{эфф}}$ хаотических автоколебаний от параметра Δ

3. Эффект синхронизации хаотических автоколебаний узкополосным шумом

3.1. Эффект синхронизации в модели 2. Как уже отмечалось, при значениях параметра $\gamma \ll 1$ цветной шум $u(t)$, задаваемый двумя последними уравнениями модели (6), можно считать узкополосным с единичной дисперсией, лоренцевой формой спектра (8) и экспоненциальной автокорреляционной функцией (9). Как показали проведенные численные эксперименты, при воздействии такого шума на автогенератор спирального хаоса возможен эффект синхронизации средней частоты хаотических автоколебаний на частоте спектрального максимума узкополосного шума. Как и в случае с квазигармоническим автогенератором, находящимся под воздействием узкополосного гауссова шума [27, 28], установленный эффект синхронизации хаоса, по-видимому, носит характер нестройной (эффективной) синхронизации, то есть соответствует захвату мгновенной фазы хаотических автоколебаний [20] на конечных, хотя и достаточно длительных, интервалах времени. При этом синхронизация тем «лучше», чем уже спектральная линия шумового воздействия.

На рис. 9 представлены зависимости числа вращения $\Theta = \frac{\bar{\omega}}{\Omega}$ от расстройки Δ , полученные при воздействии шума с двумя различными значениями параметра γ : $\gamma = 0.001$ и $\gamma = 0.01$. В обоих случаях дисперсия шумового воздействия $\sqrt{2D}u(t)$ практически одна и та же ($\sigma_{ex}^2 \approx 0.02$), а ширина спектральной линии $\Delta\omega_{0.5}$ совпадает со значением γ . При $\gamma = 0.001$ зависимость $\Theta(\Delta)$ имеет заметную «полочку» вблизи нулевого значения расстройки Δ , характерную для эффекта синхронизации (рис. 9, а). При увеличении параметра γ наклон графика увеличивается и «полочка» постепенно исчезает (рис. 9, б). При $\gamma \geq 0.01$ эффект синхронизации уже практически отсутствует. Однако четкого критерия синхронизации в присутствии шума не существует, так что границы области синхронизации являются достаточно условными.

Зависимость коэффициента эффективной диффузии фазы хаотических автоколебаний $B_{эфф}$ от параметра Δ при $\gamma = 0.001$ и $D = 0.01$ представлена на рис. 10.

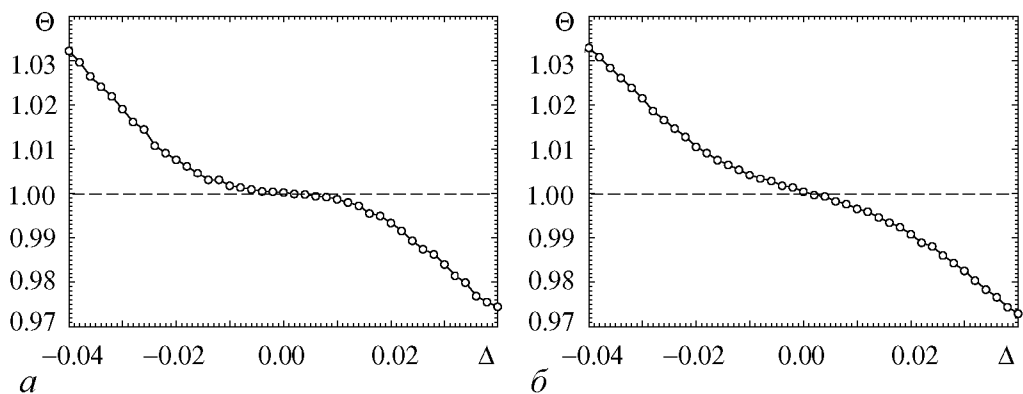


Рис. 9. Зависимости числа вращения $\Theta = \frac{\bar{\omega}}{\Omega}$ от расстройки Δ , полученные для модели 2 при воздействии узкополосного шума с интенсивностью $D = 0.01$ при $\gamma : 0.001$ (а) и 0.01 (б)

Внутри области эффективной синхронизации $B_{\text{эфф}}$ принимает наименьшие значения. На границах области синхронизации коэффициент $B_{\text{эфф}}$ плавно растет, достигает максимума и затем снова постепенно убывает. Интересно сравнить эту зависимость с зависимостью $B_{\text{эфф}}$ от Δ при $\gamma = 0.1$ (рис. 8, б). Для $\gamma = 0.01$ вблизи нулевой расстройки наблюдались наибольшие значения диффузии фазы. Переход от максимума к минимуму объясняется эффектом синхронизации, который отсутствует при больших значениях γ .

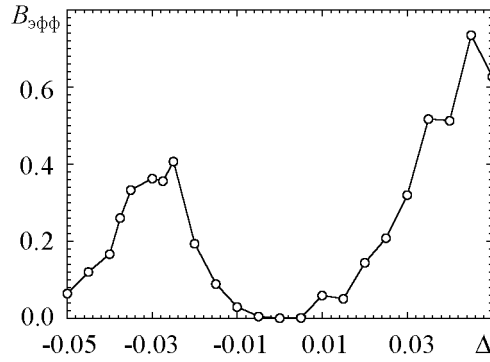


Рис. 10. Зависимость коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{\text{эфф}}$ хаотических автоколебаний от параметра Δ , полученная для модели (6) при воздействии шума с $\gamma = 0.001$ и интенсивностью $D = 0.01$

3.2. Синхронизация хаотических автоколебаний сигналом зашумленного квазигармонического автогенератора. Кроме использованного в модели (6) способа создания узкополосного шума, аналогичный по своему спектральному составу случайный сигнал может быть получен и по-другому: не как результат фильтрации белого шума, а как сигнал зашумленного квазигармонического автогенератора. Хотя спектры обоих шумовых сигналов могут быть одинаковыми, их статистические характеристики существенно различны. Так, в первом случае узкополосный шум является нормальным процессом, а во втором – характеризуется негауссовым законом распределения [27, 34].

Для исследования синхронизации хаотических автоколебаний негауссовским узкополосным шумом была использована **модель 3**:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -y - z + \sqrt{2D}v, \\
 \dot{y} &= x + \alpha y, \\
 \dot{z} &= \beta + z(x - \mu), \\
 \dot{v} &= u, \\
 \dot{u} &= (\varepsilon - v^2)u - \Omega^2 v + \sqrt{2\gamma}\xi(t),
 \end{aligned} \tag{11}$$

где $v(t)$ – колебания, генерируемые осциллятором ван дер Поля с учетом шума, $\xi(t)$ – источник стандартного гауссова белого шума, γ – интенсивность шума, ε – параметр возбуждения, Ω – параметр, управляющий частотой автоколебаний осциллятора ван дер Поля. В численных экспериментах фиксировалось значение $\varepsilon = 0.1$, что обеспечивает режим достаточно развитой и все еще близкой к гармонической генерации. Параметры хаотического автогенератора выбирались как и ранее: $\alpha = \beta = 0.2$; $\mu = 6.5$.

Интенсивность шума в осцилляторе ван дер Поля задавалась малой настолько, чтобы оставаться в рамках классической теории флуктуаций в автогене-

раторе [32, 33]. В этом случае колебания $v(t)$ можно представить в виде

$$v(t) = (A_0 + \rho(t))\cos(\Omega t + \phi_v^0 + \phi_v(t)), \quad (12)$$

где $A_0 = 2\sqrt{\varepsilon}$ – невозмущенная (в отсутствие шума) стационарная амплитуда колебаний, ϕ_v^0 – начальная фаза, $\rho(t)$ и $\phi_v(t)$ – вызванные шумом флуктуации амплитуды и фазы, соответственно. Можно считать флуктуации $\rho(t)$ и $\phi_v(t)$ статистически независимыми, причем $\rho(t)$ представляет собой гауссов случайный процесс со следующими характеристиками:

$$\langle \rho(t) \rangle \equiv 0, \quad \langle \rho^2(t) \rangle = \frac{\gamma}{4\varepsilon\Omega^2}, \quad \psi_\rho(\tau) = \langle \rho^2(t) \rangle \exp(-\varepsilon|\tau|), \quad \tau = t_2 - t_1, \quad (13)$$

а $\phi_v(t)$ – винеровский процесс с начальным состоянием $\phi_v(0) = 0$ и коэффициентом диффузии B_v , задаваемым формулой

$$B_v = \frac{\gamma}{8\varepsilon\Omega^2}. \quad (14)$$

В рамках данного приближения для автокорреляционной функции процесса $v(t)$ справедливо выражение

$$\psi_v(\tau) = \left(\frac{A_0^2}{2} + \frac{1}{2} \langle \rho^2(t) \rangle \exp(-\varepsilon|\tau|) \right) \exp(-B_v|\tau|) \cos \Omega\tau. \quad (15)$$

Поскольку $\langle \rho^2 \rangle \ll A_0^2$ и $B_v \ll \varepsilon$, можно считать, что дисперсия процесса $v(t)$ есть $\sigma_v^2 = \psi_v(0) = \frac{A_0^2}{2}$, а спектральная линия автогенерации задается лоренцианом

$$W_v(\omega) \approx \frac{A_0^2 B_v}{(B_v)^2 + (\omega - \Omega)^2} \quad (16)$$

и, соответственно, ширина спектра есть $\Delta\omega_{0.5} = 2B_v$.

Соответствующим выбором параметров γ и D в модели 2 и модели 3 легко добиться, чтобы шумовое воздействие на хаотический автогенератор в обоих случаях имело практически один и тот же спектр. Так, если в модели 3 положить $\gamma = 0.0005$ и $D = 0.05$, то шумовое воздействие $\sqrt{2D}v(t)$ будет характеризоваться примерно той же дисперсией и шириной спектра, что и шумовое воздействие в модели 2 для которого получена зависимость, представленная на рис. 9, а (дисперсия примерно 0.02, $\Delta\omega_{0.5} \approx 0.001$). Выбор $\gamma = 0.005$ в модели 3 соответствует шуму в модели 2, для которого получена зависимость, приведенная на рис. 9, б (дисперсия примерно 0.02, $\Delta\omega_{0.5} \approx 0.01$). Фрагменты спектров шумовых воздействий сопоставляются на рис. 11. Спектральная линия в обоих случаях имеет одинаковую форму и ширину. Различие спектров проявляется только на частотах, далеких от частоты спектрального максимума, где спектральная плотность мощности мала.

На рис. 12 приведены зависимости числа вращения $\Theta = \frac{\bar{\omega}_0}{\Omega}$ от расстройки $\Delta = \Omega - \bar{\omega}$, полученные для модели 3 при $D = 0.05$ и двух различных значениях γ : 0.0005 и 0.005. На графиках хорошо видна «полочка», соответствующая эффекту захвата средней частоты автоколебаний. Таким образом, эффект синхронизации

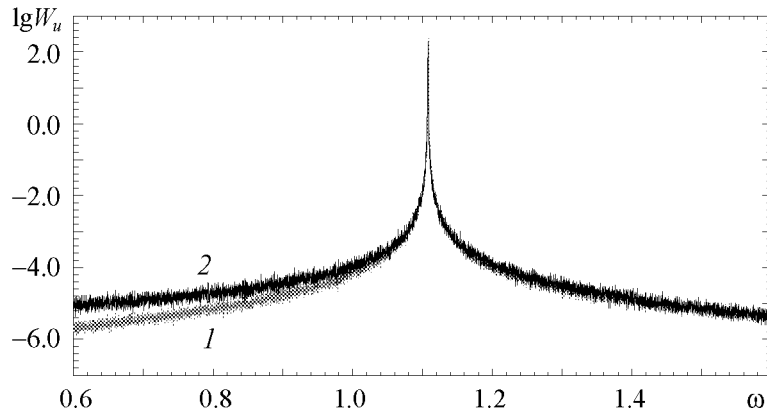


Рис. 11. Сравнение спектров шума, воздействующего на хаотический автогенератор в модели 2 (кривая 1 – $\gamma = 0.001$, $D = 0.01$) и в модели 3 (кривая 2 – $\gamma = 0.0005$, $D = 0.05$)

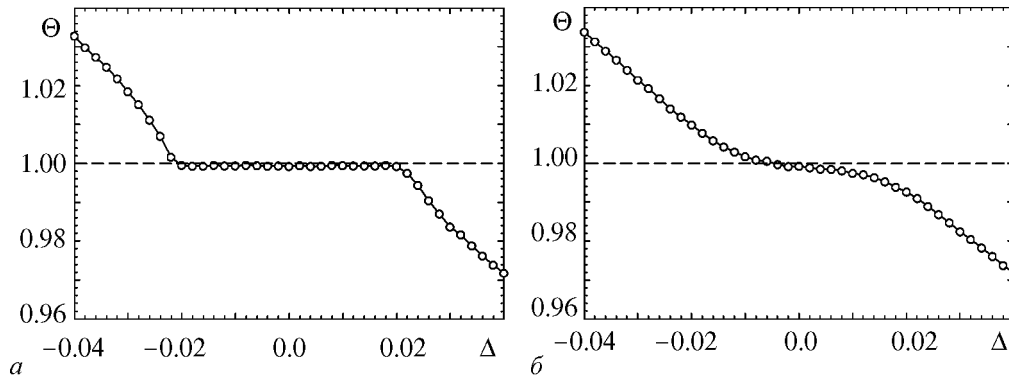


Рис. 12. Зависимости числа вращения $\Theta = \frac{\bar{\omega}}{\Omega}$ от расстройки Δ , полученные для модели 3 при $D = 0.05$ и двух значениях γ : 0.0005 (а); 0.005 (б)

хаотических автоколебаний наблюдается для обоих рассмотренных типов узкополосного шумового воздействия. Из сравнения графиков, приведенных на рис. 9 и рис. 12, можно сделать вывод, что, несмотря на идентичные спектральные характеристики шумовых сигналов в модели 2 и модели 3, эффект синхронизации проявляется в различной степени. Он значительно сильнее в случае, когда узкополосный шум представляет собой сигнал зашумленного квазигармонического автогенератора. С ростом ширины спектральной линии шума эффект синхронизации исчезает. Однако в модели 3 это происходит при значительно более широкополосном воздействии, чем в модели 2. Так, в модели 3 при ширине спектральной линии шума $\Delta\omega_{0.5} \approx 0.01$ «полочка» синхронизации на графике зависимости Θ от Δ практически такая же, как в модели 2 при шуме с шириной линии $\Delta\omega_{0.5} \approx 0.001$ (ср. рис. 12, б и рис. 9, а). Интересно, что ширина основной спектральной линии автономных хаотических колебаний при выбранных параметрах равна $0.0004 \pm 0.2 \cdot 10^{-4}$, то есть значительно уже спектра воздействующего шума. При шуме с соответствующей шириной спектра в модели 2 эффект синхронизации заметно слабее (см. рис. 9, б).

Выводы

Проведенные в данной работе численные исследования влияния белого и цветного шума на автогенератор в режиме спирального хаоса позволяют сделать ряд достаточно общих выводов. Можно утверждать, что близкий к линейному характер роста дисперсии мгновенной фазы хаотических колебаний является очень устойчивым и сохраняется в большинстве случаев при воздействии как белого, так и цветного шума различной интенсивности. Шум может привести к существенному увеличению скорости линейного роста во времени дисперсии σ_{ϕ}^2 (и, соответственно, скорости спада автокорреляционной функции и ширины основной спектральной линии хаотических автоколебаний), характеризующейся коэффициентом эффективной диффузии фазы $B_{\text{эфф}}$.

Аддитивный гауссов белый шум приводит к тому, что к собственной эффективной диффузии фазы хаотических колебаний добавляется слагаемое, зависящее от интенсивности шума. Причем вносимая шумом диффузия фазы растет с интенсивностью шума по закону, близкому к линейному. Линейная зависимость коэффициента диффузии фазы от интенсивности шума характерна для квазигармонических генераторов (при условии развитой генерации и слабого гауссова белого шума) [28, 32, 33]. Таким образом, влияние белого гауссова шума на квазигармонический генератор и на генератор хаоса, с точки зрения спектрально-корреляционных характеристик, во многом аналогично.

В случае воздействия на хаотический генератор цветного шума было показано, что коэффициент эффективной диффузии фазы $B_{\text{эфф}}$ хаотических колебаний зависит как от ширины спектра шума, так и от расстройки частот спектральных максимумов хаоса и шума. При синхронном воздействии цветным шумом (когда частота спектрального максимума шумового воздействия совпадает со средней частотой хаотических автоколебаний) коэффициент $B_{\text{эфф}}$ нелинейным образом изменяется с ростом ширины спектральной линии шума (при фиксированной дисперсии). Сначала $B_{\text{эфф}}$ увеличивается с ростом ширины спектральной линии, а затем, достигнув максимума, убывает. Как следует из полученных результатов, при воздействии на хаотический автогенератор цветного шума наиболее существенное увеличение $B_{\text{эфф}}$ наблюдается при синхронном воздействии. С увеличением расстройки частот спектральных максимумов хаоса и шума эффективность влияния шума на хаотический режим убывает.

В результате проведенных исследований было установлено явление синхронизации хаотических автоколебаний узкополосным внешним шумом. Рассмотрены два типа узкополосных сигналов с близкими спектральными характеристиками, но различными законами распределения. Показано, что эффект синхронизации значительно различается для рассмотренных типов узкополосного шумового воздействия. Таким образом, в плане синхронизации существенна не только ширина спектральной линии шума, но и другие его характеристики.

Данная работа выполнена при поддержке МОРФ в рамках программы «Развитие потенциала высшей школы».

Библиографический список

1. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
2. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
3. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
4. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
5. *Graham R.* Macroscopic potentials, bifurcations and noise in dissipative systems // *Noise in Nonlinear Dynamical Systems. Vol.1: Theory of continuous Fokker – Planck systems* / Ed. by. F. Moss and P.V.E. McClintock. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
6. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
7. *Кравцов Ю.А., Бильчинская С.Г., Бутковский О.Я., Рычка И.А., Суровяткина Е.Д.* Предбифуркационное усиление шума в нелинейных системах // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* 2001. Т. 120, вып. 6 (12). С. 15.
8. *Kravtsov Yu.A., Surovyatkina E.D.* Nonlinear saturation of prebifurcation noise amplification // *Phys. Lett. A.* 2003. Vol. 319(3-4). P. 348.
9. *Anishchenko V.S., Okrokvertskhov G.A., Vadivasova T.E.* Mixing and spectral-correlation properties of chaotic and stochastic systems: numerical and physical experiments // *New Journal of Physics.* 2005. Vol. 7. P. 76.
10. *Кифер Ю.И.* О малых случайных возмущениях некоторых гладких динамических систем // *Изв. АН СССР. Математика.* 1974. Т. 38, № 5. С. 1091.
11. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // *Нелинейные волны* / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979. С. 192.
12. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И.* Статистические свойства динамического хаоса // *Успехи физ. наук.* 2005. Т. 175 № 2. С. 163.
13. *Бунимович Л.А., Синай Я.Г.* Стохастичность аттрактора в модели Лоренца // *Нелинейные волны* / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1980. С. 212.
14. *Grebogi C., Hammel S.M., Yorke J.A., Sauer T.* Shadowing of physical trajectories in chaotic dynamics: containment and refinement // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65. P. 1527.
15. *Sommerer J.C., Ott E., Grebogi C.* Scaling law for characteristic times of noise-induced crises // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 43. P. 1754.
16. *Schroer Ch.G., Ott E., Yorke J.A.* Effects of noise on nonhyperbolic chaotic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81, № 7. P. 1397.
17. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Kopeikin A.S., Kurths J., Strelkova G.I.* Effect of noise on the relaxation to an invariant probability measure of nonhyperbolic chaotic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87, № 5. P. 4101.
18. *Arneodo A., Collet P., Tresser C.* Possible new strange attractors with spiral structure // *Commun. Math. Phys.* 1981. Vol. 79. P. 573.

19. *Farmer J.D.* Spectral broadening of period–doubling bifurcation sequences // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 47, № 5. P. 179.
20. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
21. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Kopeikin A.S., Kurths J., Strelkova G.I.* Peculiarities of the relaxation to an invariant probability measure of nonhyperbolic chaotic attractors in the presence of noise // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65, № 2. P. 036206.
22. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Kurtz J., Okrokvertskhov G.A., Strelkova G.I.* Correlation analysis of dynamical chaos // *Physica A.* 2003. Vol. 325. P. 199.
23. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Kurtz J., Okrokvertskhov G.A., Strelkova G.I.* Autocorrelation function and spectral linewidth of spiral chaos in a physical experiment // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 69. P. 036215.
24. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И.* Корреляционный анализ режимов детерминированного и зашумленного хаоса // *Радиотехника и электроника.* 2003. Т. 48, № 7. С. 824.
25. *Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И., Захарова А.С.* Статистические свойства мгновенной фазы зашумленных периодических и хаотических автоколебаний // *Радиотехника и электроника.* 2006. Т. 51, № 5. С. 580.
26. *Lorenzo M.N., Perez-Munuzuri V.* Influence of low intensity noise on assemblies of diffusively coupled chaotic cells // *Chaos.* 2001. Vol. 11, № 2. P. 371.
27. *Малахов А.Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
28. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
29. *Rössler O.E.* An equation for continuous chaos // *Phys. Lett.A.* 1976. Vol. 57. P. 397.
30. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Instantaneous phase method in studying chaotic and stochastic oscillations and its limitations // *Fluct. Noise Lett.* 2004. Vol. 4. P. L219.
31. *Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Взаимосвязь частотных и фазовых характеристик хаоса. Два критерия синхронизации // *Радиотехника и электроника.* 2004. Т. 49, № 1. С. 77.
32. *Малахов А.Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
33. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
34. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. Часть I: Случайные процессы. М.: Наука, 1976.
35. *Osipov G.V., Hu B., Zhou C. et al.* Three types of transitions to phase synchronization in coupled chaotic oscillations // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 91, № 2. P. 024101.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 04.04.2006
После доработки 11.05.2006*

INFLUENCE OF NOISE ON CHAOTIC SELF-SUSTAINED OSCILLATIONS IN THE REGIME OF SPIRAL ATTRACTOR

A.S. Zakharova, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko

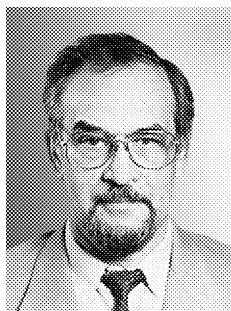
In the present paper we analyze the influence of white and colored noise on chaotic self-sustained oscillations in the regime of spiral attractor. We study characteristics of instantaneous phase and spectra of noisy chaotic oscillations. The phenomenon of chaos synchronization by external narrow-band noise has been estimated. Synchronization phenomena under the influence of narrow-band noise signals with equal spectra and different probability densities are compared.



Захарова Анна Сергеевна – студентка кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: теория динамического хаоса, статистические характеристики хаоса, стохастические процессы в нелинейных системах, влияние случайного воздействия на динамику нелинейных систем.



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время - профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии. E-mail: tanya@chaos.ssu.runnet.ru



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАЕН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999). E-mail: wadim@chaos.ssu.runet.ru