Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 1, 2007 УДК 531.36

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

С.А. Ляшко

Доказано свойство неустойчивого многообразия нулевого положения равновесия системы Лоренца, позволившее доказать одно достаточное условие существования гомоклинической траектории.

Рассмотрим систему Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x-y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\sigma,\ b,\ r$ – положительные параметры, $r > 1$.

Пусть $\sigma(s),\ b(s),\ r(s)$ – гладкий путь в пространстве параметров этой системы. Обозначим через $x(t)^+,\ y(t)^+,\ z(t)^+$ сепаратрису седла $x = y = z = 0$, удовлетворяющую соотношениям

$$\lim_{t\to-\infty} x(t)^+ = \lim_{t\to-\infty} y(t)^+ = \lim_{t\to-\infty} z(t)^+ = 0, \quad x(t) > 0, \quad \forall t \le t_0,$$

где $t_0 \ll 0$. В работе [1] доказан следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $2\sigma(s) > b(s),\ \forall s \in [0,1]$ *и для любого* $s \in [0, s_0)$ *существуют числа* $T(s) > \tau(s)$ *такие, что выполнены следующие соотношения:*

$$x(T)^+ = \dot{x}(\tau)^+ = 0, \tag{2}$$

$$x(t)^+ > 0, \quad \forall t < T, \tag{3}$$

$$\dot{x}(t)^+ \ne 0, \quad \forall t < T, \quad t \ne \tau. \tag{4}$$

Предположим, что для $s = s_0$ *не существует пары* $T(s_0) > \tau(s_0)$ *такой, что выполнены соотношения (2)–(4). Тогда при* $s = s_0$ *траектория* $x(t)^+$, $y(t)^+$, $z(t)^+$ *является гомоклинической*

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)^+ = \lim_{t\to+\infty} y(t)^+ = \lim_{t\to+\infty} z(t)^+ = 0.$$

В [1–3] получен следующий результат.
Пусть $2b_0 + 1 < 3\sigma_0$ *и* $b(s) \equiv b_0$, $\sigma(s) \equiv \sigma_0$, $r(s) : r(1) = 1$, $r(0) \gg 1$. *Тогда для* b_0, σ_0 *существует такое* s_0, *что система (1) с* $b = b_0, \sigma = \sigma_0, r = r(s_0)$ *имеет гомоклиническую траекторию.*

В статье [4] рассмотрен специальный путь $\sigma(s) \equiv \sigma_0$, $r(s) \equiv r_0$, $b(s) : b(0) = 0$, $b(1) = 2\sigma_0$, $b(s) \in (0, 2\sigma_0)$, $\forall s \in (0,1)$, и два предельных случая: $|b(s) - 2\sigma_0| \leq \varepsilon$, где ε – достаточно малое число, и $b(0) = 0$.

В [5, 6] показано, что в первом предельном случае сепаратриса седла $x(t)^+$, $y(t)^+$, $z(t)^+$ стремится при $t \to +\infty$ к устойчивому состоянию равновесия и $x(t)^+ > 0$, $\forall t \in R^1$.

В [4] для второго предельного случая $b(0) = 0$ предложена замена

$$\begin{array}{rcl} x & \to & \sqrt{2\sigma(r-1)}x, \\ y & \to & \sqrt{2\sigma(r-1)}x + \sqrt{2\sigma}(r-1)y, \\ z & \to & (r-1)(z + x^2), \\ t & \to & \dfrac{t}{\sqrt{\sigma(r-1)}}, \end{array}$$

после которой система (1) с $b = 0$ принимает вид

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y, \\ \dot{y} & = & -Ay - xz + x - x^3, \\ \dot{z} & = & Cx^2, \end{array} \qquad (5)$$

где $A = \dfrac{\sigma + 1}{\sqrt{\sigma(r-1)}}$, $C = 2\sqrt{\dfrac{\sigma}{r-1}}$, $r > 1$; а соотношения (2)–(4) здесь принимают вид

$$x(T)^+ = y(\tau)^+ = 0, \qquad (6)$$

$$x(t)^+ > 0, \quad \forall t < T, \qquad (7)$$

$$y(t)^+ \neq 0, \quad \forall t < T, t \neq \tau. \qquad (8)$$

В той же работе проведена численная проверка условий (6)–(8) и сформулирована следующая проблема. *Найти необходимые и достаточные условия выполнения соотношений (6)–(8) для системы (5).*

В настоящей работе получены достаточные условия выполнения соотношений (6)–(8) для системы (5).

Теорема 2. *При* σ, r *таких, что*

$$\frac{C^2}{2}\left(1 + \frac{C}{8}\left(A + \sqrt{A^2+4}\right)\right) \geq 1, \qquad (9)$$

$$\frac{4(C-A)}{A^3\left(4 + C\left(A + \sqrt{A^2+4}\right)\right)} \geq 1, \qquad (10)$$

$$\frac{AC(C-A)^2}{4(2A-C)}\left(\frac{1}{2}\left(A + \sqrt{A^2+4}\right) + \frac{1}{A}\right) \geq 1 + \frac{A^2}{4}, \qquad (11)$$

для системы (5) выполняются условия (6)–(8).

Из теоремы 1 и непрерывной зависимости от параметров куска сепаратрисы $x(t)^+$, $y(t)^+$, $z(t)^+$ $(t \le T)$ получаем следующий результат.

Следствие. *Для* σ, r, *удовлетворяющих условиям (9)–(11), существует такое* $b \in (0, 2\sigma)$, *что система (1) имеет гомоклиническую траекторию.*

Доказательству теоремы 2 предпошлем несколько лемм и два предложения.

Лемма 1. *Если существуют числа* $T > \tau$ *такие, что выполнены соотношения*

$$y(T)^+ = y(\tau)^+ = 0, \tag{12}$$

$$x(t)^+ > 0, \quad \forall t \le T, \tag{13}$$

$$y(t)^+ \ne 0, \quad \forall t < T, \quad t \ne \tau, \tag{14}$$

то существует и число $T_1 \in (\tau, T)$, *для которого*

$$y(T_1)^+ = -\frac{C}{2} x(T_1)^+, \quad y(t)^+ > -\frac{C}{2} x(t)^+, \quad \forall t < T_1.$$

При этом, если $z(t)^+ < 1$, $\forall t \le T_1$, *то*

$$\Big(z(T_1)^+ + \big(x(T_1)^+\big)^2\Big) - \Big(z(\tau)^+ + \big(x(\tau)^+\big)^2\Big) > \frac{C^2}{4}, \tag{15}$$

$$z(T_1)^+ - z(\tau)^+ > \frac{C^2}{2}. \tag{16}$$

Доказательство. Так как $y(T)^+ = 0$, $y(t)^+ < 0$, $x(t)^+ > 0$, $\forall t \in (\tau, T)$, то $\dot{y}(T)^+ \ge 0$ и

$$1 - \big(x(T)^+\big)^2 - z(T)^+ \ge 0. \tag{17}$$

Предположим, что

$$y(t)^+ > -\frac{C}{2} x(t)^+, \quad \forall t \in [\tau, T].$$

Тогда

$$\Big(z(t)^+ + \big(x(t)^+\big)^2\Big)^{\boldsymbol{\cdot}} = x(t)^+ \big(Cx(t)^+ + 2y(t)^+\big) > 0, \quad \forall t \in [\tau, T]$$

(точка означает производную по времени в силу системы (5)) и так как $z(\tau)^+ + \big(x(\tau)^+\big)^2 \ge 1$, то $z(T)^+ + \big(x(T)^+\big)^2 > 1$, что противоречит (17). Существование числа T_1 доказано.

Для всех $t \in [\tau, T_1]$ выполняются следующие свойства:

1. $A\dfrac{y(t)^+}{x(t)^+} + \left(\dfrac{y(t)^+}{x(t)^+}\right)^2 < 0$, так как $A > \dfrac{C}{2}$;
2. $z(t)^+ + \big(x(t)^+\big)^2 - 1 \ge 0$ (равенство может достигаться только при $t = \tau$), так как $z(\tau)^+ + \big(x(\tau)^+\big)^2 - 1 \ge 0$, а при $t \in [\tau, T_1]$ функция $z(t)^+ + \big(x(t)^+\big)^2 - 1$ возрастает;
3. $\dfrac{\big(x(t)^+\big)^2}{z(t)^+ + \big(x(t)^+\big)^2 - 1} > 1$, так как $z(t)^+ < 1$;
4. $\left(\dfrac{y(t)^+}{x(t)^+}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} < 0$ (докажем это свойство в конце доказательства леммы).

Оцениваем теперь:

$$\Big(z(T_1)^+ + \big(x(T_1)^+\big)^2\Big) - \Big(z(\tau)^+ + \big(x(\tau)^+\big)^2\Big) = \int\limits_{z(\tau)^+ + (x(\tau)^+)^2}^{z(T_1)^+ + \left(x(T_1)^+\right)^2} d\Big(z(t)^+ + \big(x(t)^+\big)^2\Big) =$$

$$= \int\limits_0^{-C/2} \frac{d\Big(\big(x(t)^+\big)^2 + z(t)^+\Big)}{d\left(\dfrac{y(t)^+}{x(t)^+}\right)} d\left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right) = \int\limits_0^{-C/2} \frac{\Big(\big(x(t)^+\big)^2 + z(t)^+\Big)^{\boldsymbol{\cdot}}}{\left(\dfrac{y(t)^+}{x(t)^+}\right)^{\boldsymbol{\cdot}}} d\left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right) =$$

$$= \int\limits_0^{-C/2} \frac{\Big(2x(t)^+ y(t)^+ + C\,\big(x(t)^+\big)^2\Big)\big(x(t)^+\big)^{-2}}{\Big(-Ay(t)^+ - x(t)^+ z(t)^+ + x(t)^+ - \big(x(t)^+\big)^3\Big)\,x(t)^+ - \big(y(t)^+\big)^2} d\left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right) =$$

$$= \int\limits_{-C/2}^{0} \frac{2\dfrac{y(t)^+}{x(t)^+} + C}{A\dfrac{y(t)^+}{x(t)^+} + \left(\dfrac{y(t)^+}{x(t)^+}\right)^2 + z(t)^+ + \big(x(t)^+\big)^2 - 1} \big(x(t)^+\big)^2 d\left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right) >$$

$$> \int\limits_{-C/2}^{0} \left(2\frac{y(t)^+}{x(t)^+} + C\right) \frac{\big(x(t)^+\big)^2}{z(t)^+ + \big(x(t)^+\big)^2 - 1} d\left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right) >$$

$$> \int\limits_{-C/2}^{0} \left(2\frac{y(t)^+}{x(t)^+} + C\right) d\left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right) = \left(\left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right)^2 + C\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right)\Bigg|_{-C/2}^{0} = \frac{C^2}{4}.$$

Аналогично находим

$$z(T_1)^+ - z(\tau)^+ > \frac{C^2}{2}.$$

Докажем теперь свойство 4. Так как $x(t)^+ > 0$ при $t \in [\tau, T_1]$, то для $y(t)^+ = -\dfrac{D}{2}x(t)^+$ $(D > 0)$ имеем

$$\left(y(t)^+ + \frac{D}{2}x(t)^+\right)^{\boldsymbol{\cdot}} = x(t)^+\left(\frac{D}{2}\left(A - \frac{D}{2}\right) + 1 - z(t)^+ - \big(x(t)^+\big)^2\right) < 0$$

при

$$z(t)^+ + \big(x(t)^+\big)^2 > 1 + \frac{D}{2}\left(A - \frac{D}{2}\right). \tag{18}$$

При условии (18) (и только при нем) для $y(t)^+ = -\dfrac{D}{2}x(t)^+$ выполняется $\left(\dfrac{y(t)^+}{x(t)^+}\right)^{\bullet} < 0$. Так как $y(t)^+$ убывает при $t = \tau$, то существует D_1 такое, что для любого $D \in [0; D_1]$ выполняется (18). Тогда при изменении $\dfrac{y(t)^+}{x(t)^+}$ от 0 до $-\dfrac{D_1}{2}$

$$\left(z(\tau_1)^+ + \left(x(\tau_1)^+\right)^2\right) - \left(z(\tau)^+ + \left(x(\tau)^+\right)^2\right) > \int\limits_{-D_1/2}^{0} \left(2\frac{y(t)^+}{x(t)^+} + C\right) d\left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right) =$$

$$= \left(\left(\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right)^2 + C\frac{y(t)^+}{x(t)^+}\right)\Bigg|_{-D_1/2}^{0} = \frac{D_1}{2}\left(C - \frac{D_1}{2}\right),$$

где τ_1 такое, что $\dfrac{y(\tau_1)^+}{x(\tau_1)^+} = -\dfrac{D_1}{2}$. Выбираем теперь D_2 – наибольшее из значений D, удовлетворяющих условию

$$\frac{D}{2}\left(A - \frac{D}{2}\right) \le \frac{D_1}{2}\left(C - \frac{D_1}{2}\right).$$

Так как $A < C$, то $D_2 > D_1$. Теперь (18) выполняется для всех $D \in [0; D_2]$ и так далее. Через конечное число n шагов получим существование τ_n такого, что $\dfrac{y(\tau_n)^+}{x(\tau_n)^+} = -\dfrac{D_n}{2}$ и $\left(z(\tau_n)^+ + (x(\tau_n)^+)^2\right) - \left(z(\tau)^+ + (x(\tau)^+)^2\right) > \dfrac{A^2}{4} \ge \dfrac{D}{2}\left(A - \dfrac{D}{2}\right)$ для всех $\dfrac{D}{2} \in \left[\dfrac{A}{2}; C\right]$.

Свойство 4 и лемма 1 доказаны.

Лемма 2.

$$z(\tau)^+ \ge \frac{C}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2}\right)\left(x(\tau)^+\right)^2.$$

Доказательство. Рассмотрим часть плоскости

$$y = \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}\right)x + \varepsilon_1(\varepsilon_1 > 0)$$

при $x \ge 0, z \ge 0$. Находим на ней

$$\left(y - \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}\right)x\right)^{\bullet} = -Ay - xz + x - x^3 - \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}\right)y =$$

$$= -\left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2}\right)\left(\left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}\right) + \varepsilon_1\right) - xz + x - x^3 =$$

$$= -xz - x^3 - \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2}\right)\varepsilon_1 < 0.$$

Устремляя ε_1 к нулю, получаем, что для всех $t \in (-\infty; \tau]$ имеет место оценка

$$y(t)^+ \le \left(\sqrt{1+\frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}\right) x(t)^+. \tag{19}$$

Оцениваем теперь

$$z(\tau)^+ = \int\limits_0^{x(\tau)^+} \frac{dz(t)^+}{dx(t)^+} dx(t)^+ = \int\limits_0^{x(\tau)^+} \frac{\dot z(t)^+}{\dot x(t)^+} dx(t)^+ = \int\limits_0^{x(\tau)^+} \frac{C\left(x(t)^+\right)^2}{y(t)^+} dx(t)^+ \ge$$

$$\ge \int\limits_0^{x(\tau)^+} \frac{C\left(x(t)^+\right)^2}{\left(\sqrt{1+\frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}\right) x(t)^+} dx(t)^+ = C\left(\sqrt{1+\frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2}\right) \int\limits_0^{x(\tau)^+} x(t)^+ dx(t)^+ =$$

$$= C\left(\sqrt{1+\frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2}\right) \cdot \left(x(\tau)^+\right)^2.$$

Лемма 2 доказана.

Предложение 1. *При условии (9) не существует чисел $T > \tau$ таких, что выполняются соотношения (12)–(14).*

Доказательство. Если выполняются соотношения (12)–(14), то, по лемме 1, существует число $T_1 \in (\tau; T)$, для которого

$$y(T_1)^+ = -\frac{C}{2} x(T_1)^+.$$

Докажем, что $z(T_1)^+ \ge 1$. Предположим, что $z(T_1)^+ < 1$. Тогда из (15) имеем $x(T_1)^+ > \frac{C}{2}$ и $x(\tau)^+ > x(T_1)^+ > \frac{C}{2}$. По лемме 2

$$z(\tau)^+ \ge \frac{C}{2}\left(\sqrt{1+\frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2}\right)\left(x(\tau)^+\right)^2 > \frac{C^3}{8}\left(\sqrt{1+\frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2}\right).$$

Отсюда и из (16) получаем

$$z(T_1)^+ = \left(z(T_1)^+ - z(\tau)^+\right) + z(\tau)^+ > \frac{C^2}{2} + \frac{C^3}{8}\left(\sqrt{1+\frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2}\right) \ge 1.$$

Итак, $z(T_1)^+ \ge 1$.

Из третьего уравнения системы (5) следует, что

$$z(t)^+ > 1, \quad \forall t > T_1.$$

Если бы имели место соотношения (12)–(14), то выполнялось бы

$$\dot y(T)^+ = x(T)^+\left(1 - \left(x(T)^+\right)^2 - z(T)^+\right) \ge 0,$$

что не выполняется из-за $z(T)^+ > z(T_1)^+ \geq 1$, $x(T)^+ > 0$. Предложение 1 доказано.

Лемма 3. *Если выполнены условия (9) и*

$$y(\tau)^+ = 0, \tag{20}$$

$$x(t)^+ > 0, \quad \forall t \in R, \tag{21}$$

$$y(t)^+ \neq 0, \quad \forall t \neq \tau, \tag{22}$$

то

$$y(t)^+ > -Ax(t)^+, \quad \forall t \in R. \tag{23}$$

Доказательство. После замены

$$\begin{array}{rcl} x & \to & \tilde{x}, \\ y & \to & -A\tilde{x} + \tilde{y}, \\ z & \to & \tilde{z} \end{array}$$

система (5) примет вид

$$\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{x}} & = & -A\tilde{x} + \tilde{y}, \\ \dot{\tilde{y}} & = & \tilde{x}(1 - \tilde{z} - \tilde{x}^2), \\ \dot{\tilde{z}} & = & C\tilde{x}^2. \end{array} \tag{24}$$

Возможны два случая.

- Если $y(t)^+ > -\dfrac{C}{2}x(t)^+$, $\forall t \in R$, то доказано и (23) (так как $\dfrac{C}{2} < A$).
- Если же существует число T_1, для которого

$$y(T_1)^+ = -\frac{C}{2}x(T_1)^+,$$

то из доказательства леммы 1 и предложения 1 вытекает, что $\tilde{z}(T_1)^+ = z(T_1)^+ \geq 1$. Из третьего уравнения системы (5) получаем $\tilde{z}(t)^+ > 1$, $\forall t > T_1$ и, следовательно,

$$\dot{\tilde{y}}(t)^+ = \tilde{x}(t)^+ \left(1 - \tilde{z}(t)^+ - \left(\tilde{x}(t)^+\right)^2\right) < 0.$$

А так как при выполнении условий (20)–(22) $\lim_{t\to+\infty} \tilde{y}(t)^+ = 0$, то $\tilde{y}(t)^+ > 0$, $\forall t \in R$ и, следовательно, $y(t)^+ > -Ax(t)^+, \forall t \in R$. Лемма 3 доказана.

Обозначим

$$P = \frac{4(C-A)}{A^3\left(4 + C\left(A + \sqrt{A^2+4}\right)\right)^2}, \quad Q = \frac{A^3}{4(C-A)}.$$

Лемма 4. *Если*

$$y(t)^+ > -\frac{A}{2}x(t)^+, \quad \forall t \in R$$

и выполнены условия (20)–(22), то $P < Q$.

Доказательство. Предположим, что $P \geq Q$. Рассмотрим следующие варианты.

Вариант *a.*

$$\left(x(\tau)^+\right)^2 \leq Q. \tag{25}$$

Рассмотрим систему (24). Пусть число T_2 таково, что $\dot{\tilde{y}}(T_2)^+ = 0$. Из второго уравнения (24) следует равенство

$$\left(\tilde{x}(T_2)^+\right)^2 + \tilde{z}(T_2)^+ = 1.$$

Из (19) получаем

$$\tilde{y}(t)^+ \leq \left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2}\right)\tilde{x}(t)^+, \quad \forall t \in (-\infty; T_2] \tag{26}$$

и оцениваем, используя (26)

$$\tilde{y}(T_2)^+ = \int\limits_0^1 \frac{\dot{\tilde{y}}(t)^+}{\left((\tilde{x}(t)^+)^2 + \tilde{z}(t)^+\right)^{\cdot}}\, d\left(\left(\tilde{x}(t)^+\right)^2 + \tilde{z}(t)^+\right) =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{1 - \left((\tilde{x}(t)^+)^2 + \tilde{z}(t)^+\right)}{2\tilde{y}(t)^+ - (2A - C)\tilde{x}(t)^+}\, d\left(\left(\tilde{x}(t)^+\right)^2 + \tilde{z}(t)^+\right) \geq$$

$$\geq \int\limits_0^1 \frac{1 - \left((\tilde{x}(t)^+)^2 + \tilde{z}(t)^+\right)}{\left(\sqrt{A^2+4} - A + C\right)\tilde{x}(t)^+}\, d\left(\left(\tilde{x}(t)^+\right)^2 + \tilde{z}(t)^+\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{Q}\left(\sqrt{A^2+4} - A + C\right)} \int\limits_0^1 \left(1 - \left(\left(\tilde{x}(t)^+\right)^2 + \tilde{z}(t)^+\right)\right) d\left(\left(\tilde{x}(t)^+\right)^2 + \tilde{z}(t)^+\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{C - A}}{A\sqrt{A}\left(\sqrt{A^2+4} - A + C\right)}.$$

Теперь из (26) получаем

$$\left(\tilde{x}(T_2)^+\right)^2 \geq \frac{\left(\tilde{y}(T_2)^+\right)^2}{\left(\sqrt{1 + \frac{A^2}{4}} + \frac{A}{2}\right)^2} \geq P. \tag{27}$$

Так как $x(\tau)^+ > x(T_2)^+ = \tilde{x}(T_2)^+$, то $\left(\tilde{x}(\tau)^+\right)^2 \geq P$, что вместе с (25) противоречит предположению.

Вариант *б.*
$$\left(x(\tau)^+\right)^2 > Q.$$
При выполнении условий (20)–(22) $\lim_{t\to+\infty} x(t)^+ = 0$ и существует $\lim_{t\to+\infty} z(t)^+ = z^*$. Используя условие леммы, получаем

$$z^* - z(\tau)^+ = \int\limits_{x(\tau)^+}^{0} \frac{C\left(x(t)^+\right)^2}{y(t)^+}\, d\left(x(t)^+\right) =$$
$$= \int\limits_{0}^{x(\tau)^+} \frac{C\left(x(t)^+\right)^2}{-y(t)^+}\, d\left(x(t)^+\right) \geq \frac{2}{A} \int\limits_{0}^{x(\tau)^+} Cx(t)^+ d\left(x(t)^+\right) = \frac{C}{A}\left(x(\tau)^+\right)^2.$$

Отсюда
$$z^* \geq z(\tau)^+ + \frac{C}{A}\left(x(\tau)^+\right)^2 \geq$$
$$\geq 1 - \left(x(\tau)^+\right)^2 + \frac{C}{A}\left(x(\tau)^+\right)^2 >$$
$$> 1 + \left(\frac{C}{A} - 1\right) Q = 1 + \frac{A^2}{4}.$$

Но при этом условии изображающая точка в малой окрестности положения равновесия $(0, 0, z^*)$ системы (5) совершает вращательное движение вокруг оси Oz, поэтому выполнение условий (20)–(22) невозможно.

Таким образом, в условиях леммы неравенство $P \geq Q$ не выполняется. Лемма 4 доказана.

Предложение 2. *При выполнении (9)–(11) не выполняются условия (20)–(22).*

Доказательство. Пусть условия (20)–(22) выполняются. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Существует число T_3, для которого
$$y(T_3)^+ = -\frac{A}{2}x(T_3)^+, \quad y(t)^+ > -\frac{A}{2}x(t)^+, \quad \forall t < T_3.$$

Из доказательства свойства 4 леммы 1 следует, что
$$\left(x(T_3)^+\right)^2 + z(T_3)^+ \geq 1 + \frac{A^2}{4}. \tag{28}$$

Здесь существуют две возможности.

а. $y(t)^+ > -\dfrac{C}{2}x(t)^+, \forall t > T_3$.

Тогда
$$\left(\left(x(t)^+\right)^2 + z(t)^+\right)^{\boldsymbol{\cdot}} > 0, \forall t \in R \tag{29}$$
и
$$z^* = \lim_{t\to+\infty}\left(\left(x(t)^+\right)^2 + z(t)^+\right) > 1 + \frac{A^2}{4},$$
что противоречит условиям (20)–(22).

б. Существует число T_4, для которого

$$y(T_4)^+ = -\frac{\text{C}}{2}x(T_4)^+, \;\; y(t)^+ > -\frac{\text{C}}{2}x(t)^+, \;\; \forall t < T_4.$$

Снова возможны два случая.

1*б.* $y(t)^+ < -\dfrac{C}{2}x(t)^+, \; \forall t > T_4.$
Так как для всех $t < T_4$ выполнены неравенства (28) и (29), то

$$\left(x(T_4)^+\right)^2 + z(T_4)^+ > 1 + \frac{A^2}{4}. \tag{30}$$

Используя лемму 3, получаем

$$z^* - z(T_4)^+ = \int\limits_{x(T_4)^+}^{0} \frac{C\left(x(t)^+\right)^2}{y(t)^+}\, d\left(x(t)^+\right) > \frac{C}{2A}\left(x(T_4)^+\right)^2 \tag{31}$$

и

$$z^* > z(T_4)^+ + \frac{C}{2A}\left(x(T_4)^+\right)^2 > 1 + \frac{A^2}{4} - \left(1 - \frac{C}{2A}\right)\left(x(T_4)^+\right)^2. \tag{32}$$

Из доказательства предложения 1 следует, что $z^* > z(T_4)^+ \geq 1$. Выполнение условий (20)–(22) возможно только при $z^* \leq 1 + A^2/4$. Линеаризуя систему (5) в окрестности положения равновесия $(0, 0, z^*)$, где $z^* \in \left(1; 1 + A^2/4\right]$, получаем, что либо

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)^+}{x(t)^+} = u_1, \text{ где } u_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4(z^* - 1)}}{2},$$

либо

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)^+}{x(t)^+} = u_2, \text{ где } u_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4(z^* - 1)}}{2}.$$

Так как $u_1 > -C/2$, то в рассматриваемом случае должны выполняться неравенства

$$u_2 \leq -\frac{C}{2},$$

$$\frac{-A - \sqrt{A^2 - 4(z^* - 1)}}{2} \leq -\frac{C}{2},$$

$$z^* \leq 1 + \frac{C(2A - C)}{4}.$$

Отсюда и из (32) получаем

$$1 + \frac{A^2}{4} - \left(1 - \frac{C}{2A}\right)\left(x(T_4)^+\right)^2 < 1 + \frac{C(2A - C)}{4},$$

откуда

$$\left(x(T_4)^+\right)^2 > \frac{A(C - A)^2}{2(2A - C)}. \tag{33}$$

Используя теперь лемму 2, условия (11), (31), (32) и неравенство $x(\tau)^+ > x(T_4)^+$, оцениваем

$$z^* > z(\tau)^+ \geq \left(\frac{C}{2}\left(\sqrt{1+\frac{A^2}{4}}+\frac{A}{2}\right)+\frac{C}{2A}\right)\left(x(T_4)^+\right)^2 >$$

$$> \left(\frac{C}{2}\left(\sqrt{1+\frac{A^2}{4}}+\frac{A}{2}\right)+ \ \frac{C}{2A}\right)\frac{A(C-A)^2}{2(2A-C)} \geq 1+\frac{A^2}{4}.$$

Полученное противоречие доказывает предложение в рассматриваемом случае.

2*б*. Существует число T_5, для которого

$$y(T_5)^+ = -\frac{C}{2}x(T_5)^+, \quad y(t)^+ < -\frac{C}{2}x(t)^+, \quad \forall t \in (T_4, T_5).$$

Используя лемму 3, находим

$$z(T_5)^+ - z(T_4)^+ = \int\limits_{x(T_4)^+}^{x(T_5)^+} \frac{C\left(x(t)^+\right)^2}{y(t)^+} d\left(x(t)^+\right) =$$

$$= \ C \int\limits_{x(T_5)^+}^{x(T_4)^+} \left(-\frac{x(t)^+}{y(t)^+}\right) x(t)^+ d\left(x(t)^+\right) >$$

$$> \ \frac{C}{A} \int\limits_{x(T_5)^+}^{x(T_4)^+} x(t)^+ d\left(x(t)^+\right) = \frac{C}{2A}\left(\left(x(T_4)^+\right)^2 - \left(x(T_5)^+\right)^2\right). \tag{34}$$

Из доказательства свойства 4 леммы 1 следует, что

$$\left(x(T_5)^+\right)^2 \leq 1 + \frac{C}{2}\left(A - \frac{C}{2}\right) - z(T_5)^+. \tag{35}$$

Из (30), (34) и (35) получаем

$$x(T_4)^+ - x(T_5)^+ > \frac{1}{4}(C-A)^2 + z(T_5)^+ - z(T_4)^+ >$$

$$> \frac{1}{4}(C-A)^2 + \frac{C}{2A}\left(\left(x(T_4)^+\right)^2 - \left(x(T_5)^+\right)^2\right),$$

откуда

$$\left(x(T_4)^+\right)^2 - \left(x(T_5)^+\right)^2 > \frac{A(C-A)^2}{2(2A-C)},$$

а так как

$$\left(x(T_4)^+\right)^2 > \left(x(T_4)^+\right)^2 - \left(x(T_5)^+\right)^2,$$

то доказательство завершается так же, как и в п. 1*б*.

Случай 2. $y(t)^+ > -\frac{A}{2}x(t)^+$, $\forall t \in R$. Этот случай невозможен, так как при условии (10) получим $P \geq Q$, что противоречит лемме 4.
Предложение доказано.

Доказательство теоремы 2 сразу следует из предложений 1 и 2.

При $\sigma = 10$ условия (9)–(11) выполняются для $r \in [28.23; 29.21]$; при $\sigma = 16$ – для $r \in [39.84; 46.02]$.

Библиографический список

1. *Леонов Г.А.* Оценки аттракторов и существование гомоклинических орбит в системе Лоренца // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 1. С. 21.
2. *Леонов Г.А.* Об оценке параметров бифуркации петли сепаратрисы седла системы Лоренца // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 6. С. 972.
3. *Леонов Г.А.* Об оценке бифуркации значений параметров системы Лоренца // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 3. С. 189.
4. *Леонов Г.А.* Эффективные критерии существования гомоклинических бифуркаций в диссипативных системах // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 3. С.20.
5. *Leonov G.A., Reitman V.* Attraktoreingrenzung für nichtlineare systeme. Leipzig: Teubner, 1987.
6. *Леонов Г.А.* О существовании гомоклинических траекторий в системе Лоренца // Вестн. СПб. ун-та. Математика, механика, астрономия. 1999, № 1. С. 13.

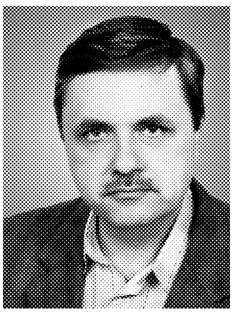
Балашовский филиал Саратовского государственного университета

Поступила в редакцию 29.05.2006

SUFFICIENT CONDITIONS OF THE LORENZ-SYSTEM HOMOCLINIC ORBIT EXISTENCE

S.A. Lyashko

The property of unstable manifold of the Lorenz-system zero equilibrium is proved. This permited to prove the sufficient condition of homoclinic orbit existence.



Ляшко Сергей Андреевич – родился в 1960 году. Кандидат физико-математических наук (1994, СПбГУ). Доцент кафедры математического анализа Балашовского филиала СГУ. Автор ряда статей о свойствах инвариантных множеств динамических систем. E-mail: LyashkoS_M@mail.ru.