

О СВОЙСТВАХ СКЕЙЛИНГА ИДЕНТИЧНЫХ СВЯЗАННЫХ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ДВУМЯ ТИПАМИ СВЯЗИ БЕЗ ШУМА И ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ШУМА

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Ю.В. Седова

В работе обсуждается свойство скейлинга в системе идентичных связанных логистических отображений с двумя типами связи – диссипативным и инерционным. Представлен соответствующий ренормгрупповой анализ. Обсуждается свойство скейлинга в присутствии шума и даны необходимые иллюстрации в стиле «численного эксперимента».

Введение

Связанные системы с удвоениями периода являются одним из популярных и глубоко изученных объектов нелинейной динамики (см., например, монографии [1, 2] и цитированную там литературу). Определенным направлением исследований таких систем является изучение критических явлений в идентичных подсистемах у порога хаоса, то есть явлений, допускающих ренормгрупповое (РГ) описание по аналогии с известным анализом Фейгенбаума. Так, в [3] было предложено применить РГ-анализ к связанным идентичным системам и было введено представление о двух типах связи, инвариантных относительно РГ-преобразования. В работе [4] продолжено обсуждение РГ-анализа и дано описание элементарных объектов на плоскости параметров в терминах бифуркаций. Весьма объемный РГ-анализ представлен в [5], обсуждение устройства плоскости параметров синфазных движений можно найти и в [6, 7], квазипериодические режимы и бифуркация Неймарка – Сакера обсуждались в [8, 9], а вопросы, связанные с мультистабильностью – в [10].

Важнейшим выводом теории, основанной на ренормгрупповом анализе, является представление о скейлинге, то есть о самоподобном устройстве пространства параметров. Отметим, однако, что первые работы (например, [3]) в этом направлении были выполнены в середине 1980-х годов, и иллюстрации скейлинга были даны всего для нескольких бифуркационных точек и нескольких «уровней» удвоений. В настоящее время развитие компьютерной техники позволяет дать более «весомые» иллюстрации скейлинга, которые будут представлены в настоящей работе. Кроме

того, в начале 1980-х годов был выполнен ряд исследований с применением метода ренормгруппы по воздействию шума на классическую одиночную систему с удвоениями периода (см., например, [11-12]). Что касается связанных систем с шумом, то подобное исследование в настоящее время известно для своего рода альтернативной ситуации односторонней связи существенно неидентичных подсистем [13, 14]. Поэтому представляется важным обсудить соответствующие вопросы для случая идентичных связанных подсистем со взаимной связью. Нам кажется полезным в этом плане воспроизвести также простейший вариант РГ-анализа в одиночной системе с шумом, поскольку именно его «технология» и сопоставление с РГ-анализом идентичных связанных систем делает понятным свойство скейлинга в связанных системах с шумом. Последнее будет проверено в численных экспериментах в различных сечениях пространства параметров для разных типов связи между подсистемами.

1. Ренормгрупповой анализ двух связанных идентичных отображений и иллюстрации скейлинга

Рассмотрим систему двух связанных отображений вида

$$x_{n+1} = g(x_n) + \varepsilon\varphi(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = g(y_n) + \varepsilon\varphi(x_n, y_n),$$

где $g(x) = 1 - 1.5276x^2 + 0.1048x^4 + \dots$ – функция, представляющая собой неподвижную точку ренормпреобразования Фейгенбаума–Цвигановича $g(x) = \alpha g(g(x/\alpha))$; $\alpha = -2.5029\dots$ – константа Фейгенбаума; ε – малый параметр; $\varphi(x, y)$ – функция связи, удовлетворяющая условию $\varphi(x, x) = 0$. Вблизи диагонали на плоскости (x, y) имеем

$$u = (x + y)/2, \quad v = (x - y)/2, \quad |v| \ll 1, \quad \phi(u) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\varphi(x, y)}{y - x},$$

$$u_{n+1} = g(u_n), \quad v_{n+1} = g'(u_n)v_n + \varepsilon\phi(u_n)v_n.$$

Двукратная итерация приведенных уравнений дает

$$u_{n+2} = g(g(u_n)),$$

$$v_{n+2} = g'(g(u_n))g'(u_n) + \varepsilon[g'(g(u_n))\phi(u_n) + g'(u_n)\phi'(g(u_n))],$$

и после перенормировки масштаба $u \rightarrow u/\alpha, v \rightarrow v/\alpha$ получаем

$$u_{n+2} = \alpha g(g(u_n/\alpha)),$$

$$v_{n+2} = \{g'(g(u_n/\alpha))g'(u_n/\alpha) + \varepsilon[g'(g(u_n/\alpha))\phi(u_n/\alpha) + g'(u_n/\alpha)\phi'(g(u_n/\alpha))]\} v = \{g'(u_n) + \varepsilon\phi_1(u_n)\} v.$$

Это уравнения такого же вида, как исходные, но с новой функцией связи

$$\phi_1(u) = g'(g(u/\alpha))\phi(u/\alpha) + g'(u/\alpha)\phi'(g(u/\alpha)).$$

Рассмотрим теперь задачу на собственные значения

$$v\phi(u) = g'(g(u/\alpha))\phi(u/\alpha) + g'(u/\alpha)\phi'(g(u/\alpha)).$$

Численное решение выявляет две существенные собственные функции

$$\phi_1 = g'(u)/u + (\text{odd part}), \quad v_1 = \alpha = -2.502907\dots$$

$$\phi_2 = g'(u), \quad v_2 = 2.$$

Существование двух собственных функций означает, что универсальная модель должна содержать два типа связи. Первая отвечает инерционной связи, а вторая – диссипативной.

Модель с чисто диссипативной связью выглядит следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 1 - \lambda X_n^2 + \varepsilon_1 \lambda (X_n^2 - Y_n^2), \\ Y_{n+1} &= 1 - \lambda Y_n^2 + \varepsilon_1 \lambda (Y_n^2 - X_n^2). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь X, Y – динамические переменные; λ – параметр, отвечающий за удвоения; ε_1 – параметр связи.

Специальным выбором коэффициентов можно также реализовать модель с чисто инерционной связью [3]:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 1 - \lambda X_n^2 + \lambda \varepsilon_2 \cdot 0.088 \cdot (X_n^2 - Y_n^2) + \varepsilon_2 (Y_n - X_n), \\ Y_{n+1} &= 1 - \lambda Y_n^2 + \lambda \varepsilon_2 \cdot 0.088 \cdot (Y_n^2 - X_n^2) + \varepsilon_2 (X_n - Y_n). \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначения те же, ε_2 – параметр связи.

Кроме того, имеется собственное число линеаризованного уравнения ренорм-группы $\delta_F = 4.6692\dots$, фигурирующее в теории Фейгенбаума и связанное с отклонением от критической точки по управляющему параметру. Таким образом, перенормированный оператор эволюции за большое число шагов вблизи критической точки представляется в виде

$$\begin{aligned} u &\mapsto g(u) + C\delta^k, \\ v &\mapsto g'(u)v + C_1\alpha^k\phi_1(u)v + C_22^k\phi_2(u)v. \end{aligned}$$

Отсюда следует свойство **универсальности**: для любых двух слабо связанных систем с удвоениями периода оператор эволюции вблизи диагонали выражается универсальным соотношением и определяется тремя параметрами (C, C_1, C_2). Универсальность означает, что для получения полной картины явлений достаточно изучить модели (1), (2).

Кроме того, справедливо свойство **скейлинга**: в точке пространства параметров $(C\delta^{-1}, C_1\alpha^{-1}, C_22^{-1})$ реализуются динамические режимы такого же типа, как и в точке (C, C_1, C_2) , но с удвоенным временным масштабом, причем начальные условия для динамических переменных получают пересчетом на фактор $\alpha_F = -2.5029\dots$. В терминах систем (1), (2) свойство скейлинга формулируется так: на плоскости $(\varepsilon_{1,2}, \lambda)$ вблизи критической точки $(0, 1.401152\dots)$ при изменении параметра связи ε_1 в $\alpha_{\text{дис}} = 2$ раза, параметра связи ε_2 в $\alpha_{\text{ин}} = \alpha_F = -2.5029079\dots$ раз и изменении параметра λ , отвечающего за удвоения, в $\delta_F = 4.6692016\dots$ раз получается режим динамики, подобный исходному, но с удвоенным временным масштабом.

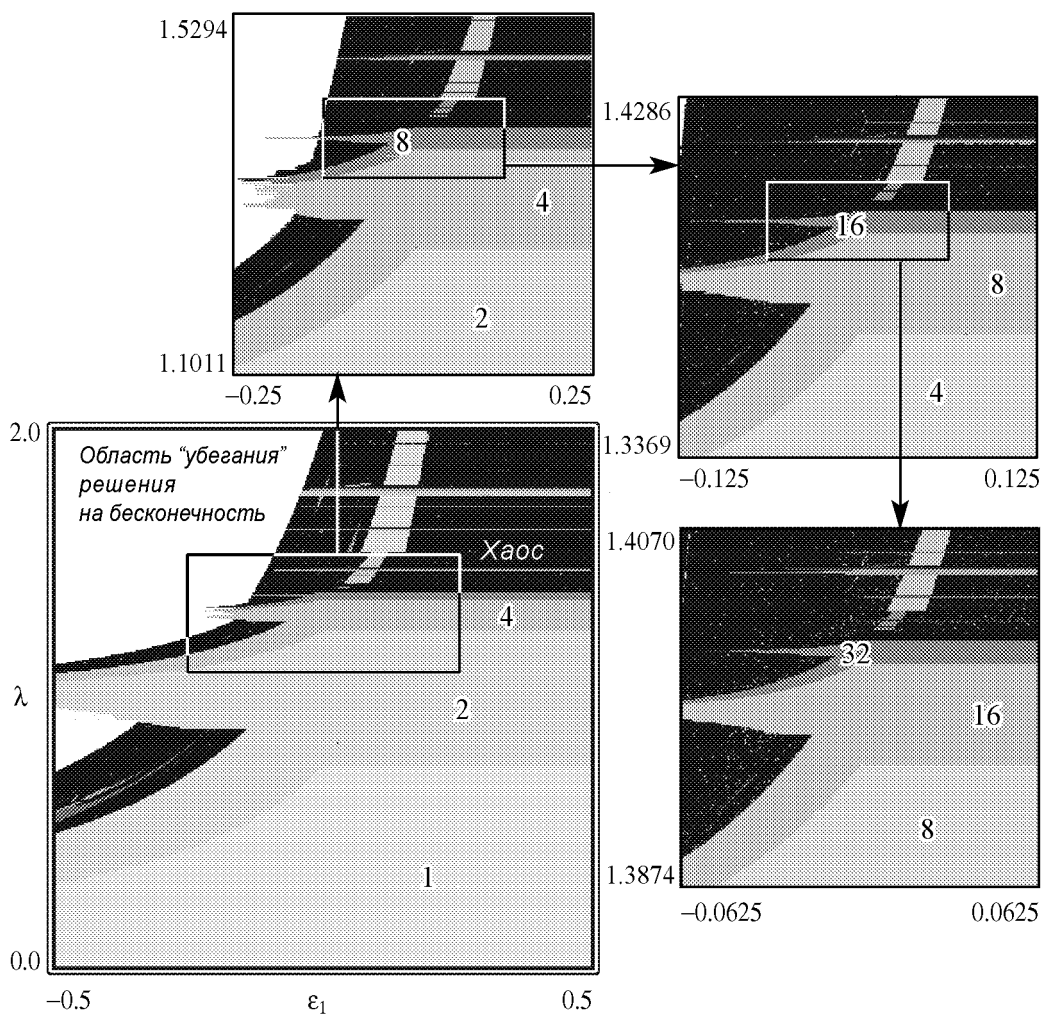


Рис. 1. Скейлинг на карте динамических режимов системы двух связанных логистических отображений с диссипативной связью (1). Цифрами обозначены области существования циклов основных периодов

Для иллюстрации скейлинга необходимо выбрать способ представления динамических режимов в пространстве параметров (см. комментарий во Введении). В отсутствие шума можно использовать метод карт динамических режимов, который состоит в том, что компьютер численно определяет период реализующегося режима в данной точке на плоскости параметров и окрашивает ее в определенный цвет¹ (подробнее см. в [15]).

Свойство скейлинга на языке карт режимов иллюстрируют рис. 1 и 2. Цифры на картах обозначают периоды основных циклов. Исходные значения параметров связи $\varepsilon_{1,2}$ меняются в пределах от -0.5 до 0.5 , а управляющий параметр λ естественно изменять в диапазоне от 0 до 2.0 . Для обоих случаев связи хорошо видна

¹При компьютерном построении карт динамических режимов было сделано от 2000 до 8000 «предварительных» итераций для выхода на аттрактор (в зависимости от рассматриваемого масштаба структуры), далее определялся период установившегося режима по элементам массива, число которых соответствовало выбранному числу цветов на карте.

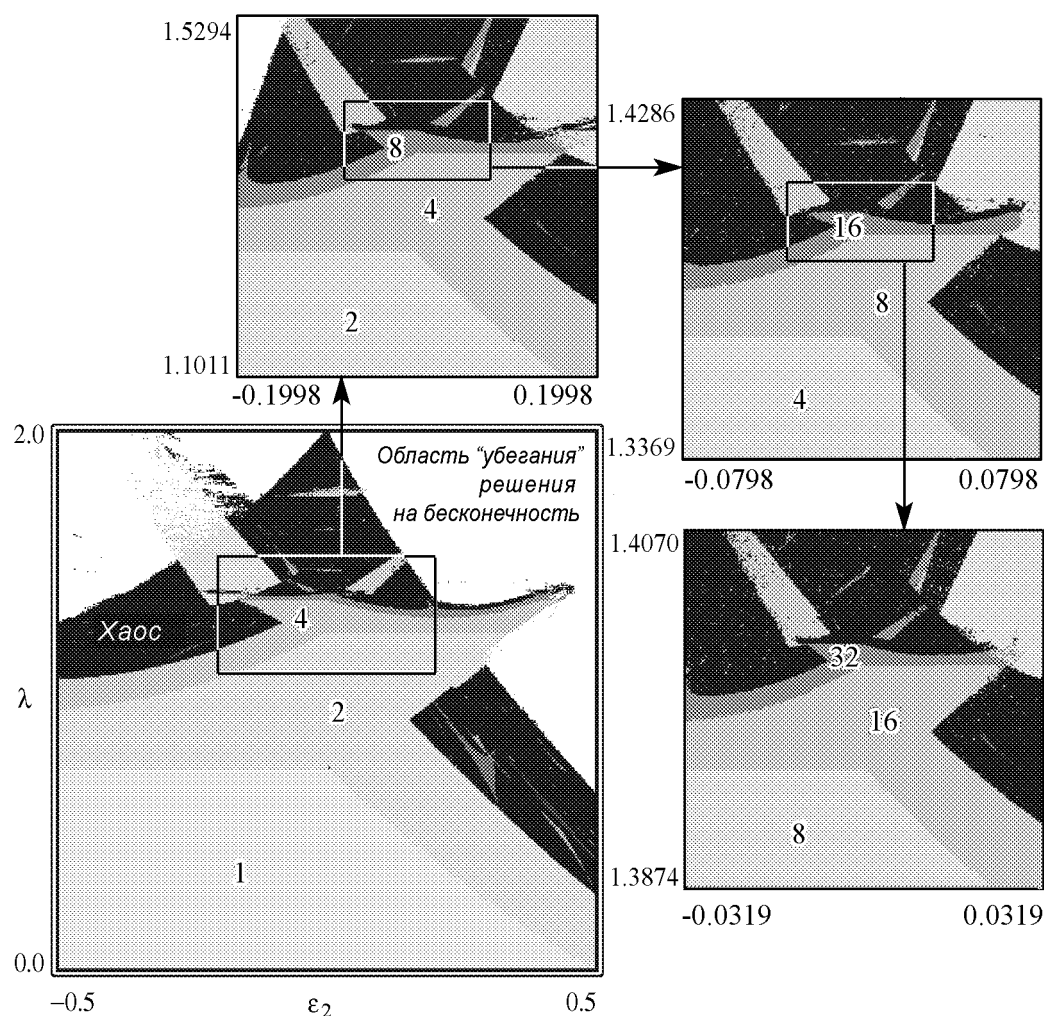


Рис. 2. Скейлинг на карте динамических режимов системы двух связанных логистических отображений с инерционной связью (2)

самоподобная, повторяющаяся структура на плоскости параметров, которая демонстрирует все большее сходство при приближении к критической точке. Заметим, что исследуемая система, вообще говоря, характеризуется мультистабильностью [10], и плоскость параметров можно мыслить как совокупность «листов» различных карт. Мы выбираем начальные условия для синфазного листа. Свойство скейлинга будет выполняться на каждом из листов (это, в определенной мере, тоже проявление универсальности, присущей системам, допускающим РГ-описание).

Еще одним способом представления динамических режимов на плоскости параметров служит метод карт ляпуновских показателей. В рамках этого метода на плоскости параметров элементы графического изображения окрашены тонами серого цвета в соответствии с полученным численно старшим показателем Ляпунова Λ в данной точке². В работе используется следующее правило для окрашивания

²Для определения значения показателя Ляпунова в данной точке длина итерированных последовательностей составляла от 5000 до 15000 элементов в зависимости от уровня иерархической структуры.

плоскости параметров: близкому к нулю значению Λ соответствует белый цвет; отрицательным значениям – оттенок тем более темный, чем больше по абсолютному значению Λ ; положительному ляпуновскому показателю соответствует черный цвет. Также белым цветом обозначены точки, в которых расходится итерационный процесс. Как оказывается, на таких картах на плоскости параметров можно визуализировать и анализировать образования, подобные наблюдаемым на картах режимов в динамических моделях без шума. С другой стороны, этот метод выявляет более тонкие и мелкие детали устройства плоскости параметров. Наконец, в отличие от метода карт динамических режимов, он может быть использован и для систем с шумом. (В системах с шумом нельзя выявить режимы с определенным периодом, и карты типа рис. 1, 2 построить невозможно.)

Скейлинг на картах ляпуновского показателя иллюстрируют рис. 3, 4 – масштаб по осям координат будет изменяться так же, как и в случае карт динамических режимов. Однако при построении ляпуновской карты на каждом новом уровне удво-

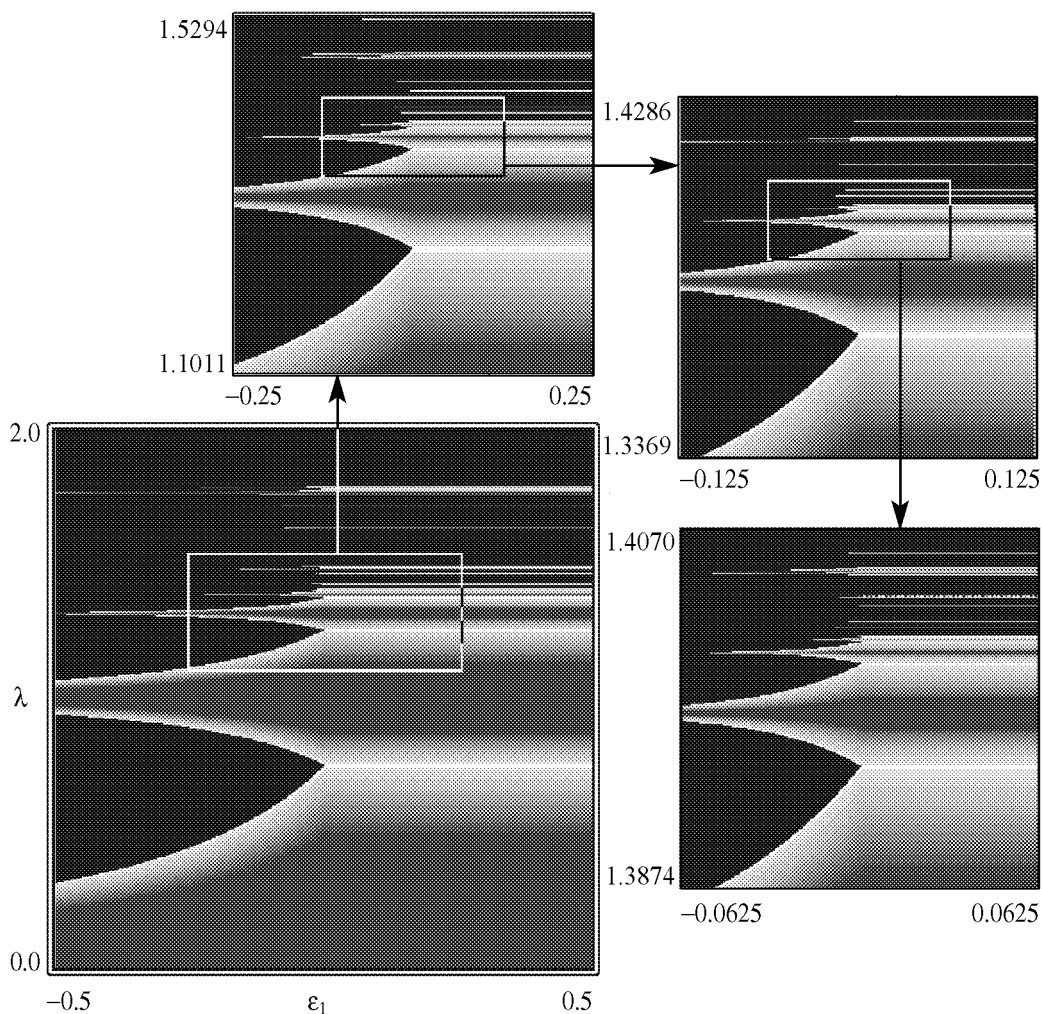


Рис. 3. Скейлинг на карте ляпуновского показателя системы двух связанных логистических отображений с диссипативной связью (1)

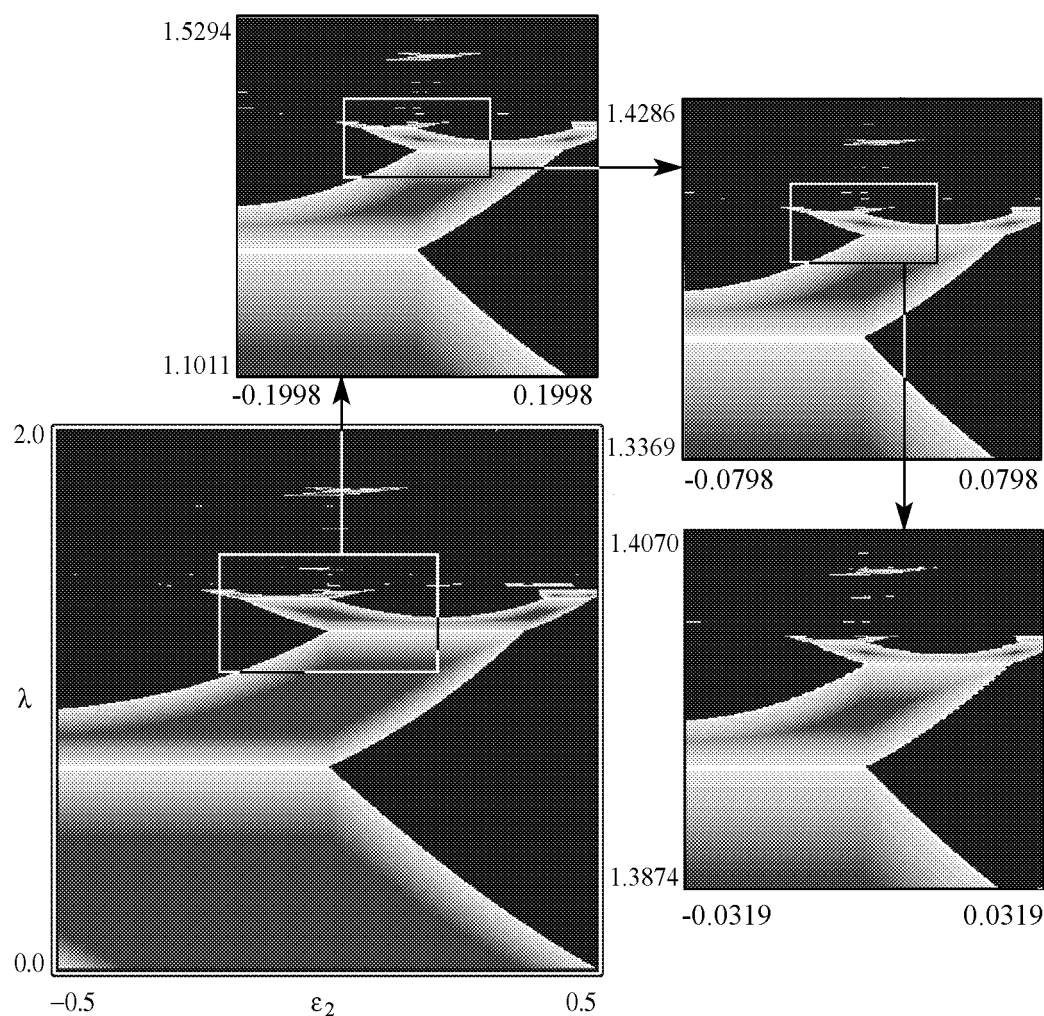


Рис. 4. Скейлинг на карте ляпуновского показателя системы двух связанных логистических отображений с инерционной связью (2). В силу того, что константа скейлинга $\alpha_{\text{ин}}$ отрицательна, для наблюдения самоподобия при переходе к следующему уровню иерархии увеличенный фрагмент необходимо зеркально отражать слева направо

ений периода значение ляпуновского показателя уменьшается в 2 раза, то есть соответственным образом необходимо менять градацию цветов. Сопоставление рис. 1, 2 и рис. 3, 4 позволяет понять, как выглядят характерные режимы при разных способах их представления.

2. Ренормгрупповой анализ в системе Фейгенбаума с шумом

Метод РГ для систем без шума стал классическим и вошел во многие учебники [15, 16]. Для систем с шумом, однако, он известен в гораздо меньшей степени. Более того, известны его очень сложные варианты (например, с использованием метода прореживания и интегралов по траекториям [16]). Поэтому мы кратко изложим основные принципы РГ-анализа в одиночной системе с удвоениями периода с шу-

мом, что также позволит нам сделать далее и определенные выводы относительно связанных систем. Начнем с того, что рассмотрим отображение

$$x_{n+1} = g_0(x_n) + \gamma U_0(x_n) \xi_n,$$

где $g_0(x) = 1 - \lambda_c x^2$, $\lambda_c = 1.401155189092\dots$; $U_0(x) \equiv 1$; γ – параметр, характеризующий интенсивность шума; ξ_n – последовательность статистически независимых случайных величин с нулевым средним и фиксированным среднеквадратичным значением σ .

Применим это отображение дважды. Полагая параметр интенсивности шума γ малым, в первом порядке малости по этому параметру получаем

$$x_{n+2} = g_0(g_0(x_n)) + \gamma [g'_0(g_0(x_n)) U_0(x_n) \xi_n + U_0(g_0(x_n)) \xi_{n+1}].$$

Фигурирующее в квадратных скобках выражение будем интерпретировать как новую случайную величину, обозначив ее $U_1(x) \xi'_n$. При этом множитель $U_1(x)$ подберем так, чтобы величина ξ'_n обладала таким же среднеквадратичным отклонением σ , как и ξ_n .

Поскольку ξ_n и ξ_{n+1} статистически независимы, среднеквадратичные значения обоих членов суммы просто складываются. Отсюда следует, что

$$U_1^2(x) = \alpha^2 [(g'_0(g_0(x)))^2 U_0^2(x) + U_0^2(g_0(x))].$$

Итак, уравнение для двукратной итерации мы свели к такому же виду, как исходное:

$$x_{n+2} = g_1(x_n) + \gamma U_1(x_n) \xi_n,$$

но с новыми функциями

$$g_1(x) = \alpha g_0(g_0(x/\alpha)), \quad U_1(x) = \sqrt{\alpha^2 [(g'_0(g_0(x)))^2 U_0^2(x) + U_0^2(g_0(x))]}.$$

Описанную процедуру можно применить многократно, что дает последовательность функций g_k , U_k , удовлетворяющих цепочке рекуррентных функциональных уравнений

$$g_{k+1}(x) = \alpha g_k(g_k(x/\alpha)), \quad U_{k+1}(x) = \sqrt{\alpha^2 [(g'_k(g_k(x)))^2 U_k^2(x) + U_k^2(g_k(x))]}.$$

Согласно теории Фейгенбаума, последовательность g_k сходится к пределу – функции g , представляющей собой неподвижную точку функционального уравнения Фейгенбаума – Цвитановича

$$g(x) = \alpha g(g(x/\alpha)),$$

так что, рассматривая поведение решения второго уравнения при больших k , в него можно подставить g вместо g_k . Если искать решение в виде

$$U_k(x) = \mu^k \sqrt{\Phi(x)},$$

то приходим к задаче на собственные функции и собственные значения

$$\mu^2 \Phi(x) = \alpha^2 \left[(g'(g(x)))^2 \Phi(x) + \Phi(g(x)) \right].$$

Ее можно решить численно, если известна функция g и константа α . Решение с наибольшим собственным числом отвечает $\mu = 6.619036513\dots$ и собственной функции, показанной на рис. 5.

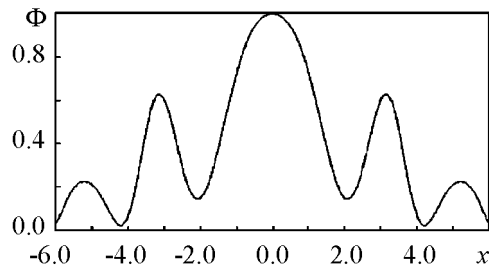


Рис. 5. График собственной функции $\Phi(x)$

Таким образом, в одиночной системе с удвоениями периода с шумом скейлинг тоже возможен, но при этом появляется новый универсальный фактор $\mu = 6.619036513\dots$ («константа шума» или иначе «константа перенормировки интенсивности шума»), на который следует уменьшать амплитуду шума при переходе с одного уровня удвоений на другой.

3. Скейлинг в идентичных связанных системах с удвоениями периода

Перейдем теперь к анализу связанных идентичных систем с шумом с удвоениями периода. Прежде всего, возникают вопросы

- о выборе моделей, которые будут достаточно универсальными,
- о величине константы, ответственной за перенормировку шума.

Если обратиться к представленному выше РГ-анализу в идентичных связанных системах без шума и в одиночных системах с шумом, то можно обратить внимание, что методология и того и другого имеет общую идею – а именно, рассматривается линейное возмущение к оператору, отвечающему удвоениям в одиночной системе. Это позволяет выдвинуть гипотезу о том, что эти факторы в определенной мере независимы, а значит, универсальная модель, для которой будет наблюдаться скейлинг, может быть выбрана в форме (1), (2) с добавленным аддитивным образом шумом. При иллюстрациях скейлинга следует для перенормировки амплитуды шума использовать константу $\mu = 6.619036513\dots$. Проверим эти утверждения.

Введем в отображениях (1) и (2) в каждую подсистему случайные, статистически независимые последовательности ξ_n и η_n , моделирующие воздействие флуктуаций, с одинаковой интенсивностью шума γ . В результате получим такие системы двух связанных квадратичных отображений с диссипативной

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 1 - \lambda X_n^2 + \varepsilon_1 \lambda (X_n^2 - Y_n^2) + \gamma \xi_n, \\ Y_{n+1} &= 1 - \lambda Y_n^2 + \varepsilon_1 \lambda (Y_n^2 - X_n^2) + \gamma \eta_n, \end{aligned} \quad (3)$$

и инерционной связью

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 1 - \lambda X_n^2 + \lambda \varepsilon_2 \cdot 0.088 \cdot (X_n^2 - Y_n^2) + \varepsilon_2 (Y_n - X_n) + \gamma \xi_n, \\ Y_{n+1} &= 1 - \lambda Y_n^2 + \lambda \varepsilon_2 \cdot 0.088 \cdot (Y_n^2 - X_n^2) + \varepsilon_2 (X_n - Y_n) + \gamma \eta_n, \end{aligned} \quad (4)$$

в присутствии шума.

Если амплитуда шума мала, и исследуется поведение на больших масштабах времени, то конкретная форма распределения вероятности для ξ_n и η_n будет несущественна, и поведение системы с шумом будет иметь универсальный характер (этот факт подтвержден и для других критических ситуаций, допускающих анализ в терминах метода РГ, см. [17, 18]). Что касается численных исследований, проведенных в данной работе, то ξ_n и η_n определялись как случайные последовательности, равномерно распределенные в интервале $[-0.5, 0.5]$.

При помощи компьютерного моделирования было показано, что фактор μ действительно позволяет получить точные иллюстрации скейлинга в различных сечениях пространства параметров «интенсивность шума – параметр удвоений – параметр связи» на достаточно глубоких уровнях иерархической структуры. Например, для случая инерционной связи на плоскости (ε_2, λ) хорошо видно, что с приближением к критической точке последовательность рисунков все с большей точностью повторяет свою структуру (рис. 6).

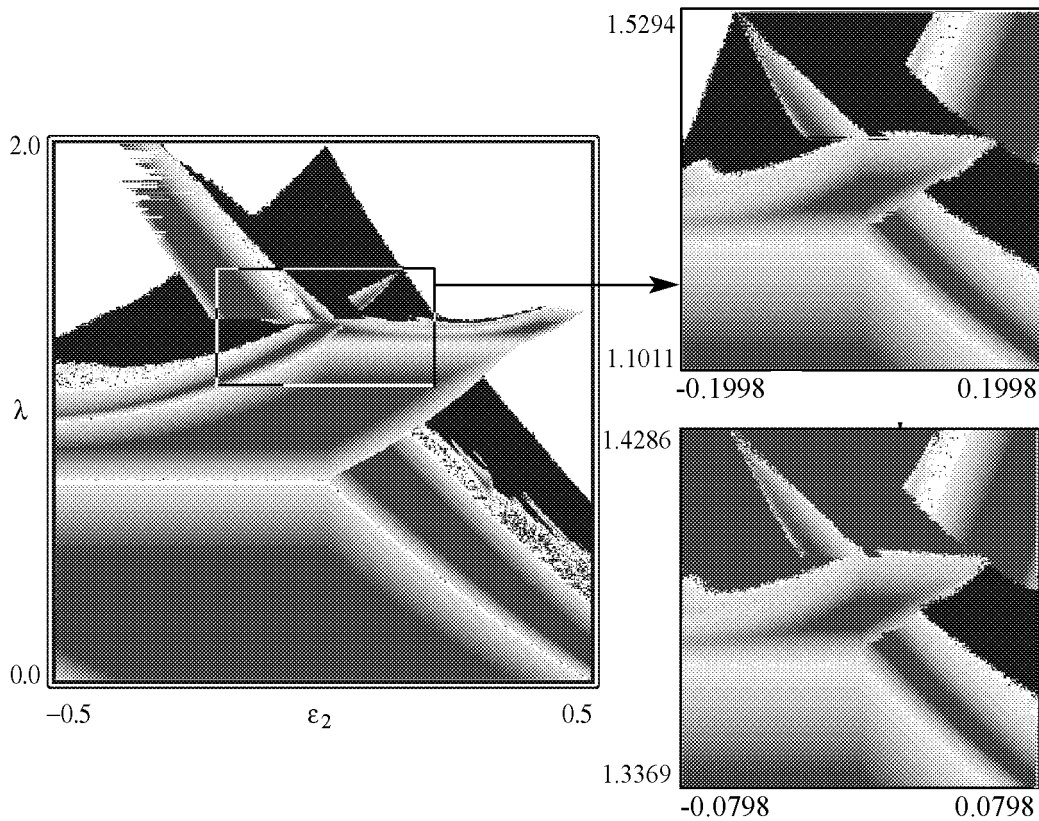


Рис. 6. Иллюстрация скейлинга для системы связанных квадратичных отображений с инерционной связью (4) в присутствии шума с амплитудой $\varepsilon = 0.01$. При переходе от одного фрагмента к другому интенсивность шума уменьшалась в μ раз

В случае диссипативной связи карта ляпуновского показателя на плоскости параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon)$ отображения (3) при фиксированном критическом значении параметра $\lambda = \lambda_c = 1.4011552\dots$ показана на рис. 7. На исходном фрагменте значения параметра связи ε_1 находятся в диапазоне от 0 до 0.1, а значения интенсивности шума ε – в диапазоне от 0 до 0.5. Для наблюдения свойства скейлинга необходимо пересчитывать масштаб по оси ε_1 в $\alpha_{\text{дис}}$ раз относительно $\varepsilon_1 = 0$, масштаб по оси ε – в μ раз относительно $\varepsilon = 0$ и пересчитывать в 2 раза значение ляпуновского показателя, изменяя при этом цветовую гамму.

Рис. 8 представляет собой иллюстрацию скейлинга на карте ляпуновского показателя в плоскости (ε, λ) отображения (3) для значения параметра диссипативной связи $\varepsilon_1 = 0.1$. Начальные значения для амплитуды шума ε меняются в пределах

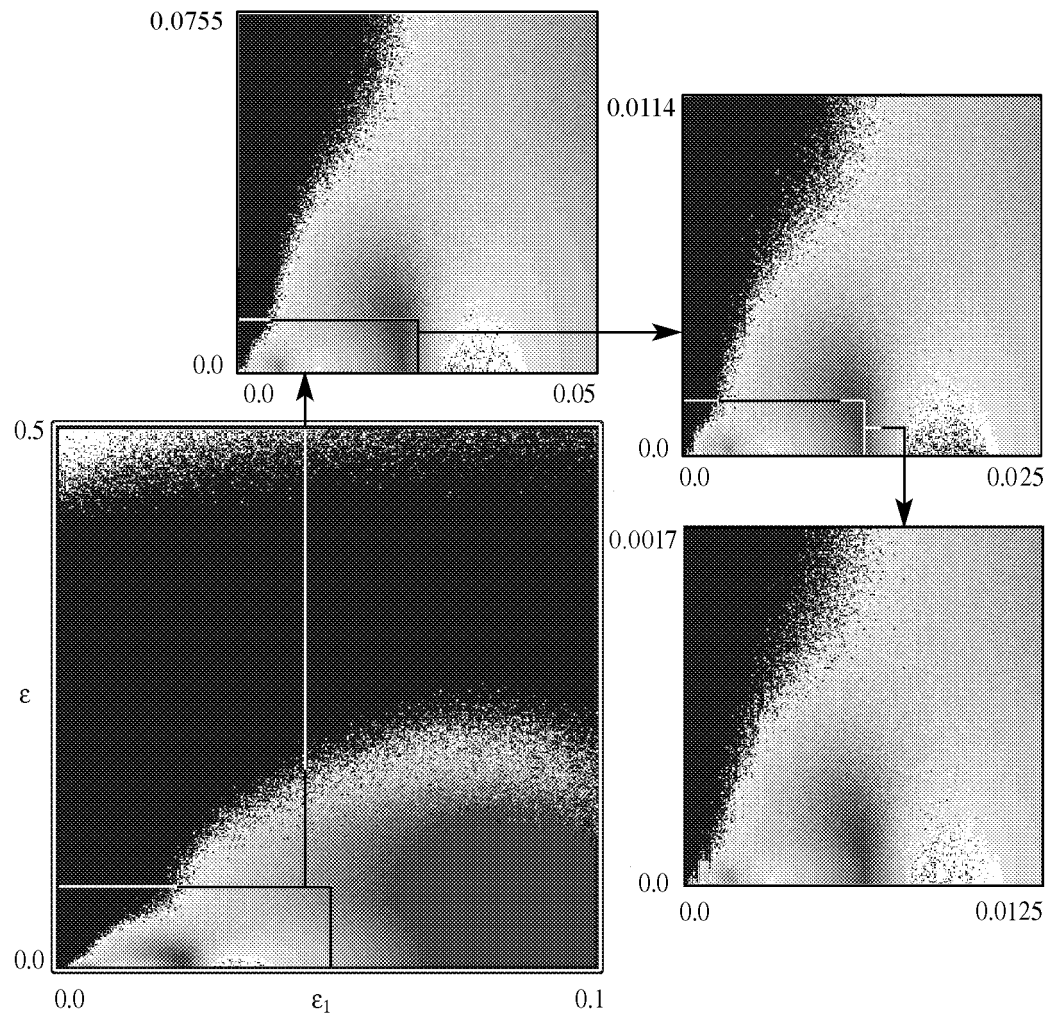


Рис. 7. Скейлинг на карте ляпуновского показателя для системы двух связанных квадратичных отображений с диссипативной связью (3) на плоскости «параметр связи – амплитуда шума». Параметр удвоенный λ фиксирован: $\lambda = \lambda_c = 1.4011552\dots$

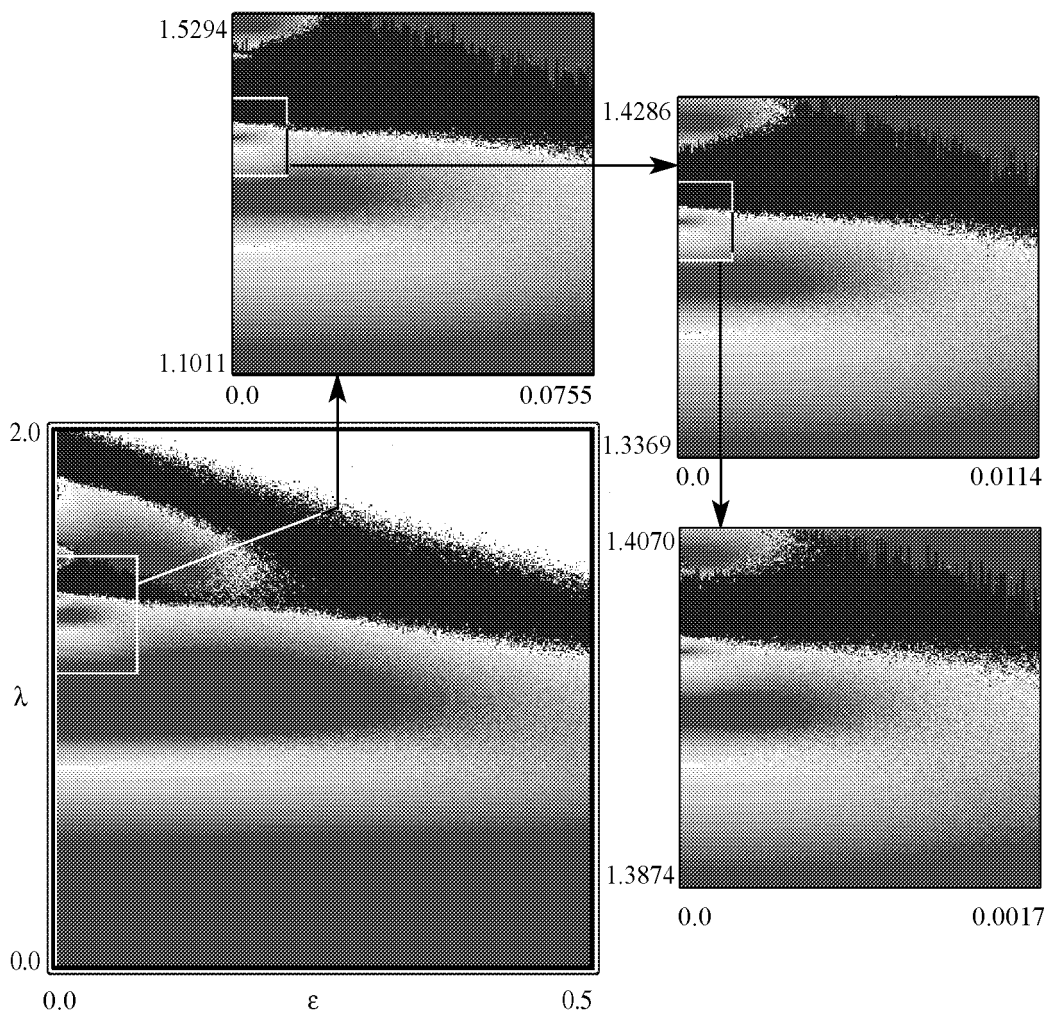


Рис. 8. Скейлинг на карте ляпуновского показателя для системы двух связанных квадратичных отображений с диссипативной связью (3) на плоскости «амплитуда шума – параметр удвоений». Параметр связи фиксирован: $\varepsilon_1 = 0.1$

от 0 до 0.5, а значения параметра удвоений λ – в пределах от 0 до 2.0. Для реализации скейлинга надо изменить отклонение по параметру ε в μ раз относительно $\varepsilon = 0$, отклонение по параметру λ – в δ_F раз относительно $\lambda = \lambda_c$. Также при переходе к новому уровню скейлинга надо уменьшать ε_1 в $\alpha_{\text{Дис}}$ раз и изменять правило градации цветов.

Оба рисунка, 7 и 8, для случая диссипативной связи с высокой точностью иллюстрируют самоподобие фрагментов на все более мелких масштабах, что подтверждает наше утверждение о том, что фактор μ и в случае связанных квадратичных отображений отвечает за перенормировку амплитуды шума.

В случае инерционной связи скейлинг на карте ляпуновского показателя на плоскости параметров $(\varepsilon_2, \varepsilon)$ для отображения (4) при фиксированном критическом значении параметра $\lambda = \lambda_c$ показан на рис. 9. На большом исходном фрагменте

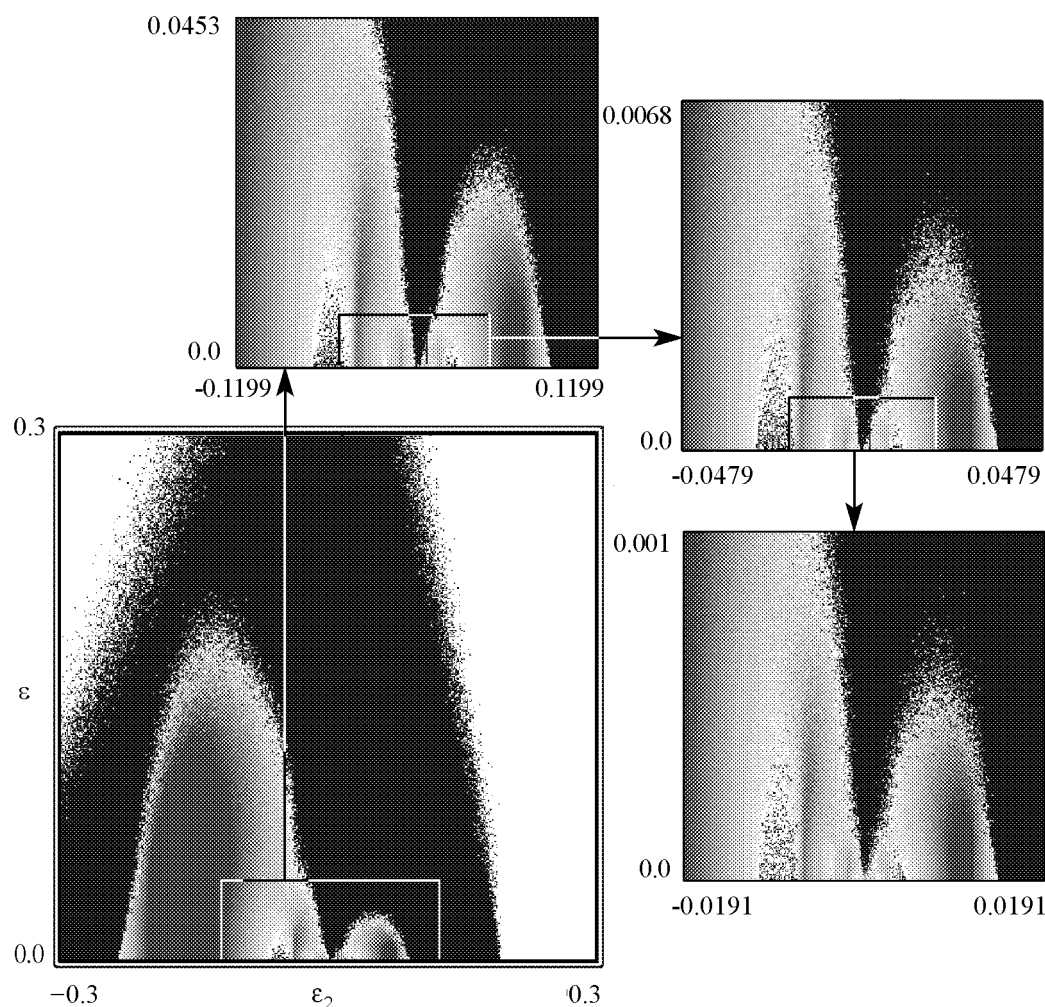


Рис. 9. Скейлинг на карте ляпуновского показателя для системы двух связанных логистических отображений с инерционной связью (4) на плоскости «параметр связи – амплитуда шума». Параметр удвоений λ фиксирован: $\lambda = \lambda_c = 1.4011552\dots$

значения параметра связи ε_2 находятся в диапазоне от -0.3 до 0.3 , а значения интенсивности шума ε – в диапазоне от 0 до 0.3 . Скейлинг реализуется при пересчете масштаба по оси ε_2 в $\alpha_{\text{ин}}$ раз относительно $\varepsilon_2 = 0$, а по оси ε – в μ раз относительно $\varepsilon = 0$. Рис. 10 представляет собой иллюстрацию скейлинга на карте ляпуновского показателя в плоскости (ε, λ) отображения (4) для значения параметра инерционной связи $\varepsilon_2 = 0.01$. Начальные значения для амплитуды шума ε взяты в области от 0 до 0.5 , а значения параметра удвоений λ – в области от 0 до 2.0 . Для визуального наблюдения скейлинга надо изменять отклонение по параметру ε в μ раз относительно $\varepsilon = 0$, а отклонение по параметру λ – в δ_F раз относительно $\lambda = \lambda_c$. Также при переходе к новому уровню скейлинга надо уменьшать ε_2 в $\alpha_{\text{ин}}$ раз.

Рис. 9 и 10 для случая инерционной связи свидетельствуют о большой степени соответствия между получающимися в результате изменения масштаба фрагмента-

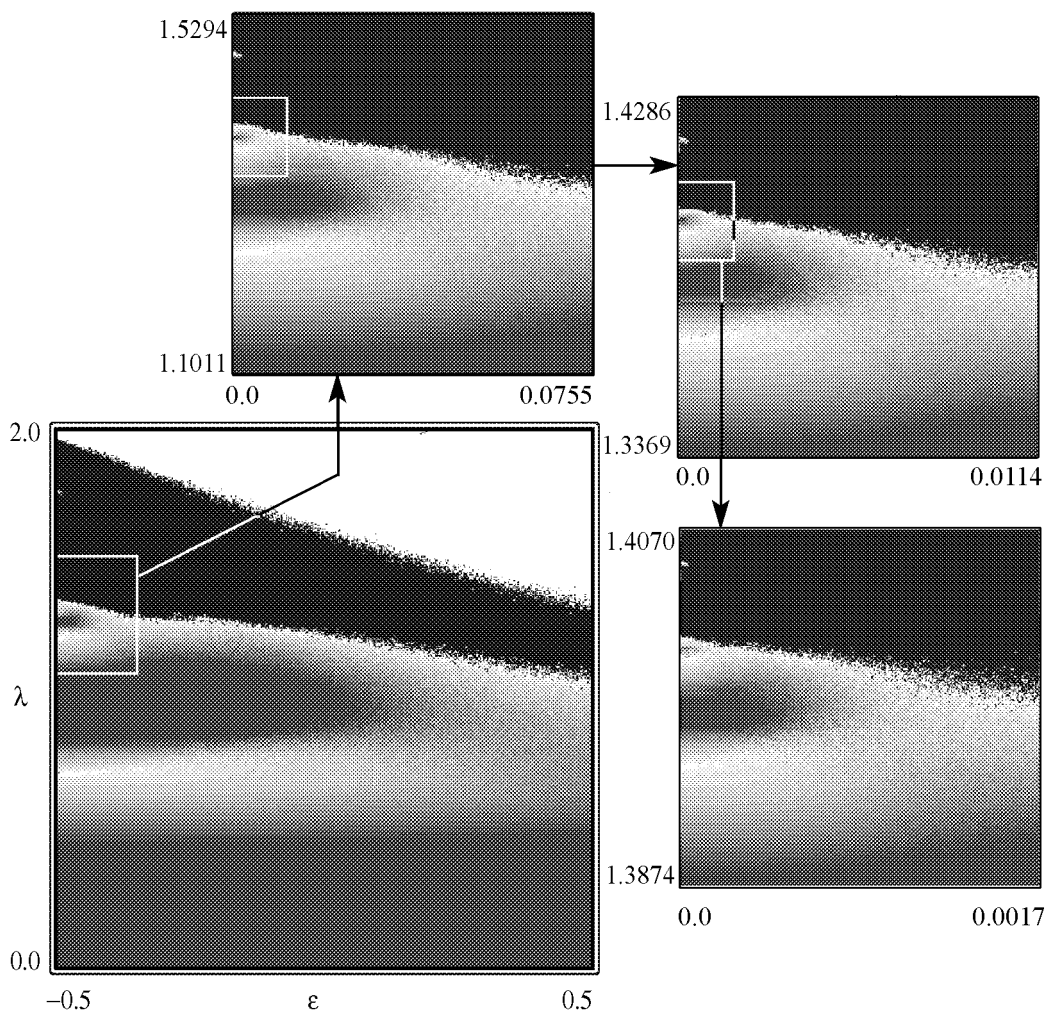


Рис. 10. Скейлинг на карте ляпуновского показателя для системы двух связанных логистических отображений с инерционной связью (4) на плоскости «амплитуда шума – параметр удвоений». Параметр связи фиксирован: $\varepsilon_2 = 0.01$

ми, что является подтверждением выполнения универсального свойства скейлинга в окрестности критических значений параметров.

Заключение

Таким образом, связанные идентичные логистические отображения представляют собой интересный пример двумерной нелинейной системы, допускающей ренормгрупповое описание. Современные компьютерные методы позволяют дать для нее наглядные иллюстрации скейлинга (самоподобия) на картах динамических режимов и ляпуновских показателей. Использование метода карт ляпуновских показателей позволяет продемонстрировать и скейлинг в системе с шумом с разными типами связи – инерционным и диссипативным. Скейлинг имеет место в различных

сечениях пространства управляющих параметров и, в определенной мере, не зависит от типа шума. Константой перенормировки интенсивности шума оказывается универсальная постоянная $\mu = 6.61903\dots$, вычисленная ранее для одиночной системы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-ННАО (грант № 04-02-04011), Фонда содействия отечественной науке, аналитической ведомственной программы Минобрнауки РФ и CRDF «Развитие научного потенциала высшей школы» (CRDF BRHE REC-006 SR-006-X1/BF5M06 Y3-P-06-07) и гранта Президента РФ (МК-4162.2006.2).

Библиографический список

1. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем // Изд-во Саратов. университета. 1999. 367 с.
2. Mosekilde E., Maistrenko Y., Postnov D. Chaotic synchronization. Applications to living systems // World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A. 2002. Vol. 42. 430 p.
3. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Известия вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 8. С.991.
4. Kook H, Ling F.H., Schmidt G. Universal behavior of coupled nonlinear systems // Phys. Rev. A. 1991. Vol.43, № 6. P. 2700.
5. Kim S.-Y., Kook H. Period doubling in coupled maps // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48, № 2. P. 785.
6. Schult R.L., Creamer D.B., Henyey F.S., Wright J.A. Symmetric and nonsymmetric coupled logistic maps // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 35, № 7. P. 3115.
7. Kim S.-Y., Kook H. Critical behavior in coupled nonlinear systems // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 46, № 8. P. 4467.
8. Reick C., Mosekilde E. Emergence of quasiperiodicity in symmetrically coupled, identical period-doubling systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52, № 2. P. 1418.
9. Rech P.C., Beims M.W., Gallas J.A.C. Neimark–Sacker bifurcations in linearly coupled quadratic maps // arXiv:nlin.CD/0408010. Vol. 1, № 5. Aug 2004.
10. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнев Е.П. Мультистабильные состояния диссипативно связанных фейгенбаумовских систем // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 15, № 3. С. 60.
11. Crutchfield J.P., Nauenberg M., Rudnik J. Scaling for external noise at the onset of chaos // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, № 14. P. 933.
12. Shraiman B., Wayne C.E., Martin P.C. Scaling theory for noisy period-doubling transitions to chaos // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, № 14. P. 935.
13. Kapustina J.V., Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E. Scaling properties of bicritical dynamics in unidirectionally coupled period-doubling systems in presence of noise // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, № 6. 066207 (12 pages).
14. Гуляев Ю.В., Капустина Ю.В., Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. О свойствах скейлинга при воздействии одной системы с удвоениями периода на другую при наличии шума // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27, Вып. 22. С. 58.

15. Кузнецов С.П. Динамический хаос // М.: Физматлит. 2006. 356 с.
16. Шустер Г. Детерминированный хаос // М.: Мир. 1988. 240 с.
17. Fiel D. Scaling for period-doubling sequences with correlated noise // J. Phys. A: Math. Gen. 1987. Vol.20. P.3209-3217.
18. Choi S.-Y., Lee E.K. Scaling behavior at the onset of chaos in the logistic map driven by colored noise // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 205. P. 173.

Саратовский филиал ИРЭ РАН	Поступила в редакцию	19.04.2006
Саратовский государственный университет	После доработки	15.07.2006

**ABOUT SCALING PROPERTIES OF IDENTICAL COUPLED
LOGISTIC MAPS WITH TWO TYPES OF COUPLING WITHOUT
NOISE AND UNDER INFLUENCE OF EXTERNAL NOISE**

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, J.V. Sedova

In this paper the influence of noise in system of identical coupled logistic maps with two types of coupling – dissipative and inertial – is discussed. The corresponding renormalization group analysis is presented. Scaling property in the presence of noise is considered, and necessary illustrations in «numerical experiment style» are given.



Седова Юлия Викторовна – родилась в 1979 году. Окончила Саратовский государственный университет (2001). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2004), научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Научные интересы – влияние шума на динамические системы, дискретные отображения, связанные системы, динамический хаос. Автор 10 статей в отечественной и зарубежной печати.