Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 5, 2006 УДК 517.9

# АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И БИФУРКАЦИИ ОТ НИХ В ЗАДАЧЕ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ СЛАБОСВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

*Д.А. Куликов*

В работе рассмотрена задача о взаимодействии двух слабосвязанных идентичных осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга. Для ее решения применен метод нормальных форм Пуанкаре – Дюлака. Найдены аналитически все автомодельные периодические решения. Изучен вопрос о локальных бифуркациях от данных периодических решений.

## Введение

В работе основным объектом исследования является система двух комплексных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= d\exp(-i\alpha)(\xi_2-\xi_1)+\xi_1-(1+i\omega^2)\xi_1|\xi_1|^2, \\ \dot{\xi}_2 &= d\exp(-i\alpha)(\xi_1-\xi_2)+\xi_2-(1+i\omega^2)\xi_2|\xi_2|^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Данная система, как хорошо известно, является простейшим конечномерным аналогом классического уравнения Гинзбурга – Ландау

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u-(1+i\omega^2)u|u|^2+d_0\exp(-i\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u = u(t,x)$, $x \in [0;l]$, $\omega$, $d_0$ – положительные действительные постоянные, $\alpha \in [0;\ \pi/2]$. Система из двух комплексных уравнений (1) получается путем простейшей его разностной аппроксимации, если это уравнение рассматривается вместе с периодическими краевыми условиями или условиями непроницаемости.

Другой источник возникновения системы (1) – это задача об изучении динамики двух слабосвязанных полностью идентичных осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга при наличии как диссипативной (диффузионнной) связи, так и инерционной связи. Достаточно близкая ситуация реализуется, если связь является и прямой. Подчеркнем, что сведение задачи о динамике двух связанных осцилляторов к исследованию системы (1) может быть строго обосновано лишь при условии их слабой связи. В работе для этого использован метод нормальных форм. При этом укороченная нормальная форма, естественно, совпадает с системой укороченных уравнений, полученной при использовании метода усреднения Крылова – Боголюбова или метода медленно меняющихся амплитуд.

Обе задачи, исследование системы (1) и исследование динамики двух связанных генераторов, – две широко известные задачи, которым посвящено большое число глубоких и разноплановых исследований [1, с. 158; 2; 3, гл. 4; 4–7]. Более подробный библиографический обзор можно найти в упомянутых выше монографиях и статьях.

Во многих работах рассмотрены автомодельные циклы

$$\xi_1(t) = \rho_1 \exp(i\sigma t),\ \xi_2(t) = \rho_2 \exp(i\sigma t),$$

для которых $\rho_1 = \rho_2$ (полностью синхронизированный – цикл Андронова – Хопфа) и $\rho_2 = -\rho_1$ (противофазный цикл или асинхронный, согласно терминологии работы [5]). Понятно, что должны быть и другие автомодельные циклы, отличные от двух выше упомянутых. Обычно их пытались найти численно. В статье [4, §3] была предпринята попытка найти асимметричные циклы аналитически, но был рассмотрен лишь частный случай, когда отсутствует инерционная связь, то есть $\alpha = 0$ в уравнении (1). Легко заметить, что случай $\alpha \neq 0$ более сложен и более содержателен, так как лишь при $\alpha \neq 0$ синхронный цикл может терять устойчивость.

Следует отметить, что полученные формулы для автомодельных циклов не являются самоцелью, а позволяют исследовать структуру их окрестности, рассмотреть локальные бифуркации.

## 1. Нормальная форма в задаче о динамике двух слабосвязанных осцилляторов.

Рассмотрим систему двух слабосвязанных осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга

$$\begin{gathered}\ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + x_1 + x_1^2\dot{x}_1 + bx_1^3 + \varepsilon\gamma(x_1 - x_2) + \varepsilon\beta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0,\\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + x_2 + x_2^2\dot{x}_2 + bx_2^3 + \varepsilon\gamma(x_2 - x_1) + \varepsilon\beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $b,\ \gamma$ – произвольные действительные постоянные, $\beta > 0$, а $\varepsilon \in\ (0;\varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0$ – достаточно малая положительная постоянная. Отметим, что при $\gamma = \beta = 0$ мы имеем два полностью идентичных осциллятора ван дер Поля – Дуффинга. Каждый из них, как хорошо известно, генерирует устойчивый предельный цикл, амплитуда которого пропорциональна $\sqrt{\varepsilon}$. Последние два слагаемых в каждом из уравнений (2) отвечают за наличие связи между осцилляторами. Знак постоянной $\beta$ ($\beta > 0$) соответствует наличию диссипативной связи. Предпоследнее слагаемое в первом и втором уравнениях системы (2) отражает наличие инерционной связи. Множитель $\varepsilon$ подчеркивает тот факт, что оба вида связи следует считать в данной постановке слабыми.

Хорошо известно (см., например, [3,8–11]), что в нашей постановке за динамику решений системы уравнений (2) отвечает система двух комплексных уравнений первого порядка – нормальная форма Пуанкаре – Дюлака. Опишем основные этапы ее построения в форме приближенной к методу медленно меняющихся амплитуд.

Обозначим $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и перепишем систему (2) в векторной форме

$$\ddot{x} - 2\varepsilon\dot{x} + x + f(x,\dot{x}) + bg(x) + \varepsilon\gamma Ax + \varepsilon\beta A\dot{x} = 0, \tag{3}$$

$$f(x,\dot{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2\ \dot{x}_1 \\ x_2^2\ \dot{x}_2 \end{pmatrix},\quad g(x) = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Линеаризуем (3) при $\varepsilon = 0$ и получим линейную систему

$$\ddot{x} + x = 0. \tag{4}$$

Система (4) имеет четыре линейно независимых периодических решения

$$E_1(t) = \exp(it)e_1,\ E_2(t) = \exp(-it)e_1,$$

$$E_3(t) = \exp(it)e_2,\ E_4(t) = \exp(-it)e_2,\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Будем искать решения системы (3) в виде

$$\begin{gathered} x(t,s) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\Big[(\xi_1(s)\exp(it) + \overline{\xi}_1(s)\exp(-it))e_1 + \\ +(\xi_2(s)\exp(it) + \overline{\xi}_2(s)\exp(-it))e_2\Big] + \varepsilon^{\frac{3}{2}}y(t,s) + \ldots, \end{gathered} \tag{5}$$

где $s = \varepsilon t$; точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по $\varepsilon$; $\xi_1(s),\ \xi_2(s)$ – скалярные комплекснозначные функции, черта означает операцию комплексного сопряжения; вектор–функция $y(t,s)$ по переменной $t$ имеет период $2\pi$. Подставив (5) в (3), приравняем слагаемые при одинаковых степенях $\varepsilon$. На втором шаге этого алгоритма (то есть при $\varepsilon^{3/2}$) получим следующее неоднородное уравнение в $R^2$ для вектор–функции $y(t,s)$ :

$$\begin{gathered} \ddot{y} + y = -2i\Big[(\xi_1'\exp(it) - \overline{\xi}_1'\exp(-it))e_1 + (\xi_2'\exp(it) - \overline{\xi}_2'\exp(-it))e_2\Big] + \\ + 2i\Big[(\xi_1\exp(it) - \overline{\xi}_1\exp(-it))e_1 + (\xi_2\exp(it) - \overline{\xi}_2\exp(-it))e_2\Big] - \\ - iF(t,\xi_1,\xi_2,\overline{\xi}_1,\overline{\xi}_2) - bG(t,\xi_1,\xi_2,\overline{\xi}_1,\overline{\xi}_2) - (\gamma + i\beta)H(t,\xi_1,\xi_2). \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь

$$F(t,\xi_1,\xi_2,\overline{\xi}_1,\overline{\xi}_2) = \begin{pmatrix} \xi_1^3 \\ \xi_2^3 \end{pmatrix}\exp(3it) + \begin{pmatrix} \xi_1^2\,\overline{\xi}_1 \\ \xi_2^2\,\overline{\xi}_2 \end{pmatrix}\exp(it) + \text{к.с.}$$

$$G(t,\xi_1,\xi_2,\overline{\xi}_1,\ \overline{\xi}_2) = \begin{pmatrix} \xi_1^3 \\ \xi_2^3 \end{pmatrix}\exp(3it) + 3\begin{pmatrix} \xi_1^2\,\overline{\xi}_1 \\ \xi_2^2\,\overline{\xi}_2 \end{pmatrix}\exp(it) + \text{к.с.}$$

$$H(t,\xi_1,\xi_2) = \begin{pmatrix} \xi_1 - \xi_2 \\ \xi_2 - \xi_1 \end{pmatrix}\exp(it) + \text{к.с.},$$

где знак к.с. означает наличие комплексно-сопряженных функций к выписанным ранее. Из условий разрешимости неоднородного уравнения (6) в классе $2\pi$-периодических функций по $t$ получаем, что с необходимостью комплекснозначные функции $\xi_1, \xi_2$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} \xi_1' = \tfrac{1}{2}(\beta - i\gamma)(\xi_2 - \xi_1) + \xi_1 - \tfrac{1}{2}(1 - 3bi)\xi_1|\xi_1|^2, \\ \xi_2' = \tfrac{1}{2}(\beta - i\gamma)(\xi_1 - \xi_2) + \xi_2 - \tfrac{1}{2}(1 - 3bi)\xi_2|\xi_2|^2. \end{gathered} \tag{7}$$

Штрихом в формуле (7) и (6) обозначена производная по $s$. Замена $\xi_k \to \sqrt{2}\xi_k$ $(k = 1, 2)$ и переобозначение $\frac{1}{2}(\beta - i\gamma) = d\exp(-i\alpha)$ приводят (7) к удобной для дальнейших рассмотрений форме

$$\begin{aligned} \xi_1' &= d\exp(-i\alpha)(\xi_2 - \xi_1) + \xi_1 - (1 + i\omega^2)\xi_1|\xi_1|^2, \\ \xi_2' &= d\exp(-i\alpha)(\xi_1 - \xi_2) + \xi_2 - (1 + i\omega^2)\xi_2|\xi_2|^2, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\omega^2 = -3b$, то есть далее рассматривается случай, когда $b \leq 0$. Добавим, что так как $\beta > 0$ и далее рассматривается лишь случай $\gamma \geq 0$, то следует считать, что $\alpha \in [0; \pi/2]$. Если $\alpha = \pi/2$, то в исходной системе (2) присутствует лишь инерционная связь, а при $\alpha = 0$ присутствует лишь диссипативная связь.

В заключении этого пункта можно отметить, что если вместо (2) в качестве исходной рассмотреть систему

$$\ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + x_1 + \varphi(x_1, \dot{x}_1) + \varepsilon\gamma(x_1 - x_2) + \varepsilon\beta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0,$$

$$\ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + x_2 + \varphi(x_2, \dot{x}_2) + \varepsilon\gamma(x_2 - x_1) + \varepsilon\beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0,$$

где $\varphi(u, v)$ – произвольная, достаточно гладкая функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого, то построение нормальной формы приведет нас к системе уравнений вида

$$\xi_1' = d\exp(-i\alpha)(\xi_2 - \xi_1) + \xi_1 + (d_0 + ic_0)\xi_1|\xi_1|^2,$$

$$\xi_2' = d\exp(-i\alpha)(\xi_1 - \xi_2) + \xi_2 + (d_0 + ic_0)\xi_2|\xi_2|^2.$$

Коэффициент $d_0 + ic_0$ известен под названием первой ляпуновской величины. В нашем случае $d_0 = -1,\ c_0 = -\omega^2$.

## 2. Периодические автомодельные решения

В данном пункте будет рассмотрен вопрос о существовании у системы дифференциальных уравнений (8) автомодельных периодических решений, к которым традиционно относят решения, имеющие вид

$$\xi_1(s) = y_1\exp(i\sigma s),\ \xi_2 = y_2\exp(i\sigma s), \tag{9}$$

где $\sigma$ – действительная постоянная, $y_1, y_2$ комплексные постоянные.

Наиболее легко найти среди них автомодельное решение, у которого $\xi_1(s) = \xi_2(s)$. В этом случае простая подстановка показывает, что $y_1 = y_2 = 1$, $\sigma = -\omega^2$. Его принято называть циклом Андронова – Хопфа или однородным циклом. Исследуем цикл Андронова – Хопфа на устойчивость. Положим для этого

$$\xi_1(s) = \exp(-i\omega^2 s)(1 + u_1(s)), \xi_2(s) = \exp(-i\omega^2 s)(1 + u_2(s)). \tag{10}$$

Подставив $\xi_1(s), \xi_2(s)$ в форме (10) в (8) и линеаризовав полученные дифференциальные уравнения, получим следующую систему;

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= d\exp(-i\alpha)(u_2 - u_1) - (1 + i\omega^2)(u_1 + \overline{u}_1), \\ \dot{u}_2 &= d\exp(-i\alpha)(u_1 - u_2) - (1 + i\omega^2)(u_2 + \overline{u}_2). \end{aligned} \tag{11}$$

Стандартные вычисления показывают, что спектру устойчивости системы (11) принадлежат собственные числа $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2$, а собственные числа $\lambda_3, \lambda_4$ следует искать как корни квадратного уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, где $p = 4d\cos\alpha + 2$, $q = 4d(d + \cos\alpha - \omega^2 \sin\alpha)$. Отметим, что при любом выборе параметров задачи, справедливо неравенство $p > 0$. Коэффициент $q$ может менять знак только в случае, если
$$d_1 = \omega^2 \sin\alpha - \cos\alpha > 0. \tag{12}$$
Далее будем выбирать $\alpha$ и $\omega^2$ такими, чтобы неравенство (12) выполнялось. При этом справедливо утверждение.

**Лемма 1.** *Цикл Андронова – Хопфа устойчив (орбитально асимптотически устойчив), если $d > d_1$ и неустойчив при $d < d_1$. При $d = d_1$ получаем критический случай в задаче об устойчивости этого цикла. Цикл Андронова – Хопфа теряет устойчивость дивергентным образом.*

Еще одно периодическое решение нетрудно найти, если положить
$$\xi_2(s) = -\xi_1(s).$$
В этом случае $y_1 = \rho_a,\ y_2 = -\rho_a$, где $\rho_a^2 = 1 - 2d\cos\alpha$, а $\sigma = \sigma_a = 2d(\omega^2\cos\alpha + \sin\alpha) - \omega^2$. Такой цикл естественно называть противофазным. Он существует при тех $d$ и $\alpha$, для которых выполнено неравенство $1 - 2d\cos\alpha > 0$.

Рассмотрим вопрос о существовании автомодельных циклов отличных от цикла Андронова – Хопфа и противофазного. Придерживаясь терминологии работы [4] называем их асимметричными, так как у них $|y_1| \neq |y_2|$. Предположим, что $\alpha \in [0; \pi/2)$. Случай $\alpha = \pi/2$ будет далее рассмотрен отдельно. Подставляя (9) в (8) и полагая при этом
$$y_j = \rho_j \exp(i\varphi_j)\ \ (j = 1, 2),\ \ \psi = \varphi_2 - \varphi_1,\ \ \lambda = (\rho_2/\rho_1),\ \ \rho_1^2 = R\lambda^{-1},\ \ \rho_2^2 = R\lambda,$$
получаем систему двух комплексных уравнений для определения действительных неизвестных $R,\ \lambda,\ \psi,\ \sigma$
$$\begin{aligned} i\sigma &= d\exp(-i\alpha)(-1 + \lambda\exp(i\psi)) + 1 - (1 + i\omega^2)R\lambda^{-1}, \\ i\sigma &= d\exp(-i\alpha)(-1 + \lambda^{-1}\exp(-i\psi)) + 1 - (1 + i\omega^2)R\lambda. \end{aligned} \tag{13}$$
Пусть $\sigma = -\sigma_1 - \omega^2$. Умножим оба уравнения системы (13) на $\exp(i\alpha)$. После разделения действительных и мнимых частей переменных получим систему четырех действительных уравнений
$$\begin{aligned} d(\lambda\cos\psi - 1) &= \sigma_1 \sin\alpha - d_1(R\lambda^{-1} - 1), \\ d(\lambda^{-1}\cos\psi - 1) &= \sigma_1 \sin\alpha - d_1(R\lambda - 1), \end{aligned} \tag{14}$$
$$\begin{aligned} -d\lambda\sin\psi &= \sigma_1\cos\alpha - b_1(R\lambda^{-1} - 1), \\ d\lambda^{-1}\sin\psi &= \sigma_1\cos\alpha - b_1(R\lambda - 1), \end{aligned} \tag{15}$$
где $b_1 = \omega^2\cos\alpha + \sin\alpha$. При $\lambda = 1$ получаем ранее найденные решения. Далее будем считать $\lambda \neq 1$, $d_1 > 0$

Кратко опишем процесс решения системы уравнений (14), (15). Вычитая в (14) из второго уравнения первое, получаем $R = d\cos\psi/d_1$. Складывая их, находим $\sigma_1 = d(\sin\alpha)^{-1}[(\lambda+\lambda^{-1})\cos\psi - (1+d_1d^{-1})]$. После аналогичных преобразований уравнений (15) и подстановок в полученные уравнения $R$ и $\sigma_1$ приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} &(\lambda+\lambda^{-1})\sin\psi + h(\lambda-\lambda^{-1})\cos\psi = 0, \\ &(\lambda^{-1}-\lambda)\sin\psi + H_0(\lambda+\lambda^{-1})\cos\psi = q_0, \end{aligned} \tag{16}$$

где $h = b_1/d_1$, $H_0 = (1+\cos^2\alpha - \omega^2\cos\alpha\sin\alpha)(d_1\sin\alpha)^{-1}$, $q_0 = 2(1-d\cos\alpha)(d\sin\alpha)^{-1}$.

Пусть сначала $q_0 \neq 0$. Используя систему (16), находим

$$\cos\psi = (\lambda+\lambda^{-1})H_1, \quad \sin\psi = h(\lambda^{-1}-\lambda)H_1, \quad R = d(d_1)^{-1}(\lambda+\lambda^{-1})H_1, \tag{17}$$

где $H_1 = q_0/H$, $H = H_0(\lambda+\lambda^{-1})^2 + h(\lambda-\lambda^{-1})^2$. Положим

$$\lambda+\lambda^{-1} = (\eta+4)^{1/2}. \tag{18}$$

Используя основное тригонометрическое тождество и подстановку (18), приходим к уравнению

$$\eta^2 + (4p - q^2(1+h^2))\eta + 4(p^2-q^2) = 0, \tag{19}$$

где $p = H_0d_1\sin\alpha = 1+\cos^2\alpha - \omega^2\sin\alpha\cos\alpha$, $q = (q_0d_1\sin\alpha)/2$. Напомним, что $\cos\psi > 0$ и $\lambda > 0$, то есть $H_1 > 0$. Последнее неравенство эквивалентно условию $(\eta+2p)q > 0$.

Пусть сначала $d < d_1$ – цикл Андронова – Хопфа потерял устойчивость. Тогда справедливо утверждение.

**Теорема 1.** *При $q_0 \neq 0$ каждому положительному корню квадратного уравнения (19), удовлетворяющему неравенству $(\eta+2p)q > 0$, соответствуют два автомодельных решения вида (9), параметры которых восстанавливаются по формулам (17), а $\lambda$ находится из уравнения (18).*

Пусть теперь $q_0 = 0$. В этом случае система (16) имеет нетривиальные решения при $H = 0$, то есть $\eta = -2p$ для $p < 0$. Функции $\cos\psi$, $\sin\psi$, $R$ находятся по тем же формулам (17), в которых следует полагать $H_1 = K_1$, $K_1 = ((\lambda+\lambda^{-1})^2 + h^2(\lambda-\lambda^{-1})^2)^{-1/2}$.

Несложный анализ показывает, что при сделанных ранее предположениях уравнение (19) может иметь только один подходящий корень. Полезно отметить, что $\lambda \to 1$ при $\eta \to 0$ и найденные в этом пункте решения стремятся к циклу Андронова – Хопфа.

Теперь положим $d > d_1$ – цикл Андронова – Хопфа устойчив. При выполнении этого неравенства полный анализ затруднен, так как система зависит от трех параметров. Ограничимся некоторыми модельными ситуациями.

Можно показать, что если $d \to \infty$, то система (8) имеет лишь один устойчивый автомодельный цикл – цикл Андронова – Хопфа. Это легче сделать косвенно, применяя метод повторной нормализации. Понятно, что в этом случае величину $1/d = \delta$ можно интерпретировать как малый параметр.

В системе дифференциальных уравнений (8) положим

$$\xi(s) = \exp(-i\omega^2 s)u(s), \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \; u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

После перенормировки времени $s = \delta\tau$ получим следующую систему

$$\frac{du}{d\tau} = Au + \delta F(u),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -\exp(-i\alpha) & \exp(-i\alpha) \\ \exp(-i\alpha) & -\exp(-i\alpha) \end{pmatrix}, \quad F(u) = (1 + i\omega^2)\Big[ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1|u_1|^2 \\ u_2|u_2|^2 \end{pmatrix} \Big].$$

Достаточно стандартный анализ показывает, что у данной квазилинейной системы все ее аттракторы могут находиться на плоскости $u_1 = u_2$, а на ней ее динамика определяется следующим дифференциальным уравнением (нормальной формой):

$$\frac{dz}{d\tau} = (1 + i\omega^2)[z - z|z|^2],$$

у которого есть лишь два состояния равновесия: $z = 0$ и $|z|^2 = 1$.

Можно указать и те значения параметров $\alpha,\ d,\ \omega^2$, при которых уравнение (19) имеет два подходящих корня: $\eta_k > 0,\ (\eta_k + 2p)q > 0\ (k = 1, 2)$. Напомним, что последнее означает наличие у системы дифференцальных уравнений (8) уже четырех автомодельных периодических решения. Возьмем, например, $d = d_1 + \varepsilon$, где величина $\varepsilon$ положительна и достаточно мала. Тогда простые вычисления показывают, что уравнение (19) имеет два корня

$$\eta_1 = -P_0 + O(\varepsilon), \quad \eta_2 = -\frac{P_0}{Q_0}\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

где

$$P_0 = (1 - d_1\cos\alpha)(4 - \frac{(1 - d_1\cos\alpha)(1 + \omega^4)}{d_1^2}), \quad Q_0 = 8\Big[\frac{1 - d_1\cos\alpha}{d_1}\Big].$$

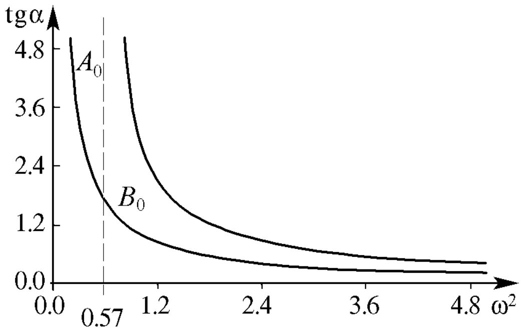


Рис. 1.

Нетрудно указать область параметров $\alpha, \omega^2$, при которых эти корни удовлетворяют ранее выписанным неравенствам. Если $\omega^2 \in [0; 1/\sqrt{3}]$, то $\alpha$ следует выбирать из тех $\alpha \in (0; \pi/2)$, при которых справедливо неравенство $\operatorname{tg}\alpha > 1/\omega^2$. При выборе $\omega^2 > 1/\sqrt{3}$ следует брать $\alpha$ таким, чтобы были выполнены неравенства

$$\frac{1}{\omega^2} < tg\alpha < \frac{\omega^2(7 - \omega^4) + \sqrt{\omega^{12} + 10\omega^8 + 17\omega^4 + 8}}{2(3\omega^4 - 1)}.$$

Эту ситуацию иллюстрирует рис. 1. Если взять параметры из областей $A_0,\ B_0$, то система (8) имеет четыре решения вида (9).

## 3. Устойчивость автомодельных циклов

Напомним, что условия устойчивости цикла Андронова – Хопфа были получены ранее: при $0 < d < d_1$ – цикл неустойчив и при $d > d_1$ – устойчив.

Устойчивость противофазного цикла исследуется по той же схеме как и в случае цикла Андронова – Хопфа. Положим

$$\xi_1(s) = \rho_a \exp(i\sigma_a s)(1 + v_1(s)), \quad \xi_2(s) = -\rho_a \exp(-i\sigma_a s)(1 + v_2(s)).$$

Для вновь введенных функций $v_1(s),\ v_2(s)$ получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} v_1' &= d\exp(-i\alpha)(v_1 - v_2) - (1 + i\omega^2)\rho_a^2(v_1 + \overline{v}_1) + H_1, \\ v_2' &= d\exp(-i\alpha)(v_2 - v_1) - (1 + i\omega^2)\rho_a^2(v_2 + \overline{v}_2) + H_2, \end{aligned} \tag{20}$$

где $H_k = -(1 + i\omega^2)\rho_a^2[2v_k\overline{v}_k + v_k^2 + v_k^2\overline{v}_k],\ k = 1, 2.$ У системы (20), следовательно, подлежит исследованию вопрос об устойчивости нулевого решения. Спектру устойчивости нулевого решения принадлежат точки $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = -2\rho_a^2$, а $\mu_{3,4}$ находятся как корни уравнения

$$\mu^2 + p_a\mu + q_a = 0, \tag{21}$$

где

$$p_a = 2(1 - 4d\cos\alpha),\ q_a = 4d(d + \rho_a^2 d_1) > 0.$$

Знак меняет только коэффициент $p_a$: $p_a > 0$ при $d < \dfrac{1}{4\cos\alpha}$ и $p_a < 0$ при $d > \dfrac{1}{4\cos\alpha}$. Откуда следует утверждение.

**Лемма 2.** *Противофазный цикл устойчив, если* $d < \dfrac{1}{4\cos\alpha}$ *и неустойчив, если* $d > \dfrac{1}{4\cos\alpha}$. *При* $d = d_2 = \dfrac{1}{4\cos\alpha}$ *реализуется критический случай в задаче об устойчивости. Состояние равновесия вспомогательной системы (20) теряет устойчивость колебательным образом.*

Для исследования устойчивости периодических автомодельных решений, отличных от цикла Андронова – Хопфа и противофазного цикла, приходится использовать более сложные построения. Положим в (8)

$$\xi_j(s) = \rho_j(s)\exp(i\varphi_j(s))\ (j = 1, 2), \quad \psi(s) = \varphi_2(s) - \varphi_1(s),$$

$$\rho_1(s) = \sqrt{2\rho(s)}\sin\Big(\frac{\varphi(s)}{2} + \frac{\pi}{4}\Big), \quad \rho_2(s) = \sqrt{2\rho(s)}\cos\Big(\frac{\varphi(s)}{2} + \frac{\pi}{4}\Big),$$

где $\varphi(s) \in (-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2})$. После замены $s = \dfrac{\tau}{2}$ и преобразований для $\rho,\ \varphi,\ \psi$ получим замкнутую систему трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \rho' &= \Big[(1 - d\cos\alpha) + d\cos\alpha\cos\psi\cos\varphi\Big]\rho - \rho^2\Big[1 + \sin^2\varphi\Big], \\ \varphi' &= d\sin\alpha\sin\psi - d\cos\alpha\sin\varphi\cos\psi - \frac{\rho}{2}\sin 2\varphi, \\ \psi' &= \omega^2\rho\sin\varphi - d\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos\psi - d\cos\alpha\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}, \end{aligned} \tag{22}$$

где штрихом обозначена производная по $\tau$. Система (22) имеет состояние равновесия $R_1$: $\rho = 1,\ \varphi = \psi = 0$, соответствующее циклу Андронова – Хопфа, и состояние равновесия $R_2$: $\rho = \sqrt{1 - 2d\cos\alpha},\ \varphi = 0,\ \psi = \pi$, соответствующее противофазному циклу. Остальным автомодельным циклам соответствуют состояния равновесия, чьи координаты восстанавливаются по формулам

$$\rho = d(\eta + 4)(K_1/(2d_1)), \quad \cos\varphi = \frac{2}{\lambda + \lambda^{-1}}, \quad \sin\varphi = \frac{\lambda^{-1} - \lambda}{\lambda + \lambda^{-1}},$$

$$\cos\psi = K_1(\lambda + \lambda^{-1}), \quad \sin\psi = K_1 h(\lambda^{-1} - \lambda).$$

После линеаризации системы (22) на выбранном состоянии равновесия вопрос об устойчивости сводится к исследованию характеристического уравнения

$$\mu^3 + P(d)\mu^2 + Q(d)\mu + R(d) = 0, \tag{23}$$

корни которого лежат в левой полуплоскости, если

$$P(d) > 0, \quad Q(d) > 0, \quad R(d) > 0, \quad F(d) = P(d)Q(d) - R(d) > 0. \tag{24}$$

В нашем случае неравенства слишком громоздки и не поддаются аналитическому исследованию. Они были проанализированы численно при $\alpha \in (0; \pi/2),\ \omega^2 \in (0; 10]$.

Если $d \in (0; d_1)$, то как отмечалось в разделе 2 существуют два асимметричных автомодельных цикла. Оказалось, что при всех указанных значениях $\alpha,\ \omega^2$ существует такое $d = d_3(\alpha, \omega^2) \in (0; d_1)$, что при $d \in (0; d_3)$ справедливы первые три неравенства из неравенств (24), а $F(d) < 0$. При $d > d_3$ справедливы все неравенства (24). Наконец, при $d = d_3$ имеем $F(d_3) = 0$ и характеристическое уравнение (23) имеет чисто мнимые корни $\mu_{1,2} = \pm i\nu$ $(\nu > 0)$ и $\mu_3 < 0$. Это означает, что состояния равновесия, соответствующие этим циклам, теряют устойчивость при прохождении $d = d_3$ колебательным образом.

**Лемма 3.** *При $d < d_1$ автомодельные асимметричные циклы устойчивы, если $d \in (d_3; d_1)$, и неустойчивы, если $d \in (0; d_3)$.*

Пусть теперь воспроизводится ситуация, когда есть четыре автомодельных цикла: $d = d_1 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ и $\alpha, \omega^2$ выбраны соответствующим образом. Тогда численный анализ коэффициентов характеристического уравнения (23) показывает, что для большего по модулю корня выполнены неравенства $P(d), Q(d), R(d) > 0$, а $F(d) < 0$. Если рассмотреть меньший по модулю корень, то $P(d), Q(d), F(d) > 0$, а $R(d) < 0$. Это означает, что при всех рассмотренных значениях параметров эти асимметричные решения неустойчивы. Напомним, что в данной ситуации устойчив цикл Андронова – Хопфа.

## 4. Бифуркации от автомодельных циклов

Локальные бифуркации от цикла Андронова – Хопфа изучены в работе [8]. При $d = d_1 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ от него бифурцируют два цикла. Элементарный анализ формул из раздела 2 показывает, что таковыми являются как раз асимметричные автомодельные циклы. Рассмотрим теперь бифуркации от противофазного и асимметричных циклов. При этом вопрос о локальных бифуркациях от этих решений сводится

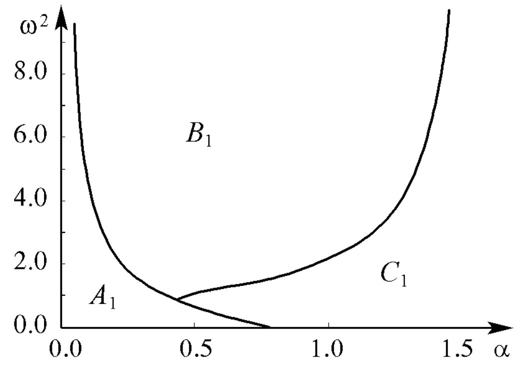



Рис. 2.

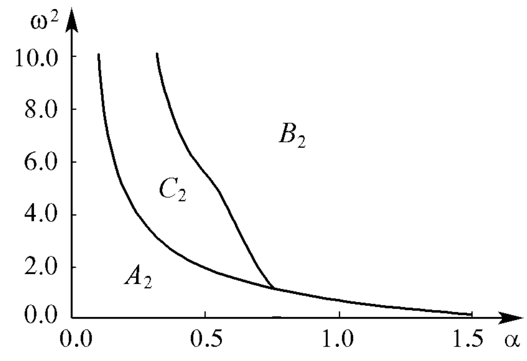



Рис. 3.

к аналогичному вопросу для соответствующих состояний равновесия системы (22) в случае, близком к критическому пары чисто мнимых собственных значений. Для исследования этого вопроса, следовательно, может быть применена классическая теорема Андронова – Хопфа. Хорошо известно, что в конечном итоге все сводится к исследованию нормальной формы

$$z' = i\nu z + \varepsilon(\delta_0 + i\beta_0) + (l_0 + ic_0)z|z|^2, \tag{25}$$

где $z = z(\tau), \varepsilon = d_3 - d$ для асимметричных циклов из раздела 2 и $\varepsilon = d - d_2$ для противофазного. В обоих случаях $\delta_0 > 0$. Разбиение плоскости параметров $(\alpha, \omega^2)$ на области сохранения знака ляпуновской величины $l_0$ приведено на рис. 2 для случая противофазного цикла, а на рис. 3 для случая асимметричного цикла. Область $A_1$ на рис. 2 образуют те пары $(\alpha, \omega^2)$, для которых невозможна колебательная потеря устойчивости. При $(\alpha, \omega^2) \in B_1$ справедливо неравенство $l_0 < 0$, а неравенство $l_0 > 0$ справедливо при $(\alpha, \omega^2) \in C_1$. На рис. 3 $l_0 > 0$ в области $C_2$ и $l_0 < 0$ в области $B_2$. Область $A_2$ составляют те пары $(\alpha, \omega^2)$, которые не рассматривались $(\omega^2 \sin\alpha - \cos\alpha < 0)$.

**Теорема 2.** *Существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ *и* $(\alpha, \omega^2) \in B_1$ *(для противофазного цикла) и* $(\alpha, \omega^2) \in B_2$ *(для циклов из раздела 2) от соответствующего автомодельного цикла системы (8) бифурцирует асимптотически устойчивый двумерный инвариантный тор. При* $(\alpha, \omega^2) \in C_1$, $(\alpha, \omega^2) \in C_2$ *и* $\varepsilon \in (-\varepsilon_0; 0)$ *от соответствующего автомодельного решения бифурцирует дихотомичный инвариантный тор.*

**Замечание.** Задача о бифуркациях от противофазного цикла рассмотрена без ограничения $d < d_1$.

Строгое математическое доказательство может быть проведено на основе методики изложенной в [12].

## 5. Об одном особом случае

В предыдущих разделах предполагалось, что $\alpha \in [0; \pi/2)$. Случай $\alpha = \pi/2$ следует отметить и рассмотреть отдельно. Предположение $\alpha = \pi/2$ для исходной задачи о связанных осцилляторах означает, что присутствует лишь инерционная связь.

Итак, пусть $\alpha = \pi/2$, то есть $\exp(-i\alpha) = -i$. Понятно, что цикл Андронова – Хопфа существует при всех $d$, но теперь $d_1 = \omega^2$ и он устойчив при $d > \omega^2$, а при $d < \omega^2$ – неустойчив. Противофазный цикл существует и устойчив при всех $d$, а $\rho_a^2 = 1,\ \sigma_a = 2d - \omega^2$.

Повторяя в целом (с небольшими отличиями) построения раздела 2, сведем вопрос о существовании асимметричных циклов к нахождению положительных корней квадратного уравнения

$$\eta^2 + (4 - \frac{\omega^4 + 1}{d^2})\eta + 4(1 - \frac{\omega^4}{d^2}) = 0. \tag{26}$$

Понятно, что при $d < \omega^2$ существует только один корень, которому как и ранее отвечают два асимметричных цикла. При реализации неравенств

$$d > \omega^2,\ \ \omega^4 + 1 > 4d^2,\ \omega^8 + 2(1 + 4d^2)\omega^4 + 1 - 8d^2 > 0$$

уравнение (26) имеет два подходящих корня, а система (8) четыре асимметричных цикла. Сразу отметим, что во втором случае все найденные асимметричные циклы неустойчивы, а устойчивы два цикла: Андронова – Хопфа и противофазный.

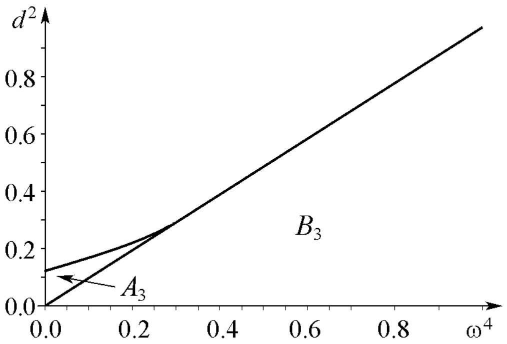


Рис. 4.

На рис. 4 область $B_3$ – это область, где уравнение (26) имеет один подходящий корень, а $A_3$ – область параметров, где у уравнения (26) есть два подходящих корня.

Более интересен случай, когда $d < \omega^2$. Как и в общем случае ($\alpha \in [0; \pi/2]$), вопрос сводится к исследованию устойчивости соответствующих состояний равновесия системы трех дифференциальных уравнений (22), адаптированной к ситуации $\alpha = \pi/2$. В свою очередь, как и ранее, приходим к исследованию корней характеристического уравнения

$$\mu^3 + P\mu^2 + Q\mu + R = 0, \tag{27}$$

где $P = P(d, \omega^2),\ Q = Q(d, \omega^2),\ R = R(d, \omega^2)$. Уравнение (27) было проанализировано численно. Оказалось, что $P, Q, R > 0$, а $F = PQ - R$ может менять знак, то есть потеря устойчивости происходит колебательным образом: существует $d = d_4(\omega^2)$, что при $d \in (0; d_4(\omega^2))$ справедливы неравенства $P, Q, R > 0$, а $F < 0$, при $d > d_4(\omega^2)$ все корни характеристического уравнения (27) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости. При $d = d_4 - \varepsilon$, где $\varepsilon$ – малый параметр, структуру окрестности можно изучить, применяя классическую теорему Андронова – Хопфа. Оказалось, что при $\varepsilon > 0$ из каждого такого цикла системы (8) бифурцирует асимптотически устойчивый двумерный инвариантный тор.

## Заключение

В работе рассмотрена система связанных полностью идентичных осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга. В предположении, что связь слабая, рассмотрена задача о нахождении периодических решений у этой системы. Найдены аналитически все автомодельные периодические решения, в том числе и асимметричные. Полученные формулы для автомодельных периодических решений позволили исследовать их устойчивость по Ляпунову, а также изучить локальные бифуркации автомодельных циклов. Показано, что от синхронного цикла при смене им устойчивости ответвляются два цикла. Для противофазного и асимметричных циклов характерна бифуркация двумерных инвариантных торов.

Следует отметить, что все кратко перечисленные результаты были получены аналитически и использование компьютерного счета было сведено к минимуму. В некоторых случаях компьютер был использован для определения знака достаточно громоздких функций. Для исследования структуры окрестности автомодельных решений, в частности, при рассмотрении вопроса о локальных бифуркациях был использован аппарат метода нормальных форм.

Из результатов работы следует, что для данной системы характерна мультистабильность, то есть сосуществование нескольких аттракторов: нескольких устойчивых периодических решений, устойчивых двумерных инвариантных торов.

## Библиографический список


1. *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969, 400с.
2. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю.* Синхронизация. Фундаментальное явление. М.: Техносфера, 2003, 496 с.
3. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит., 2005, 431 с.
4. *Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N.* Amplitude response of coupled oscillators // Physika D. 1990. Vol. 41. P. 403.
5. *Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W.* Hysteresis of synchronous - asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 49. P. 5638.
6. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* О динамике двух осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга с диссипативной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, №6. С. 48.
7. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* Особенности устройства пространства параметров двух неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, №4. С. 3.
8. *Куликов Д.А.* Знак ляпуновской величины в задаче о бифуркации от однородного цикла // Современные проблемы математики и информатики. Ярославль. ЯрГУ. 2005. Вып. 7. С. 78.
9. *Куликов Д.А.* Циклы билокальной модели волнового уравнения: полный анализ // Современные проблемы математики и информатики. Ярославль. ЯрГУ. 2001. Вып. 4. С. 93.

10. *Куликов Д.А.* Исследование динамики билокальной модели нелинейных волновых уравнений // Современные проблемы математики и информатики. Ярославль. ЯрГУ. 2002. Вып. 5., с.46.
11. *Куликов Д.А.* Автомодельные периодические решения двухточечной разностной аппроксимации уравнения Гинзбурга – Ландау // Тезисы докладов конференции молодых ученых «Нелинейные волновые процессы». 1 – 7 марта 2006. Н. Новгород. 2006. С. 91.
12. *Колесов А.Ю., Куликов А.Н.* Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений. Ярославль. ЯрГУ. 2003. 107 с.

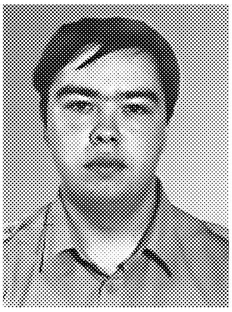
*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова*

*Поступила в редакцию* *22.05.2006*
*После доработки* *23.07.2006*

## AUTOMODEL PERIODIC SOLUTIONS AND BIFURCATIONS FROM THEM IN THE PROBLEM OF THE INTERACTION OF TWO WEAKLY COUPLED OSCILLATORS

*D.A. Kulikov*

The problem of the interaction of two identical weakly coupled van der Pol – Duffing oscillations has been considered. The method of Poincare – Dulak normal forms has been used for its solution. All automodel periodic solutions have been found analytically. The problem of local bifurcations of these periodic solutions has been studied.



*Куликов Дмитрий Анатольевич* – родился в Ярославле (1981). Окончил математический факультет Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова в 2003 году. Аспирант кафедры дифференциальных уравнений ЯрГУ. Занимается научной деятельностью по направлению: математические вопросы теории нелинейных колебаний. Имеет 8 научных публикаций.
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru